



UNIVERSITÀ
DI TORINO



Dipartimento
Filosofia
e Scienze
dell'Educazione



Dipartimento
Fisica



Dipartimento
Matematica



Atti del XI Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della Matematica
DI.FI.MA. 2023

Insegnamento e Apprendimento
della Matematica e della Fisica
nel periodo post pandemia

Torino, 11-12-13 ottobre 2023

A cura di:

Daniela Marocchi
Marta Rinaudo
Marina Serio



CIIM
Commissione Italiana
per l'insegnamento
della Matematica



Ministero dell'Istruzione e del Merito
Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte



Insegnamento e Apprendimento della Matematica e della Fisica nel Periodo post Pandemia

Atti del XI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, DI.FI.MA. 2023

A cura di D. Marocchi, M. Rinaudo, M. Serio

Responsabile del convegno: Ornella Robutti

Responsabili scientifici: Giulia Bini, Alessio Drivet, Giulia Ferrari, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Marta Rinaudo, Ornella Robutti, Carlotta Soldano, Ada Sargenti, Marina Serio, Germana Trincherò

Esperti Tecnici : Tiziana Armano e Filippo Cosma Liardi

Collane@unito.it

Università degli Studi di Torino

ISBN 9788875903206



Quest'opera è stata rilasciata con

[licenza Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale \(CC BY-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Disegno grafico: Maria Grazia Imarisio

Immagine di copertina: rielaborazione grafica di Elisa Gentile, collage di Marina Serio

*Atti del XI Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2023*

Insegnamento e Apprendimento della Matematica e della Fisica nel Periodo post Pandemia

Torino, 11-12-13 ottobre 2023

A cura di:
Daniela Marocchi, Marta Rinaudo, Marina Serio

Introduzione

Il XI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, svoltosi a Torino nei giorni 11-13 ottobre 2023, ha avuto come focus principale la riflessione sulle condizioni di insegnamento e apprendimento dopo la fase di pandemia, avviando una riflessione e condivisione di ciò che l'esperienza della pandemia ha insegnato, ad esempio dal punto di vista dell'uso didattico delle tecnologie. Si sono così evidenziate prospettive di sviluppo e di innovazione didattica.

Come di tradizione, la terza giornata è stata dedicata al GeoGebra Day.

Nelle sessioni plenarie si sono affrontati i diversi approcci epistemologici e didattici delle discipline STEM (*"Un punto di vista embodied alle discipline stem nel dialogo tra didattica della fisica e didattica della matematica: sensuous cognition e pensiero immaginativo-figurativo"*, *"Trovare un ordine nel disordine: breve guida allo studio dei sistemi complessi"*), nonché aspetti più prettamente didattici (*"Realtà virtuale e aumentata a scuola: strumenti e metodologie"*, *"La scienza dei dati e l'intelligenza artificiale in un innovativo curriculum liceale digitale e multidisciplinare"*, *"STEM all'aperto e online: attività con lo smartphone"*).

Il Convegno ha raccolto circa 300 persone, con la partecipazione di alcune scuole provenienti da fuori della Regione Piemonte.

Nelle prime due giornate sono stati presentati rispettivamente 15 comunicazioni per Matematica, 16 per Fisica e 13 comunicazioni interdisciplinari; 13 i workshop di matematica e 5 interdisciplinari. Nel GeoGebra Day e Altre Tecnologie, dopo la sessione plenaria, sono state presentate 6 comunicazioni e altrettanti workshop.

Il Convegno continua a rappresentare un momento importante di riflessione e condivisione di esperienze didattiche estese su tutto il percorso formativo a partire dalla scuola primaria fino ad arrivare alla scuola secondaria di secondo grado.

La pubblicazione on line degli Atti è fondamentale per mettere a disposizione di un ampio pubblico tutta la ricchezza delle esperienze didattiche che vengono presentate dai partecipanti al Convegno.

Sommario

PLENARIE	8
L'embodied cognition come punto di incontro tra discipline STEM: Sensuous cognition e pensiero immaginativo figurativo (Santi G., Corni F., Fuchs H.)	9
Trovare un ordine nel disordine: Breve guida allo studio dei sistemi complessi (Caselle M.)	23
La scienza dei dati e l'intelligenza artificiale in un innovativo curriculum liceale digitale e multidisciplinare (Strano G.)	26
Codifica di software di Realtà Aumentata ad hoc per il laboratorio di Fisica ed eventi di comunicazione (Rosi T., Onorato P., Oss S.)	30
STEM all'aperto e online: attività con lo smartphone (Taranto E.)	39
COMUNICAZIONI	50
WORKSHOP	303
Indice analitico degli autori	419

INDICAZIONE LIVELLO SCOLARE DELLE COMUNICAZIONI E DEI WORKSHOP

I	Scuola dell'Infanzia
P	Scuola Primaria
S_I	Secondaria I grado
S_II	Secondaria II grado
U	Università

Comunicazioni Matematica		
Autori	Titolo del contributo	Livello scolastico
Adesso Maria Giuseppina, Capone Robeto, Fiore Oriana	Competenze matematiche e artefatti: un percorso nella scuola primaria analizzato con la teoria delle rappresentazioni semiotiche.	P
Borsoero Massimo, Moro Chiara	L'Apollonia della marmellata	P
De Giorgi Daniele, Casi Raffaele, Sabena Cristina	Il progetto FormArt: un'esperienza di educazione matematica informale al Museo d'Arte Contemporanea del Castello di Rivoli	P
Pera Elisa	Lo scoiattolo raccoglie le nocchie: osserviamo, contiamo e argomentiamo.	P
Ferrara Francesca, Ferrari Giulia, Lorenzo Anna, Tagliapietra Benedetta	Apprendimento cooperativo in contesto pre-algebrico: uno studio pilota nel progetto europeo PMATHS	P, S_I
Cerasaro Silvia	Le frazioni dinamiche	S_I, S_II
Scalambro Elena	Giornata della Memoria: proposte didattiche dalla storia delle STEM	S_I, S_II
Torre Matteo	Debate e didattica della matematica	S_I, S_II
Boscolo Alessandra, Morselli Francesca, Robotti Elisabetta, Quartara Simone	Promuovere il passaggio dall'aritmetica all'algebra. Un'analisi del ruolo dell'esempio in termini di razionalità	S_II
Jahier Matteo	Il problema di Monty Hall' - Una semplice introduzione al teorema di Bayes	S_II
Pancanti Stefania	La classe come "comunità di ricerca"	S_II
Quartara Simone, Morselli Francesca, Robotti Elisabetta, Boscolo Alessandra	DIVA al DIMA: un teaching experiment in ottica TRU. L'esperienza di un insegnante	S_II
Tallone Chiara, Carrino Stefania	Peer tutoring "inverso": coinvolgere e rendere protagonisti attivi gli studenti più fragili	S_II
Centomo Andrea	A Piday 3d lunch	S_II, U

Comunicazioni Fisica		
Autori	Titolo del contributo	Livello scolastico
Rinaudo Marta, Leone Matteo, Serio Marina, Giorda Cristiano, Tonon Marco	Il progetto "Flowing with the rivers" : fisica (e non solo) in modalità outdoor education	I, P, S_I
Bosia Chiara	Outdoor education e la fisica nella scuola primaria. Storia di un percorso alla scoperta della misurazione di lunghezze, tempo e velocità	P
Cerrato Giada	I moti apparenti del cielo notturno: la modellizzazione come metodo di indagine per i bambini della scuola primaria	P
Gazzera Chiara	Il laboratorio di fisica dall'aula al fiume. Un'esperienza di Outdoor Education sul galleggiamento nella scuola primaria	P
Camperi Aurora, Cirio Roberto, Ferro Arianna, Giordanengo Simona, Medina Elisabetta, Sacchi Roberto, Vignati Anna, Deut Umberto, Montalvan Olivares Diango Manuel, Fiorina Elisa, Pennazio Francesco, Mostardi Franco, Vallero Maria Beatrice, Cerello Piergiorgio, Ferrero Veronica, Rinaudo Marta	ESCAPE ROOM FISICA MEDICA – sblocca la scoperta della fisica in medicina	P, S_I, S_II, U
Amoroso Antonio, Rinaudo Marta, Leone Matteo, Serio Marina, Marocchi Daniela	Il museo di Fisica: strumento di ricerca didattica e storica	S_II
Bologna Valentina, Longo Francesco, La Mura Cristina, Piccoli Francesco	Cinematica Cooperativa: in-group problem-solving per superare gli effetti post-pandemici	S_II
Borgognone Roberto	Un'esperienza di cooperative learning e peer tutoring sui principi della dinamica	S_II
Cane Daniele, Giudici Laura	La Fisica del cambiamento climatico	S_II
Lacarbonara Mariangela, Marocchi Daniela, Rinaudo Marta, Serio Marina	Percorsi sperimentali alla scoperta della carica dell'elettrone	S_II
Marocchi Daniela, Serio Marina, Pace Francesco	Il percorso di ingresso alla Scuola di Scienze della Natura	S_II
Marocco Federica, Gentile Elisa, Viterbo Michelangelo	"Ricercatori all'opera": un percorso PCTO per sperimentare e imparare a realizzare esperienze di laboratorio	S_II

Comunicazioni interdisciplinari		
Autori	Titolo del contributo	Livello scolastico
Piccione Andrea	Intelligenza Artificiale e leggi fisiche	P, S_I, S_II
Baldi Barbara, Nardacchione Antonella	Rosalind Franklin e il DNA: un percorso per orientare alle STEM superando gli stereotipi di genere.	S_I
Baldi Barbara, Piccione Andrea	Meteo Open Data @ Santarosa	S_I
Ciaschini Katiuscia	Progetto STEAM: "una tavola fanta-scientifica"	S_I
Alluto Giulio	Gamification e Inquiry nella didattica delle scienze naturali: esempi di attività.	S_I, S_II
Pecchio Paola, Marino Tommaso	La Natura fa scuola. Un proposta per la secondaria di primo e secondo grado.	S_I, S_II
Galante Dino, Marino Tommaso, Andrea Piccione, Luca Caffaratti, Francesca Galeno Mellucci	Intelligenza artificiale e problemi di fisica e matematica	S_II
Monaco Carmine, Cucchi Osano Maura, Giraudi Cristina, Zamblera Ferdinando	Numeri, legioni e squadrette. Laboratorio didattico per misurare la realtà	S_II
Paschetta Enrico	equazioni di secondo grado e velocità di reazione. La validazione di un modello scientifico	S_II
Torre Matteo, Davico Alessandro	Galileo con Arduino: approccio STEM a un'esperimento scientifico storico	S_II
Eugeni Daniele, Grosso Paolo	Vettori con la realtà aumentata	S_II, U

Workshop Interdisciplinari		
Autori	Titolo del contributo	Livello scolastico
Piccione Andrea, Bonino Raffaella	Intelligenza Artificiale e analisi di dati astronomici	S_I, S_II
Manolino Carola, Piroi Margherita, Armano Tiziana, Ducci Mattia, Funghi Silvia, Bernareggi Cristian, Brunetto Erika	La sonificazione dei grafici di funzione con Audiofunctions 2.0	S_I, S_II, U
Palma Antonella, Dragone Luca	La fisica dei galleggianti secondo Archimede con le Classi GeoGebra	S_II
Tomassi Laura	Non sfugga il movimento...	S_II
Pollani Lorenzo, Branchetti Laura, Morselli Francesca	Attività di analisi di libri di testo con il Family Resemblance Approach: un'occasione per riflettere sull'interdisciplinarietà tra matematica e fisica	U

Workshop Matematica		
Autori	Titolo del contributo	Livello scolastico
Bagossi Sara, Ferretti Federica, Soldano Carlotta, Taranto Eugenia	Esplorare la covariazione con il tracciatore fisico e digitale	P
Bellò Gianna, Pusceddu Chiara, Staffieri Caterina, Gasperin Riccardo, Cedrino Patrizia	Attività di sviluppo del pensiero proporzionale in ambiente immersivo di gioco: Minecraft Education	P, S_I
Piroi Margherita, Cusi Raffaele, Sabena Cristina, Soldano Carlotta	Immaginare e visualizzare: la geometria nello spazio senza e con la realtà virtuale	P, S_I, S_II
Dragone Luca, Tossini Daniela	Da zero a Eulero: poliedri e grafi a scuola.	S_I
Aebischer Tullio	La costruzione euclidea per punti della Retta dei Numeri con GeoGebra	S_I, S_II
Cerrato Rossella, Monformoso Lara, Ascrizzi Martina	Danza, musica e matematica: una sinergia vincente per l'apprendimento	S_I, S_II
Manassero Marta, Di Giorno Michelangelo, Adrović Madlena	Giochiamo a Set con la matematica	S_I, S_II
Tallone Chiara, Alocco Ilenia, Carrino Stefania, Cavallera Laura, Durando Chiara, Isoardi Giorgia, La Paglia Luisa, Zamboni Francesca	Matepraticamente post-pandemia: tra TIC e materiali poveri per una didattica più inclusiva	S_I, S_II
Andriano Valeria, Doveri Andrea, Marchi Gloria, Polito Luigi, Porta Paola	Geometria analitica 3D con la scatola da scarpe	S_II
Troilo Federica, Bernardi Maria Lucia, Capone Roberto, Faggiano Eleonora	Parabolografi e GeoGebra per costruire competenze nel laboratorio matematico	S_II
Drivet Alessio	Modellizzare il Covid	S_II, U

PLENARIE

L'EMBODIED COGNITION COME PUNTO DI INCONTRO TRA DISCIPLINE STEM: SENSUOUS COGNITION E PENSIERO IMMAGINATIVO-FIGURATIVO

Federico Corni¹, Hans Fuchs¹, George Santi²

¹Università di Bolzano, ²Università di Pavia

georgerichardpaul.santi@unipv.it

Abstract

Un filone di indagine che ha assunto un ruolo importante nella ricerca è l'incontro tra i diversi approcci epistemologici e didattici delle discipline STEM (Scienze, tecnologia, ingegneria e matematica). Affrontiamo un possibile incontro tra Didattica della Fisica e Didattica della Matematica, all'incrocio tra l'approccio immaginativo e figurativo di Corni e Fuchs in didattica della fisica e la nozione di *sensuous cognition* di Radford in didattica della matematica. Si delinea così una prospettiva *embodied* nella quale la cognizione emerge come interazione tra il corpo e l'ambiente culturale attraverso l'attività con segni e artefatti. L'interazione con l'ambiente trasforma la percezione umana in un "occhio teorico" capace di riconoscere modelli fissi dell'azione (*image schemas*) che innescano un pensiero figurativo e immaginativo basato su metafore concettuali. La fisica, come ambiente storico-culturale, si configura come un possibile dominio di pratiche nel quale radicare e ampliare i significati matematici a partire dal pensiero immaginativo-figurativo legato alla comprensione dei fenomeni naturali. D'altro canto, la possibilità di attingere a una comprensione più significativa e versatile della matematica favorisce la capacità degli studenti di modellizzare e riconoscere regolarità nell'interpretazione dei fenomeni fisici. Mostriamo questo *feedback* positivo tra contesto fisico e matematico con esempi tratti dallo studio dei fluidi.

Parole-chiave

Image schema; metafora; oggettivazione, *sensuous cognition*, mezzi semiotici di oggettivazione,

INTRODUZIONE

Negli ultimi venti anni gli studi in didattica della matematica (Arzarello, 2006; Arzarello et al., 2009; Radford, 2021; de Freitas & Sinclair, 2014; Edwards et al., 2009; Edwards and Robutti, 2014) hanno sempre più riconosciuto il ruolo dell'esperienza sensibile/sensomotoria dell'individuo nei processi di apprendimento della matematica. In particolare, la Didattica della Matematica ha sviluppato questo filone di ricerca nel dialogo con la linguistica cognitiva (Lakoff & Johnson, 2008,2009), le neuroscienze

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia (Gallese & Lakoff, 2005), l'enactivism (Maturana & Varela, 1992; Varela et al., 1991) e l'Activity Theory (Leont'ev, 1978, 1981).

In questo studio, mettiamo a confronto la linguistica cognitiva nell'interpretazione di Corni e Fuchs secondo l'approccio immaginativo-figurativo sviluppato in Didattica della Fisica e l'Activity Theory che concepisce l'*embodiment* come *sensuous cognition* sviluppata in Didattica della matematica.

Il modello di Corni e Fuchs (2021, 2022) si basa su strutture esistenti in fisica, narratologia, linguistica cognitiva e teoria dello sviluppo degli strumenti cognitivi, creando un quadro per un approccio immaginativo (fondamentalmente metaforico e narrativo) all'insegnamento della fisica. Il pensiero è il prodotto immaginativo e figurativo di una mente incarnata che si sviluppa come metafore concettuali fondamentali basate su *image schemas* che si sviluppano in strutture narratologiche.

D'altra parte, la *sensuous cognition* considera il pensiero e l'apprendimento matematico come la dialettica tra la percezione dell'individuo e l'ambiente storico-culturale che si sviluppa attraverso l'attività svolta con segni e artefatti. L'interazione tra la percezione e l'ambito storico-culturale plasma i sensi umani in "organi teorici" in grado di percepire matematicamente. In questa posizione teorica, i concetti matematici sono modelli fissi di attività che emergono nello sviluppo storico-culturale della matematica. L'apprendimento è un processo di oggettivazione che permette agli studenti di trasformare, nella *sensuous cognition*, gli oggetti matematici in oggetti di coscienza.

I due approcci sopra citati presentano una potenziale incommensurabilità, che noi sfruttiamo per radicare il pensiero *embodied* nel dialogo tra matematica e fisica. In effetti, entrambe le teorie affrontano la stessa questione da punti di vista diversi, ma concordano nel considerare gli aspetti ideali e materiali dell'apprendimento costitutivamente interconnessi. Il punto d'incontro è nelle forme ideali che emergono dall'attività sensomotoria, chiamate *schemi fissi* dalla Teoria dell'Oggettivazione (TO) di Radford e *image schemas* dalla linguistica cognitiva. I due approcci guardano a facce diverse della stessa medaglia. La *sensuous cognition* descrive la dialettica tra percezione individuale e conoscenza culturale che apre a un approccio fenomenologico all'apprendimento, superando le opposizioni mente-corpo, ideale-materiale e concettuale-sensibile. Tale dialettica si svolge nell'attività legata all'uso di segni e artefatti. L'approccio immaginativo mette in luce una prospettiva complementare su come gli oggetti culturali si trasformano in oggetti di coscienza attraverso la *sensuous cognition*. Gli *image schemas* e le metafore concettuali delineano il modo in cui il Sapere (modelli fissi e archetipi dell'attività) viene riconosciuto come oggetto di coscienza e si evolve in significati più ampi e profondi innescati da forme immaginative e figurative derivanti dalla *sensuous cognition*. A sua volta, il pensiero *embodied* immaginativo e figurativo può innescare nuove forme di azione sostenute da *image schemas* e metafore che materializzano il Sapere nella *sensuous cognition*. In questo studio ci concentriamo su una serie di attività consentite dalla fisica che danno origine a *image schemas* efficaci per metaforizzare il significato delle frazioni. Prendiamo in considerazione una serie di relazioni frazionarie del tipo $a=b/c$ che esprimono significati fisici basati sugli *image schemas* di contenitore, flusso, sostanza, verticalità e resistenza. Questa prospettiva radica il significato delle frazioni nell'esperienza incarnata della fisica, dando origine a nuove forme di *sensuous cognition* e di oggettivazione delle frazioni potenziate da processi immaginativi e figurativi. Il Sapere matematico, il pensiero e l'apprendimento sono il prodotto della dialettica individuo-attività-cultura, nel senso che la relazione tra l'individuo e il Sapere matematico è mediato dall'attività con segni e artefatti. L'attività non è una serie di azioni ma un sistema dinamico dove gli individui producono conoscenza e, nel farlo, co-producono sé stessi, è una *forma di vita*.

SENSUOUS COGNITION

L'attività è il fondamento della Teoria dell'Oggettivazione. Il Sapere matematico, il pensiero e l'apprendimento sono il prodotto della dialettica individuo-attività-cultura, nel senso che la relazione tra l'individuo e il Sapere matematico è realizzato dall'attività con segni e artefatti. L'attività non è una serie di azioni ma un sistema dinamico dove gli individui producono conoscenza e, nel farlo, co-producono sé stessi, è una *forma di vita* (Radford, 2018). In questa prospettiva, segni e artefatti giocano un ruolo fondamentale e sono costitutivi dell'attività umana che lega l'individuo alla dimensione storico-culturale. La lettura del significato matematico contenuto nei segni e negli artefatti è impossibile al di fuori della loro interazione dialettica con l'attività.

Nella loro interazione con l'agire umano (i suoi oggetti, le sue azioni, la sua divisione del lavoro, ecc.) e con il territorio del pensiero artefattuale, i sistemi semiotici di significazione culturale danno origine, da un lato, a forme o modi di attività, e, dall'altro, a specifici modi di conoscere o episteme (Foucault, 1966). (Radford, 2008)

La conoscenza matematica è un sistema di archetipi ideali emergenti dall'attività riflessiva – nel senso che mette in dialogo l'individuo con il Sapere matematico – reificata nella dimensione storico-culturale (Radford, 2021). Secondo la TO, la questione dell'apprendimento è radicata nella dialettica tra l'individuo e cultura. L'apprendimento è un movimento spinto dal differenziale intrinseco tra l'individuo e il Sapere. Infatti, nel confrontarsi con il Sapere lo studente deve confrontarsi con qualcosa che all'inizio gli è estraneo, un'alterità che lo sfida, resiste e si oppone. L'apprendimento è il processo di oggettivazione che cancella tale differenza per dare senso alla conoscenza e trasformarla in qualcosa di familiare, permettendo nuove forme di azione, pensiero, immaginazione e sensibilità.

i processi sociali di progressiva presa di coscienza dei sistemi storico-culturali di pensiero e di azione - qualcosa che notiamo gradualmente e che allo stesso tempo dotiamo di significato. [...] quegli atti di notare significativamente qualcosa che si rivela alla nostra coscienza attraverso la nostra attività semiotica corporea, sensoriale e artefattuale. (Radford, 2021, p. 78)

Il risultato dell'apprendimento come processo di oggettivazione è l'incontro con gli oggetti matematici e la loro trasformazione in oggetti di coscienza. Da questo punto di vista, l'apprendimento ha una forte natura fenomenologica in cui l'osservazione avviene in una nozione allargata di mente e coscienza, definita dalla TO *sensuous cognition*, che intreccia ideale e mentale nella percezione, nella sensibilità umana e nell'attività cinestesica. All'interno di questa nozione allargata di mente e coscienza, l'incontro con la conoscenza e la sua trasformazione in oggetto di coscienza avviene all'interno delle caratteristiche della *sensuous cognition*. Alla luce dell'approccio dialettico-materialista alla base della TO, il principio fondamentale della *sensuous cognition* è che il corpo, i sensi e gli oggetti della sensazione non sono entità a priori, ma si trasformano reciprocamente attraverso l'attività storico-culturale legata all'uso di segni e artefatti.

Dal punto di vista della *sensuous cognition*, la percezione umana è un artefatto culturale plasmato dalle nostre pratiche storico-culturali. In questo senso, la percezione utilizza forme culturali di vedere, toccare, sentire, ecc. che caratterizzano il nostro rapporto con il mondo. Come fanno gli studenti a cambiare la loro percezione da forme “spontanee” di apertura agli oggetti a forme matematiche e teoriche? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo considerare l'apprendimento come un “addomesticamento dell'occhio” (Radford, 2021), un lungo processo che permette agli studenti - in un'attività storico-culturale intrecciata con l'uso di segni e artefatti - di trasformare l'occhio (e gli altri sensi) in sofisticati organi teorici in grado di notare e dare senso a certe cose in modo matematico - ad esempio, riconoscendo numerosità, strutture algebriche, invarianti geometrici ecc. Sottolineiamo la natura co-

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
variazionale della *sensuous cognition*, in quanto i processi di apprendimento comportano una trasformazione della percezione e dell'oggetto culturale percepito in un oggetto di coscienza.

Infine, l'“addomesticamento dell'occhio teoretico” ha una natura multimodale sia nei vari canali sensoriali che nella ricchezza di segni e artefatti intrecciati con l'attività storico-culturale (Radford, 2021).

I processi di oggettivazione che si attuano nella *sensuous cognition* richiedono una specifica posizione epistemologica nei confronti degli oggetti matematici che non sono visti come pure entità astratte e immutabili; la TO distingue tra Sapere e conoscenza. Il *Sapere* è un'entità generale e ideale che "vive" nella cultura, un sistema di archetipi dell'agire storico-culturale, collettivo, materiale, incarnato e sensibile (Radford, 2021). Il *Sapere* è impensabile e in potenza ma generativo di possibilità e capacità di azione. La *conoscenza* è attualizzazione/materializzazione del Sapere nei modi di agire, pensare e riflettere e diventa oggetto di coscienza nella *sensuous cognition*. L'apprendimento della matematica si sviluppa nella dialettica *Sapere-conoscenza*, nel senso che attraverso l'attività, il Sapere (K) acquisisce un contenuto sensibile e si concretizza come conoscenza (k). Si verificano nuove sistematizzazioni, che portano a un'espansione del Sapere. Il Sapere (K') che ne deriva porta, attraverso l'attività, a una nuova conoscenza (k'), e così via (vedi Figura 1). Osserviamo che Sapere e conoscenza non sono due dimensioni separate di cui la seconda è funzione della prima, ma si co-producono nella relazione dialettica che intercorre tra esse; sono distinguibili ma non separabili. E' proprio tale relazione dialettica che tiene viva la dinamica dello sviluppo storico-culturale delle discipline sia a livello filogenetico sia a livello ontogenetico nei processi di insegnamenti -apprendimento.

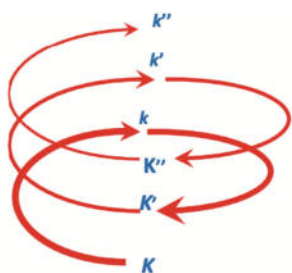


Figura 1. La dinamica Sapere-conoscenza nella rappresentazione di Radford (2021).

IMAGE SCHEMAS E METAFORE CONCETTUALI

Riteniamo che sia vantaggioso da un punto di vista educativo costruire un ponte tra gli schemi fissi dell'attività - oggetti matematici secondo la TO – trasformati in oggetti di coscienza nei processi di oggettivazione, e l'approcci figurativo e immaginativo secondo la linguistica cognitiva. Questo permette agli studenti un uso efficace e significativo del linguaggio e dei segni nell'incontro con gli oggetti matematici e innesca nuove forme di attività, dotando il pensiero matematico di una maggiore capacità di interpretare le situazioni e di agire di conseguenza, con versatilità e adattabilità nel tenere viva la dinamica Sapere-conoscenza.

La linguistica cognitiva considera la cognizione come il risultato dell'interazione tra il corpo e l'ambiente fisico e socioculturale. Pertanto, la relazione tra gli elementi del linguaggio e i loro referenti deriva dall'azione e dall'esperienza umana *embodied* (Johnson, 1987, 2007). Uno strumento

fondamentale della linguistica cognitiva è la nozione di *image schema*. Si tratta di forme immaginative *embodied*, *gestalt* sensoriali che agiscono come unità percettive schematizzate di base che si sviluppano attraverso la nostra interazione con l'ambiente; tra le unità percettive che si formano nella nostra mente, sono forme particolarmente semplici (primarie) e astratte. Gli *image schemas* sono “schemi ricorrenti e stabili dell'esperienza sensomotora. . . [che] preservano la struttura topologica dell'insieme percettivo ... hanno strutture interne che danno luogo a inferenze vincolate” (Johnson, 2007, p. 144).

Corni e Fuchs (2020, 2021) definiscono gli *image schemas* come *gestalt* percettivi su piccola scala che presentano una struttura limitata con una logica interna che viene utilizzata nel ragionamento. Esempi di *image schemas* (Tabella 1) sono PERCORSO, CONTENITORE, DENTRO-FUORI, SU-GIÙ (verticalità), SOSTANZA, CAUSA, SCALA, CICLO, PROCESSO e molti altri. La Figura 2 presenta gli *image schemas* più comuni utilizzati nei processi di creazione del significato che Johnson (1987, 2007) ha identificato nei suoi studi di linguistica cognitiva.

Opposition	<i>binary opposition, polarity (*)</i>
Scale	<i>path, gradient</i>
Space	<i>up-down, verticality, high-low, front-back, left-right, near-far, center-periphery, contact</i>
Process	<i>process, state, cycle, change</i>
Container	<i>containment, in-out, surface, full-empty, content</i>
Force/Causation	<i>balance, counterforce, compulsion, restraint, enablement, blockage, diversion, attraction, manipulation, tension</i>
Unity/Multiplicity	<i>merging, collecting, splitting, iteration, part-whole, mass-count, link</i>
Identity	<i>matching, superimposition, difference</i>
Existence	<i>removal, bounded space, object, (fluid) substance</i>

Figura 2. Gli *image schemas* fondamentali delineati da Johnson (1987): a sinistra la categoria, a destra le sue componenti

Per inquadrare i processi cognitivi coinvolti nelle discipline scientifiche è utile legare gli *image schemas* alla nozione di *cognitive tool*. Essi caratterizzano lo sviluppo filogenetico e ontogenetico nella padronanza di forme di uso del linguaggio e di forme di pensiero immaginativo *embodied*; ad esempio, polarità (opposti binari), metafore, pensiero analogico e narrazioni. Ai fini del nostro studio, ci concentriamo sulle metafore concettuali, cioè sulle strutture figurative create proiettando una conoscenza *embodied* da un dominio (dominio *source*) in un altro dominio di esperienza (dominio *target*). Nell'apprendimento della matematica e della fisica, un possibile e potente dominio sorgente può essere quello fornito dagli *image schema*. Le metafore sono elementi del pensiero e della razionalità umana, non semplici abbellimenti poetici o, peggio ancora, semplici falsità che dovrebbero e potrebbero essere sostituite da resoconti letterali. Il linguaggio figurato riflette una mente che lavora in modo figurato e immaginativo. Esse ci permettono di produrre espressioni metaforiche concrete. Il linguaggio o, più in generale, i nostri prodotti linguistici non hanno un rapporto diretto con il mondo esterno. Piuttosto, le parole si riferiscono a strutture concettuali nella nostra mente che risultano dall'interazione dei nostri corpi con i loro ambienti fisici e sociali. Assumendo questa posizione filosofica, quanto detto sopra dovrebbe essere vero anche per i termini linguistici, la discorsività e il linguaggio formale che si

usa in matematica e fisica. L'approccio immaginativo-figurativo, che partendo da *image schemas*, sviluppa *cognitive tools* complessi quali le metafore e le narrazioni può contribuire a mantenere viva la dialettica Sapere-conoscenza descritta nel paragrafo precedente. Facendo riferimento alla Figura 2, opportuni *cognitive tools* come le metafore possono plasmare le forme dell'attività riflessiva, intrecciata con segni e artefatti e la conoscenza (K) acquisisce un contenuto sensibile e si concretizza come sapere (k). I *cognitive tools* sostengono le successive sistematizzazioni della conoscenza a livelli superiori di generalizzazione legati all'uso di diversi registri linguistici che portano a un'espansione del Sapere. Il nuovo Sapere (K') che ne deriva porta, attraverso l'attività, a un nuovo sapere (k'), e così via. (Radford, 2021)

IL SIGNIFICATO DELLE FRAZIONI TRA MATEMATICA E FISICA

Proponiamo un'interpretazione delle frazioni basata sul pensiero figurativo e immaginativo sviluppata nell'ambito della fisica. Consideriamo una serie di situazioni fisiche che metaforizzano il significato delle frazioni prendendo come dominio di origine una rete di *image schemas* che emergono da attività sensomotorie mediate da apparati fisici.

Sulla base degli *image schemas* del contenitore, della sostanza e della verticalità, metaforizziamo le seguenti grandezze fisiche:

- $\Delta h = \Delta V/S$, la variazione di altezza di una sostanza fluida in un Becker in funzione della variazione di volume e della sezione del contenitore;
- $\Delta T = q/C$, la variazione di temperatura di un corpo dipende dalla quantità di calore scambiata e dalla capacità termica del corpo;
- $\Delta V = Q/C$ la variazione del potenziale elettrico di un corpo che dipende dallo scambio di carica elettrica e dalla capacità elettrica;
- $\Delta v = p/m$ la variazione di velocità di un oggetto in funzione della quantità di moto scambiata e della massa.

Sulla base degli *image schemas* del flusso, della verticalità, della tensione e della resistenza, metaforizziamo le seguenti quantità:

- $I_v = \Delta P/R$, la corrente di un fluido che dipende dal gradiente di pressione e dalla resistenza al flusso;
- $I_q = \Delta T/R$, il flusso di calore (corrente) che dipende dal gradiente di temperatura e dalla resistenza termica;
- $I_Q = \Delta V/R$, la corrente elettrica dipende dal gradiente elettrico e dalla resistenza elettrica.

Nel caso della metafora basata sugli *image schema* del contenitore, della sostanza e della verticalità, la percezione è modellata dall'attività sensomotoria di riempire o versare liquido nel/dal contenitore notando, di conseguenza, l'aumento o la diminuzione dell'altezza del liquido nel contenitore stesso. Il concetto di frazione, inteso come Sapere (K), si materializza in conoscenza (k) nella *sensuous cognition* come strati di liquido che si depositano sulla sezione del contenitore. Questa attività dipende prevalentemente dall'uso, come mezzi semiotici di oggettivazione, di apparati fisici come un Becker riempito con un liquido accompagnato dall'uso indessicale del linguaggio naturale, gesti ed eventualmente disegni e schemi ecc. Da questa modalità di azione emergono gli *image schemas* del contenitore, della sostanza e della verticalità che hanno il ruolo di dominio sorgente che porta al dominio target $\Delta V/S$ che amplia in senso metaforico il concetto di frazione come Sapere (K'). L'espressione simbolica $\Delta h = \Delta V/S$ nella dialettica Sapere-conoscenza rinforzata dal significato metaforico emergente dall'attività con il Becker riempito con un liquido apre a un significato nuovo e più ampio della frazione, al di là dell'interpretazione univoca di parte-tutto.

L'approccio immaginativo-figurativo può attivare nuovamente la dialettica Sapere-conoscenza, intrecciando il significato di frazione con diversi concetti fisici. La relazione $\Delta h = \Delta V/S$ con il suo significato *embodied* descritto sopra assume il ruolo di dominio sorgente che ha come dominio target le relazioni $\Delta T = q/C$, $\Delta V = Q/C$ e $\Delta v = p/m$:

- In $\Delta T = q/C$, il calore q scambiato da un corpo è il liquido che riempie il Becker di sezione pari alla capacità termica C con una variazione in altezza ΔT che è la variazione di temperatura;
- In $\Delta V = Q/C$, la carica elettrica di un condensatore Q è il liquido che riempie il Becker di sezione pari alla sua capacità elettrica C con variazione di altezza ΔV che è la differenza di potenziale ai capi del condensatore;
- In $\Delta v = p/m$, la quantità di moto p scambiata da un corpo è il liquido che riempie il Becker di sezione pari alla sua massa con variazione di altezza Δv che è la variazione di velocità del corpo.

Il calore, la carica elettrica e la quantità di moto non sono fluidi, ma l'approccio immaginativo e figurativo permette di oggettivare questi concetti come *sensuous cognition*. La metafora basata sugli *images schemas* di contenitore, sostanza e verticalità rinforzano la dialettica Sapere-conoscenza superando le dicotomie astratto-concreto e sensibile-concettuale.

Le considerazioni proposte sopra valgono anche per il secondo gruppo di relazioni frazionarie che sono basate, in questo caso, sugli *images schemas* del flusso, della verticalità, della tensione e della resistenza. La percezione è modellata dall'attività sensomotoria nella quale un liquido scorre in un condotto sotto una certa spinta che incontra resistenza a causa della natura del liquido e del condotto. Il concetto di frazione, inteso come Sapere (K), si materializza in conoscenza (k) nella *sensuous cognition* come l'intensità del flusso di un liquido come effetto della spinta che esso riceve contro la sua resistenza. L'interazione tra il corpo e l'ambiente si basa su attività in cui un liquido scorre in un condotto sotto una certa spinta che incontra resistenza a causa della natura del liquido e del condotto. La frazione esprime la spinta che il liquido riceve contro la sua resistenza. Questa attività dipende prevalentemente dall'uso, come mezzi semiotici di oggettivazione, di apparati fisici come un tubo nel quale scorre un liquido che oppone una certa resistenza al suo flusso sotto una data spinta, l'uso indessicale del linguaggio naturale, gesti ed eventualmente disegni e schemi ecc. Da questa modalità di azione emergono gli *image schemas* del flusso, della verticalità, della tensione e del flusso che hanno il ruolo di dominio sorgente che porta al dominio target $I_v = \Delta P/R$ che amplia in senso metaforico il concetto di frazione come Sapere (K'). L'espressione simbolica $I_v = \Delta P/R$ nella dialettica Sapere-conoscenza rinforzata dal significato metaforico intrecciato con l'attività mediata dai mezzi semiotici di oggettivazione appena descritti apre a un significato nuovo e più ampio della frazione, al di là dell'interpretazione univoca di parte-tutto.

La relazione $I_v = \Delta P/R$ con il suo significato *embodied* descritto sopra assume il ruolo di dominio sorgente che ha come dominio target le relazioni $I_q = \Delta T/R$ e $I_Q = \Delta V/R$:

- In $I_q = \Delta T/R$, il flusso (corrente) di calore I_q è il liquido che scorre in un tubo sotto una spinta pari al gradiente di temperatura contro la resistenza termica del materiale che si oppone al flusso;
- In $I_Q = \Delta V/R$, la corrente elettrica è il liquido che scorre in un tubo sotto una spinta pari alla differenza di potenziale elettrico che contro la resistenza elettrica che si oppone al flusso di corrente.

La dialettica Sapere-conoscenza favorita dal pensiero metaforico permette l'ampliamento e la sistematizzazione del concetto di frazione in accordo con l'oggettivazione di concetti appartenenti all'ambito della fisica termica, della fisica dei fluidi e dell'elettromagnetismo.

UN EPISODIO DI INSEGNAMENTO-APPRENDIMENTO

Condividiamo i dati tratti dalle attività di laboratorio di fisica svolte da futuri insegnanti di scuola primaria della Facoltà di Scienze della Formazione dell'Università di Bolzano, frequentanti un corso di Didattica della fisica basato sul pensiero immaginativo e figurativo.

Sistema a due serbatoi

L'esperimento combina la variazione di altezza di un liquido in funzione del volume e della sezione $\Delta h = \Delta V/S$ e la corrente di un fluido in funzione del gradiente di pressione e della resistenza al flusso $I_v = \Delta P/R$. L'apparato sperimentale è costituito da due cilindri di plastica collegati da un tubo con un rubinetto (Figura 3a). In un cilindro versiamo l'acqua e analizziamo la corrente del fluido mentre l'acqua passa dal primo al secondo cilindro. Il livello dell'acqua nel primo cilindro è costante per mantenere la pressione stabile. Sul cilindro di plastica di riempimento c'è un nastro di scotch (Figura 3b) dove gli studenti segnano con una penna il livello dell'acqua ogni 10 secondi. Gli studenti attivano il pensiero figurativo-immaginario per metaforizzare la situazione fisica nella dialettica Sapere-conoscenza. La complessità del sistema fisico viene prima attualizzata in conoscenza per arrivare a comprendere il significato delle relazioni $\Delta h = \Delta V/S$ e $I_v = \Delta P/R$ sulla base degli *image schemas* descritti sopra. In effetti, il loro pensiero immaginativo e figurativo innesca nuove forme di azione legate all'interazione tra i due cilindri. La comprensione metaforica delle formule permette alle studentesse di formulare una congettura sull'andamento dell'altezza dell'acqua nel cilindro in funzione del tempo, per la quale prevedono con lo scorrere del tempo un comportamento stazionario dovuto al raggiungimento dell'equilibrio tra le correnti in uscita dal cilindro sperimentale e il cilindro pompa. Successivamente raccolgono i dati sperimentali segnando l'altezza del liquido nel cilindro ogni 10 secondi come mostrato in Figura 3b.

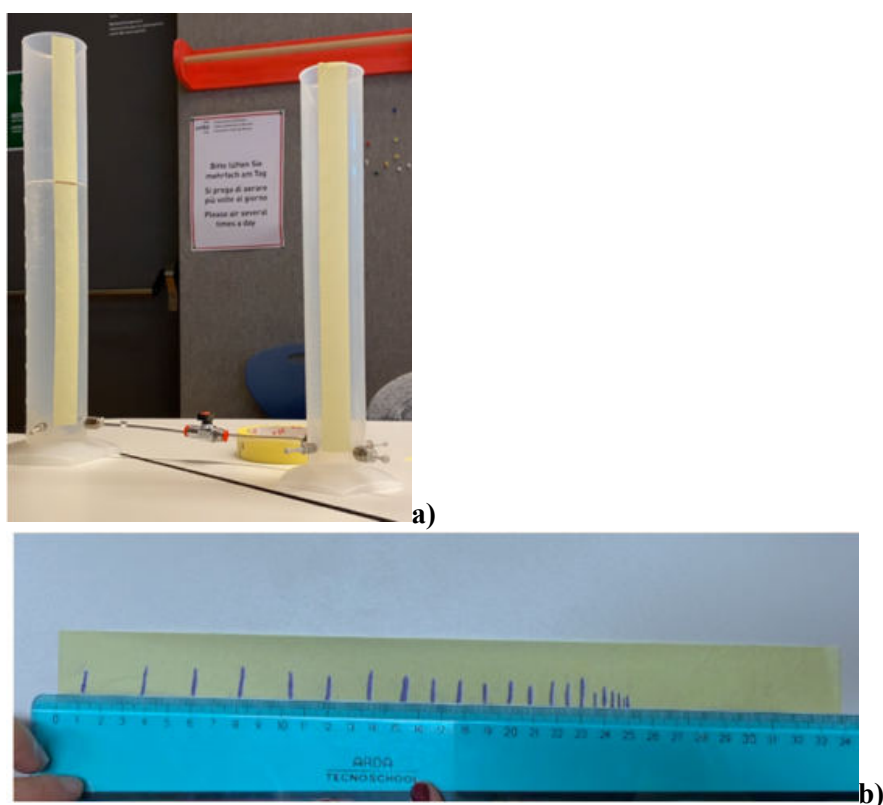


Figura 3. a) La pompa e il cilindro di riempimento; b) il nastro adesivo per misurare il livello dell'acqua;

A questo punto gli studenti costruiscono la mappa concettuale (Figura 5) che consente al software Insight Maker di scrivere le formule per generare il grafico teorico dell'andamento dell'altezza del liquido nel cilindro sperimentale in funzione del tempo. La mappa è costruita sulla base degli *image schemas* del contenitore, della sostanza e della verticalità per metaforizzare il significato della relazione

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
 $\Delta h = \Delta V / S$ e degli *image schemas* del flusso, della verticalità, della tensione e della resistenza per metaforizzare il significato della relazione $I_V = \Delta P / R$

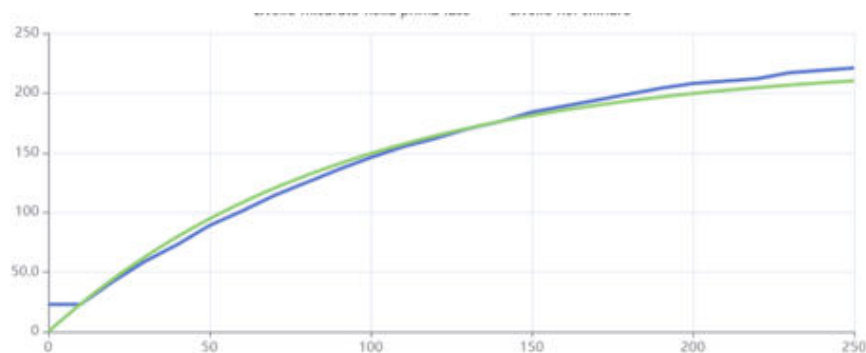


Figura 4. I grafici sperimentale e teorico prodotti da Insight Maker.

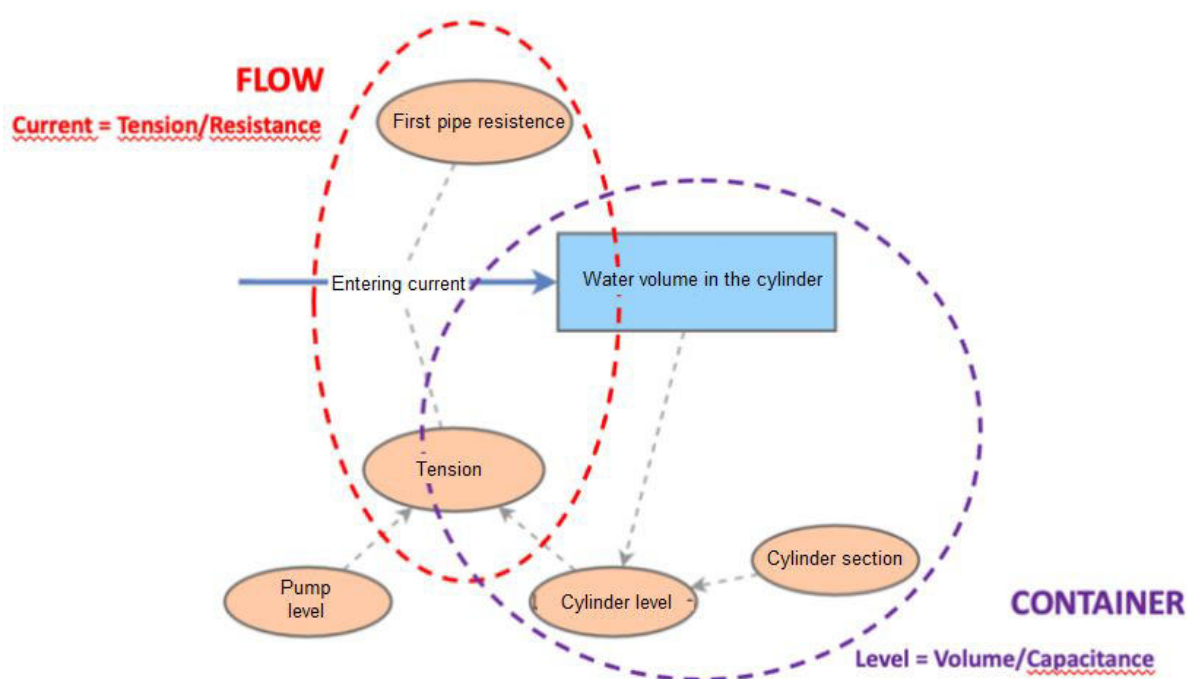


Figura 5. La mappa concettuale che consente a Insight maker di generare il grafico dell'altezza del liquido in funzione del tempo.

Insight Maker maker fornisce anche il grafico sperimentale ottenuto inserendo l'altezza del livello del liquido nel cilindro pompa ogni 10 secondi misurata dagli studenti. Nella Figura 4 sono riportati il grafico sperimentale e quello teorico.

Riportiamo di seguito alcuni brani degli studenti tratti dalle loro relazioni di laboratorio che mostrano il loro controllo concettuale del fenomeno fisico basato sul ragionamento figurativo e immaginativo.

Il gruppo 1.

Per quanto riguarda la congettura sull'andamento del grafico osserva che: "Ci aspettiamo che all'inizio il cilindro sperimentale si riempia velocemente, perché la differenza di pressione è molta e che, man mano che si riempie, rallenti la corrente e quindi la velocità di salita, data la minore differenza di pressione. Il livello d'acqua nel cilindro salirà finché non raggiungerà lo stesso livello del cilindro pompa. Di conseguenza, prevediamo che i livelli si eguaglino perché abbiamo costruito un sistema di vasi comunicanti che raggiungono, quindi, un equilibrio statico".

Per quanto riguarda l'interpretazione dei grafici "Dall'osservazione effettuata durante l'esperimento, abbiamo potuto constatare come nei primi intervalli di tempo l'acqua scorresse dal cilindro pompa a quello sperimentale con grande velocità. Verso la fine dell'esperimento, invece, abbiamo notato come l'acqua fluisse più lentamente e di conseguenza come l'innalzamento del livello nel cilindro sperimentale rallentasse. Questo può essere osservato visionando la tabella con i dati raccolti, così come lo scotch: dai 10 ai 20 secondi il livello dell'acqua sale di 27 millimetri, mentre negli ultimi 10 secondi si sia alzato di soli 2 millimetri. Di conseguenza, a partire da questa analisi si può appurare come la differenza di pressione dei cilindri sia direttamente proporzionale alla corrente dell'acqua. Svolgendo l'esperimento ed esaminando i dati raccolti possiamo confermare, quindi, le nostre previsioni iniziali.

Inoltre, l'utilizzo dello scotch è risultato essere funzionale non soltanto per l'esperimento, ma anche per l'apprendimento, in quanto come supporto visivo garantisce ai bambini di crearsi una rappresentazione mentale più chiara e di comprendere le distanze.

A seguito di questo laboratorio, abbiamo potuto vivere in prima persona l'importanza e la potenzialità dell'uso degli esperimenti come strumento essenziale all'apprendimento di concetti astratti e teorici, così distanti dalla vita reale dei bambini. Attraverso esperienze concrete andiamo, quindi, ad eliminare questo grande divario che rende difficile la comprensione, l'interiorizzazione e la manipolazione di questi concetti".

Il gruppo 3

Il gruppo 3 osserva che: "Abbiamo continuato ad aggiungere acqua nel tubo pompa mantenendolo costante durante tutto l'esperimento e a segnare il livello crescente dell'acqua sul cilindro sperimentale fino a quando non abbiamo più rilevato alcun cambiamento. La quantità d'acqua nei due tubi non è un dato importante: avendo i tubi di due diametri diversi, la quantità di acqua che contenevano era diversa, ma l'importante era il livello dell'acqua nei due cilindri: infatti, l'acqua ha smesso di scorrere da un cilindro all'altro solo quando il livello d'acqua nei due cilindri era uguale e di conseguenza si è annullata la differenza di pressione.

Abbiamo notato che inizialmente l'acqua scorre molto velocemente, in quanto la pressione nei due cilindri è diversa, mentre man mano che il cilindro sperimentale si riempie d'acqua e la pressione si equilibra, l'acqua scorre più lentamente. Infine, abbiamo staccato il nastro adesivo dal cilindro sperimentale e abbiamo misurato gli intervalli in millimetri e inserendoli in una tabella Excel.

Per curiosità abbiamo svolto l'esperimento due volte, raccogliendo due round di dati".

L'interpretazione del fenomeno fisico da parte degli studenti si basa su metafore concettuali per costruire il significato fisico. Data la complessità del fenomeno, le metafore coinvolgono una rete di schemi di immagini che abbiamo presentato nella sezione precedente: contenitore, sostanza, verticalità, flusso, tensione e resistenza. Nell'interazione con gli apparati fisici, con l'Insight Maker e con l'attività che ne consegue, la loro percezione si modella per “vedere” secondo la cultura della fisica e riconoscere la configurazione degli schemi di immagine che innescano il loro pensiero figurativo e immaginativo. Ad esempio, l'azione di versare l'acqua nel cilindro della pompa (Figura 6a) e di segnare il livello dell'acqua nel cilindro (Figura 6b e 6c) modella la percezione verso il riconoscimento degli schemi di immagine che fondano la loro comprensione metaforica della relazione tra la variazione di altezza del liquido nel cilindro, la corrente del fluido e il gradiente di pressione.

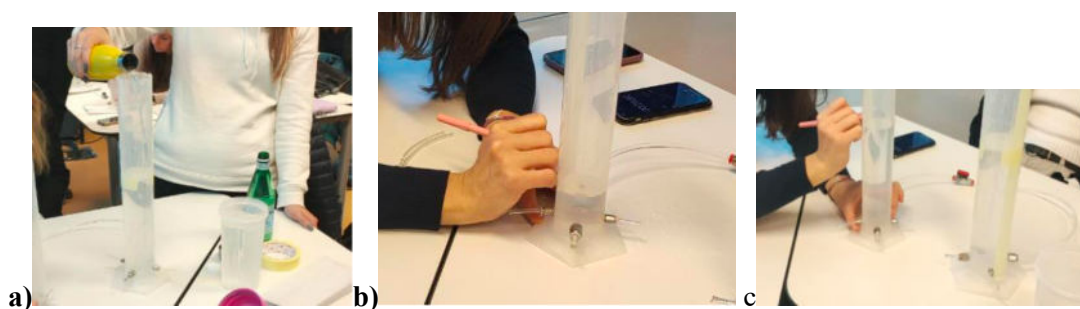


Figura 6. a) gli studenti versano l'acqua nella pompa; b) e c) e segnano il livello dell'acqua nel cilindro

Nell'impostazione di questa attività, pensata specificamente per l'apprendimento della fisica, la matematica rimane apparentemente sullo sfondo. Ciò è vero in quanto non appare sotto forma di calcoli espliciti che sarebbero troppo difficili da gestire per i futuri insegnanti della scuola primaria e sono affidati al software Insight Maker. Tuttavia, il significato matematico è alla base, qualitativamente, delle relazioni tra le grandezze fisiche coinvolte. L'altezza dell'acqua nel cilindro della pompa dipende dalla sua sezione e dalla variazione di volume ($\Delta h = \Delta V / S$) e il flusso dell'acqua nel cilindro dipende dal gradiente di pressione e dalla resistenza del flusso ($I_v = \Delta P / R$). Inoltre, gli studenti devono comprendere il significato delle formule che devono inserire in Insight Maker attraverso la mappa concettuale. L'uso delle formule è legato all'intreccio del loro significato matematico, come frazioni, e fisico controllati da metafore concettuali gestite attraverso la mappa concettuale costruita con Insight Maker. Osserviamo che quando il fenomeno fisico cambia, passando dalla dinamica dei fluidi ad altri tipi di fenomeni fisici, il problema si presenta come una sorta di “gioco” di interpretazioni metaforiche che sviluppano la dialettica Sapere-conoscenza.

Sulla base degli stessi *image schemas* che forniscono una comprensione metaforica del comportamento fisico e delle relazioni frazionarie, gli studenti ricostruiscono facilmente la mappa concettuale e inseriscono le equazioni corrette che consentono a Insight Maker di tracciare la dipendenza tra le quantità fisiche. Il comportamento degli studenti è indice di una comprensione più ampia e significativa delle relazioni frazionarie come risultato del pensiero metaforico radicato nella *sensuous cognition*.

A titolo di esempio, che non approfondiamo per limiti di spazio, riportiamo in Figura 5 la mappa concettuale di Inside Maker relativa a un sistema termico nel quale un Becker scambia calore con un fornello e l'ambiente. La mappa concettuale permette al software di ricavare l'andamento della temperatura dell'acqua in funzione del tempo. Sulla base degli *image schemas* del contenitore della sostanza e della verticalità si metaforizza il significato della relazione $\Delta T = q / C$ e sulla base di quelli del

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia della verticalità, del flusso, della tensione e della resistenza si metaforizza il significato della relazione $I_Q = \Delta V / R$

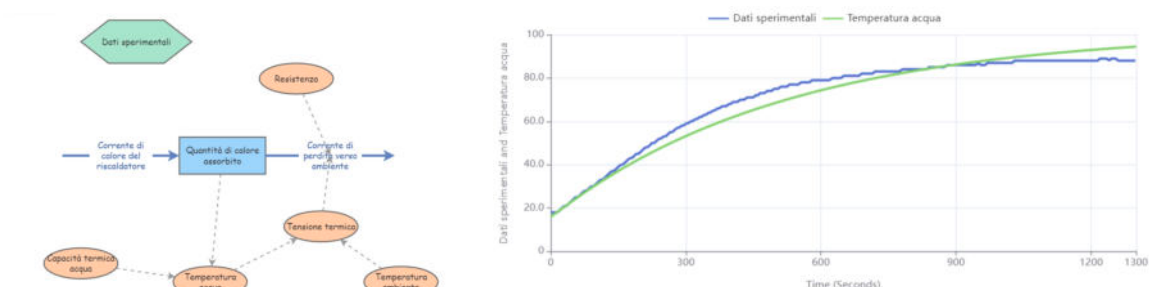


Figura 7. La mappa di Inside Maker relativa allo scambio di calore tra acqua in un Becker e i grafici sperimentali e teorici

Gli studenti riconoscono gli *image schemas* comuni con l'esperimento precedente che funge da dominio sorgente verso il dominio target del sistema termico nel quale l'acqua assorbe calore dal fornello.

Il gruppo 4 afferma che: "Nell'esperimento che svolgeremo oggi riscontreremo un'analogia con il secondo esperimento svolto nel laboratorio precedente in quanto la temperatura dell'acqua sul fornello salirà in un primo momento molto in fretta perché c'è un'elevata differenza di temperatura fra l'acqua e il fornello. Il calore entra inizialmente in gran quantità e scalda rapidamente l'acqua, successivamente il processo si rallenterà via via ed il calore entrerà sempre più piano. Per descrivere l'analogia tra i due esperimenti possiamo constatare quanto segue:

- Il fornello corrisponde al cilindro pompa
- L'acqua corrisponde al cilindro sperimentale (l'acqua contiene il calore, quindi è contenitore e non corrisponde al contenuto del cilindro sperimentale)
- La temperatura corrisponde al livello dell'acqua nel cilindro
- Il flusso di calore in uscita (che in minima parte esce con l'acqua che evapora e che esce attraverso il becher in quanto è inserito in un ambiente più freddo) corrisponde al flusso di acqua in uscita attraverso il tubo dal cilindro sperimentale

Dal punto di vista narrativo, utilizzando l'immaginazione e l'analogia sarà chiaro perché i due grafici che costruiremo saranno molto simili tra loro.

Le strutture dei modelli insight maker saranno infatti gli stessi ma sarà necessario cambiare il nome delle diverse etichette. Dobbiamo inoltre precisare che nel modello dinamico che costruiremo utilizzeremo una corrente di calore che sarà sempre la stessa (in modo tale da facilitare il lavoro), per il fornello è come se l'acqua fosse sempre fredda.

Le attività che abbiamo presentato sono relative alla scuola primaria; tuttavia, esse possono essere adattate ai livelli scolastici successivi sfruttando lo sviluppo della *sensuous cognition* intessuta con l'approccio immaginativo-figurativo per oggettivare il fenomeno fisico a livelli di generalizzazione simbolica".

Conclusioni

Secondo Radford (2021) gli oggetti matematici sono sia potenzialità concettuali incorporate nella cultura matematica sia la loro attualizzazione in processi di oggettivazione che sviluppano i nostri sensi in organi teorici capaci di percepire matematicamente in domini di attività adeguati con segni e artefatti.

Un possibile legame tra la natura potenziale e attualizzata del concetto di frazione è fornito dalla natura figurativa e immaginativa del pensiero realizzato con *image schemas* e metafore che mantengono vivida la dialettica Sapere-conoscenza rappresentata dalla spirale di Figura 1. Infatti, gli *image schemas* e le metafore contribuiscono a sostenere i processi di oggettivazione e generalizzazione tipici delle discipline STEM. Da un lato l'approccio metaforico caratterizza l'attività riflessiva che consente al Sapere (K) di acquisire un contenuto sensibile e di concretizzarsi come conoscenza *embodied* (k). Dall'altro *image schemas* e le metafore favoriscono nuove sistematizzazioni, che portano a un'espansione del Sapere. La fisica allarga i possibili domini di azione in cui le frazioni possono essere oggettivate con una gamma più ampia di interpretazioni e un significato più robusto, favorito da metafore concettuali, non confinate a una vuota manipolazione di segni. Questa prospettiva sulle frazioni, radicata nel contesto *embodied* della fisica, favorisce la capacità degli studenti di modellare situazioni fisiche attingendo a una comprensione solida e versatile delle relazioni frazionarie. Naturalmente, lo stesso vale per la matematica in generale quando si apprende secondo questa prospettiva.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Guest Eds.), *Revista Latino- americana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (pp. 267–299).

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97–109.

Corni, F., & Fuchs, H. U. (2020). Primary physical science for student teachers at kindergarten and primary school levels: Part I—foundations of an imaginative approach to physical science. *Interchange*, 51(3), 315–343. <https://doi.org/10.1007/s10780-019-09382-0>

Corni, F., & Fuchs, H. U. (2021). Primary physical science for student teachers at kindergarten and primary school levels: Part II—Implementation and Evaluation of a Course. *Interchange*, 52(2), 203–236. <https://doi.org/10.1007/s10780-021-09424-6>

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*. National Council of Teachers of Mathematics.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 453–470.

Edwards, L., Radford, L., & Arzarello, F. (2009). Gestures and multimodality in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 91–215.

Edwards, L. D., & Robutti, O. (2014). Embodiment, modalities and mathematical affordances. In L. D. Edwards, F. Ferrara, & D. Moore-Russo (Eds.), *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics* (pp. 1–23). Information Age.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3/4), 455–479.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. University of Chicago press.

- DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
- Johnson, M. (2007). *The meaning of the body: Aesthetics of human understanding*. University of Chicago Press.
- Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness and personality* (transl. by M.J. Hall). Prentice Hall.
- Leont'ev, A. N. (1981). *Problems of the development of the mind* (transl. by M. Kopylova). Progress.
- Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge: the biological roots of human understanding*. Shambhala.
- Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, (pp. 215–234). Sense.
- Radford, L. (2018). Semiosis and Subjectification: The Classroom Constitution of Mathematical Subjects. In N. Presmeg, L. Radford, M. Roth, & G. Kadunz. (2018). *Signs of signification. Semiotics in mathematics education research*. Springer.
- Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, (pp. 215–234). Sense.
- Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press.

TROVARE UN ORDINE NEL DISORDINE: BREVE GUIDA ALLO STUDIO DEI SISTEMI COMPLESSI

Michele Caselle

Dipartimento di Fisica, Università degli studi di Torino

michele.caselle@unito.it

Abstract

Lo studio dei Sistemi Complessi sta vivendo in questi ultimi anni un periodo di notevole sviluppo, come dimostra il meritatissimo premio Nobel assegnato l'anno scorso a Giorgio Parisi per i suoi fondamentali contributi in questo ambito. In questo intervento vorrei innanzitutto presentare alcune idee e strumenti utilizzati in questo contesto e poi discutere alcune proprietà tipiche dei Sistemi Complessi, dalla non-linearità, alla instabilità, alla eterogeneità. In particolare, discuteremo la presenza di "proprietà emergenti" che è la caratteristica che più di ogni altra definisce la complessità.

Parole-chiave

Complessità, Meccanica Statistica, Teoria delle Reti

SISTEMI COMPLESSI (E DOVE TROVARLI).

Non esiste una definizione univoca di Sistema Complesso. Discipline diverse tipicamente evidenziano proprietà diverse della complessità ad esempio:

- la capacità dei sistemi di auto-organizzarsi
- la presenza di punti o di soglie critiche
- la capacità di elaborare o trasmettere informazione
- la loro "impredicibilità"

Ma, indipendentemente dalla disciplina di riferimento, tutti i ricercatori concordano su una caratteristica: la presenza di "proprietà emergenti". Un Sistema Complesso tipicamente è formato da molti enti elementari che, a seconda dell'oggetto di studio, potranno essere, ad esempio, atomi in un gas, proteine in una cellula, cellule in un organismo o individui in un sistema sociale. Si parla di proprietà emergenti quando il comportamento del sistema è molto più della semplice somma degli enti che lo compongono. È facile capire questa idea con qualche esempio:

- un fluido è molto più della somma delle molecole che lo compongono
- una cellula è molto più della somma delle proteine che la compongono
- un organismo è molto più delle cellule che lo compongono
- un sistema sociale è molto più della somma degli individui che lo compongono

Gli esempi potrebbero esser infiniti. La cosa importante che impariamo da questa osservazione è che il segreto della complessità non è nella natura degli enti che compongono il sistema, ma *nelle loro interazioni*. Sono queste a generare i comportamenti emergenti che sono, appunto, la cifra distintiva della complessità. Questo spiega perché la Teoria delle Reti ha così grande importanza nello studio dei Sistemi Complessi. La Teoria delle Reti è una disciplina matematica che ha avuto un notevolissimo sviluppo negli ultimi vent'anni proprio in corrispondenza all'aumentato interesse per i Sistemi Complessi. Per capire meglio la natura di queste proprietà emergenti può essere utile discutere alcune parole chiave che proverò a presentare sotto forma di alternative "Semplice/Complesso"

Microscopico/Macroscopico

Possiamo descrivere lo stesso sistema (ad esempio un fluido formato da molecole) a due livelli diversi. Il primo livello è quello *Microscopico*, in cui ci interessiamo alle singole molecole, alle loro interazioni ed alle loro traiettorie. Il secondo livello è quello *Macroscopico* in cui ci interessiamo al comportamento delle variabili termodinamiche che descrivono il sistema nel suo complesso: pressione, temperatura, entropia... Creare un ponte tra questi due livelli è l'obiettivo di chi studia i Sistemi Complessi e lo strumento per farlo è la cosiddetta "Meccanica Statistica" (che non a caso ha anch'essa visto uno spettacolare sviluppo negli ultimi anni). La Meccanica Statistica ci insegna che i Sistemi Complessi sono caratterizzati da *semplicità a livello microscopico* (le interazioni tra molecole sono facili da descrivere) e *complessità a livello macroscopico* (ad esempio la comparsa di "punti critici"). Con gli strumenti della Meccanica Statistica è possibile identificare questi punti critici e descriverne le principali proprietà proprio a partire dalle "semplici" interazioni tra le molecole. I fenomeni che si osservano in corrispondenza dei punti critici sono un esempio di proprietà emergente. Le applicazioni di questi metodi sono moltissime e si possono trovare in contesti molto diversi tra loro, dalla comparsa della superconduttività al di sotto di una temperatura critica, alla descrizione delle transizioni di fase nei fluidi, alla comparsa, nei modelli che descrivono la diffusione delle epidemie, di "soglie critiche" oltre le quali una epidemia localizzata diventa una pandemia e si diffonde in tutto il sistema.

Lineare/Non-lineare

A livello macroscopico spesso è possibile descrivere il comportamento di un sistema fisico (ad esempio un fluido) usando le equazioni differenziali. Il comportamento di queste equazioni è molto diverso a seconda che esse siano "*lineari*" (cioè contengano solo termini elevati alla potenza uno) o *non lineari* (cioè contengano anche termini elevati a potenze più alte di uno). I fenomeni descritti da equazioni lineari sono "semplici": sono facili da descrivere, il loro comportamento è facilmente prevedibile e le loro reazioni a stimoli esterni sono proporzionali agli stimoli stessi. Invece le equazioni non-lineari descrivono sistemi di cui è difficile prevedere l'evoluzione e che possono avere reazioni agli stimoli esterni molto più grandi degli stimoli stessi. L'esempio paradigmatico del primo tipo è l'equazione dell'oscillatore armonico che, se applicata ad un fluido, descrive il moto delle onde piane che è "privo di sorprese". Se si aggiunge un termine di attrito questa equazione prevede che, se generiamo delle onde (ad esempio gettando un sasso in uno stagno), queste dopo poco si dissipano senza lasciare traccia. Però sappiamo che questa descrizione del moto ondoso è troppo semplificata e che nei fluidi reali, in particolari condizioni, possono nascere dei termini non-lineari. Un esempio particolarmente interessante di equazione non lineare - che ha applicazioni nella descrizione del moto dei fluidi reali - è l'equazione di Korteweg de Vries che descrive il moto delle onde in acqua bassa. Questa equazione è stata studiata in grande dettaglio nel secolo scorso e ammette soluzioni molto speciali, dette "solitoni" che sono in grado di autosostenersi e non si dissipano nel tempo come invece avviene per le onde normali. Questi solitoni sono di nuovo un perfetto esempio di proprietà emergente e sono alla base degli "tsunami" che, in particolari condizioni (ad esempio come conseguenza della perturbazione dovuta ad un terremoto), si possono generare negli oceani e propagare anche per migliaia di chilometri senza dissiparsi.

Ordine/Disordine

Una delle caratteristiche dei Sistemi Complessi è di presentarsi ad una prima analisi come molto più "disordinati" dei sistemi semplici. Questo aspetto è legato a quanto si diceva sopra sulla difficoltà di descrivere un Sistema Complesso. Infatti, un sistema ordinato è per definizione facile da descrivere: se tutti gli elementi che lo compongono seguono un ordine ben preciso sarà sufficiente fornire la regola a cui essi obbediscono e la descrizione sarà completa. Un Sistema Complesso apparentemente non segue alcuna regola e per questo è molto più difficile da descrivere. Uno degli aspetti più innovativi e recenti della Fisica dei Sistemi Complessi è legato proprio a questo aspetto ed è uno dei risultati per cui Giorgio Parisi ha vinto il Nobel per la Fisica pochi anni fa. Infatti, in questo apparente disordine è possibile comunque trovare delle regole, come dicevo nel titolo "*trovare un ordine nel disordine*". Per capire questo risultato dobbiamo partire da un risultato fondamentale della Meccanica Statistica che è la nozione di "energia libera" e il fatto che qualsiasi sistema fisico, lasciato a se stesso cerca di raggiungere

il minimo di questa quantità. Quando studiamo un sistema con gli strumenti della Meccanica Statistica, la prima cosa che cerchiamo di calcolare è il valore dell'energia libera del sistema in funzione dei parametri di controllo che abbiamo a disposizione (ad esempio in funzione della temperatura o della pressione). La caratteristica dei sistemi semplici è di avere un unico minimo dell'energia libera. Per questo sono semplici da descrivere: basta descrivere le caratteristiche di questo valore dell'energia libera e l'intero sistema è sotto controllo. Questo è il caso, ad esempio, di molti gas o di alcuni materiali cristallini. All'opposto, i Sistemi Complessi sono caratterizzati da moltissimi minimi, spesso in competizione tra loro. Per descrivere il sistema bisognerebbe elencarli tutti e per ognuno di essi descriverne le proprietà, e questo spesso è molto difficile o impossibile. L'intuizione di Parisi è stata capire che in molti casi questi minimi non sono disposti a caso ma seguono anch'essi una regola, non sono tutti importanti allo stesso modo, ma sovente c'è una organizzazione gerarchica per cui alcuni minimi sono più importanti di altri. L'obiettivo di descriverli tutti, che sembrava impossibile da realizzare, in alcuni casi si riesce a raggiungere e molte proprietà dei Sistemi Complessi che sembravano impossibili da prevedere si riescono in questo modo a capire ed in certa misura a controllare.

Alcuni commenti finali.

La Fisica dei Sistemi Complessi sta vivendo un periodo di notevole sviluppo, sia per il grande numero di possibili applicazioni, dalla biologia, alla epidemiologia, alla econofisica a contesti più tradizionali della fisica come la fluidodinamica o la fisica delle particelle elementari sia per i notevoli progressi teorici degli ultimi anni. Alcune delle idee guida alla base della Fisica dei Sistemi Complessi hanno una valenza trasversale e trovano applicazioni in discipline molto diverse tra loro. Si tratta di concetti, come ho cercato di mostrare in questo intervento, tutto sommato semplici da spiegare e facili da intuire, che potrebbero utilmente essere inseriti nei programmi di studio delle scuole superiori e che dovrebbero in futuro diventare bagaglio di qualsiasi studente che affronti percorsi universitari di tipo STEM.

BIBLIOGRAFIA

Riporto qui alcuni testi che possono servire per approfondire questi temi

Libri

G.Caldarelli e M.Catanzaro *Scienza delle Reti* (2016) Egea Ed.

M.Mezard, G. Parisi, M.Virasoro *Spin glass theory and beyond* (1985) World scientific

J. Sethna *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexity* (2006) Oxford University Press, USA

LA SCIENZA DEI DATI E L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE IN UN INNOVATIVO CURRICOLO LICEALE DIGITALE E MULTIDISCIPLINARE

Gaetano Strano
docente Informatica, ISIS "Michelangelo Buonarroti"
via Matteotti 8, 34074 Monfalcone (GO)
e-mail: gaetano.strano@liceobuonarroti.it

Abstract

L'intelligenza artificiale sta trasformando profondamente la nostra vita e il modo in cui apprendiamo. Questa nuova tecnologia comporterà cambiamenti significativi nelle scuole, influenzando inevitabilmente sia le metodologie didattiche che i programmi di studio. Nel report che segue, si illustra come l'Istituto "Michelangelo Buonarroti" di Monfalcone abbia introdotto un nuovo indirizzo di studi in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale, avviando una trasformazione che ha riguardato sia i contenuti che l'approccio didattico. Questo cambiamento, ormai indispensabile, permetterà agli studenti di sviluppare competenze essenziali per il loro sviluppo personale e professionale in un mondo sempre più dominato dall'intelligenza artificiale.

Parole-chiave

Scienza dei Dati, Intelligenza Artificiale, Interdisciplinarietà, Didattica Attiva

INTRODUZIONE

Negli ultimi decenni grazie alla crescente disponibilità di grandi volumi di dati provenienti da fonti diverse (piattaforme social-media, smartphone, sensori, ecc.) e alle potenzialità sempre più elevate dei calcolatori, la Scienza dei Dati e l'Intelligenza Artificiale (IA) sono emersi come due dei campi più rivoluzionari nel panorama tecnologico globale.

Entrambi giocano un ruolo cruciale nella trasformazione delle industrie, nella risoluzione di problemi complessi e in numerose innovazioni che stanno cambiando la nostra vita quotidiana.

Per comprendere meglio di cosa si tratta, si illustrano sinteticamente i concetti fondamentali che stanno alla base di queste due discipline e alcuni casi d'uso dove vengono applicate.

La Scienza dei Dati

La Scienza dei Dati è lo studio dei dati al fine di estrarne informazioni dettagliate o mirate. È un approccio multidisciplinare che combina principi e pratiche nei campi di matematica, statistica, intelligenza artificiale e ingegneria informatica per analizzare grandi quantità di dati.

Questa analisi aiuta i data scientists a porre e rispondere a domande come: cosa è successo, perché è successo, cosa accadrà e cosa si può fare con i risultati.

Opera con dati strutturati e non strutturati. Si sviluppa secondo varie fasi: formulazione del problema, scelta e acquisizione dei dati, gestione (modellazione, profilazione, arricchimento semantico, normalizzazione, metadattazione, trasformazione di modello, controllo di qualità, integrazione, implementazione architettura tecnologica), analisi dei dati (metodi statistici) e visualizzazione.

L'Intelligenza Artificiale

È la disciplina che si occupa dello sviluppo di sistemi software che dato un obiettivo complesso sono in grado di agire nella dimensione fisica o virtuale in modo da percepire l'ambiente che li circonda, di acquisire e interpretare dati e ragionare sulle conoscenze acquisite, formulare decisioni basate sull'evidenza raccolta, sulle migliori azioni da svolgere al fine di raggiungere l'obiettivo prefissato anche in situazioni non esplicitamente previste a priori (da "Proposta per una strategia italiana per l'intelligenza artificiale" - 2021)

In maggior sintesi è l'abilità di una macchina di mostrare *capacità umane* quali il *ragionamento*, l'*apprendimento*, la *pianificazione* e la *creatività* (dal sito del Parlamento Europeo: <https://tinyurl.com/definizioneIA>).

Gli algoritmi che la contraddistinguono si basano su diversi principi come la logica o la probabilità o la risoluzione di problemi di ottimizzazione o la ricerca euristica o il ragionamento basato sui casi e anche l'apprendimento automatico.

Ad oggi è presente solo quella che viene chiamata l'*IA debole* per differenziarla da quella *forte*, che abbiamo visto nella fantasia di qualche scrittore o regista cioè quella forma di intelligenza che è capace di adattarsi da sola a un qualsiasi problema ed è capace di apprendere.

Nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale si riescono ad individuare ulteriori tre *sottocategorie* (vedi figura):

- *Machine Learning*: ha come obiettivo la creazione di sistemi capaci di apprendere autonomamente da dati e informazioni per generare dei risultati in output.
- *Deep Learning*: include quelle tecniche e metodologie per creare sistemi capaci di apprendere da enormi quantità di dati utilizzando algoritmi anche molto complessi che spesso sono ispirati dalla struttura cerebrale umana (reti neurali artificiali)
- *IA generativa*: si occupa della creazione di contenuti originali attraverso modelli di apprendimento automatico. Questi contenuti possono includere testo, immagini, musica, video, e altro. I modelli di IA generativa sono progettati per apprendere dalle informazioni esistenti e poi generare nuovi contenuti che sono simili, ma non identici, ai dati di addestramento.

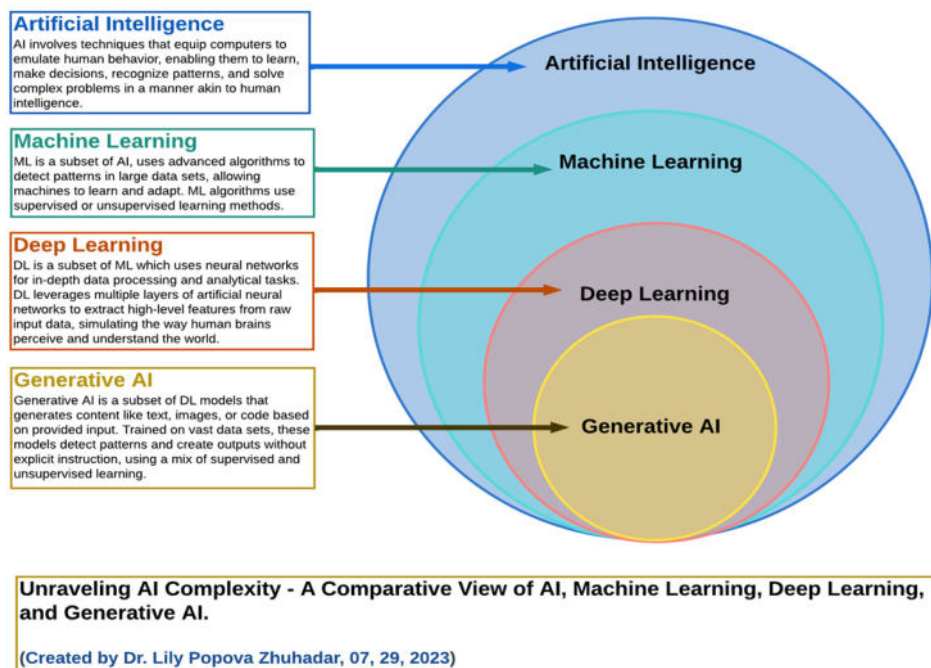


Figura 1 Le sottocategorie dell'Intelligenza Artificiale

Le applicazioni dell'Intelligenza Artificiale

L'Intelligenza Artificiale è ormai presente in svariati settori. In sintesi evidenziano alcuni esempi:

- *Assistenza sanitaria*: diagnosi delle malattie, radiologia, medicina personalizzata
- *Campo Industriale*: controllo qualità dei prodotti, ottimizzazione della produzione
- *Finanza*: trading algoritmico, gestione del rischio, sottoscrizioni di mutui o assicurazioni
- *Marketing*: segmentazione dei clienti, sistemi di raccomandazione, previsione della domanda
- *Risorse umane*: selezione dei candidati, analisi del turnover, analisi del morale dei dipendenti
- *Computer Vision*: classificazione immagini, rilevamento di oggetti, riconoscimento azioni
- *Natural Language Processing*: traduzione automatica, generatore di testo, analisi del sentimento

L'IA come supporto e non come sostituzione

L'intelligenza artificiale (IA) è uno strumento potente che affianca gli esseri umani nel loro lavoro quotidiano, migliorando l'efficienza e ampliando le possibilità creative. In molti settori, l'IA automatizza compiti ripetitivi e analizza grandi quantità di dati con una velocità che supera di gran lunga quella umana. Tuttavia, non è in grado di sostituire il pensiero critico, l'empatia e l'intuizione che caratterizzano l'intelligenza umana. L'IA funziona meglio come complemento delle competenze umane, offrendo supporto nel prendere decisioni più informate e nel trovare soluzioni innovative ai problemi complessi. In questo modo, anziché sostituire gli esseri umani, l'intelligenza artificiale amplia le nostre capacità e ci permette di concentrarci sugli aspetti più creativi e strategici del nostro lavoro.

A questo proposito vorrei ricordare la frase pronunciata nel corso dell'evento Rome Cup 2021 da Manuela Maria Veloso, attuale capo del laboratorio per la ricerca sull'intelligenza artificiale di J.P. Morgan, che ha rafforzato ancor di più la mia convinzione sul percorso intrapreso: *«L'essere umano e l'intelligenza artificiale sono alleati, non antagonisti, e devono imparare a collaborare perché ci saranno sempre cose che uno può fare e l'altro no, mentre insieme possono ottenere cose incredibili»*

Gli allarmismi presenti nei social che prefigurano uno scenario nel modo del lavoro dove l'uomo viene sostituito totalmente dall'IA risultano ingiustificati. Ci saranno nuovi sbocchi occupazionali soprattutto per coloro che la sapranno utilizzare in modo efficiente, efficace e responsabile.

Proprio per preparare le nuove generazioni a questa imminente sfida è nata l'idea dell'attivazione di un nuovo curriculum liceale digitale multidisciplinare.

IL NUOVO CURRICOLO LICEALE DELL' I.S.I.S. "MICHELANGELO BUONARROTI"

Nell'era digitale in cui viviamo, la Scienza dei Dati e l'IA stanno rivoluzionando il modo in cui comprendiamo e interagiamo con il mondo. In questo contesto, è nata la proposta di un innovativo curriculum liceale digitale e multidisciplinare che incorpori la Scienza dei Dati e l'Intelligenza Artificiale. Tale curriculum mira a fornire agli studenti competenze essenziali per il futuro, combinando conoscenze tecniche con capacità critiche e creative. Esplorando il ruolo di queste discipline nel processo educativo, il curriculum non solo prepara gli studenti ad affrontare le sfide del mondo moderno, ma stimola anche una nuova generazione di pensatori e innovatori. Questa trattazione intende esplorare i benefici, le sfide e le potenzialità di un approccio educativo che integra la Scienza dei Dati e l'IA, promuovendo un apprendimento che sia al contempo pratico e profondamente radicato nel contesto interdisciplinare.

Il contesto scolastico

L'I.S.I.S. "Michelangelo Buonarroti" di Monfalcone, attivo dall'ottobre del 1943, è un Liceo scientifico che attualmente offre i seguenti indirizzi di studio oltre a quello tradizionale: l'opzione Scienze Applicate (dall'a.s.2010-11), l'opzione Liceo Sportivo (dall'a.s.2014-15), il Liceo Linguistico (dall'a.s.2011-12) e dall'a.s.2022-23 la nuova curvatura in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale (SDIA) che potenzia lo studio dell'informatica verso ambiti particolarmente innovativi concernenti la Robotica e il Machine

Learning. L'istituto è ben integrato nel territorio con ottimi rapporti con le più importanti realtà della zona, siano esse enti pubblici, associazioni o aziende.

La nascita

Nel mio primo anno scolastico 2020-21 all' I.S.I.S. "Michelangelo Buonarroti" di Monfalcone dopo oltre vent'anni di docenza all'I.S.I.S. "G. Galilei" di Gorizia nell'indirizzo Informatica e Telecomunicazioni (articolazione Informatica), risultavano evidenti alcune criticità legate principalmente al curriculum di informatica nell'indirizzo scientifico con opzione Scienze applicate. Il problema più tangibile era quello della mancanza di continuità dei docenti di questa disciplina (quasi tutti precari) a causa dell'assenza di una cattedra interna completa. Tutto questo comportava una netta obsolescenza e una certa eterogeneità dei temi trattati visto che nessuno si azzardava a proporre degli aggiornamenti sul percorso formativo, dato che non aveva alcuna garanzia di poterli implementare negli anni successivi.

Alla luce di questa situazione il Dirigente Scolastico, dott. Vincenzo Caico, nella fase conclusiva del mio primo anno di docenza al "Buonarroti", mi lanciò la proposta di progettare un nuovo curriculum con il potenziamento dell'Informatica allo scopo di attivare una curvatura nell'ambito dell'opzione Scienze Applicate sfruttando la quota di flessibilità della scuola dell'autonomia.

In quel momento avevo appena completato un corso MOOC sull'Intelligenza Artificiale presso l'Università di Urbino che mi aveva particolarmente affascinato per gli aspetti multidisciplinari insiti nella tematica trattata. Da qui l'idea di approfondire maggiormente, nell'estate 2021, anche gli aspetti informatici e matematici seguendo vari percorsi formativi sia tenuti da relatori universitari sia da professionisti del settore.

Nel settembre 2021 la proposta di curvatura in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale era pronta e venne presentata a tutti gli organi collegiali. L'iter di approvazione si concluse in tempo utile per l'orientamento in entrata degli studenti delle classi terze della scuola secondaria inferiore per l'a.s.2022-23. Il nuovo percorso ebbe successo e si raccolse un numero di iscrizioni tale da poter attivare la prima classe proprio in quello stesso anno scolastico.

Inoltre, per meglio definire il percorso da seguire nei cinque anni era stato già attivato nell'anno scolastico 2021-22 un gruppo di studio con colleghi di Matematica, Fisica e Scienze.

Nell'autunno del 2022 il Dirigente Scolastico, visto il crescente interesse per la tematica relativa all'Intelligenza Artificiale, decise di attivare una *Rete Nazionale dei Licei in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale* con l'ISIS "M. Buonarroti" come scuola capofila, insieme a due altri istituti che avevano attivato percorsi simili: IIS "Alfieri Maserati" di Voghera (PV) e Liceo Scientifico "Galileo Galilei" di Trento. Ad oggi hanno aderito una trentina di Licei ma le iscrizioni sono in continuo aggiornamento.

Obiettivi principali

Gli obiettivi principali del curriculum possono essere così sintetizzati:

- *Multidisciplinarietà*: favorire l'interconnessione tra le varie discipline in modo da progettare attività multi-interdisciplinari con particolare focalizzazione sull'approccio STEAM (Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics).
- Agevolare l'utilizzo di una *didattica attiva* (Project Based Learning, modello 5E, Flipped Classroom, Episodi di Apprendimento Situato, ecc.).
- Sviluppare le competenze su *compiti complessi* (pensiero critico / problem solving, creatività, collaborazione, comunicazione), privilegiando il lavoro di gruppo.
- *Aggiornare/integrare i contenuti* di Informatica e Matematica per supportare le competenze da sviluppare nell'ambito della Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale.

Il quadro orario

Utilizzando le quote di autonomia e di flessibilità a disposizione delle istituzioni scolastiche si è deciso di attivare una curvatura in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale nel Liceo Scientifico opzione

Scienze Applicate dove era già presente la disciplina Informatica. Inoltre si è deciso di mantenere per gli studenti lo stesso numero di ore settimanali riducendo alcune ore nelle altre discipline di indirizzo. Il nuovo curriculum prevede per la materia Informatica: 3 ore settimanali nel primo biennio, 4 ore nel secondo biennio e 3 ore al quinto anno.

L'incremento delle ore settimanali ha comportato la riduzione di un'ora di Matematica nella classe prima, un'ora di Scienze naturali nella classe seconda, un'ora di Fisica e di Scienze naturali nelle classi terze e quarte e un'ora di Scienze naturali in quinta.

L'introduzione dei nuovi argomenti riguardanti la Scienza dei Dati e l'IA e la contemporanea diminuzione oraria nelle altre discipline di indirizzo ha comportato inevitabilmente un cambiamento nella metodologia didattica che diventa sempre meno frontale e più laboratoriale all'insegna di un apprendimento maggiormente significativo.

LE NOVITA' DEL PROGRAMMA DIDATTICO

Il programma didattico del nuovo curriculum esplora diversi argomenti chiave, tra cui i fondamenti della Scienza dei Dati, le tecniche di apprendimento automatico, l'etica dell'Intelligenza Artificiale, la programmazione e l'analisi critica dei dati. Inoltre, grazie a un approccio multidisciplinare, gli studenti avranno l'opportunità di applicare queste conoscenze in vari contesti, come la biologia, la filosofia e le scienze sociali, stimolando un pensiero critico e una comprensione integrata delle tecnologie emergenti. L'obiettivo è quello di formare individui preparati e consapevoli, in grado di navigare nel complesso mondo digitale con competenza e creatività, contribuendo a una società sempre più orientata all'innovazione e alla sostenibilità.

Primo anno

Il primo anno introduce come novità rispetto agli argomenti del corso tradizionale i concetti di base della statistica descrittiva (concetti di base dell'analisi statistica e delle rappresentazioni dei dati, gli indici di posizione e di variabilità, eventualmente introducendo quartili e boxplot, solitamente snobbati dai libri di testo) e l'uso avanzato del foglio elettronico. In Informatica gli studenti apprendono l'utilizzo di linguaggi visuali a blocchi e la progettazione di app tramite ambiente di sviluppo come MIT App Inventor. Vengono inoltre introdotte le attività sperimentali di Fisica e l'analisi di dataset multidisciplinari.

Secondo anno

Nel secondo anno, il focus si sposta sulla robotica (mBot2, intelino Smart Train), la Realtà Virtuale e Aumentata (VR-AR), il linguaggio Python e il Prompt Engineering per utilizzare in modo efficace le applicazioni che utilizzano i Large Language Model (ChatGPT, Gemini, Copilot, Claude). Gli studenti imparano a sviluppare esperienza VR-AR con CoSpaces Edu prendendo confidenza con le coordinate dello spazio 3D. In Matematica viene introdotta la novità del calcolo matriciale. A completamento dell'attività curricolare vengono organizzati laboratori pomeridiani di approfondimento per il disegno 3D (Rhinoceros 3D o Blender) e la stampa 3D.

Terzo anno

Il terzo anno approfondisce in Informatica lo studio della Scienza dei Dati. Gli studenti utilizzano librerie Python per l'elaborazione e la visualizzazione dei dati, come *numpy*, *pandas*, *Matplotlib* e *seaborn*. L'insegnamento della Filosofia viene integrato per sviluppare capacità di ragionamento critico. L'analisi dei dati nelle altre discipline viene svolta tramite l'applicazione *Tableau Desktop* senza l'ausilio del linguaggio di programmazione.

In Matematica vengono introdotti come novità il calcolo delle probabilità, la statistica bivariata e la retta di regressione.

Quarto anno

Il quarto anno introduce concetti avanzati di Intelligenza Artificiale, inclusi il Machine learning e il Deep Learning. Gli studenti studiano algoritmi di ottimizzazione come il Gradient Descent e tecniche di regressione. Inoltre si affrontano lo studio dei modelli parametrici (regressione lineare e logistica, Reti Neurali, Naive Bayes) e non parametrici (KNN, SVM, Decision Tree, Random Forest). In Matematica si anticipa lo studio delle funzioni e qualche cenno a quelle a più variabili. Viene anche affrontata l'etica dell'Intelligenza Artificiale e la programmazione di robot avanzati (robot umanoide NAO) e dispositivi Internet of Things (Arduino e kit di sensori, Raspberry Pi e sensori, ecc.).

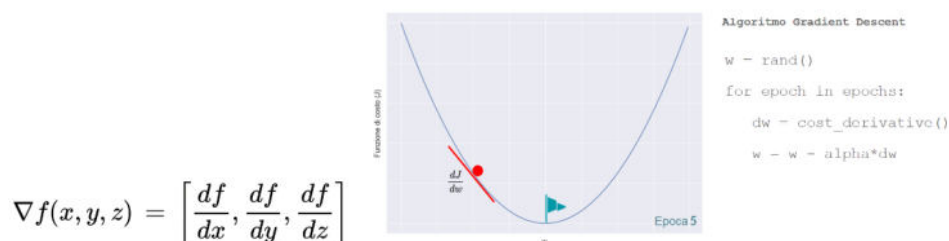


Figura 2 Machine Learning: l'algoritmo Gradient Descent

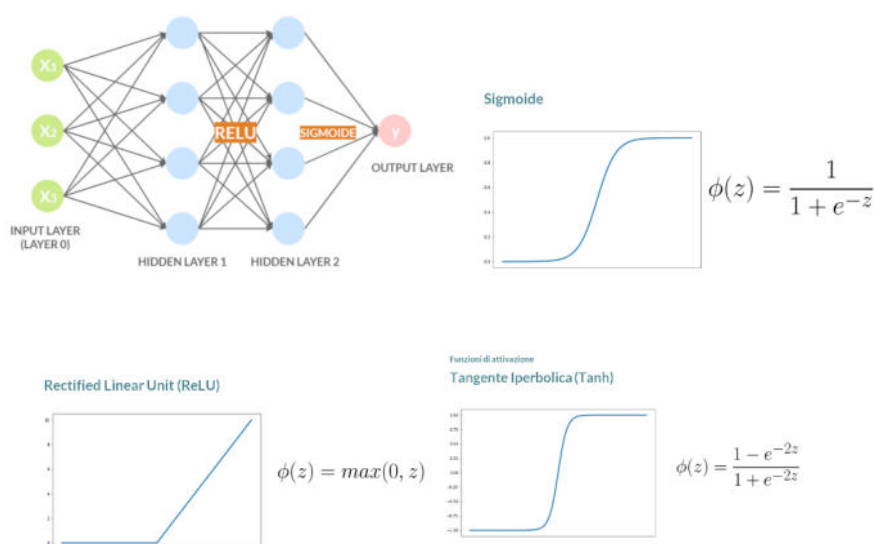


Figura 3 Deep Learning: le reti neurali artificiali e le principali funzioni di attivazione



Figura 4 La robotica avanzata: programmazione in Python del robot umanoide NAO

Quinto anno

Nel quinto anno, gli studenti esplorano la Computer Vision (CV) e il Natural Language Processing (NLP), utilizzando librerie come OpenCV e framework come TensorFlow. Inoltre vengono trattati concetti avanzati di statistica inferenziale e il linguaggio R. A completamento della trattazione multidisciplinare dell'IA gli studenti apprendono le sue implicazioni legali sia a livello nazionale che europeo.

Percorso per le Competenze Trasversali e per l'Orientamento (PCTO)

Il percorso dell'ultimo triennio verrà integrato con le 90 ore previste dai PCTO che gli studenti svolgeranno presso le Università degli Studi di Udine e di Trieste e/o Area Science Park di Trieste e/o aziende del settore presenti nel territorio. In particolare si organizzeranno laboratori pratici dove potranno sperimentare e valutare modelli di Machine Learning in campi specifici come la medicina, la mobilità, l'ambiente e la robotica. Saranno incluse anche la partecipazione a dibattiti su tematiche relative alle implicazioni etiche e sociali dell'Intelligenza Artificiale, e le visite guidate in laboratori di ricerca o aziende dove vengono applicate le tecnologie dell'IA.

LA DIDATTICA ATTIVA E L'USO DELL' IA

L'istruzione moderna sta subendo una trasformazione significativa grazie all'integrazione della didattica attiva e dei tool di IA. La didattica attiva rappresenta un approccio educativo centrato sullo studente, che incoraggia l'apprendimento attraverso la partecipazione diretta e l'interazione. Questo metodo stimola la curiosità, il pensiero critico e la capacità di risolvere problemi, promuovendo un coinvolgimento più profondo con il materiale didattico rispetto ai tradizionali metodi di insegnamento frontale.

L'introduzione dei tool di IA nel processo educativo amplifica ulteriormente questi benefici, offrendo risorse personalizzate e adattative che possono rispondere alle esigenze specifiche di ogni studente. Gli strumenti basati sull'IA possono fornire feedback immediati, supporto nell'analisi dei dati e soluzioni creative a problemi complessi, rendendo l'apprendimento più efficace e coinvolgente. Inoltre, l'IA consente agli educatori di identificare e affrontare più facilmente le lacune nella comprensione degli studenti, personalizzando le esperienze di apprendimento per massimizzare il loro potenziale.

L'adozione della didattica attiva, combinata con i tool di IA, sta ridefinendo l'educazione, preparando gli studenti a diventare pensatori indipendenti e innovativi in un mondo sempre più digitale e interconnesso.

I principali tool IA utilizzati nella didattica possono essere così riassunti:

- Per la pianificazione delle lezioni: *MagicSchool, Eduaide, Almanack.*
- Per la creazione di contenuti: *Gamma, Canva, Leonardo, Adobe Firefly, xMind, PanQuiz.*
- Per i Large Language Model: *ChatGPT, Gemini, Copilot e Claude.*
- Per la creazione di chatbot personalizzati: *MIZOU, Synvision.*
- Per chattare con documenti pdf: *CHATPDF, aiPDF, askyourPDF, Diffit* (per l'inclusione).
- Per interagire con i video di YouTube: *YouTube transcript, NoteGPT, HyperQuiz.*

CONCLUSIONI

L'integrazione della Scienza dei Dati e dell'Intelligenza Artificiale nel curriculum liceale rappresenta un passo avanti significativo nell'educazione moderna. Questo approccio multidisciplinare non solo prepara gli studenti alle sfide tecnologiche del futuro, ma promuove anche un ambiente di apprendimento attivo e collaborativo. Attraverso l'adozione di metodologie didattiche innovative come il Project Based Learning e l'uso delle piattaforme e dei tool di IA, il curriculum proposto offre agli studenti l'opportunità di sviluppare competenze critiche e di diventare protagonisti del cambiamento tecnologico.

SITOGRAFIA

Liceo in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale dell'I.S.I.S. "M.Buonarroti" di Monfalcone
(<https://tinyurl.com/LiceoBuonarrotiSDIA>)

Manuela Veloso alla RomeCup2021
(<https://tinyurl.com/MVelosoRomeCup2021>)

Metodologie didattiche attive
(<https://www.metodologiedidattiche.it/>)

Prompt Engineering
(<https://www.promptingguide.ai/it>)

Rete Nazionale dei Licei in Scienza dei Dati e Intelligenza Artificiale
(<https://tinyurl.com/NazionaleReteSDIA>)

Riferimenti software

Ambiente di sviluppo per App di cellulari
MITAppInventor (<http://appinventor.mit.edu/>)

Ambienti di sviluppo per la programmazione
mBlock (<https://www.mblock.cc/en/>)
Anaconda (<https://www.anaconda.com/>)
OpenCV (<https://opencv.org/>)
TensorFlow (<https://www.tensorflow.org/?hl=it>)

Ambiente per la realizzazione di esperienze di Realtà Virtuale e Aumentata
Cospaces EDU (<https://cospaces.io/edu/>)

Applicazione per il disegno 3D
Rhino3D (<https://www.rhino3d.com/it/>)
Blender (<https://www.blender.org/>)

Catalogo tool IA
Futurepedia (<https://www.futurepedia.io/>)

Robotica
Arduino (<https://www.arduino.cc/>)
Intelino Smart Train (<https://intelino.com/>)
mBot2 (<https://education.makeblock.com/mbot2/>)
Raspberry Pi (<https://www.raspberrypi.com/>)
Robot umanoide NAO (<https://www.aldebaran.com/it/nao>)

Linguaggi di programmazione
Python (<https://www.python.org/>)
Linguaggio R (<https://www.r-project.org/>)

CODIFICA DI SOFTWARE DI REALTÀ AUMENTATA AD HOC PER IL LABORATORIO DI FISICA ED EVENTI DI COMUNICAZIONE

Tommaso Rosi, Pasquale Onorato, Stefano Oss

Università di Trento, Dipartimento di Fisica, Via Sommarive 14, 38123, Povo, Trento

tommaso.rosi@unitn.it

Abstract

Per sua natura, la Fisica ha bisogno di un approccio multimediale per essere compresa. Negli ultimi due decenni, diversi setup hardware e software di Realtà Virtuale (VR) e Realtà Aumentata (AR) sono diventati sempre più accessibili e facili da usare, portandoli a diventare una delle nuove frontiere di ricerca di maggior interesse della Science Education in generale e della didattica della fisica in particolare. Il nostro gruppo di ricerca ha lavorato a progetti sia riguardo l'utilizzo dell'AR in laboratorio che per eventi di comunicazione: in questo lavoro presenteremo la nostra ricerca commentando perché questa nuova tecnologia è rilevante per la didattica e la comunicazione della fisica.

Parole-chiave

Realtà Aumentata, Visori, Laboratorio di Fisica, Comunicazione della Fisica

INTRODUZIONE

La fisica richiede un approccio intrinsecamente multimediale per una sua completa comprensione. Fin dalle sue origini, la fisica ha necessitato di parole, numeri, simboli, formule, schizzi, immagini, tabelle, diagrammi e grafici per la sua comprensione e comunicazione. Recentemente, l'introduzione di nuovi media come immagini, video, diapositive, simulazioni, visualizzazioni e strumentazione elettronica ha ulteriormente arricchito la gamma di strumenti e metodi a disposizione dell'apprendimento e dell'insegnamento della fisica. Nel corso della sua storia, l'uso della multimedialità nella didattica ha mirato a rendere l'apprendimento più accessibile, interattivo e coinvolgente, trasformando il modello tradizionale di lezione in un'esperienza di apprendimento più dinamica e incentrata sullo studente. Con il continuo progredire della tecnologia, si prevede che gli strumenti multimediali giocheranno un ruolo sempre più importante nel plasmare la didattica e la comunicazione della fisica.

Negli ultimi due decenni, la crescente disponibilità e facilità d'uso delle tecnologie di Realtà Virtuale e Aumentata le ha poste all'avanguardia nella ricerca sull'Educazione Scientifica e Fisica [1-9].

Diversi setup di realtà aumentata, basati su smartphone, tablet, videocamere 3D, proiettori, occhiali e visori, hanno visto un abbassamento dei loro costi e l'introduzione di nuovi software di facile utilizzo. Il nostro gruppo di ricerca si è impegnato attivamente in diversi progetti in questa direzione, sfruttando l'AR in ambienti di laboratorio e in eventi di comunicazione, di cui parleremo in questo articolo.

AR IN LABORATORIO

Nel corso degli ultimi anni, il nostro gruppo ha sviluppato e testato diversi setup hardware/software per l'utilizzo dell'AR nel laboratorio di fisica: in questa sezione presenteremo brevemente due setup. Il primo, noto come "The Augmented Laboratory" [10], sfrutta una telecamera 3D e un proiettore. Questo sistema è in grado di creare ricostruzioni 3D del mondo fisico, catturate dalla telecamera 3D. Queste ricostruzioni possono essere visualizzate in tempo reale mentre vengono acquisiti i dati o esplorate in un secondo momento attraverso playback interattivi. Il sistema è in grado di effettuare il tracking, ossia

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia di acquisire le posizioni nel tempo, di più oggetti in 3D [11] e di proiettare i dati pertinenti direttamente sugli oggetti utilizzati negli esperimenti di fisica reale e intorno ad essi - ciò che noi definiamo un "esperimento aumentato". Nella figura 1, si possono osservare due fotogrammi di un video registrato durante un esperimento aumentato con questa configurazione.

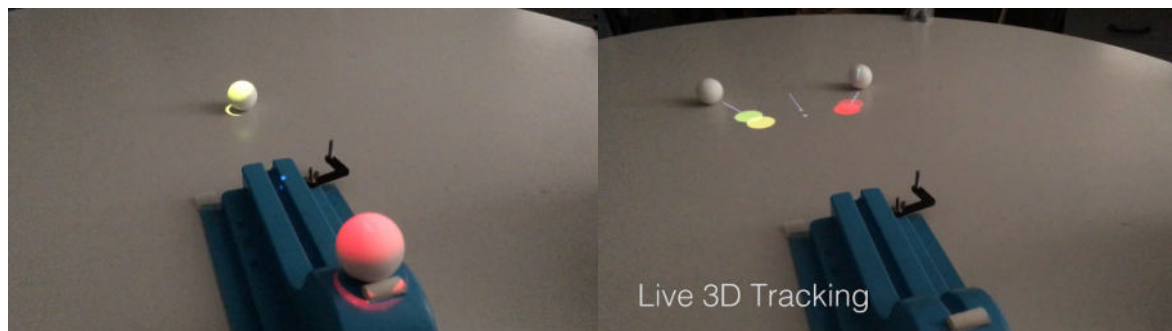


Figura 1. Viene mostrato il tracciamento (*tracking*) in tempo reale della posizione di due sfere in collisione; i risultati del tracciamento possono essere registrati e rivisti, aggiungendo anche informazioni aggiuntive come vettori e grafici.

Questa configurazione ha anche introdotto il potenziale per nuove interazioni tra le simulazioni al computer e il mondo reale, che chiamiamo "simulazioni aumentate". Un esempio di simulazione aumentata è un ondoscopio aumentato (vedi figura 2). Questa configurazione consente di eseguire vari esperimenti di propagazione delle onde utilizzando oggetti fisici per rappresentare sorgenti d'onda, barriere, lenti e zone con velocità d'onda variabili. Il software è in grado di riconoscere e differenziare questi elementi fisici che vengono introdotti nell'area di proiezione. Di conseguenza, questo strumento facilita una discussione intuitiva e chiara di fenomeni come la riflessione, la rifrazione, la diffrazione, l'effetto Doppler e il boom sonico.

Abbiamo testato ampiamente questa configurazione in vari contesti educativi e di divulgazione, che vanno da contesti formali come corsi universitari e di scuola superiore ad ambienti informali come mostre pubbliche.

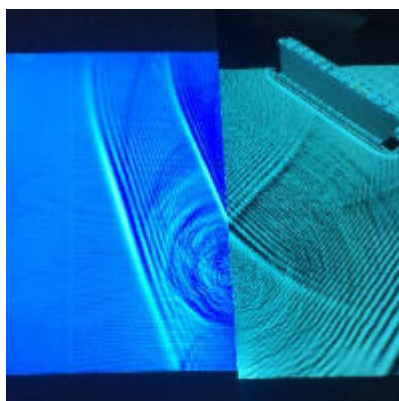


Figura 2. Una "simulazione aumentata" di un ondoscopio.

La seconda configurazione principale su cui abbiamo lavorato è stata quella basata sulla realtà virtuale (VR) e sui visori AR [12]. L'idea alla base del loro utilizzo è simile a quella del setup precedente: poter ottenere misurazioni quantitative utilizzando il setup e visualizzare i risultati di queste misurazioni direttamente nel mondo fisico (ad esempio, tracciando i controller e visualizzando il loro movimento 3D in tempo reale utilizzando i visori, vedi Figura 3) e poter combinare simulazioni al computer ed esperimenti reali.

Anche in questo caso, abbiamo testato questa configurazione sia in contesti formali che informali.

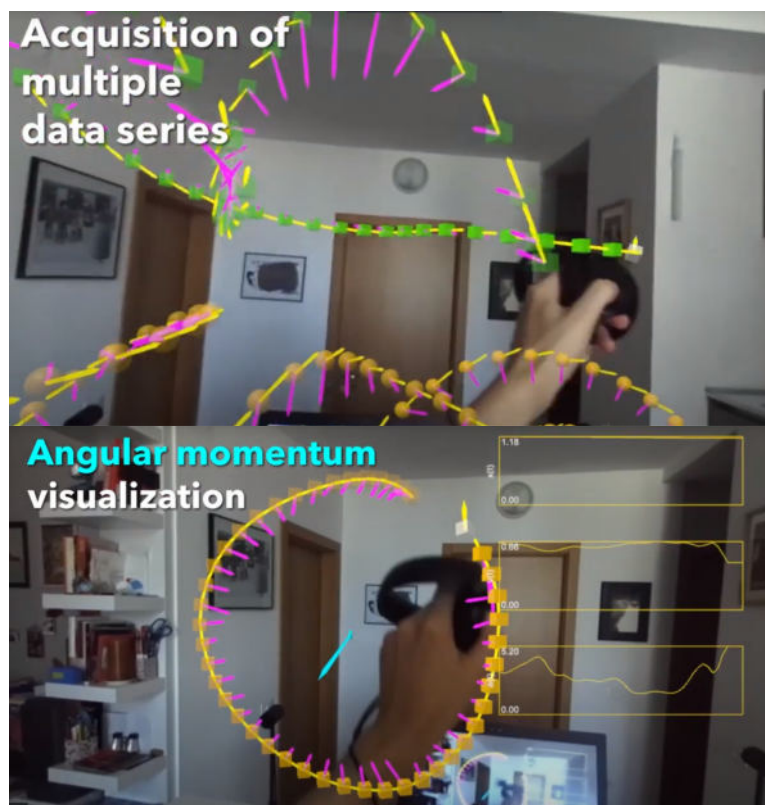


Figura 3. Tracciamento in tempo reale a 6 gradi di libertà di un controller, visto attraverso un visore AR e contemporaneamente sul monitor del computer. In alto è possibile vedere l’acquisizione di più serie di dati (rappresentate da diversi colori) e in basso la visualizzazione di grafici e di vettori come il momento angolare (in ciano).

“AR” PER LA COMUNICAZIONE DELLA FISICA

L’uso di immagini nella storia è stato fondamentale per chiarire i concetti della fisica, evolvendo da semplici schizzi a complesse simulazioni e visualizzazioni generate al computer. Non servono solo come strumenti per i ricercatori, gli educatori e i comunicatori, ma anche come ponte tra la fisica e l'arte, ispirando nuove esplorazioni all'intersezione di questi campi, come esemplificato da iniziative come il progetto “Arts at CERN” [13].

La realtà aumentata (AR), con la sua capacità unica di rappresentare intuitivamente concetti astratti e di fondere l'acquisizione di dati in tempo reale con visualizzazioni accattivanti, apre la strada a nuove espressioni culturali della fisica. Queste espressioni sono intrinsecamente interdisciplinari e possono intrecciare la fisica con le arti visive, il teatro, la letteratura, la musica e la danza.

Il nostro gruppo si è avventurato in questo ambito interdisciplinare, progettando e realizzando una performance intitolata "HyperVision" [14]. Questa performance rientra in una nuova categoria di teatro nota come "augmented lecture" [15], un formato in cui gli argomenti scientifici sono trasmessi attraverso un dialogo interattivo tra uno scienziato e un artista. HyperVision integra la fisica della luce e dei colori con arti visive digitali sperimentate in AR, completate da musica elettronica dal vivo create *ad-hoc* per la performance (figura 4).

Questo mix esemplifica il potenziale interdisciplinare dell'AR nel contribuire alla comunicazione della fisica.

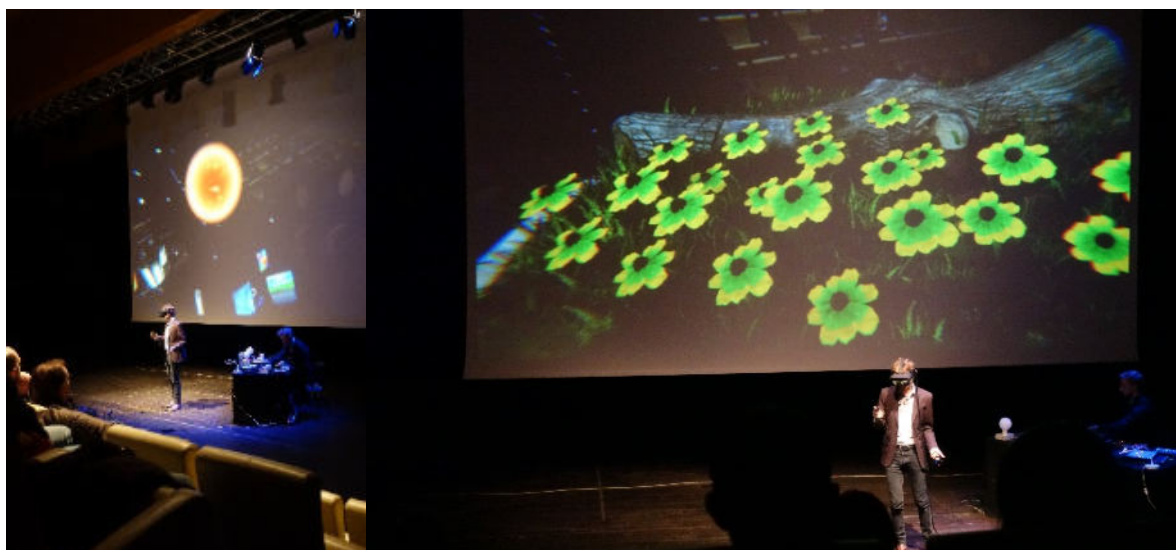


Figura 4. Immagini della *augmented lecture* "HyperVision".

BIBLIOGRAFIA

- [1] Thees, M., Kapp, S., Strzys, M. P., Beil, F., Lukowicz, P., & Kuhn, J. (2020). Effects of augmented reality on learning and cognitive load in university physics laboratory courses. *Computers in Human Behavior*, 108(2), 106316.
- [2] Mustafa, F., & Meric, T. (2019). Integrating augmented reality into problem-based learning: The effects on learning achievement and attitude in physics education. *Computers & Education*, 142, 103635.
- [3] Ibáñez, M. B., & Delgado-Kloos, C. (2018). Augmented reality for STEM learning: A systematic review. *Computers & Education*, 123, 109-123.
- [4] Tosti, H. C., Chiang, S. J. H., Yang, & Hwang, G. J. (2014). Students' online interactive patterns in augmented reality-based inquiry activities. *Computers & Education*, 78, 97-108.
- [5] Akçayır, M., & Akçayır, G. (2017). Advantages and challenges associated with augmented reality for education: A systematic review of the literature. *Educational Research Review*, 20, 1-11.
- [6] Akçayır, M., Akçayır, G., Pektaş, H. M., & Ocak, M. A. (2016). Augmented reality in science laboratories: The effects of augmented reality on university students' laboratory skills and attitudes toward science laboratories. *Computers in Human Behavior*, 57, 334-342.
- [7] Altmeyer, K., Kapp, S., Thees, M., Malone, S., Kuhn, J., & Brünken, R. (2020). The use of augmented reality to foster conceptual knowledge acquisition in STEM laboratory courses—Theoretical background and empirical results. *British Journal of Educational Technology*, 51(3), 611-628.
- [8] Bacca, J., Baldiris, S., Fabregat, R., Graf, S., & Kinshuk. (2014). Augmented reality trends in education: A systematic review of research and applications. *Educational Technology & Society*, 17(4), 133-149.
- [9] Billinghamurst, M., & Dünser, A. (2012). Augmented reality in the classroom. *Computer*, 45(7), 56-63.
- [10] The Augmented Laboratory website. (2024, January 20). <https://augmentedlaboratory.wordpress.com/>
- [11] Rosi, T., Onorato, P., & Oss, S. (2017). Multiple object, three-dimensional motion tracking using the Xbox Kinect sensor. *European Journal of Physics*, 38, 065003.
- [12] Rosi, T., Perini, M., Onorato, P., & Oss, S. (2021). Commercial virtual reality headsets for developing augmented reality setups to track three-dimensional motion in real-time. *Physics*

Education, 56, 025016.

[13] Art at CERN website. (2024, January 20). <https://arts.cern/>

[14] HyperVision webpage. (2024, January 20). <https://leveluptrento.com/hypervision/>

[15] Brunello, A., & Oss, S. (2022). Augmented Lectures: A Unique Resource to Inspire, Outreach and Understand Science. In *Science & Theatre: Communicating Science and Technology with Performing Arts* (pp. 143-150). Emera

STEM ALL'APERTO E ONLINE: ATTIVITÀ CON LO SMARTPHONE

Eugenia Taranto
Università degli Studi di Enna “Kore”
eugenia.taranto@unikore.it

Abstract

Le competenze STEM sono cruciali per l'alfabetizzazione scientifica, la competitività economica e una cittadinanza responsabile. La matematica, alla base delle discipline STEM, necessita di un insegnamento integrato con la tecnologia. Gli insegnanti devono migliorare le loro competenze tecnologiche per ottimizzare l'apprendimento della matematica. L'uso dei dispositivi mobile, in particolare degli smartphone, offre nuove opportunità educative. I progetti europei MaSCE³ e ASYMPTOTE hanno dimostrato come gli smartphone possano facilitare la modellizzazione matematica all'aperto e l'apprendimento misto. Nel contributo verranno proposte modalità didattiche innovative, evidenziando esempi che favoriscono la partecipazione degli studenti, il lavoro di gruppo, le capacità logiche e la comprensione dei concetti matematici.

Parole-chiave

MathCityMap, matematica all'aperto, ASYMPTOTE, matematica online

INTRODUZIONE E RIFERIMENTI TEORICI

In tempi di rapida innovazione tecnologica e sfide globali, lo sviluppo delle competenze scientifiche, tecnologiche, ingegneristiche e matematiche diventa importante. Tali competenze, infatti, migliorano l'alfabetizzazione scientifica personale dei cittadini; la competitività economica internazionale; e sono una base essenziale per una cittadinanza responsabile (Maass et al., 2019). Da un lato, è ampiamente riconosciuto che la matematica è alla base di tutte le altre discipline STEM (Scienze, Tecnologia, Ingegneria e Matematica). Dall'altro lato, nell'epoca in cui viviamo, il processo di insegnamento e apprendimento non può prescindere dall'esistenza della tecnologia (Bergsten & Frejd, 2019). Queste condizioni richiedono pertanto che gli insegnanti migliorino le loro competenze tecnologiche per migliorare l'apprendimento della matematica. Questo non vuol dire però mettere troppa enfasi sulla tecnologia a discapito della matematica. Ci sono infatti tre ragioni per le quali mettere in discussione il modello tecno-centrico, ovvero quello in cui la tecnologia sovrasta gli altri elementi del contesto educativo (Tsui, 2022; Servaes & Hoyng, 2017).

Tabella 1. Mishra, P. (2013). Conferenza plenaria dal titolo “Technology and teachers’ training: An American perspective”.

Generazioni	
10.000	Discorsi
750	Agricoltura
500	Scrittura
400	Biblioteche
40	Università
24	Stampa
16	Orologi accurate
5	Telefono
4	Radio
3	Televisione
2	Computer
1	Internet/email
0	Gps, mp3, YouTube, web 2.0, etc.

Il primo motivo è che la tecnologia cambia rapidamente. Dalla Tabella 1, vediamo che ci sono stati veloci e drastici cambiamenti. I *discorsi*, che ci distinguono dagli altri esseri viventi, sono iniziati 10.000 generazioni fa. L'*agricoltura* è il momento in cui ciascuno svolge un preciso ruolo per la società. Qualcuno lavora la terra, qualcuno si prende cura degli animali, qualcun altro insegna ai bambini. E noi, come educatori, siamo emersi proprio 750 generazioni fa. Passiamo a 500 generazioni fa: la *scrittura*, un'invenzione potente che permette di passare le conoscenze, i saperi, da una generazione alla successiva. Solo 24 generazioni fa siamo passati alla *stampa*, che ha democratizzato le informazioni. La scrittura non è più privilegio dei nobili, ma diritto di tutti. Due generazioni fa i *computer*, una generazione fa *internet/email*. È sostanzialmente quello raffigurato in Figura 1 il mondo in cui viviamo oggi e nel quale i giovani d'oggi stanno crescendo. Siamo circondati da applicazioni che non sono nate con l'intento di voler cambiare il mondo ma indubbiamente favoriscono la condivisione di idee tra gruppi ed all'esterno di questi gruppi.



Figura 1. Il mondo in cui viviamo oggi

Il secondo motivo per mettere in discussione l'inquadramento tecno-centrico è quello di ripensare alla questione problematica dell'integrazione della tecnologia nella didattica. Come notavamo prima, il mondo è permeato da diverse tecnologie. Se noi ci concentriamo sul considerare un iPhone, una Xbox 360 o un computer, queste tecnologie non sembrano essere annoverate tra le tecnologie educative (almeno per un non addetto ai lavori). Tuttavia, potrebbero esserci dei modi efficaci per utilizzarle in classe. Se invece pensiamo ad una calcolatrice, non necessariamente grafica, ecco che questa sembra di più una tecnologia educativa. Ci sono una serie di pubblicazioni su come utilizzare le calcolatrici scientifiche e/o grafiche nella scuola secondaria di primo e secondo grado (e.g., Hitt, 2011; Trouche, 2005). Ma quanti ragazzi vediamo andare in giro con una calcolatrice? Nessuno! E il motivo è che questo è un device che svolge una singola funzione. I ragazzi di oggi usano tecnologie che gli permettono di fare più cose contemporaneamente. Pensiamo al cellulare: esso ci dice che ore sono, che giorno è, che tempo fa, e fa pure i calcoli. E per un insegnante, avere in aula una tecnologia come questa, richiede molto controllo. Eppure, se spieghiamo il Teorema di Pitagora dal libro o guardando un video su YouTube o avvalendoci di un software di geometria dinamica come GeoGebra, sono gli studenti che hanno più controllo del proprio apprendimento. La verità è che molte tecnologie non sono nate per essere tecnologie didattiche, ma viene qui il bello: come user di tecnologia noi possiamo *ridefinire* l'uso della tecnologia. Possiamo farla nostra e usarla per raggiungere obiettivi non pensati dai designer. Questo fenomeno rientra in quello che Rabardel e Beguin (2000) chiamano *catacresi*. Ad esempio, sappiamo bene che la sedia è quell'artefatto che ci permette di accomodare la seduta, ma quanti di noi non hanno mai usato una sedia per bloccare una porta affinché non sbattesse per via della corrente? Oppure ancora, pensiamo alla mail: chi di noi non si è mai inviato una mail per ricordarsi cose da fare, per archiviare

file, per inviarsi un file e continuare a lavorarci da casa. Ecco che questi descritti sono tutti modi alternativi di utilizzare oggetti per uno scopo diverso da quelli per i quali erano stati concepiti.

Come insegnanti ed educatori abbiamo l'opportunità di ripensare gli usi della tecnologia e solo il suo riutilizzo rende una tecnologia educativa, ovvero capace di soddisfare precisi scopi pedagogici. La parola chiave è *riutilizzare* che è un atto creativo ed innovativo. Il ruolo principale in questo lo gioca proprio l'insegnante: non è vero che l'insegnante può farlo chiunque e non è vero che l'insegnante può essere scavalcato dalla tecnologia. Lui è l'unico mediatore nell'educazione e formazione dell'alunno che deve diventare cittadino di domani (Tortora & Iannece, 2009).

Il terzo motivo per mettere in discussione l'inquadramento tecno-centrico è quello di ignorare importanti caratteristiche legate all'educazione, quali contenuto e pedagogia.

Non possiamo negare che la tecnologia abbia cambiato profondamente le professioni del XXI secolo (Susskind & Susskind, 2015). Ad esempio, i matematici usano software per fare modellizzazioni prima impossibili; e pensiamo ancora alla biomedicina: le protesi, gli arti robotici; oppure all'astrofisica, le sonde nello spazio; Sarebbe un errore pensare che la tecnologia non condizioni anche l'insegnamento. Essere un insegnante è una missione veramente complessa (Zainab, n.d.): richiede la conoscenza del background degli studenti, la conoscenza profonda della disciplina che si insegna e richiede di capire sempre più che ruolo gioca la tecnologia nell'influencare quello che fanno gli studenti ed il modo in cui si può insegnare avvalendosi della tecnologia.

Conoscere la tecnologia di per sé non è sufficiente. Sapere usare uno strumento tecnologico non equivale a saperlo applicare alla didattica. Aspettarsi che un docente che impara ad usare uno strumento, capisca anche da solo come integrarlo nella propria didattica, significa aspettarsi troppo. Servono sperimentazioni, prove e tentativi per aiutare gli insegnanti ad integrare la tecnologia nella didattica. Non è un uso crescente di tecnologia che favorisce l'apprendimento degli studenti, piuttosto l'efficacia dell'uso della tecnologia dipende dagli approcci di insegnamento usati in congiunzione con essa.

Tecnologia e pedagogia devono essere in stretta relazione tra di loro (Koehler & Mishra, 2009). La tecnologia cambia cosa e come insegniamo (*ibidem*). L'insegnamento si basa sempre su qualcosa e questo qualcosa è il contenuto. La materia che insegniamo richiede che se ne possieda una profonda conoscenza e, soprattutto, conoscere una disciplina non è la condizione necessaria e sufficiente per saperla insegnare (*ibidem*). Posso essere un eccellente matematico, ma questo non significa che automaticamente io sappia insegnare matematica, potrei – ad esempio – non essere in grado di saper comunicare in modo efficace con gli studenti.

Lo psicologo Lee Shulman (1986) aveva sottolineato l'importanza della congiunzione tra conoscenza dei contenuti e conoscenza pedagogica ed indicava questo con la sigla Pedagogical Content Knowledge (PCK). Questo termine riguarda la nozione della trasformazione del sapere matematico in sapere da insegnare (Chevallard & Bosch, 2020) e questa avviene quando l'insegnante interpreta il sapere matematico, trova modi diversi con cui poterlo trasmettere ed adatta i materiali alle conoscenze possedute dagli allievi. Una buona prassi, ad esempio, è quella di alternare diverse strategie di insegnamento in maniera flessibile: lezione frontale, didattica laboratoriale (Anichini et al., 2004), fare uso di situazioni a-didattiche (Brousseau, 1997), di flipped classroom, eccetera.

Ma, come abbiamo detto, anche la tecnologia influenza il contenuto. Pensate a GeoGebra: usare questo software ci dà una visione diversa della geometria, che non è più concepita come statica su un foglio di quaderno, ma la vediamo in potenza, fortemente dinamica.

Allora Tecnologia, Pedagogia e Contenuto non devono essere considerati in isolamento tra loro, piuttosto devono interagire tra loro. Dobbiamo intenderli come integrati nel costrutto chiamato TPACK (Koehler & Mishra, 2009), acronimo che possiamo anche riportare come Total PACKage di cui deve disporre e sapere disporre un insegnante del XXI secolo.

Non entrerò nel merito del TPACK (per approfondire si vedano, Koehler & Mishra, 2009; Koehler et al., 2012). Piuttosto, forti dell'esistenza di questo costrutto e del fatto che come educatori abbiamo il "superpotere" di ridefinire l'uso della tecnologia, nel seguito focalizzerò l'attenzione su una tecnologia un po' bistrattata dalla classe.

LO SMARTPHONE BANNATO DALLE AULE

L'apprendimento mobile può essere un'alternativa per insegnare la matematica, coniugandola con la tecnologia (Gerosa & Gui, 2018). I dispositivi mobile possono essere utilizzati per sviluppare attività didattiche e approcci di apprendimento innovativi che cercano di trarre vantaggio dalla diffusione dei dispositivi mobile all'interno della comunità studentesca (Drigas & Pappas, 2015). Tra i dispositivi mobile, lo smartphone ha del potenziale per stimolare nuovi metodi di apprendimento (de Oliveira Freitas & Carvalho, 2017). Eppure allo smartphone la scuola non lascia vita facile.

Il Ministro dell'Istruzione e del Merito, Giuseppe Valditara, il 20 dicembre 2022, ha inviato una circolare alle scuole con le indicazioni da rispettare sull'uso dei telefoni cellulari e di analoghi dispositivi elettronici nelle classi (<https://www.miur.gov.it/-/stop-ai-cellulari-in-classe-circolare-del-ministero-inviata-alle-scuole-valditara-tuteliamo-l-apprendimento-dei-ragazzi-e-il-rispetto-per-i-docenti->). Dalla circolare si leggevano le seguenti frasi, con le quali siamo certamente tutti d'accordo:

- *Distrarsi con i cellulari non permette di seguire le lezioni in modo proficuo*
- *l'uso senza criterio dei dispositivi elettronici può avere [effetti dannosi] su concentrazione, memoria, spirito critico dei ragazzi*

Il Ministro non manca, però, di precisare che *l'utilizzo dei cellulari e di altri dispositivi elettronici può essere ovviamente consentito, su autorizzazione del docente, e in conformità con i regolamenti di istituto, per finalità didattiche, inclusive e formative, anche nell'ambito degli obiettivi del Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD) e della "cittadinanza digitale"*.

Tra le attività didattiche che coinvolgono l'utilizzo dello smartphone, ci sono due app che mi stanno molto a cuore e delle quali ho piacere di parlarvi: MathCityMap e ASYMPTOTE. Si tratta di due app che permettono di integrare lo smartphone nelle ore di matematica, di restituirgli un po' di "dignità didattica", se vogliamo, e hanno con sé benefici e potenzialità nelle quali ora entrerei nel merito.

I progetti europei MaSCE³ (Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe) e ASYMPTOTE (Adaptive Synchronous Mathematics Learning Paths for Online Teaching in Europe), recentemente conclusi, hanno proprio posto l'accento sulle possibilità didattiche che si possono associare agli smartphone per fare sia *modellizzazione matematica all'aperto*, sia per sfruttare *l'apprendimento misto*, ovvero l'alternanza di un ambiente di apprendimento online ed in presenza.

MathCityMap E MaSCE³

MathCityMap (MCM) è un sistema che permette di fare matematica all'aperto, attraverso i percorsi di matematica. Un percorso di matematica è una passeggiata matematica su di un sentiero, attraverso la quale si può sperimentare la matematica scoprendola in luoghi ed oggetti interessanti (Shoaf, Pollak & Schneider, 2004). Un percorso di matematica può avvenire ovunque ed è adattabile a tutte le fasce d'età (Ludwig, Jesberg & Weiß, 2013). Il primo percorso di matematica risale a più di 40 anni fa, creato da Blaine e Clark (1984) intorno alla città di Melbourne (Australia), per avvicinare la cittadinanza a scoprire la matematica che ci circonda. A quel tempo, per fruire il percorso, era necessaria una guida che fosse cartacea o una persona reale. Con il sistema MCM, l'innovazione sta nell'aver coniugato l'idea dei percorsi di matematica con le potenzialità della tecnologia, per impiegarla a scopi didattici.



Figura 2. Il sistema MathCityMap

Il progetto MCM, risale al 2012, ed è coordinato dal prof. M. Ludwig dell'Università Goethe di Francoforte, con cui ho il piacere di collaborare dal 2016. Il sistema è stato oggetto di migliorie tecnologiche e didattiche con il più recente progetto europeo MaSCE³, conclusosi nel 2022 (<https://masce.eu>)¹. MCM è un sistema composto da un portale web e un'applicazione per smartphone. Il portale web (<https://mathcitymap.eu/it/>) è il luogo in cui accedono gli educatori (o gli insegnanti di matematica). In esso si trova un database di attività dei percorsi matematici, che appaiono come appuntati su una mappa digitale, poiché sono localizzate con coordinate GPS. Si possono anche creare nuove attività. Una volta selezionate le attività di interesse, che devono essere tra loro limitrofe, quindi tutte facilmente raggiungibili a piedi, si genera un percorso che le contiene e al quale viene assegnato un codice. Questo codice è ciò che occorre dare agli utenti che devono percorrere il percorso mediante l'app. Infatti, chi si cimenta nel percorso matematico, accede alle attività e le svolge con l'aiuto di un'applicazione mobile abilitata al GPS. Ogni attività è accompagnata da una foto che permette di identificare univocamente l'oggetto su cui il compito è stato creato; una consegna da soddisfare; uno spazio per inserire la risposta (il sistema fornisce una validazione immediata una volta che è stata inserita dall'utente); un massimo di tre suggerimenti, che possono essere consultati dall'utente se ha difficoltà a identificare la strategia di soluzione da adottare; un esempio di soluzione che è visibile all'utente solo se risolve il problema. L'applicazione MCM è gratuita e rispetta la protezione dei dati personali (GDPR). Inoltre, è disponibile per Android e iOS. Preciso che nella metodologia della matematica all'aperto, gli studenti lavorano in gruppi, generalmente di 3 membri ciascuno, in modalità cooperativa. Ovvero, ogni membro del gruppo ricopre un ruolo specifico: uno studente è il tecnologico (ha l'app e la utilizza); un altro è il misuratore (ha gli strumenti di misura e ne fa uso all'occorrenza); un altro ancora è il calcolatore (con carta, penna e calcolatrice ragiona, insieme agli altri, sulla risoluzione dell'attività). Per avere un'idea più chiara di come concretamente funziona l'app vi rimando alla visione di questo breve video: https://www.youtube.com/watch?v=2gvy8D1zs5s&ab_channel=MathCityMapMathedrau%C3%9Fen.

Negli anni, con il team dell'Università Goethe di Francoforte, abbiamo notato che i percorsi di matematica venivano spesso utilizzati solo per visite di istruzione e che gli insegnanti esprimevano qualche perplessità nel loro utilizzo. Ad esempio, alcuni insegnanti sentivano la necessità di comunicare con gli studenti, che erano sparsi tra le tappe del percorso, o che gli stessi studenti avevano bisogno di interfacciarsi con l'insegnante durante la risoluzione di un compito, ma che rinunciavano perché a volte significava doversi spostare fisicamente per raggiungere l'insegnante e perdere minuti preziosi che

¹ Il partenariato di progetto, finanziato dal programma Erasmus+ (grant no. 2019-1-DE03-KA201-060118), comprendeva 8 partner da 6 diversi paesi europei (Portogallo, Spagna, Francia, Germania, Italia, Estonia).

avrebbero potuto essere dedicati alla risoluzione matematica del problema. L'obiettivo perseguito nel progetto MaSCE³ è stato quello di formare un elevato numero di insegnanti di matematica nell'usare regolarmente la matematica all'aperto, come metodologia per l'insegnamento-apprendimento della matematica, avvalendosi di MCM e delle sue funzionalità.

Il progetto MaSCE³ ha soddisfatto diversi Intellectual Output, ossia ha raggiunto diversi risultati, sui quali entro brevemente nel merito.

- **Aula Digitale:** dal punto di vista tecnico, è stato creato un ambiente da cui l'insegnante accede tramite il portale web e beneficia di 3 funzioni. Il tracciamento degli studenti, grazie al GPS, così da vedere come e dove gli studenti si spostano fruendo il percorso; l'interazione mediante una chat che funziona esattamente come una messaggistica istantanea: il docente può contattare tutti i gruppi contemporaneamente o singolarmente; ed il monitoraggio delle azioni che compiono gli studenti nel percorrere il percorso (per maggiori informazioni si rimanda a Taranto et al., 2021).
- **Tipologie di risposte per le attività:** queste sono state arricchite (dapprima c'erano solo 3 tipologie: scelta multipla, valore esatto e intervallo). Adesso ci sono più opzioni, tra queste anche la possibilità di inserire del testo come risposta, frazioni, valori multipli, attività di supporto, ...
- **Realtà Aumentata:** è stata implementata la possibilità di inserire testo, immagini o video quando inquadro l'oggetto su cui è stata pensata l'attività. Potreste pensare che queste informazioni si potrebbero dare su carta o inserirle direttamente nella consegna. Certo! Ma ci sono benefici per propendere alla Realtà Aumentata. Ad esempio, per il docente c'è più facilità nel design. Si possono sfruttare attività già esistenti e ricrearle aggiornando solo i dati. Per gli studenti, c'è sicuramente più coinvolgimento, divertimento e facilità di memorizzazione.
- **Percorsi tematici:** Un percorso tematico è una raccolta di attività matematiche, organizzate sotto forma di percorso, su un argomento comune del curriculum (frazioni, superfici, indici statistici, ...), pensato per aiutare gli insegnanti ad inserire nella loro programmazione la matematica all'aperto. Vi invito ad andare sul sito del progetto per approfondire questi percorsi, utilizzarli o prendere spunto (<https://masce.eu/the-project/intellectual-outputs/theme-based-trails/>).
- **MOOC e Short-Term Curriculum:** Si tratta delle formazioni docenti che abbiamo svolto nel corso del progetto, sia a distanza (a livello internazionale) sia in presenza (a livello nazionale), per formare, aggiornare e supportare gli insegnanti nella conoscenza e nell'uso di MCM e delle novità scaturite dal progetto.

Scegliere di lavorare con MCM può quindi portarvi a beneficiare dei seguenti aspetti: gli studenti vivono esperienze fondamentali, in un setting d'aula diverso (non più seduti su di un banco, ma esplorando la realtà circostante); sono coinvolti in prima persona, nell'uso di strumenti, tecnologici e non (quelli di misura) ed è coinvolto tutto il loro corpo, quindi apprendono attraverso la costruzione attiva del sapere. La modellizzazione matematica non avviene più sui libri di testo, dove i dati sono tutti lì riportati o al più da ricavare mediante formule inverse. Gli studenti sono chiamati a mettere a frutto le proprie competenze per capire come e quali dati reperire per risolvere il problema (competenze di problem-solving). Si denotano un aumento dell'interesse e anche motivazione verso la disciplina e si può lavorare in un'ottica interdisciplinare, perché è possibile corredare il percorso con informazioni artistiche, storiche e culturali, guardando con occhi diversi la realtà che ci circonda.

ASYMPTOTE

ASYMPTOTE dovete immaginarlo come il fratello di MCM. Vi racconto un po', brevemente, come è nato.

Come certamente tutti ricordiamo, la pandemia di Coronavirus ha portato, nella primavera del 2020, a quello che è stato definito *Emergence Remote Teaching (ERT)*, i.e., “is a temporary shift of instructional delivery to an alternate delivery mode due to crisis circumstances” (Hodges et al. 2020). Sia gli insegnanti sia gli studenti sono stati costretti a fare un nuovo uso della tecnologia, impegnandosi in una sfida che ha visto uno spostamento dell’insegnamento-apprendimento dalla presenza all’online. Tra gli altri, Barlovits et al. (2022) hanno identificato i seguenti cinque problemi principali in uno studio transnazionale sull’istruzione ERT online:

- Perdita di interazione personale causata dalla separazione spaziale tra insegnanti e studenti e dallo spostamento dell’insegnamento;
- Mancanza di un’adeguata valutazione formativa, ovvero gli insegnanti hanno segnalato problemi nel monitorare i progressi di apprendimento degli studenti, mentre gli studenti hanno percepito una mancanza di feedback;
- Carenza di risorse curriculari per quanto riguarda la disponibilità di materiali pronti all’uso;
- Mancanza di attrezzature tecniche per la partecipazione degli studenti ai corsi online;
- Mancanza di competenze digitali tra insegnanti e studenti.

In questo scenario, noi eravamo in pieno progetto MaSCE³, con le sperimentazioni di MCM (che coinvolgevano insegnanti da tutto il mondo e le loro classi) da portare avanti. Per venire incontro a quanti avevano difficoltà ad uscire di casa, a causa delle normative imposte dal lockdown, abbiamo pensato di proporre MCM@home. Praticamente, la differenza con il MCM originale sta nel violare uno dei criteri di progettazione, ovvero mentre tutte le attività di matematica all’aperto prevedono che l’utente deve svolgere all’aperto un ruolo attivo e quindi effettuare conteggi o misurazioni per reperire i dati necessari, in MCM@home i dati erano tutti già indicati nella consegna così che anche da casa si potesse risolvere l’attività proposta. Questo modo di procedere, però, snaturava MCM e non ci soddisfaceva in pieno. Da qui l’idea di un nuovo sistema pensato per un apprendimento a distanza: ASYMPTOTE. Si è costituito un nuovo partenariato strategico ed è nato l’omonimo progetto europeo² che ha mirato a sviluppare un sistema mobile sincrono adattivo per l’insegnamento della matematica online.

Due idee sono state fondamentali nel progetto. L’idea di utilizzare un modello micro-adattivo (Durand et al., 2013). Significa che l’insegnante definisce innanzitutto i principali risultati che gli studenti possono raggiungere. Quindi, seleziona alcune attività di apprendimento; definisce un ordine di queste attività (per aumentare il livello di difficoltà o per approfondire i concetti); definisce attività di supporto o di sfida, per adattarsi alla risposta dello studente. E poi l’idea di utilizzare i grafi diretti come struttura significativa e considerevole per la rappresentazione efficiente dei percorsi e delle traiettorie di apprendimento.

All’interno del progetto ASYMPTOTE, abbiamo definito Grafo di Apprendimento (Learning Graph, LG) un grafo diretto $G = (V, E)$, dove ogni vertice V rappresenta un’attività, basata su una traiettoria di apprendimento come metodo di apprendimento previsto e atteso. Si noti che un LG include anche ulteriori attività per approfondire la comprensione dell’argomento matematico da parte degli studenti (attività di sfida) o attività di supporto a un livello più elementare (Figura 3).

² Il progetto, finanziato dal programma Erasmus+ (grant no. 2020-1-DE01-KA226-HE-005738) è stato portato avanti da 7 istituzioni di 5 paesi europei (Germania, Grecia, Italia, Portogallo e Spagna).

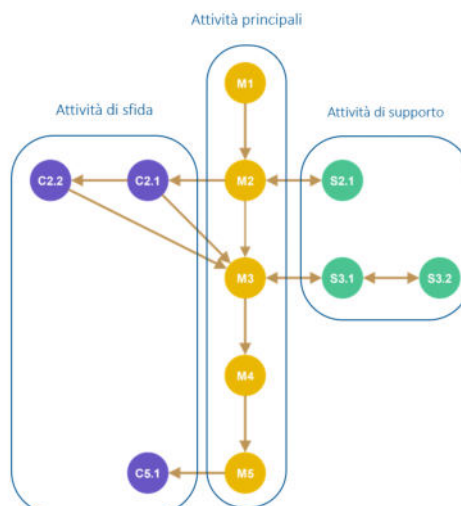


Figura 3. Un possibile Grafo di Apprendimento o Learning Graph

Possiamo dire che un LG assomiglia ad una lisca di pesce. Le attività principali, quelle in giallo, appaiono nella lisca centrale. Poi osserviamo che le attività di supporto sono verdi e a destra delle attività principali. Mentre le attività di sfida sono viola e a sinistra delle principali. Ogni attività di supporto o di sfida è legato ad una sola attività principale.

Entriamo più nel dettaglio: le attività principali (in giallo) sono obbligatorie e costituiscono la spina dorsale di un LG. In uno scenario auspicabile, ogni attività principale copre un aspetto dell'argomento generale. Quindi, uno studente che ha risolto tutte le attività principali ha incontrato e appreso i requisiti minimi dell'argomento. Ciò implica che gli studenti dovrebbero risolvere il maggior numero possibile di attività principali. Le attività di supporto (in verde) sono collegate al lato destro di un'attività principale corrispondente e forniscono attività correlate ad un livello inferiore, che possono aiutare a risolvere l'attività principale in seguito. Può trattarsi di una versione più semplice dell'attività principale o della ripetizione di un argomento necessario per risolvere la principale. Le attività di supporto si sbloccano quando, dopo 2 volte, si risponde in maniera errata all'attività in giallo. Ad un'attività principale possono essere assegnate più attività di supporto e la loro risoluzione non comporta mai alcuno svantaggio per gli studenti. Inoltre, le attività di supporto sono collegate da frecce orizzontali bidirezionali per evidenziare che gli studenti possono sempre tornare all'attività principale da qualsiasi task di supporto associato. Si osservi che, poiché la prima attività principale di una LG si trova in alto e l'ultima in basso, i vertici tra le attività principali sono sempre rivolti verso il basso. Le attività di sfida (in viola) si trovano a sinistra dell'attività principale e si suppone che siano di difficoltà maggiore rispetto a quest'ultima, per sfidare gli studenti che finiscono prima o che cercano di approfondire l'argomento. Le attività di sfida si sbloccano dopo aver risolto la rispettiva attività principale o le attività di sfida precedenti, poiché più di un'attività di sfida può essere associata ad una principale. Inoltre, poiché uno studente può risolvere le attività di sfida solo dopo aver completato quella principale corrispondente, i vertici diagonali di tutte le attività di sfida puntano verso il basso all'attività principale successiva.

Come vi accennavo, essendo fratello di MCM, anche ASYMPTOTE è un sistema a due componenti (Figura 4).

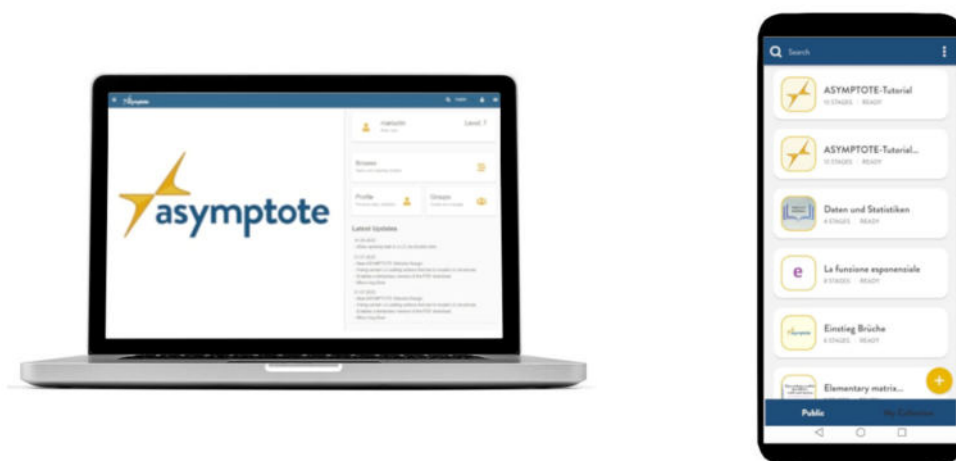


Figura 4. Il sistema ASYMPTOTE

Il portale web (<https://asymptote-project.eu/it>) è lo spazio di lavoro per gli educatori o gli insegnanti. Permette di selezionare le attività o gli LG disponibili da un database aperto; di creare i propri contenuti; e di seguire il processo di lavoro degli studenti in tempo reale all'interno della funzione Aula Digitale (molto simile a quella già descritta per MCM). L'app mobile è lo spazio pensato per gli studenti, nel quale essi possono lavorare sul LG. Sulla falsa riga dell'app di MCM, anche quella di ASYMPTOTE offre fino a tre suggerimenti per ogni attività; una convalida immediata della risposta dopo aver inserito una soluzione calcolata; e può essere visualizzata una soluzione di esempio. L'app è conforme al GDPR e disponibile per dispositivi iOS e Android.

Ritornando ai cinque problemi delineati da Barlovits e colleghi (2022), a proposito dell'istruzione online durante l'ERT, desidero farvi notare come ASYMPTOTE è in grado di risolverli. Infatti, ASYMPTOTE prevede:

- Interazione personale: fornisce uno strumento di chat per la comunicazione sincrona tra docenti e studenti come parte della funzione Aula Digitale;
- Valutazione formativa adeguata: fornendo suggerimenti, convalida delle risposte e soluzioni di esempio nell'app ASYMPTOTE e offrendo una funzione di monitoraggio in tempo reale per gli insegnanti all'interno della funzione Aula Digitale;
- Risorse curriculari: fornisce sia un database aperto di esempi di attività e LG sia offre agli insegnanti la possibilità di creare i propri contenuti;
- Attrezzatura tecnica: seguendo un approccio di apprendimento mobile, è richiesto solo uno smartphone da parte dello studente;
- Competenze digitali: fornisce un'applicazione mobile di facile utilizzo per gli studenti, nonché un manuale e video tutorial per gli insegnanti su come utilizzare il portale web.

ASYMPTOTE è nato, quindi, per un apprendimento integrale a distanza, ma oggi, in epoca post-pandemia, è una tecnologia che si può utilizzare in modi versatili (apprendimento misto, attività di recupero/potenziamento, ripasso per compiti in classe/esami).

BREVI CONCLUSIONI

Abbiamo ricordato all'inizio l'importanza delle competenze STEM nel contesto dell'innovazione tecnologica e delle sfide globali attuali. Queste competenze sono fondamentali non solo per l'alfabetizzazione scientifica dei cittadini e la competitività economica internazionale, ma anche per una

cittadinanza responsabile. In questo contesto, la matematica riveste un ruolo cruciale come base per tutte le altre discipline STEM. L'integrazione della tecnologia nel processo di insegnamento e apprendimento è diventata indispensabile. Gli insegnanti sono chiamati a migliorare le loro competenze tecnologiche per rendere l'apprendimento della matematica più efficace. L'apprendimento mobile emerge come un'alternativa valida, con i dispositivi mobile, in particolare gli smartphone, che offrono nuove opportunità per sviluppare attività didattiche innovative. I progetti europei MaSCE³ e ASYMPTOTE hanno dimostrato le potenzialità educative degli smartphone, sia per la modellizzazione matematica all'aperto sia per l'apprendimento misto. Questi progetti hanno fornito esempi concreti di come lo smartphone possa essere utilizzato per aumentare la partecipazione degli studenti, sviluppare il lavoro di gruppo, potenziare le capacità logiche e facilitare una comprensione più profonda dei concetti matematici. L'utilizzo degli smartphone nell'insegnamento della matematica rappresenta un approccio promettente per affrontare le sfide educative contemporanee, promuovendo un apprendimento più coinvolgente e interattivo. Le esperienze dei progetti europei qui discussi sottolineano l'importanza di continuare a esplorare e implementare modelli didattici che integrino efficacemente tecnologia e insegnamento della matematica. Spero che queste proposte di riutilizzo dello smartphone nelle ore di matematica possano aver destato il vostro interesse. I due sistemi sono "figli" di progetti europei, ormai conclusi, ma con "prole" sempre in aggiornamento! Per entrambi i sistemi sono uno dei contatti di riferimento per l'Italia. Spero di ritrovarvi o sentirvi presto.

BIBLIOGRAFIA

- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O., & Statale, L. S. (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino*.
- Barlovits, S., Caldeira, A., Fesakis, G., Jablonski, S., Koutsomanoli Filippaki, D., Lázaro, C., Ludwig, M., Mammana, M.F., Moura, A., Oehler, D.-X.K., Recio, T., Taranto, E., & Volika, S. (2022). Adaptive, Synchronous, and Mobile Online Education: Developing the ASYMPTOTE Learning Environment. *Mathematics*, 2022(10), 1628. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10101628>
- Bergsten, C., & Frejd, P. (2019). Preparing pre-service mathematics teachers for STEM education: An analysis of lesson proposals. *ZDM Mathematics Education*, 51, 941–953. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01071-7>.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Oversat og redigeret af: N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Blane, D. C. & Clarke, D. (1984). *A mathematics trail around the city of Melbourne*. Monash Mathematics Education Center, Monash University
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Didactic transposition in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 214–218.
- de Oliveira Freitas, R., & Carvalho, M. (2017). Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática. *Laplace em Revista*, 3(2), 47–61.
- Drigas, A. S., & Pappas, M. A. (2015). A review of mobile learning applications for mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, 9(3).
- Durand, G., Belacel, N., & LaPlante, F. (2013). Graph theory based model for learning path recommendation. *Information Sciences*, 251, 10–21.
- Gerosa, T., & Gui, M. (2018). Dall'esclusione digitale al sovrautilizzo: origini sociali, pervasività dello smartphone e rendimenti scolastici. *Polis*, 32(3), 341–370.
- Hitt, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(6), 723-735.
- Hodges, C. B., Moore, S., Lockee, B. B., Trust, T., & Bond, M. A. (2020). The difference between emergency remote teaching and online learning. *Educase Review*, 27, 1–12.

- DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
- Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Contemporary issues in technology and teacher education*, 9(1), 60-70.
- Koehler, M. J., Shin, T. S., & Mishra, P. (2012). How do we measure TPACK? Let me count the ways. In *Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact: A research handbook on frameworks and approaches* (pp. 16–31). IGI Global.
- Ludwig, M., Jesberg, J., & Weiß, D. (2013). MathCityMap – faszinierende Belegung der Idee mathematischer Wanderpfade. *Praxis der Mathematik*, 55(53), 14–19.
- Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education*, 51, 869–884. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5>
- Mishra, P. (2013). Conferenza plenaria dal titolo “Technology and teachers’ training: An American perspective”.
- Rabardel, P., & Beguin, P. (2000). Concevoir pour les activités instrumentées. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 14, 35–54.
- Servaes, J., & Hoyng, R. (2017). The tools of social change: A critique of techno-centric development and activism. *New Media & Society*, 19(2), 255-271.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi:10.3102/0013189X015002004>
- Shoaf, M. M., Pollak, H., & Schneider, J. (2004). *Math Trails*. The Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP).
- Susskind, R. E., & Susskind, D. (2015). *The future of the professions: How technology will transform the work of human experts*. Oxford University Press.
- Taranto, E., Mammana, M.F., Alberti, V., Ferro, R., Labasin, S. (2021). Mathematics outdoors with the Digital Classroom. In: G. Adorni, M. Allegra, S. Gaglio, M. Gentile, & N. Scarabottolo (Eds.), *Atti del Convegno Didamatica 2021*, (pp. 199–207). Palermo, Italia.
- Tortora, R., & Iannece, D. (2009). Risonanza: una parola chiave per l'insegnamento della matematica. *L'Educazione Matematica*, 1(2), 5–18.
- Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects. *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*, 9-39.
- Tsui, E. (2002). Technologies for personal and peer-to-peer (p2p) knowledge management. In *CSC Leading Edge Forum Technology Grant Report*.
- Zainab, A. E. (n.d.). Vision and missions of the teacher in the 21st century. Available at: <https://www.globalacademicgroup.com/journals/knowledge%20review/Ame%20Eke%20Zainab.pdf>

COMUNICAZIONI

COMPETENZE MATEMATICHE E ARTEFATTI: UN PERCORSO NELLA SCUOLA PRIMARIA ANALIZZATO CON LA TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI SEMIOTICHE

Maria Giuseppina Adesso¹, Roberto Capone², Oriana Fiore³

**(1) Liceo Scientifico Da Procida, Salerno; (2) Università di Bari Aldo Moro; (3)
Liceo Imbriani, Avellino**

Abstract

In questo articolo viene descritta una attività condotta all'interno di un più ampio progetto denominato "Primarie Matematiche". Si tratta di un progetto di formazione e ricerca-azione rivolto agli insegnanti della scuola primaria, ed è in continuità con i progetti "Medie Matematiche" e "Liceo Matematico". Qui ci siamo concentrati su un'attività realizzata principalmente utilizzando lo strumento Tangram pitagorico. Questa attività è stata vissuta durante il terzo incontro di progetto (tempo 3 ore). Partendo dal quadro teorico di Niss descritto nel progetto KOM, le attività sono state pianificate per incrociare la competenza "aids and tools" con le altre, in particolare con il pensiero matematico, la rappresentazione e la comunicazione. I protocolli sono stati letti secondo il quadro delle rappresentazioni semiotiche di Duval, che ci ha suggerito come l'uso di artefatti può facilitare l'elaborazione e la conversione delle informazioni, portando a una migliore concettualizzazione e comprensione dei concetti matematici. Inoltre, gli artefatti possono aiutare a identificare le idee sbagliate nella fase iniziale, consentendo agli insegnanti di affrontarle prima che diventino profondamente radicate e difficili da correggere.

Parole-chiave

Competenze, rappresentazioni semiotiche, misconcezioni, artefatti, Pitagora.

INTRODUZIONE

Duval (1998) e Healy e Hoyles (1998), occupandosi nelle loro ricerche delle difficoltà nell'apprendimento della geometria, hanno spiegato che l'insegnamento della geometria è spesso più complesso rispetto a svolgere calcoli aritmetici o di algebra elementare. È quindi importante che l'approccio all'insegnamento della geometria preveda anche l'uso di ausili e strumenti in classe. Ci sono molti riferimenti ministeriali che incoraggiano l'insegnamento della matematica, in particolare della geometria, in modo innovativo, partendo da stimoli concreti e utilizzando artefatti appropriati che stimolino la curiosità epistemica e un approccio empirico. Infatti, la risoluzione di problemi geometrici richiede spesso la mobilitazione e la coordinazione tra il linguaggio verbale e le rappresentazioni matematiche anche con continui riferimenti alla realtà. Generalmente, gli studenti utilizzano strategie di risoluzione che coinvolgono diversi registri semiotici e convertono tra diversi registri o trattamenti all'interno dello stesso registro e questo richiede la mobilitazione efficace di più competenze matematiche. Tra le otto competenze matematiche descritte nel progetto KOM (Niss, 1999) c'è la competenza Mathematical aids and tools, ovvero la gestione di ausili materiali e strumenti per l'attività matematica. Si tratta della competenza a trattare ausili e strumenti materiali (oggetti o strumenti fisici, carte o grafici speciali e tecnologie digitali) progettati per facilitare il lavoro matematico. Ciò include l'analisi critica e l'impiego riflessivo di tali ausili e strumenti nell'attività matematica, considerando le loro affordances e limiti. (Niss & Højgaard, 2019, p. 18). Qui, mostriamo alcune attività incentrate sull'utilizzo di un artefatto specifico, il tangram pitagorico, utilizzato per introdurre il teorema di Pitagora. Il percorso didattico è stato sperimentato con quattro classi in due scuole primarie della provincia di Napoli. L'esperimento ha coinvolto 72 bambini di età compresa tra i 9 e gli 11 anni, sette insegnanti che hanno co-pianificato le attività educative e tre ricercatori che hanno svolto il ruolo di tutor nelle classi. Il coinvolgimento dei docenti di classe ha permesso la riproduzione delle attività in ulteriori contesti di classe, diventando così formatori per altri insegnanti all'interno della stessa scuola.

Le attività sono state monitorate all'inizio, in itinere (valutazione formativa) e alla fine del corso (valutazione autentica).

Le attività che proponiamo fanno parte di un più ampio progetto denominato "Primarie Matematiche". Si tratta di un progetto di formazione e ricerca-azione rivolto agli insegnanti della scuola primaria, ed è in continuità con i progetti "Medie Matematiche" e "Liceo Matematico" (Capone et al., 2017), quest'ultimo nato nel 2014 e diffuso in circa duecento scuole secondarie di secondo grado in tutta Italia. Il progetto propone agli insegnanti un approccio educativo alla matematica basato su metodologie didattiche innovative che favoriscano l'insegnamento-apprendimento della disciplina secondo le linee guida nazionali e internazionali, prediligendo l'insegnamento attivo dell'approccio Inquiry basato sull'argomentazione (Soldano & Arzarello, 2019) e dell'approccio dell'Inquiry Based Science Education (Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2000). Le attività sono state rivolte ai 9-10 studenti di 4 classi (72 studenti) in una scuola primaria del Sud Italia. Il caso di studio qui mostrato è la sperimentazione con 18 studenti in classe A (11 maschi, sette femmine). Il livello degli studenti in matematica, valutato dal Test Nazionale Standardizzato (Invalsi) nell'anno scolastico precedente, era medio-basso. In tutte le attività pianificate e sperimentate, abbiamo iniziato a sviluppare la competenza Aids and Tools per sperimentare alcuni strumenti che potrebbero essere utilizzati in matematica, mostrando così le loro opportunità e limiti e riflettendo sul loro uso efficace. Qui ci siamo concentrati su un'attività realizzata principalmente utilizzando lo strumento Tangram pitagorico. Questa attività è stata vissuta durante il terzo incontro di progetto (tempo 3 ore). Partendo dal quadro teorico di Niss descritto nel progetto KOM, le attività sono state pianificate per incrociare questa competenza con le altre, in particolare con il pensiero matematico, la rappresentazione e la comunicazione delle competenze. I protocolli sono stati letti secondo il quadro delle rappresentazioni semiotiche di Duval, che ci ha suggerito come l'uso di artefatti possa facilitare l'elaborazione e la conversione delle informazioni, portando a una migliore concettualizzazione e comprensione dei concetti matematici. Inoltre, gli artefatti possono aiutare a identificare prematuramente alcune misconcezioni consentendo agli insegnanti di usare strategie opportune affinché esse non si radichino più profondamente.

IL QUADRO TEORICO

Per la progettazione dell'attività e per l'analisi dei dati, abbiamo fatto riferimento al quadro KOM (Niss, 1999) e alla teoria delle rappresentazioni semiotiche (Duval, 2017).

Niss, nel suo quadro teorico, fa riferimento a otto competenze matematiche distinte e reciprocamente correlate: mathematical thinking; problem handling; modeling; reasoning; representation; symbols and formalism; communication; aids and tools. Ognuna di queste otto competenze è composta da un lato produttivo e da un lato analitico. In questo lavoro, ci siamo soffermati sulla competenza "aids and tools" che "consiste, da un lato, nell'avere conoscenza dell'esistenza e delle proprietà delle diverse forme di strumenti rilevanti utilizzati in matematica e nell'avere una visione delle loro possibilità e limitazioni in diversi tipi di contesti, e, dall'altro, nell'essere in grado di utilizzare tali ausili in modo riflessivo" (Niss & Højgaard, 2011, pp. 68-69). Queste competenze sono distinte ma non disgiunte in quanto ogni competenza ha un'identità ben definita, ma esse si incrociano come i petali di un fiore (figura 1).

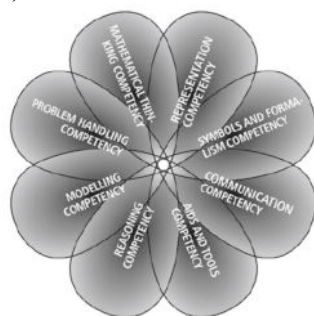


Figure 1. The mathematical competency flower (Niss & Højgaard, 2019, p. 19)

Abbiamo, inoltre, usato la teoria delle rappresentazioni semiotiche (Duval, 2017) e legata al quadro delle competenze matematiche KOM. Da un punto di vista epistemologico, c'è una differenza fondamentale tra la matematica e gli altri domini della conoscenza scientifica: gli oggetti matematici, a differenza dei fenomeni scientifici, non sono mai accessibili dalla percezione o dagli strumenti. L'unico modo per accedervi e affrontarle è utilizzare i segni e la loro rappresentazione semiotica; quindi, l'elaborazione matematica comporta sempre la sostituzione di alcune rappresentazioni semiotiche con un'altra (Duval, 2017). Le difficoltà degli studenti nella comprensione della matematica dipendono dai processi matematici e dal funzionamento cognitivo che ne sono alla base e dai vari registri delle rappresentazioni semiotiche (Duval, 2017). Pertanto, il passaggio da una rappresentazione all'altra è fondamentale per supportare la comprensione dei concetti matematici. Secondo Duval (Duval, 2017), la comprensione di un concetto in matematica presuppone il coordinamento di più (almeno due) registri di rappresentazione semiotica. Le attività principali delle rappresentazioni semiotiche sono i trattamenti e le conversioni. I trattamenti sono trasformazioni di rappresentazioni all'interno dello stesso registro: ad esempio, eseguire un calcolo rimanendo rigorosamente nello stesso sistema di notazione per rappresentare i numeri, completare una figura utilizzando criteri percettivi di connettività o simmetria, ecc. Ciò mette in evidenza il ruolo intrinseco dei sistemi semiotici nei processi matematici. I trattamenti, che possono essere effettuati, dipendono principalmente dalle possibilità di trasformazione semiotica specifiche del registro utilizzato (Duval, 2017). I trattamenti dipendono dal registro semiotico di rappresentazione utilizzato. Le conversioni sono trasformazioni di rappresentazione che consistono nel cambiare un registro senza cambiare gli oggetti che vengono denotati. Da un punto di vista cognitivo, la conversione stimola la comprensione dei concetti matematici. Generalmente, due rappresentazioni distinte dello stesso oggetto non hanno lo stesso contenuto. Pertanto, la coordinazione dei registri semiotici, la capacità di gestire più rappresentazioni dello stesso concetto e la capacità di passare dall'una all'altra sono necessarie per raggiungere la capacità di identificare un concetto con una delle sue rappresentazioni.

LE ATTIVITA' DIDATTICHE

Le attività sono state rivolte a studenti di 9 e 10 anni (72 studenti) di una Scuola Primaria del Sud Italia. Le attività progettuali sono state svolte in 30 ore e organizzate in dieci incontri extracurricolari. Il caso di studio qui mostrato è la sperimentazione con 18 studenti della classe A (11 maschi, sette femmine). Il livello medio degli studenti in matematica, valutato dal Test Nazionale Standardizzato (InValsi) nell'anno scolastico precedente, era medio-basso. Due insegnanti, supportati da due ricercatori in didattica della matematica, sono stati coinvolti in questo caso di studio. Gli studenti sono stati raggruppati in quattro gruppi, due da 5 e due da 4. In tutte le attività pianificate e sperimentate, abbiamo iniziato a sviluppare le competenze "aids and tools" per sperimentare alcuni strumenti che potrebbero essere utilizzati in matematica, mostrandone così le opportunità e i limiti e riflettendo sul loro effettivo utilizzo. Qui ci siamo concentrati su un'attività realizzata principalmente utilizzando lo strumento del Tangram Pitagorico. Questa attività è stata sperimentata durante il terzo incontro (durata 3 ore). Le attività sono state pianificate per incrociare questa competenza con le altre, in particolare con le competenze matematiche di pensiero, rappresentazione e comunicazione; quindi, agli studenti è stato chiesto di rispondere ad alcune consegne che coinvolgevano le competenze di communicating e representation di un preciso oggetto matematico che rimaneva individuato nell'attività con lo strumento. L'artefatto utilizzato è stato il Tangram pitagorico, costituito da alcune tessere di compensato colorato di varie forme che abbiamo costruito per scopi didattici. Le tessere devono essere incorporate per riempire le aree di alcune figure geometriche. In particolare, possono riguardare le figure centrali e piccole, costruite sui cateti di un triangolo rettangolare o quello grande sull'ipotenusa del triangolo rettangolare stesso (Fig.2).



Figure 2. Pythagorean Tangram

Gli studenti, lavorando in gruppi, hanno manipolato il tangram per riempire le cifre richieste, trovandosi coinvolti individualmente in varie attività semiotiche, riguardanti principalmente produzioni scritte. Per prima cosa, gli studenti dovevano individuare le figure che manipolavano: passando dai registri semiotici, dovevano scrivere e rappresentare i nomi delle figure. Infine, agli studenti è stato anche chiesto di prendere le misure, calcolare e confrontare le aree delle figure identificate

RISULTATI

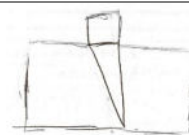
Qui mostriamo alcuni protocolli su uno specifico misconcetto, che è emerso grazie al passaggio tra diverse rappresentazioni: "Il quadrato dovrebbe avere i lati paralleli alla carta". In accordo con il quadro teorico di Duval (Duval, 1995), al fine di evidenziare meglio ogni possibile insorgenza di idee sbagliate, abbiamo proposto agli studenti di lavorare su conversioni multiple. Abbiamo selezionato tre rappresentazioni chiamate R_1 , R_2 e R_3 : in R_1 , gli studenti hanno usato l'artefatto "Tangram pitagorico" per costruire i quadrati sui cateti e sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo. In R_2 , gli studenti descrivono testualmente gli oggetti costruiti. In R_3 , gli studenti rappresentano graficamente gli oggetti descritti. Nella tabella sottostante sono schematizzati alcuni protocolli selezionati in cui vengono confrontate la rappresentazione testuale e la rispettiva rappresentazione grafica di un oggetto matematico.

Table 1. Schema di alcuni protocolli

Studente	R_2 – Rappresentazione testuale	R_3 – Rappresentazione grafica
S ₁	1) Osserva il Tangram. Quante e quali figure riconosci? Ci sono 3 quadrati tra cui c'è un rombo. C'è anche un triangolo scaleno, in tutto, ci sono 6 figure 2) Rappresenta il tuo Tangram	
S ₂	Io riconosco 4 figure che sono 3 quadrati e 1 triangolo scaleno e un rombo	
S ₃	Ci sono 4 figure e sono un triangolo scaleno, un trapezio, un rombo ed un quadrato.	
S ₄	Ci sono 4 figure, riconosco tre 3 quadrati e un triangolo scaleno	

S₅

Sono 4 figure e sono 3 QUADRATI E UN
TRIANGOLO retto



Di seguito alcuni estratti di una discussione orchestrata dall'insegnante

Studente 1 (S1): Ci sono tre quadrati, incluso un rombo.

Lo studente 1 considera il rombo come un quadrato ruotato; Ciononostante, egli rappresenta correttamente le figure.

Studente 2 (S2): Ci sono quattro figure: 2 quadrati, un triangolo scaleno e un rombo.

Sebbene lo studente 2 usi una parola diversa per quadrato e rombo, considera ancora un rombo un quadrato ruotato. Questa convinzione è supportata anche dalla sua rappresentazione grafica, dove mostra un quadrato contenente tutte le figure come sistema di riferimento.

Studente 3 (S3): Ci sono quattro figure: un triangolo scaleno, un rombo, un quadrato e un trapezio.

Questo studente non riconosce due quadrati. Ciononostante, egli fornisce una rappresentazione grafica corretta

Studente 4 (S4): Ci sono tre quadrati e un triangolo scaleno.

Questo studente riconosce correttamente tre quadrati, ma fornisce una rappresentazione grafica errata in modo che tutti i quadrati abbiano i lati paralleli al foglio.

Studente 5 (S5): Ci sono quattro figure: 3 quadrati e 1 triangolo "retto".

Anche se questo studente riconosce correttamente tutte le figure, tuttavia rappresenta un trapezio al posto del quadrato ruotato.

In accordo con il quadro teorico di Duval (Duval, 1995), abbiamo analizzato le conversioni multiple tra le diverse rappresentazioni. Usiamo C_{1-2} per indicare la conversione tra la rappresentazione R_1 e la rappresentazione R_2 ; C_{1-3} la conversione tra le rappresentazioni R_1 e R_3 ; C_{2-3} la conversione tra le rappresentazioni R_2 e R_3 . In R_3 , gli studenti hanno usato la conversione C_{1-3} o C_{2-3} , gli studenti erano liberi di scegliere la loro conversione preferita. Il diagramma in Fig.4 riassume le diverse situazioni semiotiche osservate durante la sperimentazione:

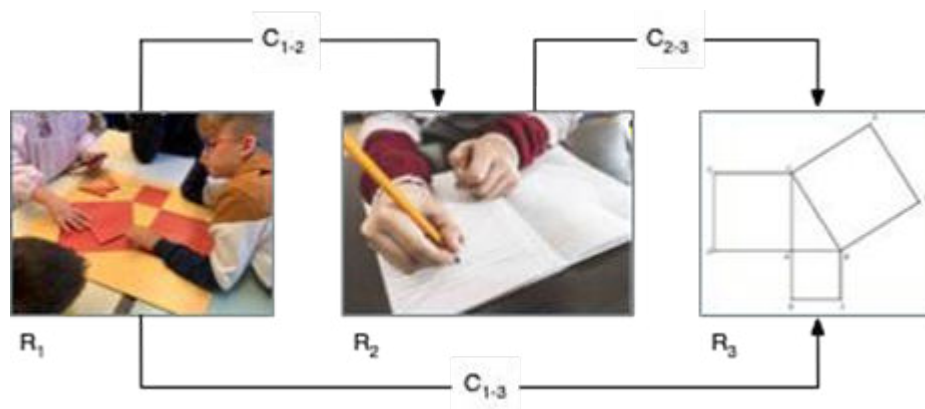


Figura 4. Gli studenti utilizzano l'artefatto "Tangram Phytagorean" e producono rappresentazioni testuali e grafiche su di esso, facendo così conversazioni tra diverse rappresentazioni

L'analisi dei protocolli in Fig. 3 è riassunta nella Tabella 2, considerando la conversione da diversi registri.

Tabella 2. Analisi dei protocolli tenendo conto della conversione tra tre diversi registri (R_1 = manipolazione dell'oggetto, R_2 rappresentazione testuale, R_3 rappresentazione grafica)

Student 1	Student 2	Student 3	Student 4	Student 5
$R_1 \nrightarrow R_2$	$R_1 \nrightarrow R_2$	$R_1 \nrightarrow R_2$	$R_1 \rightarrow R_2$	$R_1 \rightarrow R_2$
$R_1 \rightarrow R_3$	$R_1 \rightarrow R_3$	$R_1 \rightarrow R_3$	$R_1 \nrightarrow R_3$	$R_1 \nrightarrow R_3$
$R_2 \nrightarrow R_3$	$R_2 \nrightarrow R_3$	$R_2 \nrightarrow R_3$	$R_2 \nrightarrow R_3$	$R_2 \nrightarrow R_3$

Conversione	Studente 1	Studente 2	Studente 3	Studente 4	Studente 5
$C_{1,2}$	SBAGLIATO	SBAGLIATO	SBAGLIATO	CORRETTO	CORRETTO
$C_{1,3}$	CORRETTO	CORRETTO	CORRETTO	CORRETTO	CORRETTO
$C_{2,3}$	SBAGLIATO	SBAGLIATO	SBAGLIATO	SBAGLIATO	SBAGLIATO

La Tabella 1 mostra come la diversa conversione tra i registri evidenzia efficacemente le idee sbagliate. Nello specifico, se avessimo utilizzato solo la rappresentazione R_1 , non sarebbero emersi equivoci perché tutti gli studenti hanno manipolato con successo l'artefatto, realizzando i quadrati sull'ipotenusa e sui cateti del triangolo rettangolare; quindi, avremmo avuto l'illusione che tutti gli studenti avessero acquisito la competenza "per riconoscere le figure geometriche fondamentali".

Nevertheless, from our experimentation, it emerges that the students S_1 , S_2 , and S_3 correctly represent the squares built on the catheti and hypotenuse, thus correctly operating in R_3 , but have some difficulties in textual analysis (R_2), thus showing a difficulty of conversion from R_1 to R_2 . If we had only requested the conversion $R_1 \rightarrow R_3$, passing directly from the manipulated object to its graphical representation, the misconception related to the geometric figure "square" distinct from the "rhombus" would not have emerged. On the contrary, students S_4 and S_5 correctly operate the conversion from the object to the text $C_{1,2}$. Still, they cannot represent it graphically from the object itself or the text. Also, in this case, if we had asked to make only one conversion (specifically $R_1 \rightarrow R_2$), the misconception would not have emerged.

Tenendo conto del framework KOM, nella nostra sperimentazione, ci siamo concentrati sull'incrocio dei seguenti "petali": competenza di ausili e strumenti, competenza di pensiero matematico, competenza di comunicazione e rappresentazione. L'incrocio tra i petali permette di mostrare alcuni equivoci che devono essere superati per raggiungere la competenza matematica. Aids and Tools ha introdotto efficacemente gli argomenti e ha permesso agli alunni di manipolare e avere una migliore consapevolezza dei concetti matematici. Ciononostante, abbiamo dedotto che la sola competenza di Ausili e Strumenti non è sufficiente per evidenziare le idee sbagliate, essendo oggetti matematici mai accessibili dalla percezione o dagli strumenti.

CONCLUSIONI

Questo articolo utilizza il framework KOM come lente teorica per progettare e analizzare l'attività sperimentale. Seguendo questo quadro, l'inclusione di ausili e strumenti nell'aula di matematica può anche avere effetti profondi sul problema della messa a terra dei simboli e, quindi, sullo sviluppo della competenza del simbolo e del formalismo. Da un lato, il funzionamento degli strumenti stessi può richiedere un formalismo specifico, ma più interessante per noi è che gli ausili e gli strumenti potrebbero anche dare accesso a diverse situazioni e rappresentazioni iconiche che possono o meno supportare la creazione di un significato matematico stabilito (Jankvist et al., 2019). La teoria delle rappresentazioni semiotiche di Duval suggerisce che l'uso di artefatti può facilitare l'elaborazione e la conversione delle informazioni, portando a una migliore concettualizzazione e comprensione dei concetti matematici. Inoltre, gli artefatti possono aiutare a identificare le idee sbagliate nella fase iniziale, consentendo agli insegnanti di affrontarle prima che diventino profondamente radicate e difficili da correggere. Inoltre, identificare precocemente le idee sbagliate è importante per evitare che gli studenti sviluppino modelli mentali errati di concetti matematici, che possono influenzare la loro competenza nell'apprendimento e nell'applicazione della matematica in altre aree di studio. Utilizzando gli artefatti per valutare e correggere le idee sbagliate, gli insegnanti possono aiutare gli studenti a sviluppare una solida base di comprensione matematica che sarà loro utile in futuro. L'esperimento ha evidenziato l'affermazione di Niss, secondo cui le competenze matematiche sono distinte ma non disgiunte. In effetti, la competenza in materia di aiuti e pedaggi da sola non è sufficiente per far emergere idee sbagliate. Gli studenti hanno utilizzato il manufatto in modo intuitivo, ma non sempre sono stati in grado di collegare il concetto di quadrato alla corretta visualizzazione. Scegliere compiti appropriati e progettare attività didattiche che attivino più competenze non è sempre facile per gli insegnanti. Tuttavia, identificare le idee sbagliate che alcuni bambini portano avanti in età avanzata può essere una sfida importante.

BIBLIOGRAFIA

- Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 2(3), 293-304.
- Capone, R., Adesso, M.G., Del Regno, F., Lombardi L., Tortoriello F.S. (2020) Mathematical competencies: a case study in Italian High School on semiotic systems and argumentation in *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*
- Capone, R. (2022). Interdisciplinarity in Mathematics Education: From Semiotic to Educational Processes. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(2).
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI study* (pp. 37-52).
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing Kluwer
- Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Technical Report on the Nationwide Survey, London: Institute of Education, University of London
- Jankvist, U. T., Geraniou, E., Pedersen, M. K., Bach, C. C., & Gregersen, R. M. (2023). Mathematical Competencies in the Digital Era: An Introduction. In *Mathematical Competencies in the Digital Era* (pp. 1-12). Cham: Springer International Publishing.
- National Research Council (US). Committee on Intrinsic Remediation. (2000). *Natural attenuation for groundwater remediation*. National Academies Press.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational studies in mathematics*, 40(1), 1-24.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28.

Özerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55, 720-729.

Preece, P. F. (1984). Intuitive Science: Learned or Triggered?. *European Journal of Science Education*, 6(1), 7-10

Soldano, C., & Arzarello, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 9-30.

L'APOLLONIA DELLA MARMELLATA

M. Borsero [1][2], C. Moro [3]

[1] I.C. "Parri - Vian", Torino

[2] Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino.

[3] I.C. "Caretta", Spinetta Marengo (AL)

E-mail: massimo.borsero@unito.it

Abstract

La tendenza a narrativizzare è la caratteristica umana predominante nei processi di interpretazione degli eventi. Nel tentare di comprendere una storia, ognuno di noi attiva un tipo di pensiero in grado di capire le persone, le loro intenzioni e i loro sentimenti. Proprio tale tipo di pensiero, chiamato "narrativo" da Bruner (1986), interviene nel processo risolutivo dei problemi caratterizzati da una storia, ovvero nei "problema narrativi" (Zan, 2016). I problemi narrativi hanno la caratteristica di "rappresentarsi" in modo nitido nella mente del lettore oltre che di favorirlo nella comprensione del contesto e nella ricerca di soluzioni; dunque, si ritiene necessario promuovere un loro utilizzo (consapevole) in classe. A tal fine nell'articolo verrà presentata un'attività didattica proposta a due classi - quarta e quinta - di una Scuola Primaria facente parte dell'I.C. "Parri - Vian" di Torino. L'attività si intitola "L'Apollonia della marmellata" ed è stata ideata a partire da una favola di Gianni Rodari e da un problema tratto dal Rally Matematico Transalpino. Ad ogni incontro gli studenti ricevevano un brano tratto dal racconto, modificato e ampliato in modo da contenere al suo interno delle situazioni problematiche sulle proporzioni, nel contesto delle ricette. Durante l'ultimo incontro, potevano inventare una conclusione alla storia. Proseguendo nelle diverse fasi della sperimentazione, gli studenti si sono rivelati sempre più entusiasti di conoscere l'andamento degli eventi della favola e ne hanno legato l'esito a quello della situazione problematica. Tale elemento depone a favore della complementarità del pensiero logico e del pensiero narrativo, tipico di questa categoria di problemi.

Parole chiave

Problem solving, problemi narrativi, argomentazione, item cloze.

QUADRO TEORICO

Narrare è una delle attività umane principali e più antiche. Infatti, l'uomo è portato, per sua natura, a collegare i fatti in maniera causale-consequenziale più che temporale-sequenziale, e tale atteggiamento si rivela anche nell'approccio ai testi, in cui le inferenze permettono di colmare i vuoti narrativi dell'autore. Nel tentare di comprendere una storia, dunque, ognuno di noi mette in gioco un tipo di pensiero in grado di capire le persone, le loro intenzioni e i loro sentimenti. Nel 1986, Bruner chiamò questo tipo di pensiero "narrativo", contrapponendolo al pensiero "paradigmatico o logico-scientifico", fondato su inferenze logico-deduttive. Non è un caso che dunque che, nel vasto filone di ricerca sulla comprensione dei problemi, riguardo al quale rimandiamo a Demartini e Sbaragli (2019) per una panoramica approfondita, particolare rilevanza ha assunto lo studio dei cosiddetti problemi narrativi. Questi problemi sono caratterizzati da una formulazione testuale che racconta esplicitamente una storia. Come osservato in Zan (2016), una storia ha tre componenti:

1. una situazione che presenta qualche conflitto, problema, disagio;
2. un protagonista animato che è coinvolto in questa situazione con uno scopo;
3. una sequenza basata su rapporti causali, in cui il conflitto viene risolto.

Chiaramente, l'idea di causalità è centrale nella narrazione di storie, ma è una causalità diversa da quella logica: si tratta di una causalità narrativa. Lo stretto legame tra il contesto narrativo evocato dalla storia e il contesto matematico del problema diviene un elemento essenziale sia per la comprensione sia per la soluzione dei problemi narrativi. A volte però può esserci frattura invece che continuità tra il contesto narrativo e il contesto matematico evocato dal problema: questi problemi sono chiamati dalla stessa Zan *problemi a quadretti*, in opposizione ai *problemi a righe* dove invece vi è continuità. Nei primi la comprensione (e dunque la possibilità di soluzione) è ostacolata, mentre nei secondi è favorita. Per un approfondimento sul tema dei problemi a righe e a quadretti rimandiamo a Zan (2016).

Un altro elemento essenziale delle narrazioni è la risoluzione finale, ovvero il momento in cui il protagonista risolve il conflitto iniziale. L'assenza di questo momento rende la narrazione monca e insoddisfacente. Questo aspetto ha un forte legame con le situazioni problematiche: risolvere una situazione problema significa proprio "chiudere la storia" del problema. Per sfruttare didatticamente questo parallelismo si è deciso di ricorrere nel percorso didattico agli *item cloze*, cioè sui testi "bucati" da completare in qualche parte. L'uso di questo strumento è ampiamente impiegato nella didattica dell'italiano. Tra gli esercizi suggeriti in Serianni (2013) per impiegare i *cloze* nel lavoro sui testi, esistono i *cloze*, "a risposta aperta" in cui, per la scelta delle parole mancanti, si possono ricevere al massimo alcune indicazioni generali (ad esempio: inserire un sostantivo maschile plurale). Come ben spiegato in Chiari (2002), la pratica del *cloze* mira a sviluppare la capacità di anticipazione – che spontaneamente utilizziamo nei processi di lettura e comprensione di un testo – collegandosi al concetto di "ridondanza" ossia alla caratteristica di un testo di contenere elementi di prevedibilità che lo rendono ugualmente leggibile e comprensibile anche in caso di "mutilazioni". Tale pratica anticipatoria è analoga a quella utilizzata nei processi legati al *problem solving*.

Nel percorso didattico descritto nel paragrafo successivo si è scelto di costruire un problema narrativo a partire dalla storia "L'Apollonia della marmellata" di G. Rodari, presente nella raccolta "Favole al telefono" del 1971. Il racconto, oltre ad essere molto breve e adatto ad essere posto nella forma problema associandolo ad un problema del Rally Matematico Transalpino, presenta un finale che si presta bene ad essere "bucato" per diventare un *item cloze*.

PERCORSO DIDATTICO

Il percorso didattico è stato suddiviso in 5 fasi e svolto in 6 incontri, ovvero circa 12 ore per classe. Suddivisa la classe in 5 o 6 gruppi fissi, tutte le fasi, le schede e le attività sono state svolte in modalità cooperativa, sotto la supervisione dei docenti di italiano e di matematica.

Si riporta ora il testo utilizzato (in alcune parti preso da Rodari, in altre ampliato e adattato in base agli obiettivi didattici) e una breve descrizione delle varie "tappe" del percorso.

INCIPIT - Schede 1 e 2

A Sant'Antonio, sul Lago Maggiore, viveva una donnina tanto brava a fare la marmellata, così brava che i suoi (1) _____ (servigi) erano richiesti in Valcuvia, in Valtravaglia, in Val Dumentina e in Val Poverina. (2) _____ (La gente), quand'era la stagione, arrivava da tutte (3) _____ (le parti), si sedeva sul muricciolo a guardare il panorama del lago, coglieva qualche lampone dai cespugli, poi chiamava (4) _____ (la donnina) della marmellata:

- Apollonia!

- Che c'è?

- Me la fareste una (5) _____ (marmellata) di mirtilli?

- Eccomi.

- Mi aiutereste a fare una buona marmellata di prugne?

- Subito.

L'Apollonia, (6) _____ (quella) donnina, aveva proprio (7) _____ (le mani) d'oro, e faceva le migliori marmellate del Varesotto e del Canton Ticino.

Una volta capitò da lei una donnetta di Arcumeggia, così (8) _____ (povera) che per fare la marmellata non aveva neanche un cartoccio di ghiande di pesca, e

allora, strada facendo, aveva riempito il suo grembiule di ortiche.

- *Apollonia, me la fate la marmellata?*

- *Con (9) _____ (le ortiche)?*

- *Non ho trovato altro...*

- *Pazienza, si vedrà.*

E così l'Apollonia prese le ortiche, le inzuccherò, le fece bollire come sapeva lei e ne ottenne una marmellata da leccarsi le dita. Perché l'Apollonia, (10)

_____ (quella donnina), aveva le mani d'oro e (11) _____ (d'argento),

e avrebbe fatto la marmellata anche con (12) _____ (i sassi).

IL POVER'UOMO - Schede 3 e 4

Un'altra volta bussò alla porta dell'Apollonia un pover'uomo, così triste, debole e solo che non aveva avuto la forza di raccogliere alcunché lungo la strada. La donnina capì subito che era affamato e decise di preparargli tre "Marmellate Speciali". Queste erano le più lunghe, difficili e costose da preparare: l'Apollonia le cucinava soltanto nelle grandi occasioni, e la visita di un pover'uomo rappresentava di certo una di quelle.

In men che non si dica, la donnina raccolse nel suo giardino **7,5 kg** di pere, **6 kg** d'uva e **9 kg** di nocciole. Poi diede una sbirciatina al libro delle ricette, alla pagina "Marmellata Speciale per Eventi Speciali", che recitava: "*Come in ogni marmellata, ad una determinata parte di frutta corrisponde una determinata parte di zucchero*". Infine, si mise all'opera. Per la marmellata di pere l'Apollonia utilizzò **2,5 kg** di zucchero; per quella di uva usò **2 kg** di zucchero e per quella di nocciole _____ **kg** di zucchero.

Il pover'uomo si sentì così arricchito e felice di ricevere le tre marmellate che trascorse il resto dei suoi giorni a viaggiare di gente in gente e a bussare di porta in porta, diffondendo la voce che la ricetta della felicità esisteva e che portava il nome di "Apollonia".

I NIPOTI (1) - Schede 5 e 6

L'Apollonia amava fare la marmellata con le albicocche del suo giardino e regalarne alcuni barattoli ai suoi due nipoti.

Un anno il raccolto era stato talmente abbondante che la donnina si era messa a cucinare marmellate per tutti gli abitanti di Sant'Antonio. I nipoti, vedendo l'Apollonia così indaffarata, avevano avuto un'idea: preparare un po' di marmellata di nascosto, per farle una sorpresa. Per prima cosa avevano preso dalla dispensa due ceste di albicocche: una conteneva **12 kg** e l'altra **4,5 kg** di frutta. Poi si erano recati nel negozietto del paese a comprare _____ **kg** di zucchero, perché volevano fare una "Marmellata Speciale" dolce e buona proprio come quella della ricetta dell'Apollonia. Infine, si erano messi all'opera, cucinando per tutto il pomeriggio.

I NIPOTI (2) - Scheda 7

L'Apollonia amava fare la marmellata con le albicocche del suo giardino e regalarne alcuni barattoli ai suoi due nipoti.

Un anno il raccolto era stato talmente abbondante che la donnina si era messa a cucinare marmellate per tutti gli abitanti di Sant'Antonio. I nipoti, vedendo l'Apollonia così indaffarata, avevano avuto un'idea: preparare un po' di marmellata di nascosto, per farle una sorpresa. Per prima cosa avevano preso dalla dispensa due ceste di albicocche: una conteneva **12 kg** e l'altra **4,5 kg** di frutta. Poi si erano recati nel negozietto del paese a comprare lo zucchero. Poiché volevano ottenere una marmellata un po' **PIÙ DOLCE / MENO DOLCE** di quella dell'Apollonia, e ricordando che ogni 3 kg di albicocche l'Apollonia utilizzava 1 kg di zucchero, avevano acquistato _____ **kg** di zucchero. Infine, si erano messi all'opera, cucinando marmellata per tutto il pomeriggio.

L'IMPERATORE - Schede 8 e 9

Lo stesso anno, poco tempo dopo, passò a Sant'Antonio l'Imperatore e volle provare anche lui la marmellata dell'Apollonia e dei suoi nipoti. Lei gliene diede un piattino, ma l'Imperatore dopo la prima cucchiata... si disgustò! L'imperatore si arrabbiò così tanto che ordinò ai suoi soldati di tagliare le mani all'Apollonia. La gente allora si ribellò e lo pregò di concedere un'altra possibilità alla donnina dalle mani d'oro e d'argento.

- *Tornerò domani alla stessa ora: se la marmellata non mi soddisferà nuovamente, ve ne pentirete!* - rispose l'imperatore.

Gli abitanti, Apollonia e i due nipoti erano disperati:ù

- *Com'è possibile che all'imperatore non sia piaciuta la marmellata?*

- *Se tagliassero le mani all'Apollonia sarebbe proprio la fine!* - dicevano, preoccupati.

Improvvisamente, dalla folla che si era radunata davanti alla casa della donnina, qualcuno parlò:

- *State tranquilli: forse ho la soluzione che fa al caso nostro...*

CONCLUSIONE - Scheda 10

Il giorno seguente...

● *Fase 1. Riempire "buchi narrativi"*

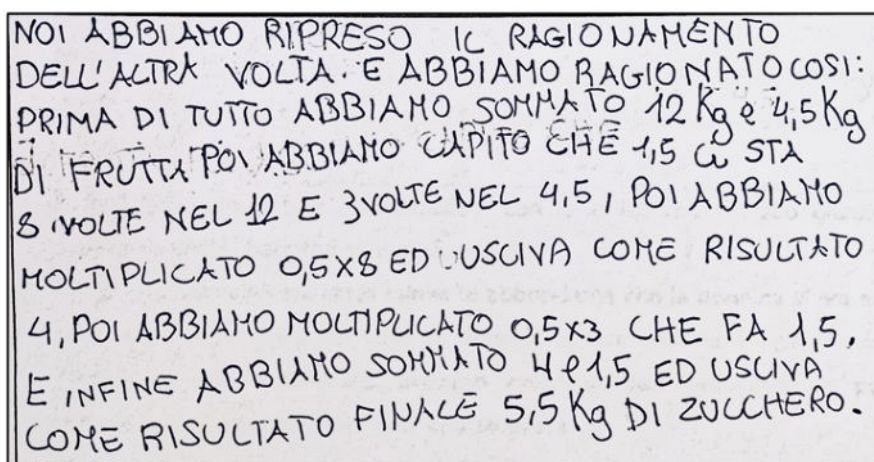
Durante la prima fase l'insegnante legge alla classe l'introduzione del racconto "L'Apollonia della marmellata". L'obiettivo degli studenti è quello di cogliere, tramite l'ascolto, gli elementi essenziali alla comprensione del racconto per poi svolgere la scheda 2, dove lo scopo è inserire le parole mancanti, non preoccupandosi di ricordare quelle del testo originale ma di produrre un testo scorrevole, grammaticalmente corretto e soprattutto dotato di senso a livello globale. La risposta delle due classi a tale scheda, nel complesso, è stata positiva: gli studenti hanno compreso e portato a termine l'obiettivo generale, seppur con alcuni errori (connessi soprattutto agli item 2, 6 e 10).

● *Fase 2. Riempire "buchi numerici"*

Proseguendo con la lettura delle vicende dell'Apollonia, nelle schede 3 e 5 i gruppi si sono trovati a risolvere un *item cloze* in ambito matematico, dovendo nuovamente riempire un "buco" del testo, questa volta con un valore numerico. La soluzione è univoca ma gli studenti hanno ragionato in modi diversi, discusso, si sono confrontati all'interno dei gruppi e in seguito hanno provato a spiegare per iscritto, attraverso la produzione di un testo argomentativo – e/o con l'aiuto di disegni, schemi e tabelle, se ritenuto necessario – il procedimento seguito. Al termine di questo e dei successivi incontri, l'insegnante ha instaurato una discussione in classe per confrontare i ragionamenti emersi in ogni gruppo e permettere agli studenti di interiorizzare il concetto di "proporzione" nell'ambito delle ricette. Le schede 4 e 6, completate in questa fase del percorso, contengono alcune domande di tipo grammaticale e sintattico, inserite per capire se nel testo fornito ci fossero degli elementi di difficile comprensione per gli studenti. Se la scheda 3 è stata completata in maniera corretta soltanto da 5 gruppi su 11 (probabilmente perché si trattava di un nuovo tipo di esercizio, condotto su un argomento mai affrontato prima), nel passaggio alla scheda 5, invece, è stato registrato un netto miglioramento riguardante sia il numero di risultati corretti sia la quantità e la qualità dei testi argomentativi prodotti, come si può osservare nella Figura 1.

● *Fase 3. Compiere una scelta*

Per affrontare la scheda 7, i gruppi hanno dovuto scegliere se preparare una marmellata più dolce oppure meno dolce di quella dell'Apollonia, poi organizzare il proprio lavoro e confrontarsi allo scopo di trovare le dosi di zucchero necessarie. Nonostante il bivio "più dolce/meno dolce" abbia generato diverse difficoltà tra gli studenti di entrambe le classi, in questa fase alcuni gruppi sono stati in grado di produrre risposte corrette e complete al problema, dimostrando di essere passati dal "pensiero ripetitivo, meccanico" tipico degli *esercizi* matematici al "pensiero logico e creativo" richiesto nelle attività di *problem solving*.



NOI ABBIAMO RIPRESO IL RAGIONAMENTO DELL'ALTRA VOLTA. E ABBIAMO RAGIONATO COSÌ: PRIMA DI TUTTO ABBIAMO SOMMATO 12 Kg e 4,5 Kg DI FRUTTA POI ABBIAMO CAPITO CHE 1,5 G STA 8 VOLTE NEL 12 E 3 VOLTE NEL 4,5, POI ABBIAMO MOLTIPLICATO $0,5 \times 8$ ED USCIVA COME RISULTATO 4, POI ABBIAMO MOLTIPLICATO $0,5 \times 3$ CHE FA 1,5, E INFINE ABBIAMO SOMMATO $4 + 1,5$ ED USCIVA COME RISULTATO FINALE 5,5 Kg DI ZUCCHERO.

Figura 1. Il testo argomentativo prodotto da un gruppo di classe quinta in riferimento alla Scheda 5.

- *Fase 4 - Scrivere un finale per la storia*

Con le schede 8-9-10, tramite un colpo di scena e la comparsa di un personaggio ignoto, gli alunni si sono trovati ad affrontare una situazione problematica nuova ma sfidante: escogitare un modo per salvare l'Apollonia.

Quest'ultima fase di lavoro, oltre che coinvolgere tramite la scrittura e la fantasia, puntava a indagare se i gruppi avessero prodotto testi coerenti con i fatti della favola – dal punto di vista narrativo e matematico. Dall'analisi dei protocolli è emerso che la maggior parte di essi, in effetti, ha attribuito la reazione di disgusto dell'imperatore ad una causa interna alla narrazione stessa, prendendo spunto dagli eventi accaduti in precedenza.

- *Fase 5 - Mettersi alla prova*

L'ultimo incontro è dedicato alla valutazione degli apprendimenti. Nella scheda finale, che ogni studente ha svolto in autonomia, si è chiesto di:

- leggere e comprendere un testo contenente dei dati numerici (dosi) inseriti in un contesto reale e concreto (ricetta di cucina);
- calcolare le dosi degli ingredienti per una quantità maggiore di persone, utilizzando la stessa ricetta;
- scrivere una lettera ad un personaggio fittizio (la "vecchia zia Ada") spiegando i ragionamenti svolti per calcolare le dosi aumentate. Il mittente della storia poteva essere lo studente stesso oppure l'Apollonia, nei panni della quale lo studente ha dovuto immedesimarsi.

La maggior parte degli studenti ha risposto correttamente ad almeno una delle due richieste (calcolare il numero di uova e i grammi di cioccolato necessari a realizzare una torta per 6 persone), ma soltanto una minoranza ha saputo trovare due risultati corretti su due.

CONCLUSIONE

Facendo leva sulla narrazione come valore aggiunto nei testi dei problemi matematici, la sfida del percorso descritto era quella di sfruttare, in modo originale e innovativo, le potenzialità degli *item cloze* (Chiari, 2002) all'interno di un'attività che richiedesse diverse abilità linguistico-matematiche: lettura funzionale del testo, *problem solving* autonomo e in gruppo, argomentazione scritta. Sul piano logico-matematico, l'intento era far scoprire a studenti di classe quarta e quinta primaria il concetto di proporzionalità diretta in maniera implicita, basandosi sull'osservazione delle relazioni tra i numeri e sul modello moltiplicativo.

A percorso terminato, possiamo che l'attività "L'Apollonia della marmellata" abbia portato risultati positivi in termini di apprendimento. Gli *item cloze* completati correttamente sono stati, in tutto, 104 su 132 per la parte linguistica, 18 su 33 per la parte matematica. Gli studenti hanno dimostrato di aver compreso fin dall'inizio il loro funzionamento, sia nel contesto della narrazione sia in quello dei problemi. I maggiori progressi sono stati registrati in classe quarta, dove un gruppo, in particolare, è

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia passato dallo scrivere un risultato totalmente errato, senza argomentazione, nella scheda 3, al saper spiegare in modo semplice, chiaro ed efficace tutti i passaggi svolti per giungere alla soluzione della scheda 7. In conclusione, se all'inizio del percorso la maggior parte degli alunni non conosceva il significato del termine "argomentare", una buona percentuale di essi ha iniziato a sviluppare tale competenza durante questo percorso didattico. Questo è certamente un successo.

BIBLIOGRAFIA

Bruner, J. S. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Harvard University Press.

Chiari, I. (2002). La procedura cloze, la ridondanza e la valutazione della competenza della lingua italiana. *Italica*, 79(4), 525-540.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). Le parole che "ingannano". La componente lessicale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, n.2. Numero speciale n.5, 2019 G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo).

Rodari, G. (1971). *Favole al telefono*. Einaudi.

Serianni, L. (2013). *Leggere, scrivere, argomentare. Prove ragionate di scrittura*. Bari: Laterza.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci.

IL PROGETTO FORMART: UN'ESPERIENZA DI EDUCAZIONE MATEMATICA INFORMALE AL MUSEO D'ARTE CONTEMPORANEA DEL CASTELLO DI RIVOLI

Daniele De Giorgi, Raffaele Casi, Cristina Sabena
Università di Torino – Università del Piemonte Orientale
danieledegorgi96@gmail.com
daniele.degorgi@uniupo.it

Abstract

Negli ultimi anni, è cresciuta l'attenzione verso le attività di educazione matematica svolte al di fuori dei contesti di classe. In questo contributo presentiamo un laboratorio di Informal Mathematics Education progettato e sperimentato nel contesto del Museo d'Arte Contemporanea di Rivoli. Il lavoro, oggetto di tesi di laurea in scienze della formazione primaria, si inserisce all'interno del progetto InformalMath, un progetto di ricerca di Unito. Insieme a quattro insegnanti di scuola primaria, abbiamo progettato il laboratorio di apprendimento informale della matematica FormArt presso il Castello di Rivoli. Il laboratorio FormArt è stato poi sperimentato in una classe terza primaria. Insieme alla docente, abbiamo progettato un intervento volto a creare un collegamento dell'esperienza d'apprendimento informale con il curriculum. Le analisi dei dati raccolti nella sperimentazione focalizzano l'attenzione su due livelli, quello dell'insegnante e quello degli studenti. Come proposta per sviluppi futuri, si analizza un'attività di riproduzione in classe di una sala di un museo virtuale, ricercando elementi di contatto con l'esperienza al museo di Rivoli, suggerendo possibilità di interazioni proficue e innovative.

Parole-chiave

Informal Mathematics Education, Museo, Arte, Educazione primaria.

INTRODUZIONE

Questo contributo descrive una ricerca svolta su un percorso di apprendimento informale della matematica, integrata da alcuni incontri volti a formalizzare quest'esperienza e che puntassero a creare un forte legame con il curriculum scolastico di scuola primaria.

Il quadro teorico di riferimento richiama gli studi di Ricardo Nemirovsky, Molly Kelton e Marta Civil (2017), riprendendo la loro visione di apprendimento della matematica in contesti informali con l'intento sia di confermare tali studi sia di ricercare nuovi spunti di riflessione.

La prima sezione riguarda la genesi del lavoro collocata all'interno di InformalMath, progetto di dottorato di Raffaele Casi, supervisionato da Cristina Sabena. In questo contesto il primo autore di questo contributo ha potuto formarsi sull'apprendimento informale della matematica e, in collaborazione con alcune maestre di scuola primaria, progettare un laboratorio strutturato per il Museo d'Arte contemporanea di Rivoli intitolato 'FormArt'.

La seconda sezione consiste nella definizione della parte operativa: un percorso progettato insieme alla maestra Marianna (pseudonimo) per la sua classe (3° primaria) che includesse la sperimentazione al Museo di Rivoli del laboratorio 'FormArt'. Il percorso strutturato insieme si articola in tre incontri. Il primo in classe prevede una serie di attività laboratoriali volte a introdurre alcuni argomenti matematici e l'approccio all'apprendimento informale. Il secondo incontro si svolge al museo, con la visita guidata e la sperimentazione del laboratorio 'FormArt'. Il terzo incontro ha come obiettivo quello di formalizzare le conoscenze emerse durante l'esperienza al museo.

La terza sezione rappresenta infine la messa in atto di questa progettazione. Durante questa fase operativa sono stati raccolti i dati per mezzo di riprese audio e video. Questi dati sono stati organizzati, e successivamente analizzati, su due livelli: l'esperienza dello studente e la visione dell'insegnante. Per

analizzare più in profondità la visione degli insegnanti di classe, abbiamo proposto loro un'intervista, semistrutturata, in cui sono emersi alcuni temi fondamentali, fra cui l'importanza del contesto e la valutazione.

Questo lavoro è stato condotto con l'intenzione di rispondere alle domande di ricerca individuate: "Quali sono le risorse che gli studenti hanno mobilitato durante lo svolgimento dell'attività didattica?" e "Quali opportunità hanno evidenziato le insegnanti coinvolte nel percorso di integrazione tra laboratorio al museo ed esperienza in classe?"

Al termine di questo lavoro, proponiamo una riflessione riguardo alcuni possibili sviluppi futuri per l'apprendimento informale, con l'utilizzo di tecnologie digitali attuali quali realtà virtuale (VR) e realtà aumentata (AR) che possano ricreare il contesto in cui è avvenuto l'apprendimento, così da integrare e approfondire l'esperienza.

QUADRO TEORICO

Nel panorama della ricerca in didattica della matematica, l'educazione informale è un tema studiato a partire almeno dagli anni '70 del secolo scorso. Sono noti gli studi di Terezinha Nunes e colleghi (Nunes et al., 1993), i quali hanno lavorato sulla cosiddetta '*street mathematics*', la matematica della strada. Questo tipo di ricerca è volta a indagare le pratiche matematiche, ad esempio, dei venditori dei mercati, e appartiene al filone della '*everyday mathematics*', la matematica del quotidiano, ossia quelle strutture matematiche che si presentano ad esempio sul posto di lavoro, nei giochi, negli sport, negli acquisti, nei lavori domestici, e così via. Tali studi hanno fornito un importante contributo alla didattica della matematica, come sottolineato da Nemirovsky et al. (2017, p. 968). A differenza di quanto accade per il filone della matematica nel quotidiano, l'*Informal Mathematics Education* (IME) è rappresentato dall'insieme delle attività che vengono svolte in ambienti educativi intenzionalmente progettati per supportare l'apprendimento matematico, sia perché sono strutturati da programmi definiti e vedono la presenza di educatori specializzati, sia perché coinvolgono tecnologie, artefatti o esposizioni progettate per stimolare il pubblico a confrontarsi con la matematica (p. 970). D'altro canto, le attività di IME si discostano dalle attività didattiche che si svolgono usualmente in aula per i seguenti tre principi: la partecipazione avviene su base volontaria, e i partecipanti sono liberi durante lo svolgimento delle attività di seguire i propri interessi, proprio come è tipico delle attività di apprendimento informali; i confini tra le discipline coinvolte sono fluidi, le attività spaziano ad esempio dalla matematica alla letteratura, all'arte, alla tecnologia, ai giochi e così via; le attività proposte non sono accompagnate da tradizionali forme di valutazione (p. 970). Colpisce qui il fatto che la distinzione tra le tipologie di attività (formale e informale) non sia strettamente legata all'ambiente formale (l'aula) o a quello informale: è infatti possibile che in ambienti come un museo o un doposcuola, tipicamente caratterizzati come ambienti informali, si svolgano attività di educazione matematica formale, e viceversa, è possibile attuare attività di IME all'interno delle aule scolastiche. Riconosciamo, quindi, quella distinzione di cui si parlava sopra, legata alle metodologie didattiche e non agli ambienti di apprendimento. Una peculiarità dell'IME risiede nel fatto che l'aggettivo informale non si riferisce solamente al tipo di educazione, alle metodologie o agli ambienti di apprendimento, ma anche alla matematica stessa: le attività proposte spesso coinvolgono contenuti matematici che spesso non sono presenti nei curricula scolastici, pur tuttavia fornendo spunti utili per la possibilità di esplorazione dei partecipanti attraverso strumenti più formali e maggiormente ricollegati al contesto della matematica scolastica.

L'apprendimento è indirizzato dagli studenti stessi, dai loro interessi. Le loro domande si basano su ciò che per loro è davvero importante, hanno una percezione diversa delle loro capacità, migliorano le loro capacità collaborative e si cimentano in sperimentazioni non preparate. Per favorire questo tipo di apprendimento risulta necessario formare prima gli insegnanti, con programmi diversi rispetto a quelli previsti per la normale preparazione degli insegnanti.

Ai fini del lavoro di ricerca descritto, nello specifico le attività di IME che hanno luogo nei musei, risulta interessante considerare quanto emerge dalla letteratura in merito alle visite di istruzione delle classi ai

musei. Per far sì che le uscite didattiche presso musei o altri poli culturali siano esperienze significative per l'apprendimento, la letteratura scientifica concorda sul fatto che esse debbano essere introdotte all'interno di un più ampio programma con la classe, che preveda attività che precedono e seguono l'uscita didattica stessa (si vedano, ad es. Behrendt & Franklin, 2014; DeWitt & Storksdieck, 2008). Particolarmente di ispirazione è stato anche il lavoro di ricerca di Molly Kelton (2021), nel quale la ricercatrice ha analizzato le interazioni di due classi (e degli insegnanti) all'interno di un programma volto alla visita di un'esposizione matematica.

IL PROGETTO INFORMALMATH

Nell'anno 2019-2020 il secondo e terzo autore hanno collaborato, insieme ad altri, alla progettazione di quattro laboratori di matematica ambientati in 4 contesti museali diversi, progettati all'interno del progetto Next-Land, volto ad avvicinare gli studenti alle materie STEM attraverso l'arte. Dall'esperienza acquisita con la partecipazione al progetto e dalla riflessione che ne è successivamente scaturita, e al fine di rendere l'esperienza dei laboratori più significativa per gli apprendimenti degli studenti, nasce dunque l'idea di utilizzare l'IME per la formazione degli insegnanti attraverso la realizzazione del progetto "InformalMath" (Casi & Sabena, 2023). Gli obiettivi di formazione di InformalMath sono strettamente connessi alle Indicazioni Nazionali: si vuole individuare e sperimentare strumenti per accompagnare gli studenti a «sviluppare un'adeguata visione della matematica [...], per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo». (MIUR, 2012, p. 50)

La metodologia di lavoro è basata sulla co-progettazione di laboratori IME, coinvolgendo insieme insegnanti, ricercatori ed esperti dei musei, ciascuno con le proprie capacità professionali. Il fine ultimo del percorso di formazione è quello di accrescere l'autonomia progettuale dell'insegnante in relazione ai laboratori di IME. Il percorso si articola quindi in tre fasi (scoperta, co-progettazione guidata, co-progettazione supportata), che vede l'insegnante via via più coinvolto al trascorrere del tempo. L'ottica di sfondo che guida questo percorso è quella del laboratorio di matematica nella sua metafora di "bottega rinascimentale" (UMI, 2003), in cui i maestri di bottega sono i didattici della matematica e gli apprendisti sono gli insegnanti, che divengono via via più autonomi, sino ad essere competenti e saper fare da soli.

Realizzazione del progetto 'FormArt'

Il primo autore di questo contributo si è inserito all'interno del percorso InformalMath al termine della fase 1, formandosi sul quadro teorico di riferimento e visionando due laboratori IME: il primo proposto al Museo Nazionale del Risorgimento (Palazzo Carignano) e il secondo proposto al PAV. I laboratori erano costruiti attorno all'esperienza e al contesto museale, sfruttando tutti gli stimoli matematici presenti all'interno della mostra, ed erano studiati secondo specifici obiettivi da raggiungere e tematiche centrali di riferimento. Nella seconda fase gli insegnanti, divisi in gruppi (due gruppi di scuola primaria, due gruppi di scuola secondaria), i docenti hanno lavorato su due musei, il PAV e il Museo d'Arte contemporanea presso il Castello di Rivoli, per creare delle proposte laboratoriali nuove sempre all'insegna dell'apprendimento informale della matematica. Quindi dopo una opportuna formazione teorica, gli insegnanti sono passati a strutturare una didattica basata sull'apprendimento in contesti informali, e quindi diversa da quella che quotidianamente viene proposta nella formalità dell'aula. Il primo autore ha avuto l'opportunità di inserirsi in un gruppo di lavoro di insegnanti di scuola primaria, osservando da vicino tutte le reazioni e le riflessioni che hanno accompagnato la realizzazione durante la progettazione del loro laboratorio IME calato nel contesto del Castello di Rivoli. Il gruppo ha scelto di intitolare il progetto 'FormArt', con l'intento di sottolineare lo scopo dell'esperienza: condurre studenti di scuola primaria nella ricerca di forme all'interno dell'arte contemporanea e del Castello di Rivoli. In fase di realizzazione del progetto, sono state individuate quattro attività originali costruite attorno al contesto informale del museo, ciascuna collegata a un'opera di riferimento esposta o ad elementi architettonici del Castello. Al termine del lavoro di progettazione si è svolto un incontro con le Artenate del Museo per un confronto. Le Artenate non sono semplici guide, ma sono figure che

offrono un incontro con l'arte come un'avventura emozionante, un vero e proprio "viaggio" di scoperta, e che mettono in pratica un processo d'inclusione sociale rivolto a tutti, incentrato sulla relazione tra la persona e l'arte, in una prospettiva continua di ricerca e apprendimento che contribuisce a favorire lo sviluppo integrale delle persone. Il confronto ha offerto nuovi stimoli e spunti, indirizzando la riprogettazione verso la creazione di un protocollo di riferimento. Dato che l'esposizione cambia periodicamente, l'idea proposta dalle Artenaute era quella di creare questo protocollo di riferimento, con tutte le indicazioni delle nostre attività inclusa l'opera di riferimento principale: sarebbe stata poi l'Artenauta a trovare altre opere sostitutive di riferimento in caso quella principale non fosse temporaneamente presente nell'esposizione offerta dal museo. Questa fase 2 del progetto InformalMath si è conclusa il 16 gennaio con un momento di focus group guidato dai formatori, in cui abbiamo potuto riflettere sul lavoro svolto e confrontarci sul percorso affrontato.

PROGETTAZIONE E SPERIMENTAZIONE

Insieme alla maestra Marianna, componente del gruppo che ha ideato e progettato il laboratorio "FormArt" di educazione matematica informale presso il Castello di Rivoli, e alla maestra Elena abbiamo deciso di sperimentare questo laboratorio coinvolgendo gli studenti della loro classe. Abbiamo lavorato con le due maestre della classe a partire dalla fase di progettazione, stabilendo degli incontri che hanno preceduto e seguito l'esperienza di apprendimento informale al Castello di Rivoli. Inoltre, abbiamo accompagnato la classe in questi incontri e durante tutta l'esperienza di apprendimento, ricercando atteggiamenti significativi per quanto concerne l'apprendimento e l'atteggiamento verso la proposta formativa offerta. In particolare, siamo interessati a studiare alcune interazioni che vengono a determinarsi nel sistema classe "insegnante-studenti" in una reale esperienza di apprendimento informale: vogliamo quindi verificare quanto varia la significatività dell'esperienza a seconda delle interazioni che si creano fra i partecipanti all'uscita didattica, ispirandoci al lavoro di ricerca di Molly Kelton (2021). Il nostro focus riguarderà gli studenti e le loro reazioni ma anche l'insegnante e le modalità con le quali cercherà di inserire l'esperienza all'interno del curriculum, creando un ponte fra formale e informale, strutturando un più ampio programma con la classe, che preveda attività che precedono e seguono l'uscita didattica stessa (si vedano, ad es. Behrendt & Franklin, 2014; DeWitt & Storksdieck, 2008).

La sperimentazione si è svolta nella classe 3° primaria di una scuola della provincia di Torino. La scuola si presenta come un contesto piccolo, situato in collina. La classe è composta da 13 studenti. Fra questi studenti, sottolineiamo la presenza di una situazione di disabilità e di un bambino che conosce poco la lingua italiana e si esprime spesso in lingua inglese. La proposta didattica delle maestre si basa prevalentemente sul metodo deduttivo, stimolando la curiosità degli studenti nell'osservazione dei fenomeni e delle cose, la scoperta e la ricerca nel dibattito in classe degli argomenti chiave piuttosto che le regole e le leggi.

Abbiamo scelto di strutturare il percorso sperimentale in tre momenti descritti nella tabella 1.

Tabella 1. Struttura e argomenti del *teaching experiment* basato sul laboratorio 'FormArt'.

Lezione, sequenza e durata	Argomenti della lezione
Lezione 1: Attività preliminare in classe (3h)	Ricerca dei poligoni e scoperta delle proprietà del quadrato
Lezione 2: Visita ed esperienza al museo (3h)	Visita del museo e laboratorio 'FormArt – Piastrelliamo!'
Lezione 3: Attività formalizzante in classe (3h)	Ripresa delle attività proposte durante il laboratorio al museo e discussione con la classe

Per l'esperienza laboratoriale al museo, abbiamo deciso con le maestre di selezionare soltanto alcune attività contenute in 'FormArt' che ritenevamo più coerenti con il curriculum della classe per gli argomenti e gli approfondimenti che proponevano.

Tabella 2. Attività selezionate dal laboratorio 'FormArt'.

Attività	Connessioni con il museo	Argomenti
Attività 1: "Il logo del castello"	Logo del Museo di Rivoli realizzato da Armando Testa	Quadrati
Attività 2: "Il Tutto"	"Tutto" di Alighiero Boetti	Equiestensione
Attività 3: "Piastrelliamo!"	Pavimento originale del XVII secolo realizzato da Filippo Juvarra	Tassellazione

L'Attività 1 propone agli studenti di lavorare sul logo del museo, stampato su un foglio A5, riflettendo anzitutto sul suo significato e sugli stimoli geometrici che offre. Viene poi data loro l'istruzione di completare il logo rilasciando liberamente la loro creatività artistica. La seconda attività è connessa alla prima ed è ispirata dall'opera "Tutto" di Boetti, un arazzo tessuto utilizzando la stessa quantità di filo per ogni colore presente. Viene chiesto agli studenti di realizzare una cornice per il logo personalizzato precedentemente realizzato. Agli studenti viene fornito un foglio A4 sul quale incollare al centro il proprio logo. Dopo ciò, viene fornito loro un foglio A5 da suddividere in 4 parti uguali, ripiegando il foglio su sé stesso due volte. Gli studenti coloreranno le quattro parti con quattro colori diversi. A questo punto ritaglieranno questo foglio in piccoli pezzetti, cercando di ricoprire la superficie del foglio A4 non coperta dal logo. La terza attività, ispirata dalla pavimentazione realizzata da Juvarra, consiste in un lavoro di tassellazione: gli studenti, nella sala degli stucchi del Castello, proveranno a ricoprire una piastrella quadrata del pavimento della sala usando delle forme geometriche regolari (triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono e ottagono).

Poiché l'obiettivo di ricerca del percorso progettato è quello di indagare l'integrazione tra un laboratorio di IME e l'attività didattica in aula, ci poniamo le seguenti domande di ricerca:

- D.R. 1: Quali sono le risorse che gli studenti hanno mobilitato durante lo svolgimento dell'attività didattica?
- D.R. 2: Quali opportunità hanno evidenziato le insegnanti coinvolte nel percorso di integrazione tra laboratorio al museo ed esperienza in classe?

ANALISI DEI DATI RACCOLTI

Dall'analisi dei dati raccolti, sono emersi alcuni spunti significativi sia per quanto riguarda l'esperienza degli studenti, sia per quanto attiene alla rielaborazione dell'insegnante. Dal punto di vista dell'esperienza degli studenti, abbiamo ritenuto di organizzare l'analisi attraverso due filoni:

- Interazioni tra l'esperienza al museo e l'esperienza in classe: sapere e saper fare, conoscenze acquisite in contesto informale e integrate nel momento di formalizzazione in classe.
- Nuovi apprendimenti e connessioni matematiche con altre esperienze passate.

Per quanto attiene la rielaborazione dell'insegnante, abbiamo identificato tre nuclei significativi:

- L'importanza del contesto in cui l'apprendimento avviene
- La diffusione di buone pratiche utili per arricchire e guidare l'esperienza didattica di altre classi che vogliono vivere esperienze simili
- Il problema della valutazione: come valutare un apprendimento avvenuto in maniera informale.

L'esperienza degli studenti

I risultati nell'attività di tassellazione svolta al museo e ripresa in classe sono stati significativi dato che tutti e tre i gruppi sono riusciti a trovare le tassellazioni con un solo poligono e almeno una combinazione con due figure diverse. Inoltre, gli studenti, durante il momento di riflessione del terzo incontro, in autonomia sono riusciti a comprendere che la legge che regola la tassellazione fosse legata agli angoli, arrivando a individuare l'angolo giro descritto dalle piastrelle con l'ausilio della maestra. Con l'analisi presentata in questa sezione sottolineiamo la forte interazione che si è venuta a creare fra scuola e museo, fra formale e informale. In contrasto con il senso comune che tende a caratterizzare le gite scolastiche come qualcosa di sconnesso, in questo percorso emergono delle connessioni significative fra museo e scuola, seguendo vie che è difficile comprendere se non con un'osservazione approfondita di entrambi i setting e degli eventi (Kelton, 2021, p. 21).

In questa esperienza, gli studenti sono riusciti ad acquisire quelli che abbiamo definito come “saperi informali”. Per “saperi informali” intendiamo tutti quei saperi che l'esperienza al museo ha fatto emergere, e che i bambini spontaneamente hanno collegato ad esperienze di vissuto passate, che sono state quindi rilette alla luce delle nuove conoscenze acquisite. Infatti, durante la visita al museo, al momento dell'osservazione nella sala di Bacco e Arianna, il bambino F. ha affermato: “questo pavimento mi ricorda un po' le strutture di basalto quando sono stato in Islanda [...] ho visto delle rocce di basalto che hanno proprio la stessa forma del pavimento di questa stanza”. Oppure, durante il rientro a scuola, la bambina M. ha realizzato un disegno di fantasia, nel quale ha rappresentato delle case non più con facciata a sviluppo piano, ma rappresentandole a forma di cubo giustificando il tutto affermando che “rispecchiano di più la realtà”, applicando quindi a una prassi consolidata una nuova conoscenza.

Possiamo notare come apprendimenti legati al cubo e ai solidi siano emersi in maniera abbastanza spontanea negli studenti. Lo stimolo, originato nel contesto informale, si è poi trasformato in curiosità da parte degli studenti che hanno provato autonomamente a porsi domande e a cercare delle risposte nell'esperienza. Quest'apprendimento è stato poi ripreso dalla maestra in classe, che ha riprogettato le sue lezioni attorno ad esso. Si è verificata una situazione in cui studenti e insegnante hanno co-costruito percorsi disciplinari d'apprendimento ricchi, e radicati su esplorazioni senza limiti, gioco e scoperta (Kelton, 2021).

Le riflessioni degli insegnanti

Per l'analisi delle considerazioni delle insegnanti, facciamo riferimento all'intervista semistrutturata somministrata alle insegnanti Marisol ed Emilia. Per condurre l'intervista, abbiamo stilato preventivamente una checklist con tutti gli argomenti che intendevamo indagare: criticità rilevate nell'integrazione fra attività al museo e attività in classe, punti di forza e opportunità di fare quest'attività nel modo in cui è stata progettata, cambiamenti che abbiamo dovuto fare in itinere, valutazione dell'esperienza a distanza di tempo, effetti sugli studenti dell'attività svolta.

Dall'analisi della trascrizione dell'intervista, sono emersi due temi, che abbiamo individuato come i più significativi, in termini di tempo dedicato alla discussione:

- TH1: L'importanza del contesto, per tutti gli studenti, per apprendimenti significativi anche al di fuori della matematica
- TH2: la valutazione

Per ognuno di questi temi, riportiamo in virgolettato i passaggi maggiormente significativi.

Elena: *«progetto da riproporre perché rimane nel tempo, nella memoria dei bambini [...] R. grazie a questo progetto, ha avuto la spinta ad interagire di più con i compagni. [...] si sono messi in moto da parte degli studenti degli atteggiamenti inclusivi nei confronti di quei compagni che generalmente hanno difficoltà nella socializzazione in classe».*

Marianna: *«Le attività al museo erano più ricche emotivamente, c'era più trasporto, in classe sembrava un compito [...] Abbiamo fatto anche matematica informale nel giardino, però quell'attività nel museo, in un luogo diverso da quello che loro conoscono, [...] loro l'hanno assorbito in modo diverso da quello*

che avrebbero fatto a scuola [...] hanno sicuramente un ricordo, diciamo più forte di certe cose [...] l'approccio di un esterno che non sia la maestra [...] lo ricordano sicuramente meglio».

Le maestre in questi passaggi dell'intervista sottolineano come il contesto del museo (TH1) sia stato il punto cardine di tutta l'esperienza. L'educazione informale della matematica ha una forte componente emotiva che si traduce in una grande forza motivazionale sugli apprendimenti da parte degli allievi. Le visite guidate offrono l'opportunità di motivare e unire gli studenti fra loro, i quali apprezzano e comprendono i concetti che vengono insegnati anche in classe, incrementano la loro conoscenza dandole basi più solide e promuovono anche l'apprendimento futuro verso livelli sempre più alti di pensiero e strategie risolutive. Con la comprensione, arriva anche confidenza nella materia e motivazione intrinseca (Behrendt & Franklin, 2014).

Marianna: *«Una valutazione formale sarebbe stata sminuente del lavoro che è stato fatto, dato che gli obiettivi sono stati raggiunti. [...] Loro (gli studenti ndr) hanno fatto autovalutazione [...] è stato utilissimo, però non mi sono sentita di fare una valutazione formale su un progetto informale»*

La maestra Marianna sulla valutazione (TH2) comprende, forse più per esperienza fatta che per approccio teorico, l'inadeguatezza di una valutazione formale, come ben delineato da Nemirovsky e colleghi (2017). Ai suoi occhi valutare formalmente ciò che è stato appreso informalmente non ha senso, ritenendo superflue verifiche sommative sugli argomenti.

CONCLUSIONI

In conclusione, di questo lavoro di ricerca rispondiamo alle domande che ci siamo posti.

Riguardo la D.R. 1 è emersa la forte interazione che si è venuta a creare fra scuola e museo, fra contesto formale e informale. Le gite scolastiche non sono più qualcosa di sconnesso, emergono delle connessioni significative fra museo e scuola, seguendo vie che è difficile comprendere se non con un'osservazione approfondita di entrambi i setting e degli eventi (Kelton, 2021, p. 21). L'esperienza, progettata su più incontri e non limitata alla sola visita guidata, è molto distante, in modalità e approccio, dalla normale gita scolastica, e questo punto è stato anche ribadito dalle insegnanti. I bambini hanno ricollegato quello che è emerso durante la visita al museo alle attività formalizzanti proposte in classe, e l'esperienza di apprendimento informale ha permesso loro di rileggere alcuni momenti di vita passati e pratiche consolidate.

Rispondiamo a D.R. 2 facendo riferimento in particolare all'intervista conclusiva alle maestre della classe, dalla quale emergono i principali temi che rispondono a questa domanda. La prima opportunità individuata è la proposta di un'esperienza diversa e più profonda rispetto alla classica gita scolastica. Infatti, il lavoro precedente e successivo alla visita svolto in classe dà un peso maggiore a tutta l'esperienza, rendendola un momento di reale apprendimento, in grado di portare la classe a conoscenze imprevedibili e avanzate che permangono nella memoria. La riflessione dell'insegnante sulla valutazione si riaggancia al terzo punto trattato da Nemirovsky e colleghi (2017), ovvero che le attività proposte non sono accompagnate da tradizionali forme di valutazione (p. 970). La maestra ha ritenuto le forme tradizionali di valutazione superflue e non necessarie, definendole come uno strumento incoerente per valutare un apprendimento avvenuto in modo informale, preferendovi strumenti di documentazione e sintesi delle conoscenze emerse come la realizzazione di cartelloni di riepilogo e il dialogo matematico con i propri studenti.

Desideriamo riportare un possibile sviluppo, che è stato proposto alla classe descritta con un incontro appositamente strutturato, successivo alla sperimentazione. L'idea nasce dalla visione dei benefici che un'esperienza d'apprendimento informale offre a degli studenti, e a come ricreare un contesto adeguato per questa forma d'apprendimento anche in classe. La riflessione ha coinvolto quindi l'uso di tecnologie che oggi abbiamo a disposizione, come ad esempio la realtà aumentata e virtuale, utili per ricreare il contesto e le condizioni affinché l'apprendimento informale al museo e tutte le emozioni e la motivazione ad esso strettamente correlate, possano essere richiamate, proponendo ulteriori attività che integrano e completano l'esperienza. Riteniamo questa proposta meritevole di un approfondimento

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia sperimentale perché potenzialmente in grado di aprire nuovi orizzonti nell'apprendimento informale della matematica.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare le insegnanti che hanno partecipato con entusiasmo al progetto InformalMath. Inoltre esprimono un ringraziamento particolare al Dipartimento di Educazione del Castello di Rivoli - Museo d'Arte Contemporanea e alle Artenaute per come hanno saputo navigarci nell'arte contemporanea.

BIBLIOGRAFIA

Behrendt, M., & Franklin T. (2014). A review of research on school field trips and their value in education. *International Journal of Environmental and Science Education*, 9(3), 235-245. doi: 10.12973/ijese.2014.213a

Casi, R., & Sabena, C. (2022). Informal mathematics experiences in museums: What potential for teacher professional development? In Hodgen, J., Geraniou, E., Bolondi, G., & Ferretti, F. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3065–3066). ERME/Free University of Bozen-Bolzano.

DeWitt, J., & Storksdieck, M. (2008). A short review of school field trips: Key findings from the past and implications for the future. *Visitor Studies*, 11(2), 181–197.

Kelton, M.L. (2021). Mathematics Learning Pathways on a School Fieldtrip: Interactional Practices Linking School and Museum Activity, *Visitor Studies*, DOI: 10.1080/10645578.2021.1939984

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

LO SCOIATTOLO RACCOGLIE LE NOCCIOLE: OSSERVIAMO, CONTIAMO, ARGOMENTIAMO

Elisa Pera

I.C. Nasi, Moncalieri (TO)

E-mail: elisa.pera@unito.it

Abstract

La proposta didattica che verrà presentata parte dal presupposto che già nei primi anni della scuola primaria l'alunno possa sviluppare la capacità di argomentare. Come chiaramente espresso nelle Indicazioni Nazionali 2012, l'argomentazione rientra fra i traguardi di competenza da raggiungere al termine della classe quinta e occorre quindi lavorare su più fronti, tra cui quello matematico, fin da quando gli alunni incontrano le prime situazioni problematiche.

In occasione della tesi di Laurea in Scienze della Formazione Primaria, ho sperimentato un percorso didattico in una classe seconda, che ha preso avvio da un'attività di Radford e Demers (2006), con tema la modellizzazione dell'algebra. Gli alunni sono stati accompagnati a riconoscere regolarità ed effettuare generalizzazioni algebriche.

Le attività sono inserite in un contesto narrativo, la storia di uno scoiattolo raccoglitore di noccioline, che ha coinvolto gli alunni anche dal punto di vista affettivo, in accordo con il quadro elaborato da Zan (2012). Le richieste di argomentazione hanno reso necessario per gli alunni mantenere in parallelo il doppio binario tra filone narrativo e filone matematico, in stretta relazione con il significato degli eventi e con le implicazioni sullo sviluppo del racconto.

Il percorso didattico ha avuto inizio nella primavera del 2020, quando tutte le scuole sono state chiuse per l'epidemia di Covid-19. Per questo, la progettazione riformulata ha previsto un focus sull'argomentazione in forma orale, accompagnata dalla produzione autonoma di disegni da parte degli allievi per rielaborare parti salienti della storia e dalla simulazione delle noccioline realizzata con piccoli oggetti trovati in casa da ciascun alunno. La presenza di mediatori concreti ha sostenuto l'argomentazione delle proposte di soluzioni anche a distanza, permettendo ai bambini di inquadrare con la videocamera i loro oggetti e di unire gesti, parole e rappresentazione. Nella comunicazione verrà presentata la progettazione e verranno discusse le produzioni degli allievi, in relazione allo sviluppo delle competenze argomentative.

Parole chiave

Argomentazione, regolarità, modellizzazione algebrica, problemi narrativi.

LO SCOIATTOLO RACCOGLIE LE NOCCIOLE: OSSERVIAMO, CONTIAMO, ARGOMENTIAMO

Quadro teorico

I processi argomentativi sono un aspetto centrale della ricerca in didattica della matematica, che si è concentrata su questi studi a partire dagli anni Ottanta del secolo scorso e tutt'oggi essi sono oggetto di ricerca a livello internazionale. Di Martino (2018), nel suo filone di ricerca sulla didattica della matematica, ha sottolineato come l'argomentazione contribuisca a creare verso la matematica un

atteggiamento positivo, ovvero un costrutto tridimensionale che correla diverse dimensioni, tra cui svolgono un ruolo importante le disposizioni emozionali del soggetto. Lavorare sull'argomentazione risulta di fondamentale importanza per motivare al successo, coinvolgendo gli studenti sia dal punto di vista emotivo che cognitivo. Inoltre l'argomentazione contribuisce ad una concezione della matematica come disciplina di continua scoperta, nella quale il ragionamento e la sua condivisione con il gruppo classe sono elementi cruciali per un tipo di apprendimento che si concentra più sul processo rispetto che sul prodotto.

In accordo con la prospettiva vygotskijana, infatti, l'argomentazione favorisce un apprendimento di tipo socio-culturale; in particolare si considera centrale la relazione tra pari, la comunicazione, la capacità di comprendere un differente punto di vista, il confronto costruttivo che emerge dalla cooperazione all'interno di un gruppo. Sfard (2009) ha elaborato, a questo proposito, l'interessante concetto di *comognizione*, che riprende l'interazione fra pari collegandola strettamente alla cognizione: la comunicazione (richiamata nella prima parte della parola) è per la ricercatrice occasione privilegiata e indispensabile per lo sviluppo della cognizione (richiamata nella seconda parte della parola). Secondo il quadro Sfard, dunque, la matematica si costituisce come un tipo particolare di *discorso*: non perché sia attività discorsiva, ma perché la comunicazione matematica tra soggetti, in particolare sotto forma di argomentazione e ragionamento, è necessaria per ciascun interlocutore a prendere coscienza del discorso, caratterizzato dal punto di vista culturale.

Come prescritto dalle Indicazioni Nazionali 2012 (MIUR; 2012), la competenza argomentativa non riguarda soltanto l'ambito matematico: si tratta di uno snodo chiave anche per l'area linguistica, costituendosi come vero e proprio ponte interdisciplinare. Il tema delle narrazioni è infatti fortemente connesso al processo argomentativo: i bambini enunciano affermazioni e spiegazioni che sono considerate "narrativi"; inoltre i loro interventi spesso coinvolgono il piano della narrazione, oltre che quello matematico. Le proprietà della dimensione narrativa dei problemi sono state approfondite da Zan (2012), che ne individua cinque: sequenzialità, composizione pentadica, intenzionalità, componibilità ermeneutica, opacità referenziale. Senza queste caratteristiche, un problema non può essere considerato narrativo, ma rischia di rimanere un semplice esercizio camuffato attraverso qualche riga di testo scritto. L'importanza dell'argomentazione risiede inoltre anche nel fatto che questa competenza contribuisce alla formazione del cittadino responsabile: la capacità di rendere esplicito il ragionamento sotteso ad una scelta riguarda non solo le richieste scolastiche di ambito logico-matematico, ma si può estendere a tante situazioni di vita quotidiana che lo studente affronterà in futuro. Trasponendo sul piano didattico le parole di Morin, l'obiettivo più alto della scuola è quello di creare delle teste *ben fatte* e non *ben piene*.

Percorso didattico

Il percorso didattico, intitolato *La storia dello scoiattolo*, è stato articolato in 5 incontri, rivolti ad una classe seconda di una scuola primaria di Torino nel periodo della primavera 2020. La sperimentazione, finalizzata alla stesura di una tesi di didattica della matematica in Scienze della Formazione Primaria, ha preso avvio da un'attività proposta da Radford e Demers (2006). Attuate le opportune modifiche, legate al costante vincolo della didattica a distanza, il focus della progettazione è stato mantenuto: agli studenti è stato richiesto di lavorare sul ragionamento di tipo algebrico, individuando regolarità a partire da un contesto narrativo e provando ad effettuare le prime generalizzazioni algebriche.

Si possono delineare 5 fasi della sperimentazione: la lettura della prima parte della storia e la sua rappresentazione grafica, la richiesta di passare dal giorno al numero di noccioline raccolte, la richiesta inversa, la presentazione di un caso particolare ed infine l'individuazione di una nuova regolarità e il confronto con quella precedente.

Attraverso questa struttura si è tentato di intrecciare il piano narrativo e il piano matematico, correlando l'avanzamento della storia con la scoperta di nuovi elementi numerici relativi alla raccolta delle noccioline.

Prima di passare all'analisi di ciascuna fase, occorre precisare che la classe era stata suddivisa in due gruppi e dunque le videochiamate delle lezioni impegnavano una decina di alunni per volta e si ripetevano per entrambi i gruppi, con la compresenza costante dell'insegnante di matematica.

Fase 1. Lettura della storia e rappresentazione

Durante questa fase si è letta la prima parte della storia, con il supporto visivo di una struttura tridimensionale, realizzata con materiale di recupero, che aveva la funzione di aiutare la drammatizzazione della storia come se fosse un teatrino. Infatti la modalità di lettura a distanza non avrebbe dovuto inficiare la comprensione della storia, centrale in tutto il percorso didattico.

Ieri pomeriggio ero sul balcone quando è arrivato uno scoiattolino. Mi ha detto di chiamarsi Bobo e mi ha raccontato la sua avventura dell'autunno scorso.

«Quando cominciava a fare freddino, dovevo trovarmi un rifugio bello comodo per passare lì l'inverno. Sai, noi scoiattoli d'inverno stiamo al riparo e mangiamo quello che abbiamo raccolto prima, in autunno... Ma adesso torniamo alla mia avventura: stavo passeggiando nel bosco dietro casa tua e ho fatto una scoperta meravigliosa! Durante la passeggiata è scoppiato un forte temporale e sono entrato nel buco di un albero lì vicino, perché non volevo bagnarmi. Ma il rifugio era troppo piccolo come casa per l'inverno, allora ho deciso di continuare la ricerca dopo il temporale. Dopo qualche minuto di cammino sono arrivato davanti ad una grande quercia con un buco proprio perfetto per il mio piccolo corpo e la mia grande coda. Per fortuna in quella fantastica casetta ho trovato tre noccioline appetitose: ero felice e allora ho deciso di abitare lì per la stagione fredda. All'improvviso è arrivato senza bussare lo scoiattolo proprietario e mi ha detto: «Questa è casa mia! E queste sono le mie noccioline!». Allora ho lasciato quel bel rifugio e ho continuato a cercare... Finalmente, cammina cammina per il bosco, ho scoperto un buco meraviglioso, dove c'erano già 8 belle noccioline: mi sono riposato e con mio gran piacere nessun'altra bestiola è venuta a dirmi che ero a casa sua, così ho trovato la casa per l'inverno. Dovevo ancora fare una cosa importante: aumentare la riserva di noccioline! La vita di uno scoiattolo non è facile! Oltre a trovare una casa, bisogna anche raccogliere cibo per l'inverno, quando la neve copre ogni cosa e tutto il bosco diventa bianco. Io però sono stato fortunato, perché nella mia nuova casetta avevo già 8 noccioline e non avevo fatto nessuna fatica a trovarle». Poi lo scoiattolo ha aggiunto: «Adesso conosci la mia avventura; dalla prossima volta vorrei che tu giocassi con me a un gioco di enigmi, cioè di indovinelli».

In seguito, ogni alunno ha dovuto scegliere un momento della storia che lo avesse particolarmente colpito ed elaborare un disegno sul proprio quaderno. Al termine, ciascuno ha motivato per iscritto la propria scelta.

È stato interessante notare che le scelte e le argomentazioni si riferissero in gran parte ai momenti emotivamente più salienti della storia: l'arrivo dello scoiattolo proprietario, con conseguente cacciata di Bobo (6 casi su 19) oppure il lieto fine, ovvero quando lo scoiattolo Bobo trova una casa (6 casi su 19). Questo sembra una conferma del ruolo importante che gli aspetti emotivo-affettivi rivestono nelle attività di lettura (fig. 1, fig. 2) e del fatto che i momenti della storia maggiormente individuati dagli studenti siano stati quelli in cui emerge lo scopo e l'azione dei personaggi (fig. 3), in accordo con le proprietà riguardanti la dimensione narrativa dei problemi citate nel quadro teorico.

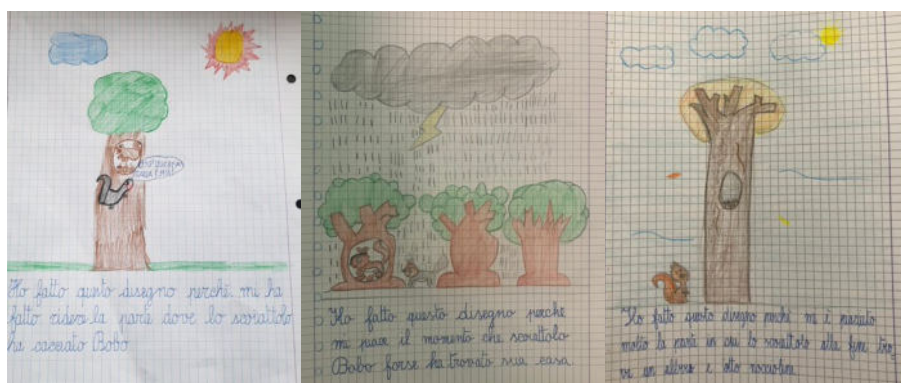


Figura 1 – Scelta legata ad aspetti emotivi della storia

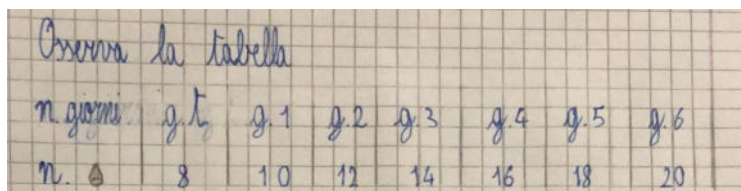
Figura 2 – Scelta legata ad aspetti emotivi della storia

Figura 3 – Scelta legata allo scopo del personaggio

Fase 2. La raccolta: dal giorno al numero di noccioline

Agli studenti è stato proposto il proseguimento della storia, qui riportata, e la successiva elaborazione di una tabella (fig. 4), completata nella seconda riga solo fino al giorno 3.

Quando lo scoiattolo ha cominciato a mettere da parte le provviste, ha raccolto lo stesso numero di noccioline tutte le mattine e non ne ha mai mangiate.



Osserva la tabella							
n. giorni	g.1	g.2	g.3	g.4	g.5	g.6	
n.	8	10	12	14	16	18	20

Figura 3 - Si è scelto di indicare convenzionalmente con la lettera 'g' i giorni e con la lettera 'n' il numero di giorni e di noccioline, rappresentate attraverso un simbolo.

Successivamente si è chiesto agli studenti di calcolare quante noccioline avrebbe raccolto lo scoiattolo dopo 6 giorni e dopo 10 giorni, spiegando il proprio ragionamento. Per sostenere la modellizzazione matematica, si è proposto agli studenti di lavorare, ciascuno da casa propria, con dei piccoli oggetti che potessero simulare le noccioline. La possibilità di utilizzare dei mediatori concreti e di mostrare ai compagni, attraverso la webcam, la disposizione dei propri piccoli oggetti ha favorito la discussione argomentativa nonostante la modalità di lezione, a distanza. Molti alunni hanno spiegato il proprio ragionamento facendo esplicitamente riferimento ai materiali utilizzati. Ad esempio uno studente ha risposto alla richiesta di calcolo di noccioline nel giorno 6 in questo modo: «Io ho ragionato con i tappi,aggiungendone per 3 volte 2».



Figura 4 - Esempio di mediatore concreto utilizzato da un alunno per rappresentare le noccioline raccolte nel giorno 10

Fase 3. La raccolta: dal numero di noccioline al giorno

Durante questa fase è stato chiesto agli alunni di procedere al contrario, passando dalla conoscenza di un certo numero di noccioline raccolte all'individuazione del giorno. In questo caso, gli alunni hanno mostrato differenti tipi di ragionamento: supportato dagli oggetti, supportato dalla memorizzazione della tabella eseguita in precedenza, calcolando con l'aiuto dei mediatori concreti o a mente. Questo procedimento, ripetuto come sfida tra compagni per più volte, con differenti numeri di noccioline, ha favorito l'interiorizzazione della regolarità di raccolta delle noccioline, espresse anche in forma numerica da alcuni studenti. Essi infatti avevano capito che il meccanismo di base era sempre togliere dal numero dato 8 noccioline (quelle già trovate nel giorno del temporale) e successivamente dividere

per 2 il numero restante. Questo modo di ragionare era stato supportato dall'azione pratica dell'incontro precedente: avere contato, spostato e raggruppato fisicamente i propri piccoli oggetti per svariate volte ha favorito l'individuazione di regolarità espressa con le parole, i gesti e i numeri.

Fase 4. Un caso particolare, ma non impossibile.

Come ulteriore sviluppo della fase precedente, è stata sottoposta agli alunni la seguente domanda: *Bobo non mangiava mai le noccioline delle sue provviste. Oggi conta 27 noccioline. In che giorno siamo? Cosa osservi?*

Gli alunni hanno dovuto attribuire così un significato ad un numero che non era presente nella tabella di riferimento, poiché dispari. Le differenti soluzioni trovate hanno tenuto conto sia del filone matematico che di quello narrativo, portando tuttavia ad esiti differenti. Si riportano alcuni protocolli di risposte.

- *Siamo nel giorno 10, ma manca 1 nocciola per completare il giorno 10. Perché nel giorno 9 ci sono 26 noccioline, $26+2=28$, $28-1=27$.*
- *Le noccioline che ha oggi $27-8=19$ noccioline. 19 noccioline divise per 2 noccioline al giorno: $19:2=9$ r1. Siamo nel giorno 9,1.*
- *Osservo che il 27 non c'è nella tabella ma ha un significato che 27 è tra il giorno 9 e 10 perché Bobo nel giorno 10 ne ha raccolta solo 1.*

Fase 5. Invenzione di regolarità e confronto.

Attraverso l'introduzione di un nuovo personaggio, ciascuno studente è stato invitato ad elaborare una regolarità di raccolta delle noccioline differente da quella di Bobo. Successivamente ognuno ha dovuto confrontare le due regolarità di raccolta per individuare chi avrebbe raccolto più noccioline dopo una settimana. L'obiettivo di questa fase è stato osservare l'autonomia di pensiero e ragionamento in un campo simile a quello già indagato insieme, ma con una regolarità diversa, inventata. Dai protocolli ottenuti, è stato osservato che alcuni alunni sono riusciti a sviluppare una generalizzazione aritmetica, ripetendo e argomentando lo stesso schema: numero di noccioline raccolte al giorno (secondo la regolarità di ciascun personaggio) moltiplicato per il numero di giorni (7), a cui hanno sommato il numero di noccioline di partenza.

Conclusione

Verranno delineate di seguito le caratteristiche del percorso didattico che hanno favorito apprendimento e miglioramento rispetto alle competenze argomentative e matematiche.

È stata rilevata l'importanza dei referenti materiali come strumento di supporto o talvolta vero e proprio stimolo al ragionamento. Alcuni oggetti concreti (gli oggetti-noccioline) hanno rappresentato gli elementi cruciali per la modellizzazione matematica della storia, attraverso la loro presenza fisica sul piano di lavoro e la loro manipolazione. Assieme alle parole, ai disegni, ai gesti è stato possibile apprezzare la *multi variazione* del linguaggio matematico. Un altro aspetto centrale, insito nella struttura del progetto e rilevabile dalle argomentazioni degli alunni, è stato l'intreccio tra piano matematico e piano narrativo. Rispetto alle prime argomentazioni prodotte, verso la fine della progettazione si è rilevato che un maggior numero degli studenti è stato in grado di integrare i due piani, segno della competenza raggiunta nel cogliere la stretta relazione tra i numeri, le operazioni e il loro significato legato alla storia. Infine il progetto ha influito positivamente sulla visione della matematica da parte degli studenti, che hanno condiviso con compagni e insegnanti la consapevolezza nel sentirsi più sicuri sul ragionamento, sul lavoro attraverso storie, sui calcoli e uso di tabelle.

BIBLIOGRAFIA

- Di Martino, P. M. (2018). *Il ruolo dell'argomentazione nell'educazione matematica*.
MIUR, M. d. (2018, Febbraio 22). Indicazioni nazionali e nuovi scenari.

Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Pitagora Editrice.

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*. Erickson.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 107–126.

APPRENDIMENTO COOPERATIVO IN CONTESTO PRE- ALGEBRICO: UNA PRIMA SPERIMENTAZIONE PILOTA NEL PROGETTO EUROPEO PMATHS

Francesca Ferrara, Giulia Ferrari e Anna Lorenzo
Università degli Studi di Torino
giulia.ferrari@unito.it

Abstract

Il progetto europeo Erasmus+ “PMATHS: Learning Mathematics Through Pluriliteracies” è finalizzato alla progettazione di risorse e materiali didattici per integrare “Pluriliteracies” nell’insegnamento e nell’apprendimento della matematica attraverso metodologie innovative (in particolare, *game-based learning*, *problem-based learning*, *cooperative learning*) e un’attenzione all’inclusione e alla parità di genere. Il progetto include ricercatori in didattica della matematica e linguisti di alcuni Paesi partner: Belgio, Inghilterra, Italia e Spagna. La collaborazione tra i ricercatori intende approfondire l’idea stessa di *pluriliteracies* (o *literacy multiple*), ovvero l’intreccio tra specifiche competenze disciplinari (nel nostro caso, matematiche), competenze linguistiche e nuove competenze. Questo contributo presenta i primi risultati del nostro lavoro nell’ambito del progetto (come gruppo italiano), relativo allo sviluppo di un’attività didattica incentrata sulla metodologia del *cooperative learning* e sull’avvio al pensiero algebrico. L’attività è stata implementata per la prima volta in due classi quarte della scuola primaria, con uno studio pilota che ha permesso di analizzarne potenzialità e limiti. Offriamo qui una panoramica del progetto e dei suoi obiettivi, una discussione delle scelte metodologiche operate nella costruzione dell’attività, soprattutto in termini di apprendimento cooperativo, e riflessioni emerse dallo studio pilota.

Parole-chiave

Pluriliteracies, matematica, apprendimento cooperativo, registri di rappresentazione, generalizzazione

TRA MATEMATICA E LINGUAGGI

L’intreccio tra matematica e linguaggi è di fondamentale importanza per la didattica della matematica, da molteplici punti di vista. La matematica può essere pensata essa stessa come il linguaggio della Scienza, popolato di simboli e caratterizzato da regole precise, con carattere di universalità. Già Galileo aveva scritto, ne *Il Saggiatore* che l’Universo era “scritto in lingua matematica”. Ma la matematica è ben di più, come ha osservato il premio Nobel per la fisica R. Feynman: “La matematica non è semplicemente un’altra lingua. La matematica è un linguaggio più il ragionamento; un linguaggio più la logica, cioè uno strumento per ragionare” (Feynman, 1971, pp. 43-44).

La ricerca in didattica della matematica ha rivolto il suo interesse oramai da diversi anni allo studio del ruolo dei linguaggi nell’insegnamento e nell’apprendimento della disciplina. Oggi sappiamo che il linguaggio della matematica è multimodale, ovvero si basa su più modalità di espressione, e include diversi registri semiotici, ma un ruolo importante è anche giocato dalla lingua utilizzata nelle attività matematiche. In breve, non possiamo fare matematica senza parlare di matematica. Un aspetto rilevante che ha motivato le ricerche sull’intreccio tra matematica e linguaggi riguarda il fatto che un numero crescente di classi (in Italia e all’estero) è multilingue. Inoltre, il periodo pandemico ha indotto studenti e insegnanti a svolgere per un tempo significativo attività didattiche a distanza, mettendo in evidenza i limiti della comunicazione da remoto e le difficoltà nel condividere informazioni e nel promuovere apprendimenti significativi (Ferrari, 2021).

Proprio in relazione alla complessità di contesti multilingue, in uno studio del 2017, Garcia e colleghi introducono l’idea di *pluriliteracies* (o *literacy multiple*) per prendere in considerazione la diversità sociale e linguistica nelle società plurilingue, tramite la quale “è promossa l’interazione tra più lingue,

discorsi, dialetti e registri, con particolare attenzione alle competenze multilinguistiche che fanno affidamento su molteplici modalità e canali comunicativi e sistemi semiotici.” (Garcia *et al.*, 2007, pp. 12-13, *nostra traduzione*).

Il concetto di *pluriliteracies* nasce da un'estensione della metodologia CLIL (acronimo di *Content and Language Integrated Learning*) che propone l'apprendimento di contenuti disciplinari in una lingua (straniera) diversa dalla prima lingua dello studente. Secondo la metodologia CLIL, l'intreccio tra le 4C (Contenuto, Costruzione di conoscenze, Comunicazione e Cultura) risulta fondamentale per costruire percorsi didattici significativi affinché i discenti possano potenziare le competenze linguistiche oltre a quelle disciplinari.

Coyle, Meyer e Staschen-Dielmann (2023) hanno recentemente proposto un approccio pedagogico che si basa sull'idea di *pluriliteracies* e presenta le seguenti caratteristiche:

- l'attenzione esplicita alle competenze disciplinari in tutte le materie di istruzione;
- l'utilizzo di più linguaggi;
- la fluidità nell'interpretazione di testi.

Quest'ultimo aspetto, in particolare, deriva proprio dalla constatazione che la comunicazione oggi ha una natura sempre più multimodale o ibrida ed è dipendente da molteplici canali di comunicazione, analogici e digitali, e da numerosi sistemi semiotici. Per i nostri studenti, essere in grado di valutare criticamente le fonti di comunicazione in un tale contesto è dunque una fondamentale competenza di cittadinanza, da sviluppare anche a scuola.

Il progetto europeo Erasmus+ “PMATHS: Learning Mathematics Through Pluriliteracies” sfrutta questa idea di *pluriliteracies* per la progettazione di attività didattiche che sviluppino la comprensione e la produzione di testi in una varietà di codici linguistici e non, nello specifico contesto della matematica, anche al fine di sviluppare strategie applicabili in contesti di apprendimento di differenti discipline, in relazione a diverse culture e linguaggi.

Nelle prossime sezioni illustriamo più nel dettaglio la filosofia e gli obiettivi del progetto, prima di entrare nel merito del lavoro di progettazione che abbiamo svolto nel primo anno come gruppo di ricerca dell'Università di Torino, che partecipa al progetto in qualità di partner italiano. Presenteremo infine i primi risultati ottenuti da una sperimentazione pilota svolta al quarto anno della scuola primaria.

PMATHS: LEARNING MATHEMATICS THROUGH PLURILITERACIES

Il progetto “PMATHS” coinvolge quattro partner: l'Università di Cordoba (capofila), l'Università di Bruxelles (Vrije Universiteit Brussel, VUB), l'Università di Manchester (Manchester Metropolitan University, MMU) e l'Università di Torino.

A partire dalla collaborazione tra ricercatori in didattica della matematica e linguisti, nell'ambito del progetto sono in fase di progettazione e di sperimentazione risorse e materiali didattici che intendono integrare l'idea di *pluriliteracies* nel contesto disciplinare della matematica, attraverso metodologie innovative (nello specifico, *game-based learning*, *problem-based learning*, *cooperative learning*) e un'attenzione trasversale all'inclusione e a questioni di genere. Le competenze eterogenee dei ricercatori e delle ricercatrici coinvolti nel progetto sono un elemento caratterizzante volto ad approfondire il complesso intreccio tra specifiche competenze disciplinari (matematiche), competenze linguistiche e nuove competenze (tra cui quella digitale; si veda ad esempio, Coyle, Meyer, & Staschen-Dielmann, 2023).

In quest'ottica, il progetto mira a progettare e sperimentare questi tre tipi di risorse e materiali: 1) attività didattiche specifiche incentrate sulle diverse metodologie e applicabili a diversi contesti; 2) linee guida per permettere l'implementazione delle diverse metodologie di apprendimento; 3) strumenti di auto-riflessione e di condivisione per lo sviluppo professionale dei docenti, con l'obiettivo di monitorare i processi di apprendimento in atto nell'utilizzo delle attività e delle linee guida già citate. Ciascuna Università che aderisce al progetto è responsabile di una o più metodologie o degli aspetti di inclusione e parità di genere: il gruppo di ricerca di Cordoba si occupa delle metodologie del *game-based learning* e del *problem-based learning* (rispettivamente, apprendimento basato sul gioco e apprendimento basato sui problemi); come partner italiano, noi siamo responsabili della metodologia del *cooperative learning*

(o apprendimento cooperativo, che approfondiremo nella prossima sezione); l'Università VUB di Bruxelles si occupa invece della valutazione di attività e materiali in relazione a inclusione e parità di genere; infine, l'Università di Manchester è coinvolta con una sola partecipante che sta conducendo il suo dottorato di ricerca sugli argomenti cardine del progetto.

Il progetto prevede fasi cicliche di progettazione e implementazione per testare e valutare in diversi contesti le risorse e i materiali realizzati, in modo da rividerli alla luce delle esperienze nei vari sistemi educativi, la cui diversità rappresenta un valore aggiunto del progetto.

Come punto di partenza per l'organizzazione del lavoro, sono stati scelti un tema cardine comune e gli stessi stimoli contenutistici, da declinare sotto forma di attività didattiche mediante l'introduzione delle diverse metodologie che abbiamo menzionato.

Il tema specifico scelto è l'avvio al pensiero algebrico, mediante la generalizzazione, tema di particolare rilevanza per il segmento scolastico interessato dal progetto, ovvero quello che coinvolge studenti nella fascia d'età dai 9 ai 13 anni (differente nei vari contesti, ma in Italia corrispondente all'ultimo biennio della scuola primaria e alla scuola secondaria di primo grado).

Diversi studi di ricerca in didattica della matematica hanno approfondito la rilevanza dell'introduzione del pensiero algebrico in continuità con quello aritmetico ed esaminato la sua centralità nel passaggio dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado (Kaput, 2008; Malara, 2007). Inoltre, attività di avvio al pensiero algebrico (come lo studio di regolarità in sequenze di figure o di numeri) fungono da catalizzatori per lo sviluppo di pensiero funzionale, coinvolgendo concetti quali, ad esempio, quelli di variabile e di relazione.

Da un lato, l'utilizzo dei simboli proprio dell'algebra richiama la necessità sentita all'interno del progetto di riflettere su diversi linguaggi nell'ottica delle *competenze multiple*, considerando anche i numerosi sistemi semiotici tipici della matematica. Dall'altro lato, l'algebra, intesa come "modo di pensare" tipico della matematica (Kieran, 2011), permette di creare le condizioni per lavorare su uno dei processi cognitivi fondamentali nell'apprendimento della matematica e profondamente intrecciato con il registro del linguaggio, vale a dire l'argomentazione. In aggiunta, l'utilizzo dei simboli non dovrebbe essere un punto di partenza per la didattica della matematica ma piuttosto un punto di arrivo, nella prospettiva più ampia di saper analizzare relazioni tra quantità, notare strutture, studiare il cambiamento, generalizzare e, trasversalmente, risolvere problemi, giustificare, dimostrare e prevedere (Kieran, 2004), non solo di manipolare simboli.

In questo articolo, presentiamo le prime fasi di lavoro del progetto, che hanno riguardato la progettazione e la sperimentazione pilota di una prima attività didattica, che ha come obiettivo principale l'avvio al pensiero algebrico, con specifica attenzione ai processi argomentativi e ai principi di un apprendimento di tipo cooperativo.

APPRENDIMENTO COOPERATIVO ED ELEMENTI DI PROGETTAZIONE

La metodologia del *cooperative learning* è una metodologia didattica piuttosto diffusa, basata sul lavoro di gruppo e sull'interazione tra pari, strutturata mediante un'equa ripartizione di compiti ben definiti (Dansereau, 1988).

Possiamo riassumere gli ingredienti che caratterizzano l'apprendimento cooperativo come segue:

- 1) interdipendenza positiva: uno studente non può avere successo a meno che l'intero gruppo di cui fa parte non abbia successo;
- 2) interazione faccia a faccia: si deve promuovere l'apprendimento reciproco;
- 3) responsabilità individuale: è presa in considerazione la prestazione di ogni singolo studente e i risultati sono restituiti sia al gruppo sia al singolo;
- 4) abilità sociali: "i gruppi non possono funzionare in modo efficace se gli studenti non hanno e non utilizzano le necessarie capacità di leadership, processo decisionale, costruzione della fiducia, comunicazione e gestione dei conflitti. Queste competenze devono essere insegnate con la stessa finalità e precisione delle competenze accademiche" (Johnson & Johnson, 2017, p. 4);

- 5) elaborazione di gruppo: si deve discutere il contributo di ciascun individuo così come i suoi margini di miglioramento in modo da avere un riscontro specifico sulla partecipazione degli studenti e sullo sviluppo delle loro abilità sociali.

Per integrare questi principi di apprendimento cooperativo nella progettazione dell'attività matematica, abbiamo pensato di sfruttare una delle caratteristiche della disciplina, vale a dire l'utilizzo di diversi registri di rappresentazione semiotica: numerico, simbolico, grafico, linguistico (Duval, 2006). Abbiamo dunque scelto di caratterizzare l'intreccio tra i ruoli ricoperti da ciascuno studente nel lavoro di gruppo secondo diversi registri. A ogni membro del gruppo, sempre composto da tre persone, abbiamo affidato un *ruolo specifico* focalizzato su un registro di rappresentazione specifico e al quale abbiamo assegnato un nome preciso: il *reporter*, associato al registro linguistico; l'*artista*, associato al registro grafico; il *numeratore*, associato al registro numerico. Vediamo una descrizione più accurata dei ruoli:

- *Reporter*: è responsabile di ciò che il gruppo mette per iscritto sulla scheda dell'attività; quando il gruppo, dopo aver discusso, concorda su una risposta o soluzione, si occupa di scriverlo, con l'aiuto di tutti i membri del gruppo. Il reporter: scrive, riassume, riporta, raccoglie.
- *Artista*: è responsabile della parte visuale dell'attività e dei disegni del gruppo, creati ogni volta che siano ritenuti importanti per rispondere a una domanda, spiegare un ragionamento, cercare una soluzione, e così via. L'artista: disegna, rappresenta, descrive, aiuta con dei diagrammi.
- *Numeratore*: è responsabile di ciò che coinvolge i numeri, compresi processi di conteggio, operazioni e la ricerca di regolarità e di relazioni numeriche. Il numeratore: conta, calcola, osserva, rileva.

Nell'ottica dell'apprendimento cooperativo, l'insegnante deve assegnare i ruoli ai diversi membri del gruppo, specificando che, anche se ogni studente è responsabile di un certo registro, ciascuno deve partecipare a tutte le fasi di lavoro e deve tenere in considerazione le idee di tutti i membri del gruppo. Risolvere i problemi assegnati, infatti, è responsabilità di tutti e ognuno deve contribuire alla discussione con il suo ruolo specifico. La proposta in merito ai ruoli da ricoprire nel corso dell'attività si innesta quindi sui principi dell'apprendimento cooperativo, assegnando però a ciascuno una responsabilità precisa, con la consapevolezza che tutti i registri sono interconnessi e che tutti i partecipanti concorrono alla soluzione dell'attività. La scelta di associare i ruoli ai registri rappresenta un elemento di novità rispetto all'utilizzo della metodologia dell'apprendimento cooperativo nella didattica della matematica. Tipicamente, infatti, i ruoli sono associati a una suddivisione dei compiti o a uno specifico aspetto del lavoro piuttosto che essere caratterizzati dal punto di vista matematico.

Un ulteriore elemento che caratterizza il nostro lavoro di progettazione è l'introduzione nell'attività di fasi di *esplorazione*. Si tratta di momenti in cui due membri del gruppo si separano momentaneamente dal terzo membro (che rimane *nella casa base*) per andare *in esplorazione*, recandosi presso gli altri gruppi alla ricerca di informazioni su come questi hanno affrontato l'attività sino ad allora (Figura 1).

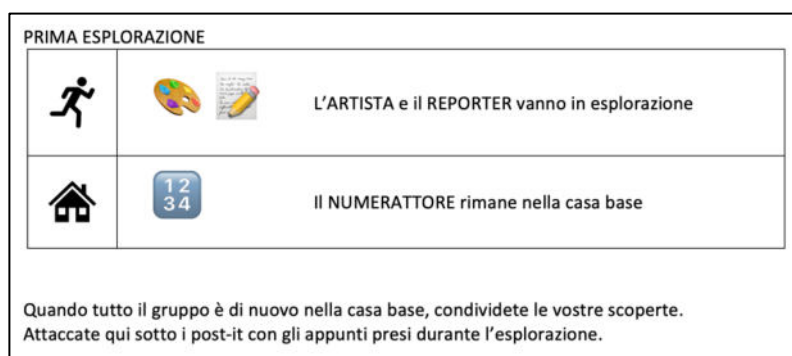


Figura 1. Estratto del testo relativo alla prima fase di esplorazione. Qui è previsto che l'artista e il reporter vadano in esplorazione, mentre il numeratore rimane nella casa base e accoglie i membri degli altri gruppi.

Gli studenti in esplorazione possono muoversi per la classe e recarsi dagli altri gruppi liberamente, in coppia o singolarmente. Porteranno con sé dei post-it sui quali prendere appunti, che poi dovranno condividere con chi è rimasto al banco per rielaborare insieme quanto scoperto. Non è sempre la stessa coppia ad andare in esplorazione (questo è descritto nella scheda di lavoro), così da permettere a tutti di esperire le modalità di interazione. Il membro del gruppo che, a turno, rimane fermo in postazione ha la responsabilità in quel momento di ricevere compagni e compagne in visita dagli altri gruppi e di fornire eventuali spiegazioni o risposte a domande riguardanti il lavoro svolto dal suo gruppo. In questo modo, i gruppi condividono strategie e approcci e tutti i membri del gruppo hanno nuovamente compiti ben definiti: illustrare quanto fatto in gruppo, ottenere suggerimenti, confrontarsi con altre risoluzioni. Questa fase di esplorazione è cruciale per favorire le dinamiche che abbiamo già descritto e che caratterizzano l'apprendimento cooperativo, in particolare:

- dal confronto con gli altri gruppi, ciascuno studente può ricavare informazioni importanti per il proprio gruppo, ed è responsabilità di tutti farsi di carico di scovare altre strategie o approcci utili;
- nel successivo confronto di gruppo, gli studenti possono consolidare le conoscenze che hanno sviluppato fino a quel momento, oppure ripensare quanto fatto;
- i gruppi hanno modo di rivedere e rivalutare il loro lavoro e di fare il punto.

DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ

Presentiamo ora, senza entrare nel dettaglio per motivi di spazio, la prima attività didattica che abbiamo sviluppato facendo riferimento agli elementi di progettazione della sezione precedente. L'attività è denominata "Cornici di piastrelle", si sviluppa in tre fasi principali, a partire dallo stimolo iniziale di una cornice quadrata, indicata come cornice "5×5" (Figura 2) e composta da un certo numero di piastrelle (anch'esse quadrate), di cui è necessario indagare le caratteristiche, per poi ragionare sulla composizione di altre cornici, tutte quadrate, ma di differente formato. Gli obiettivi di ciascuna delle tre fasi principali sono illustrati a seguire.

- Fase 1: generalizzare la relazione che lega il numero di piastrelle che compongono una data cornice al suo "formato" ($n \times n$).
- Fase 2: risolvere problemi che coinvolgono il ragionamento inverso, vale a dire determinare il tipo di cornice (o il formato) a partire dal numero di piastrelle che la compongono.
- Fase 3: mettere in relazione rappresentazioni che sono collegate tra loro e scritte equivalenti (come $4n - 4$, $4(n - 1)$, $4(n - 2) + 4$, e così via).

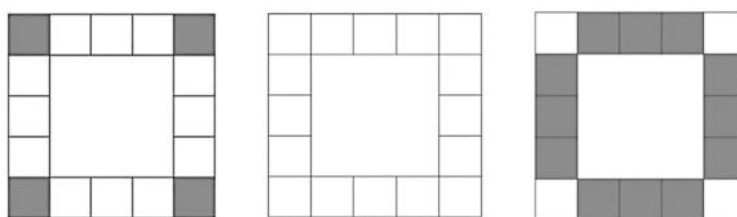


Figura 2. Tre diverse rappresentazioni di una cornice 5×5.

Per poter generalizzare il numero di piastrelle di cui è composta una cornice, è necessario intrecciare il registro numerico (il numero di tutte le piastrelle, il numero di piastrelle su ciascun "lato" della cornice, ecc.) con il registro grafico (il disegno delle differenti cornici, con eventuali colorazioni, ragionando sulla struttura della figura) e il registro linguistico (la descrizione della figura e della relazione tra il numero di piastrelle e il formato, e anche il numero di piastrelle su ciascun lato).

Tutti i registri concorrono alla comprensione della situazione e alla costruzione di argomentazioni su cui basare la generalizzazione del modo in cui può essere costruita una cornice di qualunque formato. La struttura della cornice può essere infine espressa utilizzando il registro algebrico-simbolico. Abbiamo scelto di assegnare a gruppi diversi cornici rappresentate in modo diverso (come mostra la Figura 2), per promuovere modi diversi di "vedere" le figure e di pensare alla generalizzazione della struttura.

La prima fase dell'attività prevede che gli studenti suddivisi in gruppi risolvano due schede di lavoro, con ruoli e tempi assegnati dall'insegnante. Ha quindi inizio un momento di esplorazione. In questa fase, ciascuno comprende il proprio ruolo all'interno del gruppo, familiarizza con la situazione e risolve i primi quesiti, focalizzati su: *Data una certa cornice, trovare il numero di piastrelle da cui è composta*. La seconda fase è costituita da una discussione collettiva orchestrata dall'insegnante così da riprendere e consolidare quanto scoperto nella fase 1. A seguire è data una terza scheda di lavoro, con cui i gruppi si concentrano sul problema inverso rispetto a quello affrontato in precedenza: *Dato un certo numero di piastrelle, quale cornice si può costruire?* Segue un nuovo momento di esplorazione. Infine, gli studenti ricevono una tabella da completare, in cui inserire il numero di piastrelle (eventualmente bianche, grigie, totali) della cornice per i formati visti.

La terza fase prevede che ciascun gruppo riceva tre buste, ognuna delle quali contiene due informazioni, relative a due cornici di formato diverso, in uno dei registri (verbale, numerico, grafico). La prima busta, per l'artista, contiene due rappresentazioni grafiche; la seconda busta, per il reporter, due frasi (da completare) che descrivono come calcolare il numero di piastrelle in una data cornice; la terza busta, per il numeratore, il numero di piastrelle di ogni cornice della prima busta. È importante sottolineare che le frasi devono essere completate, poiché lo scopo è proprio favorire processi di generalizzazione. Il compito corale del gruppo è operare la corretta associazione tra una cornice, una frase e un numero.

RIFLESSIONI DALLE CLASSI

In questa sezione, presentiamo alcune riflessioni emerse da una prima sperimentazione dell'attività descritta sopra. La sperimentazione ha avuto luogo in due classi quarte di una scuola primaria (dunque con bambini e bambine di 9-10 anni), in provincia di Torino, con l'obiettivo principale di testare gli elementi di progettazione che caratterizzano l'attività. La sperimentazione intendeva poi, in particolare, valutare la gestione dei ruoli assegnati agli studenti nel lavoro di gruppo e il loro intreccio con lo sviluppo di pensiero algebrico basato sulla generalizzazione.

Come abbiamo menzionato, una delle scelte fatte nella progettazione dell'attività è stata la specifica notazione 5×5 per indicare una cornice quadrata costituita da 5 piastrelle su ogni lato e la conseguente generalizzazione della notazione. Questa scelta ha influenzato il modo in cui alcuni studenti hanno risposto alle domande relative al numero di piastrelle che compongono una data cornice, nelle fasi iniziali dell'attività. Sebbene il simbolo " $\times$ " avesse il significato di indicare la forma bidimensionale della cornice (analogamente al caso del formato di una foto), che mantiene un dato numero di piastrelle per lato, abbiamo potuto constatare la facilità con cui è fortemente associato al segno di moltiplicazione. Sovente, bambini e bambine sono stati infatti indotti a ricercare il numero di piastrelle della data cornice proprio nel risultato di una moltiplicazione, come mostra l'esempio in Figura 3.

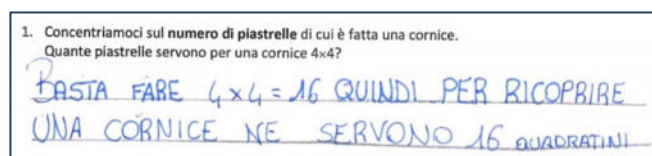


Figura 3. Associazione del simbolo " $\times$ " al segno di moltiplicazione nel caso di una cornice 4×4 .

Potremmo interpretare la risposta di questo gruppo non così lontana da quella corretta se pensassimo di ottenere tutte le piastrelle della cornice dalla considerazione dei suoi 4 lati senza ripetizione delle piastrelle ad angolo. Tuttavia, la risposta sembra derivare piuttosto dal calcolo diretto di 4 moltiplicato per se stesso (" $\text{basta fare } 4 \times 4 = 16 \text{ quindi}$ "), indotto dalla notazione 4×4 che ricalca la scrittura usuale dell'operazione di moltiplicazione. Le piastrelle sono qui scollegate dal contesto per lasciare il posto ai "16 quadratini" della rappresentazione, che "servono per ricoprire una cornice".

D'altra parte, 16 sarebbero i quadratini che coprirebbero l'intera superficie quadrata individuata dalla cornice, suddivisa anche nella parte centrale in quadratini della medesima grandezza. La Figura 4 mostra parte del protocollo scritto di un altro gruppo con la risposta a due domande, la prima relativa ancora alla cornice 4×4 , la seconda alla cornice 6×6 .

Se focalizziamo l'attenzione sulla parte sinistra del protocollo, vediamo che le risposte date inizialmente a entrambe le domande si basano sulla rappresentazione delle due cornici e sul numero di piastrelle che deriva dalla moltiplicazione 4×4 o dalla moltiplicazione 6×6 . Nel primo caso "16 piastrelle" è scritto sotto la rappresentazione di un quadrato suddiviso in 4 righe ciascuna fatta di 4 quadratini congruenti, indicati con il medesimo numero ripetuto quattro volte in riga (da 1 a 4), mentre " $= 16$ " come risultato dell'operazione 4×4 è scritto a destra della rappresentazione (si noti il segno di moltiplicazione che appare vicino all'angolo in alto a sinistra).

Nel secondo caso, troviamo a destra della rappresentazione esplicitato il calcolo " $6 \times 6 = 36$ ".

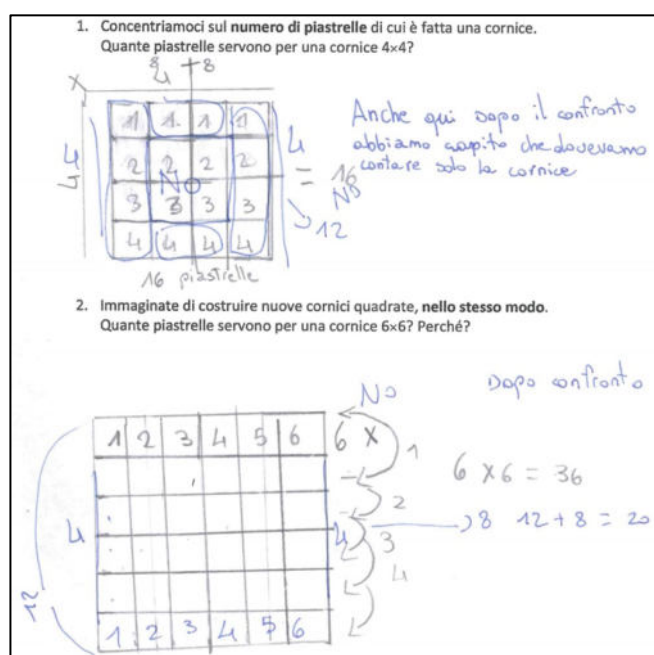


Figura 4. Protocollo scritto di un gruppo dopo il confronto con gli altri gruppi in fase di esplorazione.

Sempre sulla parte destra del protocollo, subito sotto i due risultati troviamo rispettivamente un "NO" e " $12 + 8 = 20$ " a correggere la precedente risposta e anche la specifica che la correzione è avvenuta "dopo il confronto", quando il gruppo ha capito che doveva "contare solo la cornice".

Abbiamo quindi potuto constatare il ruolo cruciale che le fasi di esplorazione hanno avuto ad esempio per superare l'*impasse* creato dalla notazione utilizzata per il formato.

In relazione al problema inverso, ovvero alla ricerca della cornice formata da un dato numero di piastrelle (ad es., 92), è interessante osservare che alcuni gruppi hanno adottato una strategia risolutiva che fa uso della rappresentazione di una particolare cornice come punto di partenza per trattare un nuovo caso particolare (più difficile però da rappresentare). Possiamo considerare questo come un modo di ragionare sulla struttura attraverso la sinergia tra registri (in tal caso, grafico e numerico), che supporta l'esplorazione di casi in cui il numero di piastrelle aumenta sempre di più, verso un caso generale.

La Figura 5 mostra un esempio della strategia suddetta per trovare la cornice formata da 92 piastrelle (la cornice di formato 24×24), a partire dalla rappresentazione di una cornice di 6 piastrelle per lato. Vediamo come la struttura della cornice di partenza è scomposta in due parti, con un lato considerato per intero (cui è associato "24") e un lato considerato senza le due piastrelle ad angolo ("22"), entrambi lati che andranno considerati due volte (" $48 + 44 = 92$ ").

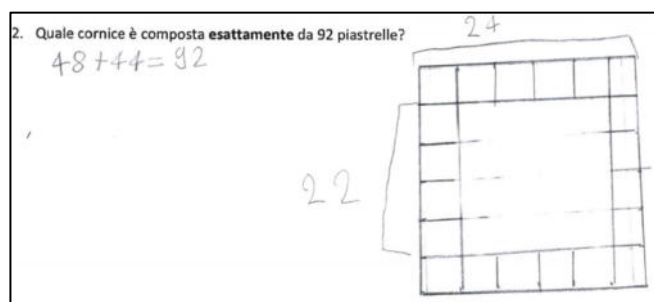


Figura 5. Rappresentazione di una cornice 6×6 per ragionare su una cornice più grande, formata da 92 piastrelle

Per motivi di spazio, non possiamo arricchire ulteriormente gli esempi che abbiamo discusso. Vogliamo comunque concludere il nostro contributo sottolineando che la sperimentazione pilota ci ha permesso di riflettere sulle potenzialità di un lavoro in classe che sappia sfruttare l'assegnazione di ruoli precisi, caratteristica dell'apprendimento cooperativo, valorizzando intanto le particolarità della matematica, ad esempio la coesistenza di diversi registri di rappresentazione, che per Duval (2006) necessitano di essere messi in relazione tra loro affinché si abbia sviluppo cognitivo in matematica. La diversità dei ruoli e la responsabilità di ciascuno in merito a uno specifico registro ha, nel nostro caso, favorito la sinergia tra registri differenti permettendo di stimolare processi di argomentazione alla base di una competenza algebrica precoce nel contesto considerato. Lo studio pilota ha inoltre permesso di raffinare l'attività e di iniziare a progettare le linee guida per l'implementazione di una metodologia cooperativa in classe. Il progetto prevede ulteriori attività didattiche e sperimentazioni. Alla luce di questo lavoro, una delle domande che ci siamo poste è: come possiamo sfruttare l'importanza di ruoli diversi all'interno del lavoro di gruppo e in relazione alle interazioni tra gruppi?

Una delle risposte che stiamo esplorando mediante la progettazione di una nuova attività, sempre volta alla generalizzazione algebrica, riguarda la possibilità di prevedere nuovi momenti di lavoro per gruppi di "esperti". Nel nostro caso, si potrebbe ad esempio trattare di gruppi di tre reporter, di tre artisti o di tre numeratori, nei quali dunque l'attenzione sarebbe posta su un singolo registro di rappresentazione. Le sperimentazioni che faremo in futuro ci aiuteranno a comprendere meglio quanto queste scelte di tipo metodologico possano favorire in modo maggiormente inclusivo e paritario l'apprendimento della matematica e competenze multiple.

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo le docenti Marina Gilardi e Ketty Savioli dell'I.C. Chieri III e i loro studenti di classe quarta per aver sperimentato la prima versione dell'attività.

BIBLIOGRAFIA

- Coyle, D. (2007). Content and Language Integrated Learning: Towards a Connected Research Agenda for CLIL Pedagogies, *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism*, 10(5), 543–562.
- Coyle, D., Meyer, O., & Staschen-Dielmann., S. (2023). *A deeper learning companion for CLIL: putting pluriliteracies into practice*. Cambridge University Press.
- Dansereau, D. F. (1988). Cooperative Learning Strategies. In C. E. Weinstein, E. T. Goetz, & P. A. Alexander (Eds.), *Learning and Study Strategies* (pp. 103–120). Academic Press.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-0400-za>
- Feynman, R. (1971). *La legge fisica*. Boringhieri.
- Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua e linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università.

- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Routledge.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Springer.
- Malara, N. A. (2007). Approccio all'early algebra e modalità di formazione degli insegnanti. *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, XXXV(1.2), 13–19.

LE FRAZIONI DINAMICHE

Silvia Cerasaro

Dipartimento di Matematica - Università Tor Vergata di Roma

silvia.cerasaro@gmail.com oppure cerasaro@axp.mat.uniroma2.it

Abstract

Nel quinto capitolo del Liber Abbaci di Leonardo Pisano Fibonacci, testo del 1202, sono descritti i numeri rotti, ovvero quei numeri che si ottengono dividendo l'intero in n parti uguali. I numeri rotti sono paragonabili alle attuali frazioni proprie mentre le frazioni improprie sono riconducibili a quelli che Leonardo Pisano chiama numeri misti, ovvero la somma di un intero ed un numero rotto. Oltre ad introdurre l'aritmetica dei numeri razionali nel mondo europeo, Fibonacci descrive ed utilizza una frazione differente definita frazione multipla graduata dal gruppo di studiosi di progetto Fibonacci. Come collaboratrice di tale progetto, e come insegnante al terzo anno del dottorato di ricerca, mi sono interessata a questo tipo di frazione, ideando attività didattiche che mostrano le sue potenzialità, concentrate in una chiara notazione che rappresenta un'anticipazione del simbolismo algebrico. Gli algoritmi descritti da Leonardo Pisano, e quelli che egli non dimostra direttamente ma che emergono dai numerosi esempi riportati nel testo, sono di una matematica elegante e facilmente trasformabile in algoritmo, tanto da dare l'idea che lui tratti di frazioni dinamiche, cioè in movimento sulla retta dei numeri. Le attività presentate in classe sono un esempio di come fare matematica mediante la storia e l'interdisciplinarietà, anche con l'utilizzo delle tecnologie e di opportuni software, in continuità con quanto espresso nelle Indicazioni Nazionali.

Parole-chiave

Frazioni dinamiche, Storia della matematica, Liber Abbaci, Geogebra, Interdisciplinarietà.

PERCHÉ LE FRAZIONI DINAMICHE?

Dalla mia esperienza da insegnante sia nella Scuola secondaria di primo che di secondo grado, ho notato differenti difficoltà relative all'apprendimento del numero razionale, tanto da diventare il protagonista del progetto di ricerca nel mio percorso di dottorato. La mia constatazione è stata confermata dalla lettura dei numerosi studi in merito, i quali, oltre a rilevare le molteplici difficoltà riscontrate dagli studenti, mostrano alcune interessanti attività didattiche pianificate e realizzate per facilitare la comprensione dei significati matematici coinvolti. Si nota che alla stessa simbologia $\frac{n}{m}$, introdotta nel mondo greco-latino con il Liber Abbaci di Leonardo Pisano [Fibonacci, Boncompagni, 1857]³, sono attribuiti diversi significati [Kieren, 1988; 1992], e questo è uno dei motivi che potrebbe generare confusione nella mente degli studenti, come ad esempio, nella definizione di rapporto [Clark, Berenson, Cavey, 2003] o nel considerare la frazione come un quoziente non svolto, quindi un numero da collocare sulla linea dei numeri [Robotti, Antonini, Baccaglini-Frank, 2015]. Le difficoltà sono relative soprattutto nell'operare con i numeri razionali [Castelnuovo, 1952] in quanto resta evidente che le competenze cognitive del concetto di numero razionale sono legate più all'aspetto procedurale che al significato matematico di frazione. Le difficoltà riguardano anche l'uso del linguaggio specifico non associato all'azione matematica compiuta e sono tali che in situazioni di studenti senza disturbi dell'apprendimento i test somministrati danno gli stessi esiti nel caso di DSA [Lucangeli, 2005]. Le attività proposte sono finalizzate a collocare un numero razionale scritto come frazione sulla linea dei numeri, utilizzando un "viaggio" fatto di opportune soste.

³ Fibonacci (1202) in Boncompagni (1857), p. 24

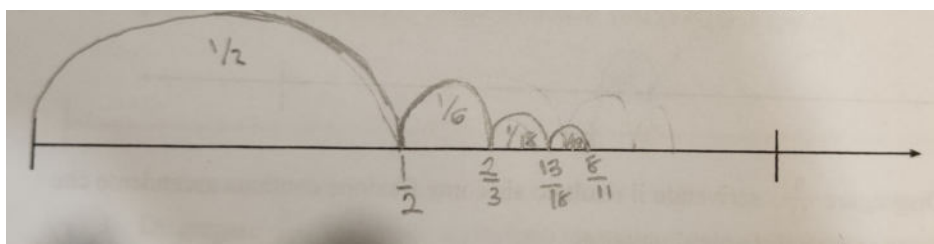


Figura 1: viaggio sulla retta dei numeri per arrivare ad un numero razionale

Nelle attività laboratoriali ideate e presentate si utilizza la storia della matematica [Chorlay, Clark, Tzanakis, 2022], [Furinghetti, 2022], [Arzarello, Bartolini Bussi, 1998], che permette di affrontare delle considerazioni epistemologiche sui concetti trattati, oltre a provocare negli studenti quello che gli esperti chiamano *dépaysement historique* [Barbin, 97], cioè una sorta di "disorientamento" che permette di rimettere in discussione le conoscenze pregresse. La storia della matematica può essere usata per l'acquisizione di un "senso civico", per un arricchimento culturale e fare analogie tra i concetti risultati dall'evoluzione della matematica. L'utilizzo della storia agevola anche l'aspetto interdisciplinare e facilita l'oggettivazione delle informazioni trovate, trasformandole in conoscenze [Radford-Santi, 2022]. Dunque, le attività proposte possono essere presentate come opportunità di approfondimento e rivisitazione di contenuti già visti. Quanto è stato presentato è anche coerente con quanto riportato nelle Indicazioni Nazionali per la Scuola Secondaria di Secondo grado: *Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.*

LE ATTIVITÀ SULLE FRAZIONI DINAMICHE

Le attività laboratoriali ideate sono state proposte in una classe prima del Liceo Matematico "Marconi" di Colleferro (RM): il mio ruolo in classe era quello di un mediatore tra gli studenti e le loro azioni per comprendere i significati matematici proposti mentre il loro insegnante di matematica aveva il compito di supporto per l'organizzazione delle attività, sia per la predisposizione degli artefatti da utilizzare che nella gestione dei materiali e delle risorse, oltre a "suggerire" la formazione dei gruppi di lavoro, conoscendo i livelli di competenza e socialità di tutti gli studenti. L'insegnante della classe non poteva intervenire nelle attività proposte perché le conosceva solo sommariamente, a seguito di un nostro colloquio in merito, e considerava la mia presenza in classe come una opportunità di formazione mediante l'osservazione diretta della mia prasseologia didattica.

Prima attività: uso delle fonti storiche

Attraverso l'uso di un artefatto storico, portatore di significati matematici e culturali, gli studenti hanno riflettuto sugli strumenti di cui disponeva l'uomo nel corso della storia e sul cambiamento del linguaggio matematico. Hanno sfogliato la versione on line del Liber Abbaci di Leonardo Pisano Fibonacci, sul sito del Museo Galileo di Firenze⁴, constatando il cambiamento dell'aspetto "estetico" di un testo di matematica, come la presenza di decorazioni floreali e di capilettera, e mancante di formule ed equazioni. In seguito, hanno letto e osservato la versione del Liber Abbaci del 2020 di Enrico Giusti e Paolo D'Alessandro, constatando che il testo fosse scritto in latino, ed, infine, hanno navigato nel web e dal sito di Progetto Fibonacci hanno potuto consultare la traduzione in italiano del Liber Abbaci.

⁴ <https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1>

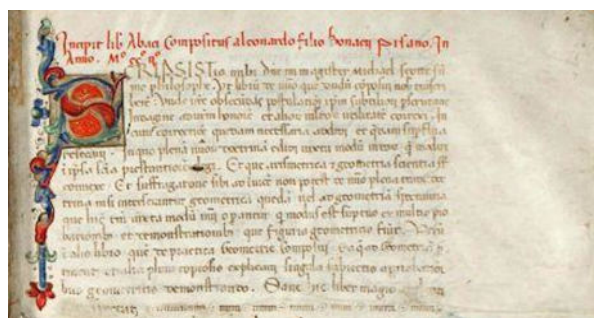


Figura 2: Incipit del Liber Abbaci dal sito del Museo Galileo di Firenze

Seconda attività: dal linguaggio naturale a quello matematico.

Dopo aver conosciuto l'artefatto storico, sono state lette due definizioni dalla traduzione del quinto capitolo. Nel paragrafo V.2, Leonardo descrive il numero rotto: *Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato [denominatore] e quello superiore è chiamato denominante [numeratore].*⁵ Gli studenti hanno commentato tale frase dicendo che si descrive una frazione “a parole” per giustificare l’uso di un simbolo, quello che conoscono e che Fibonacci comincia ad usare, denominandolo *numero rotto, minuto o fratto*. Di seguito è stato presentato il paragrafo V.3.

(V.3 ; G: V.6) Ancora se sotto una stessa linea siano stati posti più numeri, e sopra ciascuno di quegli stessi si scriveranno altri numeri, il numero che sia stato posto sopra il numero all’inizio della parte destra della linea, indicherà la parte o le parti del numero stesso posto sotto, come abbiamo già detto. Quello dunque sopra il secondo esprime le parti dello stesso secondo delle parti del primo numero posto sotto. Quello poi sopra il terzo indica le parti di questo terzo delle parti del secondo delle parti del primo, e così sempre quelli che seguiranno sopra la linea denotano le parti di tutte le parti precedenti sotto la linea, così, se sotto una qualche linea ci sono 2 e 7 e sopra il 2 ci sia 1 e sopra il 7 ci sia 4 come qui si vede $\frac{1}{2} \frac{4}{7}$, si denotano quattro settimi e la metà di un settimo. Se però sopra il 7 ci fosse zero, così: $\frac{1}{2} \frac{0}{7}$, si indicherebbe solo la metà di un settimo.

Figura 3: Traduzione del paragrafo V.3 dal sito www.progettofibonacci.it

E’ stato chiesto agli studenti di tradurre con dei simboli quanto leggevano: inizialmente hanno mostrato evidenti difficoltà ma la lettura delle descrizioni dei molteplici esempi che sono riportati nel testo è stata di notevole aiuto. Così gli studenti hanno appreso l’esistenza di un tipo di frazione in uso nel XIII secolo da un diverso significato rispetto a quelle di loro conoscenza, che potremmo scrivere come $\frac{a_n}{b_n} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \dots \frac{a_2}{b_2} \frac{a_1}{b_1}$. Tale frazione è denominata *frazione multipla graduata* dagli studiosi di Progetto Fibonacci, mentre non ha un nome particolare all’interno del Liber Abaci, è semplicemente una frazione con più “gradi”, ovvero, con più posizioni che si leggono da destra verso sinistra ed indica una somma progressiva di frazioni sempre più piccole in cui ogni frazione successiva ha un denominatore che rappresenta una suddivisione del precedente. Si può quindi scrivere tale frazione come la seguente somma $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n}$. Appreso ciò, è stato richiesto di programmare un foglio di calcolo per sviluppare una frazione multipla di grado 4 per poterla trasformare nella frazione propria equivalente.

⁵ Fibonacci (1202), in Boncompagni (1857), V.2, p. 24

Terza attività: le frazioni multiple sulla retta dei numeri

Nel chiedere agli studenti di riportare lo sviluppo della frazione multipla calcolata sul foglio elettronico, sono sorti dei problemi: c'è stata l'esigenza di dare dei nomi agli addendi considerati, chiamati *incrementi*, e un ulteriore nome alle frazioni a cui si arriva rispettivamente sommando uno per volta gli incrementi dati, ed è stato scelto *frazione intermedia*. Avendo constatato che il grado è uguale al numero degli incrementi e delle frazioni intermedie, si è deciso di utilizzare Geogebra, in quanto strumento ad elevata precisione, per la rappresentazione della nostra frazione multipla sulla retta, che assume un aspetto dinamico. E' stato programmato un file che permette di scrivere i numeratori e denominatori della frazione multipla con gli sliders, rispettando le varie relazioni già comprese, per trasformarla in numero rotto e mostrare come arrivare al numero razionale sulla retta dei numeri mediante la rappresentazione grafica di segmenti associati a ciascuno degli incrementi considerati.

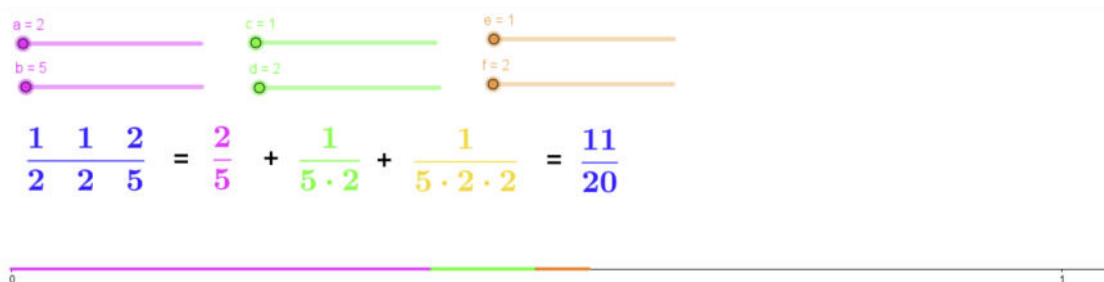


Figura 4: Le frazioni dinamiche con Geogebra

E' stato, poi, compreso come ridurre di un grado la frazione multipla graduata iniziale, continuando la programmazione nello stesso file che ha mostrato visivamente che la somma dei primi due incrementi è il nuovo primo incremento. Quindi gli studenti hanno compreso che esistono diverse frazioni multiple graduate associate alla stessa frazione propria e che una frazione multipla di grado due dà una migliore approssimazione alla frazione propria associata.

Quarta attività: i numeri con e senza regola

Con l'attività seguente, gli studenti hanno compreso che il grado della frazione multipla dipende dal numero dei fattori del denominatore della frazione propria associata: non avendo ancora le informazioni dettagliate su quanto ipotizzato, è stato letto il paragrafo V.22 del Liber Abbaci, in cui si descrivono i numeri *con e senza regola*:

*Alcuni numeri sono non composti, e sono quelli che in aritmetica e in geometria si chiamano primi. Questo perché non possono essere misurati o numerati da nessun numero esistente minore ad essi all'infuori dell'unità. Gli Arabi li chiamano hasam. I Greci coris canon, noi invece li chiamiamo senza regole*⁶. La regola è la scomposizione di un numero intero in fattori, non necessariamente primi. Nel paragrafo VI.1.12, Leonardo Pisano descrive, attraverso degli esempi, un criterio affinché si prenda la migliore tra le possibili fattorizzazioni di un numero *con regola*, utilizzando la frazione multipla graduata: ecco dunque mostrato uno degli utilizzi di tale frazione. Leonardo scrive:

*E facciamo ciò per un'espressione più bella perché è più bello dire $\frac{1}{2} \frac{0}{10}$ invece di $\frac{1}{4} \frac{0}{5}$, sebbene sia lo stesso... cioè, è migliore considerare 20 come prodotto di 2×10 , rispetto a 4×5 , analogamente per il 12 è meglio scriverlo come 6×2 e non come 4×3 ... Ma noi scegliamo i numeri più estremi, che sono fino a dieci nella composizione dei numeri e perciò è più bello $\frac{1}{4} \frac{0}{9}$ che $\frac{1}{6} \frac{0}{6}$. E che tu intenda lo stesso per i casi precedenti*⁷. Ecco svelato, dunque, il criterio per avere la fattorizzazione *più bella*, cioè considerare i numeri più estremi che sono entro il 10. Da questa affermazione, gli studenti hanno affermato che

⁶ Fibonacci (1202) in Boncompagni (1857), p. 31

⁷ Fibonacci (1202) in Boncompagni (1857), p. 50

Fibonacci considerava i numeri fino a 10 come se fossero numeri primi. Nella tavola della fattorizzazione presente nel Liber Abbaci, Fibonacci riporta frazioni multiple di grado due per scomporre i numeri entro il 100, ad eccezione di tre di essi.

COMPOSITIONES NUMERORUM DUARUM FIGURARUM HEC QUE CUM II^{abus} FIGURIS SCRIBUNTUR.

12	$\frac{1}{2} \frac{0}{6}$	44	$\frac{1}{4} \frac{0}{41}$	74	$\frac{1}{2} \frac{0}{27}$
14	$\frac{1}{2} \frac{0}{7}$	45	$\frac{1}{5} \frac{0}{9}$	75	$\frac{1}{3} \frac{0}{5}$
15	$\frac{1}{3} \frac{0}{5}$	46	$\frac{1}{2} \frac{0}{23}$	76	$\frac{1}{4} \frac{0}{19}$
16	$\frac{1}{2} \frac{0}{8}$	48	$\frac{1}{6} \frac{0}{8}$	77	$\frac{1}{7} \frac{0}{11}$
18	$\frac{1}{2} \frac{0}{9}$	49	$\frac{1}{7} \frac{0}{7}$	78	$\frac{1}{6} \frac{0}{13}$
20	$\frac{1}{2} \frac{0}{10}$	50	$\frac{1}{5} \frac{0}{10}$	80	$\frac{1}{8} \frac{0}{10}$
21	$\frac{1}{3} \frac{0}{7}$	51	$\frac{1}{3} \frac{0}{17}$	81	$\frac{1}{9} \frac{0}{9}$
22	$\frac{1}{2} \frac{0}{11}$	52	$\frac{1}{4} \frac{0}{13}$	82	$\frac{1}{2} \frac{0}{41}$
24	$\frac{1}{3} \frac{0}{8}$	54	$\frac{1}{6} \frac{0}{9}$	84	$\frac{1}{2} \frac{0}{21}$
25	$\frac{1}{5} \frac{0}{5}$	55	$\frac{1}{5} \frac{0}{11}$	85	$\frac{1}{5} \frac{0}{17}$
26	$\frac{1}{2} \frac{0}{13}$	56	$\frac{1}{7} \frac{0}{8}$	86	$\frac{1}{2} \frac{0}{43}$
27	$\frac{1}{3} \frac{0}{9}$	57	$\frac{1}{3} \frac{0}{19}$	87	$\frac{1}{3} \frac{0}{29}$
28	$\frac{1}{4} \frac{0}{7}$	58	$\frac{1}{2} \frac{0}{29}$	88	$\frac{1}{8} \frac{0}{11}$
30	$\frac{1}{3} \frac{0}{10}$	60	$\frac{1}{6} \frac{0}{10}$	90	$\frac{1}{9} \frac{0}{10}$
32	$\frac{1}{4} \frac{0}{8}$	62	$\frac{1}{2} \frac{0}{31}$	91	$\frac{1}{7} \frac{0}{13}$
33	$\frac{1}{3} \frac{0}{11}$	63	$\frac{1}{7} \frac{0}{9}$	92	$\frac{1}{4} \frac{0}{23}$
34	$\frac{1}{2} \frac{0}{17}$	64	$\frac{1}{8} \frac{0}{8}$	93	$\frac{1}{3} \frac{0}{31}$
35	$\frac{1}{5} \frac{0}{7}$	65	$\frac{1}{5} \frac{0}{13}$	94	$\frac{1}{2} \frac{0}{47}$
36	$\frac{1}{4} \frac{0}{9}$	66	$\frac{1}{6} \frac{0}{11}$	95	$\frac{1}{5} \frac{0}{19}$
38	$\frac{1}{2} \frac{0}{19}$	68	$\frac{1}{4} \frac{0}{17}$	96	$\frac{1}{2} \frac{0}{48}$
39	$\frac{1}{3} \frac{0}{13}$	69	$\frac{1}{3} \frac{0}{23}$	98	$\frac{1}{2} \frac{0}{49}$
40	$\frac{1}{4} \frac{0}{10}$	70	$\frac{1}{7} \frac{0}{10}$	99	$\frac{1}{9} \frac{0}{11}$
42	$\frac{1}{6} \frac{0}{7}$	72	$\frac{1}{8} \frac{0}{9}$	100	$\frac{1}{10} \frac{0}{10}$

Figura 5: Tab. 3 in V.45, p.37 di Boncompagni (1857)

Quinta attività: traslare un numero rotto

Il verbo traslare relativamente al numero rotto nei trattati d'abaco, scritti in lingua volgare, indicava una serie di operazioni matematiche che permettevano di scrivere un numero rotto in quella che oggi chiamiamo frazione continua ascendente, la cui "antenata" è la frazione multipla graduata. Questo verbo ha permesso agli studenti di rinforzare l'apprendimento in merito alle frazioni dinamiche. Il procedimento del *traslare un numero rotto* è possibile scomponendo il denominatore di una frazione, qualora sia un numero con regola, oppure scrivendo la frazione equivalente, nel caso in cui il denominatore sia un numero senza regola: in questo caso, il denominatore resterebbe fattorizzato, come nel caso di un numero con regola.

Sia $\frac{a}{b} = \frac{a}{b_n b_{n-1} \dots b_1}$. Poiché $a = b_n q_1 + r_n$, con $r_n < b_n$,

si ha $\frac{a}{b} = \frac{b_n q_1 + r_n}{b_n b_{n-1} \dots b_1} = \frac{q_1}{b_{n-1} \dots b_1} + \frac{r_n}{b_n b_{n-1} \dots b_1}$. Poiché $q_1 = b_{n-1} q_2 + r_{n-1}$, si ha che

$\frac{a}{b} = \frac{q_2}{b_{n-2} \dots b_1} + \frac{r_{n-1}}{b_{n-1} \dots b_1} + \frac{r_n}{b_n b_{n-1} \dots b_1}$. Proseguendo, si avrà sempre che $q_i = b_{n-i} q_{i+1} + r_{n-i}$, per ogni $i = 1, \dots,$

n , fin quando si arriverà ad avere $q_n = b_1 q_{n+1} + r_1$, che permetterà di arrivare ad avere $\frac{a}{b} = \frac{r_1}{b_1} + \dots +$

$\frac{r_{n-1}}{b_{n-1} \dots b_1} + \frac{r_n}{b_n b_{n-1} \dots b_1} = \frac{r_n r_{n-1} \dots r_1}{b_n b_{n-1} \dots b_1}$. Questo algoritmo è stato riportato su un foglio di calcolo, sia nel caso del denominatore con e senza regola. Inoltre, gli studenti hanno dato non solo la scomposizione

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia suggerita da Fibonacci nelle sue tavole, ma anche quella che egli riteneva “meno bella”. Hanno constatato che la scomposizione *più bella* non sempre è quella *più vicina* al valore della relativa frazione propria.

traslare i rotti con denominatore non primo															
11										0,39285714					
28			2	14	scomposizione 1 del denominatore										
			4	7	scomposizione 2 del denominatore										
										Approssimazione					
			11		5	+	1		5	+	1	=	1	5	0,35714285
			2		2	=	14				14	x	2	2	14
2	x	14													
										Approssimazione					
			11		2	+	3		2	+	3	=	3	2	0,28571428
			4		4	=	7				7	x	4	4	7
4	x	7													

Figura 6: Traslare un rotto con il foglio di calcolo

Matematica, fisica ed inglese

La frazione multipla graduata era utilizzata per scrivere le frazioni di unità di misura non in relazione decimale. Nel periodo medievale erano molte le unità di misura in uso nell’intera penisola italiana, per cui il formalismo simbolico della frazione multipla graduata permetteva di associare le rispettive quantità ai sottomultipli dell’unità di misura utilizzata: ad esempio, tenendo in considerazione che 1 lira era formata da 20 soldi, e che un soldo era formato da 12 denari, per poter scrivere 28 lire 8 soldi e 4 denari si scriveva $\frac{4}{12} \frac{8}{20} 28$, leggendo da destra verso sinistra. Tenendo in considerazione il concetto di misura, gli studenti hanno analizzato le unità presenti nel Liber Abbaci, leggendo anche qualche problema per vederne l’utilizzo.

Gli studenti hanno utilizzato il formalismo simbolico della frazione multipla graduata per scrivere anche con i sistemi sessagesimale e decimale. Inoltre, considerando il sistema monetario inglese in uso fino al 1971, gli studenti hanno trattato, con l’insegnante di inglese, le relazioni tra Pound, Shillings e Penny, la stessa tra lira, soldi e denari del XIII secolo.

Misure monetarie lire — 20 soldi — 12 denari tareni — 20 grani bizanti saraceni — 24 carati bizanti di Garbo — 10 millari		Misure di peso libbre pisane — 12 once — 25 denari di cantaro — 6 carubbe — 4 grani marca d'argento — 8 once — 25 denari — 6 carubbe		Misure di lunghezza canna pisana — 10 palmi = 4 braccia canna di Genova — 9 palmi = 3 braccia e 3/5 canna di Provenza — 8 palmi — canna di Sicilia — 3 braccia e 1/5 canna di Costantinopoli — pezza — 2 canne = 8 braccia balla — 40 pezze = 80 canne torcello — 60 canne provenzali	

Figura 7: Le unità di misura nel Liber Abbaci, nella traduzione presente su www.progettofibonacci.it

CONCLUSIONI

La frazione multipla graduata, usata dai mercanti nel XIII secolo e valido strumento della matematica utilizzato in molti problemi descritti e risolti da Fibonacci, costituisce un concetto matematico che permette di avere una visione dinamica del concetto di frazione sulla retta dei numeri. L'uso delle fonti storiche nella trattazione di tale concetto in classe non può essere improvvisato in quanto necessita di un approccio semiotico alla didattica da parte del docente e permette allo stesso tempo agli studenti di estrapolare le informazioni culturali per raggiungere la conoscenza matematica. La lettura dei brani tratti dal Liber Abbaci relativamente alle definizioni di numero rotto e della costruzione della frazione multipla graduata permette di associare al linguaggio usato un'azione matematica. Infine, l'utilizzo degli artefatti digitali e "storici" e la loro integrazione in un contesto di laboratorio permettono di stimolare la comunicazione, agevolano l'apprendimento e hanno permesso nelle classi in cui sono state presentate esperienze simili di tornare all'*origine delle cose* [Scoppola, 2011] cercando di contrastare la superficialità della "modernità liquida" in cui oggi viviamo [Baumann, 2013].

BIBLIOGRAFIA

- Arzarello F., Bartolini Bussi M. G., (1998), *Italian trends in research in mathematical education: a national case study from an international perspective*, in A. Sierpiska et al. (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer Academic Publishers, pp 243–262
- Barbin E., (1997), *histoire et enseignement des mathématiques: pourquoi? comment?* bulletin de l'association mathématique du québec, 37(1), 20–25
- Bartolini Bussi M.G., Baccaglini-Frank A., Ramploud A., (2014), *Intercultural dialogue and the geography and history of thought*, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 34, No. 1, pp. 31–33 Published by: FLM Publishing Association Stable
- Bauman, Z. (2013). *Liquid modernity*, John Wiley & Sons.
- Castelnuovo E., (1952), *L'insegnamento delle frazioni*, in *La scuola secondaria ed i suoi problemi*, Centro didattico nazionale per la scuola secondaria, pp. 73–80
- Cerasaro S., (2020) *L'aritmetica con il Liber Abaci di Fibonacci*, in *Periodico di matematiche (Mathesis)*, Numero 3, Volume 12 serie XIV anno CXXX, pp. 185–203
- Chorlay R., Clarke K. M., Tzanakis C., (2022), *History of Mathematics in Mathematics Education: recent development in the field*, *ZDM – Mathematics Education*, <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>
- Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003), *A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297–317
- Dematté A., Furinghetti F., (2022), *Today's students engaging with Abacus problems*, *ZDM – Mathematics Education*, Springer, pp. 1521–1536
- Fibonacci L., *Liber abbaci*, (2020) Giusti E. (a cura di), D'Alessandro P., (a cura di), Olschki.
- Kieren T. E., (1992). *Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. Implications for curriculum and instruction*. In R. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323–371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass.
- Lisarelli G., Baccaglini-Frank A., Poli F., (2019), *Progettare attività didattiche inclusive: un esempio di percorso sulle frazioni*, *RicercaAzione / Vol. 11, n. 1*, pp. 169–189
- Lucangeli D., (2005), *National survey on learning disabilities*. Italian Institute of Research on Infancy.
- Radford L., Santi G., (2022), *Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics*. *ZDM*
- Robotti C. (2016), *Frazioni sul filo*. Proposte e strategie per la scuola primaria, «Difficoltà di Apprendimento e Didattica Inclusiva», vol. 3, n. 4, pp. 449–467
- Scoppola B., (2011), *Lezioni di Maria Montessori*, in *Annali di storia dell'educazione*, vol.18, pp. 413–434

SITOGRAFIA

Fibonacci (1202), codice custodito nella Biblioteca Nazionale di Firenze, presente on line all'indirizzo <https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=29>

Fibonacci, (1202), riproduzione integrale dell'edizione del Liber Abaci del 1857 curata da Baldassarre Boncompagni, presente nel sito www.progettofibonacci.it

Ghione, Frazioni multiple graduate e divisioni tra interi, scheda didattica di matematica presente sul sito www.progettofibonacci.it

Indicazioni Nazionali Scuola Secondaria di Secondo Grado in : <https://www.miur.gov.it/scuola-secondaria-di-secondo-grado>

GIORNATA DELLA MEMORIA: PROPOSTE DIDATTICHE DELLA STORIA DELLE STEM

Elena Scalambro

UniTo, Dip. di Matematica “G. Peano” – IPSSEO “G. Colombatto”, Torino

elena.scalambro@unito.it

Abstract

La storia delle matematiche – e quella delle discipline STEAM (acronimo di *Science Technology Engineering Art Mathematics*) in generale – costituisce un efficace strumento per educare e sensibilizzare alla Memoria della *Shoah*, con l’obiettivo di promuovere l’antirazzismo a scuola così come l’inclusione degli alunni considerati ‘diversi’ per le ragioni più disparate. Numerose azioni in questa direzione sono state portate avanti finora nell’ambito delle discipline umanistiche. Tuttavia, anche la storia delle discipline scientifiche può assumere un ruolo significativo in questa direzione, come emerso da alcune attività didattiche destinate a diversi livelli scolari, sviluppate e sperimentate in questi anni dal gruppo di ricerca in storia delle matematiche dell’Università di Torino.

Parole-chiave

Didattica della *Shoah*; storia delle matematiche; educazione inclusiva; antirazzismo; fare Memoria.

INTRODUZIONE

Consapevoli della necessità introdurre un’educazione antirazzista nella pratica didattica e ritenendo che sia lecito concepire la storia della scienza come forma di *public engagement*, dal 2019 il gruppo di ricerca in storia delle matematiche dell’Università di Torino ha proposto all’interno del Piano Nazionale Lauree Scientifiche Piemonte (coord. prof. O. Robutti) un modulo di storia sociale della matematica e della scienza (coord. prof. E. Luciano) intitolato “La matematica non conosce razze o confini”, con l’obiettivo di mettere la ricerca storica al servizio della scuola, facendone un volano per la riflessione sui temi del razzismo e dell’antisemitismo. In questi quattro anni sono state elaborate e sviluppate diverse esperienze e attività didattiche – che hanno coinvolto più di 350 studenti di tutto il Piemonte – a partire dalla storia delle discipline STEAM, anche nell’ottica di contribuire dal versante scientifico (e non solo da quello umanistico) alla Giornata della Memoria in contesto scolastico.

UNA SFIDA PEDAGOGICA: EDUCARE ALL’ANTIRAZZISMO

Il *Giorno della Memoria in ricordo dello sterminio e delle persecuzioni del popolo ebraico e dei deportati militari e politici italiani nei campi nazisti* è stato istituito con la legge 211 del 20 luglio del 2000. Occorre notare che all’interno di questo provvedimento, oltre a ribadire la necessità di ricordare la *Shoah*, le leggi razziali e la persecuzione italiana dei cittadini ebrei, si insiste sull’importanza di promuovere iniziative “nelle scuole di ogni ordine e grado su quanto è accaduto al popolo ebraico e ai deportati militari e politici italiani nei campi nazisti, in modo da conservare nel futuro dell’Italia la memoria di un tragico ed oscuro periodo della storia nel nostro Paese e in Europa, e affinché simili eventi non possano mai più accadere” (art. 2).

Tali interventi mirati costituiscono soltanto un tassello all’interno della prerogativa più ampia di educare all’inclusione e all’antirazzismo – compito affidato alla scuola anche dall’agenda ONU 20/30 del settembre 2016 in relazione allo sviluppo della cittadinanza globale – che rappresenta una delle sfide più complicate del nostro sistema educativo. Per raggiungere questo obiettivo, occorre affiancare a tutte

quelle importanti iniziative di carattere episodico la progettazione di esperienze e azioni educative che diffondano e attualizzino la Memoria in chiave multidisciplinare. Le *best practice* di didattica della Shoah sono oggi consolidate e forniscono un quadro teorico coerente e variegato per ideare attività formative: poiché il pregiudizio razzista è essenzialmente figlio dell'ignoranza, soltanto grazie alla conoscenza di ciò che è stato sarà possibile per le nuove generazioni acquisire gli strumenti necessari per individuare e combattere i segni del disagio sociale e i sintomi malevoli dell'intolleranza. Le linee guida nazionali *Per una didattica della Shoah a scuola*, elaborate dagli esperti della delegazione italiana dell'*International Holocaust Remembrance Alliance* nel 2017, sottolineano la prospettiva interdisciplinare e transculturale della didattica del razzismo. Essa rappresenta così una delle sfide educative più complesse con cui confrontarsi, nella misura in cui occorre mobilitare competenze e specializzazioni diverse (storia e geografia, letteratura e filosofia, psicologia e pedagogia, antropologia culturale, scienze, economia, ...).

Perché la storia delle discipline scientifiche?

La dimensione interculturale cui si fa riferimento nelle linee guida citate è tipica dell'approccio multidisciplinare della storia della scienza, che può dunque validamente concorrere all'approfondimento della problematica razziale. La penuria di itinerari didattici che guidano alla riflessione sui temi della razza a partire dalle discipline STEAM è ancor più spiacevole tenendo conto del fatto che la comunità scientifica fu fra quelle più drammaticamente colpite dalle leggi razziali del 1938 (Israel & Nastasi, 1998; Israel, 2010). Ad esempio, nella sola Università di Torino, 9 professori ordinari e 47 incaricati furono allontanati dalle loro posizioni (Rinaldelli, 1998; Luciano, 2018). A questi occorre aggiungere 19 docenti di scuola media e secondaria, unitamente a numerosi insegnanti e presidi che si erano formati a Torino ma lavoravano fuori città, in Piemonte o in altre regioni. Dalle scuole torinesi furono anche espulsi 386 studenti: di questi, 40 frequentavano il liceo "D'Azeglio", sede di questo convegno.

Le discipline STEAM – in virtù di quello che nell'immaginario collettivo è il loro linguaggio universale, che trascende ogni razza e confine – ben si prestano a declinare le tematiche antirazziste. La didattica di queste materie può dunque essere orientata ad approfondire e stimolare la riflessione sui concetti di razza, discriminazione e alterità. Partendo dal presupposto che educare a convivere nella diversità è compito di tutti, l'attività di ricerca in storia della scienza può divenire, da questo punto di vista, non solo una forma di impegno sociale ma anche una componente importante dell'azione di contrasto ai moderni razzismi (Castelnuovo, 1997; Segre, 2018). Un'efficace didattica della storia delle discipline scientifiche può infatti contribuire a disinnescare ciò che G. Corbellini definisce il "bias cognitivo essenzialista"⁸ che sta alla base delle posizioni razziste delle nuove generazioni (Rutherford, 2020). Insegnare una teoria scientifica con tutto il suo corredo storico-concettuale di verità conseguite non serve soltanto a favorire una migliore comprensione sul piano delle specifiche procedure, ma a farla diventare parte integrante del patrimonio culturale. Alla funzione testuale-trasmissiva da sempre ricoperta dalla ricerca storico-scientifica va ad affiancarsi quella di strumento educativo e vettore di *public engagement*, volto a disarmare false argomentazioni, stereotipi e slogan spesso puerili, ma semplici, e perciò non privi di una loro efficacia.

In particolare, le trame della storia interna delle STEAM, intrecciandosi con le vicende e le traiettorie personali e professionali di chi le ha praticate, insegnate o coltivate, possono rendere le nuove generazioni consapevoli dell'uso strumentale che è stato fatto di discipline considerate per loro natura impermeabili ai condizionamenti ideologici. A tal proposito, basti ricordare che il razzismo di stato nel Reich tedesco e nell'Italia fascista, giustificato dal falso mito della purezza della razza, si avvale largamente del supporto scientifico e della complicità di alcuni uomini di scienza per promuovere meccanismi e forme di discriminazione, sopruso e persecuzione, oltre che per pianificare e perpetrare programmi eugenetici e/o di sterminio. Gli orizzonti della ricerca storica in merito alla correlazione fra le scienze matematiche, statistiche, biologiche, mediche, psichiatriche e i razzismi non si esauriscono tuttavia con il Secolo Breve e, anzi, sono stati progressivamente estesi al breve e lungo periodo, in

⁸ Cfr. Corbellini, G. (2020). Serve la genetica per prevenire il razzismo a scuola, *Scienza in rete*, disponibile al link: <https://www.scienzainrete.it/articolo/serve-genetica-prevenire-razzismo-scuola/gilberto-corbellini/2020-02-05>.

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
un'ottica di storia connessa, prendendo in considerazione il darwinismo sociale, i rapporti razzismo-colonialismo, scienza-apartheid, ecc.

Uno sguardo ai dati statistici

La necessità di diffondere l'antirazzismo, soprattutto tra i più giovani, sorge anche dal sempre maggior numero di episodi di intolleranza cui siamo tristemente abituati ad assistere. La cronaca registra un significativo aumento degli atti di razzismo e di antisemitismo, che riportano in auge i più vietati stereotipi nazi-fascisti. L'osservatorio costituito dalla *Commissione speciale per il contrasto ai fenomeni dell'intolleranza, del razzismo, dell'antisemitismo e dell'istigazione all'odio e alla violenza* ha denunciato la diffusione e il moltiplicarsi di atti di prevaricazione e intolleranza nei confronti di chi è considerato 'diverso' per motivi etnici, razziali, religiosi, di genere, in ragione del proprio orientamento sessuale, o perché portatore di disabilità e/o fragilità fisica o mentale. Una percentuale consistente degli episodi di razzismo ha luogo nelle scuole e, avendo per protagonisti le giovani generazioni, è inevitabilmente amplificata dai social networks.

La percezione che non si tratti di episodi sporadici, e la conseguente preoccupazione nei confronti dell'affiorare di forme di odio che richiamano angosciosamente al passato, trovano riscontro nei dati statistici: dal 1° gennaio 2018 a fine febbraio 2019, quando il progetto era in fase embrionale, sono stati segnalati in Piemonte 118 atti di razzismo, il 36% dei quali a Torino e nel territorio metropolitano. L'8% dei casi si sono registrati in contesto scolastico. D'altra parte, secondo il report annuale per il 2020 dell'IRES Piemonte, solo il 13.67% della popolazione riteneva preoccupanti il razzismo e altre forme di discriminazione e questa percentuale è scesa al 9.5% nel 2020. Tuttavia, nello stesso anno si è assistito ad un aumento del 13% degli atti di intolleranza, con la segnalazione di ben 179 casi in Piemonte, di cui il 7% in contesto scolastico. I dati per il biennio 2021-2022, pur facendo emergere un aumento della consapevolezza del problema che si è tramutata in un maggior numero di segnalazioni pertinenti (249 nel 2021 e 301 nel 2022), hanno registrato ulteriori aumenti degli episodi discriminatori. Oltre il 36% dei casi rilevati concernono discriminazioni fondate su origine etnica, colore della pelle e nazionalità. Nel 2022 si è anche assistito a un incremento di 2 punti percentuali degli episodi di discriminazione avvenuti nell'ambito della scuola e dell'istruzione, che sono passati dal 9% del 2021 all'11%.⁹

SPUNTI E PROPOSTE DIDATTICHE

Alla luce di questi dati allarmanti, riteniamo importante proporre alcuni itinerari didattici che guidino alla riflessione sui temi della razza e della Memoria che possono essere sviluppati nell'ambito delle discipline STEAM, la cui storia antica e recente può concorrere all'approfondimento di questa problematica. Esplorare il passato con quella razionalità tipica del pensiero scientifico e dell'argomentazione logico-deduttiva è particolarmente significativo in relazione a una società come la nostra, multietnica e multi-identitaria. In accordo con le esperienze nazionali e internazionali nel campo della didattica della storia della scienza, abbiamo cercato di coinvolgere direttamente studenti e docenti attraverso il lavoro d'archivio e la ricerca in biblioteca e mostrando loro che lo studio della storia implica non solo la descrizione obiettiva di fatti ed eventi, ma anche l'immersione nell'universo dei loro protagonisti attraverso l'analisi critica dei documenti storici.

⁹ Per ulteriori dettagli su questi dati, si rimanda ai report dell'IRES Piemonte reperibili ai link seguenti:
https://ires.piemonte.it/images/pubblicazioni/note-brevi/2019_09_NotaBreve_Discriminazioni.pdf;
https://www.ires.piemonte.it/relazione2020/RelazioneAnnuale2020_12giu.pdf;
<https://www.ires.piemonte.it/relazione2021/RelazioneAnnuale2021.pdf>;
<https://www.ires.piemonte.it/relazione2022/RelazioneAnnuale2022.pdf>;
<https://www.ires.piemonte.it/relazione2023/RelazioneAnnuale2023.pdf>.

Attività per la scuola secondaria di secondo grado

Uno dei primi itinerari didattici sviluppati in questi quattro anni di sperimentazioni si è svolto presso l'IIS "Santorre di Santarosa" di Torino, con alcune classi dell'indirizzo biochimico che hanno scelto di concentrarsi su un tema legato al loro percorso di studi: l'uso strumentale delle discipline scientifiche per giustificare l'antisemitismo e il razzismo biologico. Due classi terze hanno così sviluppato un percorso storico dalle origini del razzismo – con il dibattito settecentesco su poligenismo e razzismo (Giacobini, 2010) – alle più recenti scoperte di genetica, che hanno definitivamente smantellato il concetto di razza (Piazza, Cavalli-Sforza & Menozzi, 2000; Piazza, 2020). Con il contributo dei docenti di biologia, in prospettiva interdisciplinare, gli studenti hanno approfondito il progetto *Genetic Human Atlas*, che ha portato alla comprensione delle modalità attraverso cui geni e contesto ambientale concorrono a costruire il fenotipo, scardinando di fatto la visione razzista. La classe quarta dell'articolazione chimica e biotecnologie sanitarie si è invece dedicata all'approfondimento delle figure di tre scienziati vissuti durante il periodo nazifascista.¹⁰ Da un lato, come esempio di negazione dei principi stessi della professione medica, è stato considerato Josef Mengele, tristemente conosciuto come "dottor Morte" ed autore di deprecabili esperimenti di eugenetica nel campo di sterminio di Auschwitz. Dall'altro lato, sono state esaminate due eccellenze scientifiche: il premio Nobel per la fisica Emilio Segrè (1959), per la scoperta dell'antiprotone, e il premio Nobel per la medicina Rita Levi Montalcini (1986), per i suoi studi trentennali sull'NGF (*Nerve Growth Factor*). Quest'ultima, tra l'altro, dopo essere stata allontanata dall'Università di Torino nel 1938 insieme al suo Maestro Giuseppe Levi e al compagno di studi Salvador Luria, aveva continuato le sue ricerche di neurobiologia in un piccolo laboratorio casalingo.

All'interno del medesimo istituto, l'anno successivo una classe terza ha nuovamente aderito al progetto scegliendo questa volta di partire dalla storia della scuola, il cui edificio – dotato di una torre littoria identica a quella della piazza centrale di Torino – rappresenta uno dei maggiori esempi di architettura fascista della nostra città. Un gruppo di studenti ha quindi analizzato gli effetti delle leggi razziali sul contesto locale, approfondendo le conseguenze di questi provvedimenti sulla Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali di Torino. Allargando l'orizzonte, un altro gruppo ha invece esaminato la "caccia alla cultura" nella Germania nazista, a partire dalle celebri parole di David Hilbert. Si racconta, infatti, che – interpellato dal nuovo ministro nazista per l'istruzione – alla domanda: «Come va la matematica a Göttingen ora che l'abbiamo liberata dall'influenza ebraica?», egli rispose: «Matematica a Göttingen? Non se ne vede più nemmeno l'ombra». È stato così portato avanti un confronto tra la situazione italiana e quella tedesca in ambito scientifico durante questi 'anni bui'.

¹⁰ Per consultare i loro elaborati, cfr.

<https://www.dropbox.com/sh/17xeqssf4dfgvse/AABPWWTa-HqxMl63gyUkGzuHa?dl=0>



Figure 1. Fumetti realizzati dalla classe 3P dell'IIS “Santorre di Santarosa” di Torino nell’ a.s. 2021-22 (prof.ssa Maressa).

Infine, un altro gruppo si è dedicato alle storie delle famiglie ‘disperse’ a causa dei *Provvedimenti per la difesa della razza italiana*, tra cui figurano quelle di due illustri matematici: Vito Volterra e Guido Castelnuovo. Alcuni studenti particolarmente appassionati di disegno hanno creato alcune strisce di fumetti per rendere omaggio a queste figure duramente colpite dalla legislazione razziale (Fig. 1).

Al Liceo “Peano-Pellico” di Cuneo, invece, è stato portato avanti un percorso di *Mission Memory*: docenti e studenti hanno riscoperto le traiettorie personali e professionali dei loro colleghi perseguitati per motivi razziali, con particolare attenzione al contesto locale. Dopo aver ascoltato la testimonianza della famiglia Montanari, una delle più antiche famiglie ebraiche di Cuneo, ed essersi confrontati con lo studioso di ebraismo A. Cavaglian, gli studenti si sono concentrati sulle vicende storiche legate al territorio, esaminando in particolare l’impatto delle leggi razziali sulle comunità ebraiche di Cuneo e Saluzzo. Sono poi state analizzate le cause antiche e recenti dell’odio contro gli ebrei, andando ad approfondire anche alcuni tratti peculiari della loro cultura (come le scuole ebraiche, lo *Judenwitz*, ecc.). Una classe delle classi terze coinvolte, partendo da alcune ricerche d’archivio, si è dedicata alla ricostruzione della biografia di Ugo Levi (1903-?), docente di matematica e fisica al Liceo-ginnasio “S. Pellico” di Saluzzo nel periodo storico considerato, il quale “era preceduto da una fama di insegnante molto severo”. Sospeso dall’insegnamento nel 1938, quando la persecuzione razziale si trasforma in persecuzione delle vite (1943-1945) Ugo Levi riesce a salvarsi vivendo in clandestinità, nascosto tra le montagne in Val Varaita (Muncinelli, 2006). Non condivide dunque la triste sorte del fratello che, con la moglie, i due figli ed altri amici e conoscenti delle comunità ebraiche di Cuneo e Saluzzo, è arrestato e deportato ad Auschwitz. Per cercare di comprendere come Ugo Levi fu segnato dall’ondata antisemita che travolse l’Italia fascista, gli studenti cuneesi hanno intervistato alcuni suoi ex-allievi: Beppe Segre¹¹ e Alberto Bosi, quest’ultimo poi docente di Storia e Filosofia presso il medesimo istituto. Questo progetto ha rappresentato un’occasione di avvicinamento tra gli insegnanti in servizio e in pensione e gli studenti, portando anche ad una riscoperta delle proprie radici. Alla fine del percorso è stata creata una pagina web (<https://liceocuneo.it/progetto-pls/>) contenente i risultati delle ricerche e le riflessioni degli studenti, con l’obiettivo di promuovere una diffusione su scala più ampia e di restituire al territorio un pezzo della sua storia, contribuendo così attivamente a ‘fare Memoria’. All’interno del sito web sono stati inseriti anche i contributi degli studenti di quinta superiore che, guidati dagli insegnanti di matematica e fisica e nell’ottica di un’attività di orientamento e avvicinamento al mondo universitario,

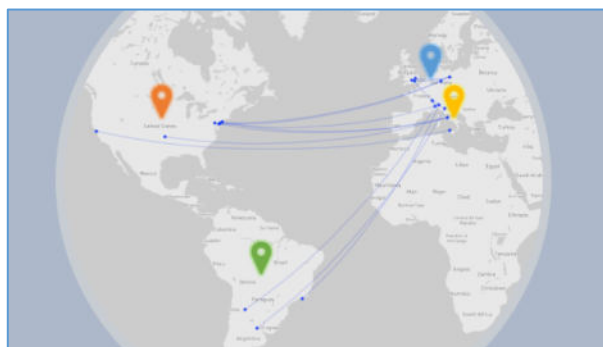
¹¹ La versione integrale della sua testimonianza è disponibile al link https://www.hakeillah.com/3_18_15.htm.

hanno voluto rendere omaggio ad alcuni matematici vittime della legislazione razziale che hanno apportato sviluppi fondamentali nel loro settore di ricerca. Sono così state inserite due pagine del sito: una è dedicata a Volterra – antifascista convinto, allontanato dal mondo accademico sin dal 1931, a causa del rifiuto di prestare giuramento al regime fascista – e alle sue pioneristiche ricerche nel campo della biomatematica; l'altra, incentrata su Tullio Levi-Civita, contiene un'introduzione ai suoi importanti contributi di geometria differenziale e calcolo tensoriale.

Durante l'anno scolastico 2022-23, presso l'IPSSEOA "G. Colombatto" di Torino, due classi quinte hanno approfondito il fenomeno dell'emigrazione intellettuale ebraica dall'Italia fascista (Capristo, 2014; Luciano, 2024 c.s.). All'interno di un'unità di apprendimento (UDA) interdisciplinare e nell'ottica di favorire la capacità di collegamento in vista dell'Esame di Stato, gli studenti hanno analizzato e commentato la corrispondenza originale di alcuni matematici del periodo, quali G. Fano, G. Fubini, B. Levi, G. Mortara, B. Segre e A. Terracini. Questa attività ha coinvolto anche dei docenti di lettere e inglese che hanno supportato gli allievi nelle diverse fasi di traduzione e lettura dei documenti storici. Presso il medesimo istituto è stato sviluppato un altro percorso per il primo biennio: a partire dall'analisi di alcuni libri di testo di matematica elementare del periodo fascista – quelli di E. Bonomi (1941), M. Mascalcchi (1942) e C. Cottone (1943) – è stato approfondito il processo di fascistizzazione della scuola (Charnitzky, 1996; Luciano, 2015), con un focus sulla marcata ideologizzazione delle materie di insegnamento nelle scuole elementari e medie, sul ruolo della propaganda, sulla ricerca del consenso e sulla questione del controllo capillare della società da parte del regime mussoliniano.

Attività per la scuola secondaria di primo grado

Alcune classi terze della scuola secondaria di primo grado "U. Foscolo" di Torino hanno aderito a questo modulo del PLS con continuità. Nell'a.s. 2020-2021, dopo aver assistito ad un seminario online tenuto dalla prof.ssa Luciano sui matematici vittime delle leggi razziali, gli studenti – rimasti decisamente colpiti dall'impatto di tali provvedimenti sul mondo scientifico – hanno scelto di approfondire le traiettorie personali e professionali di queste figure di scienza per renderle accessibili ad un vasto pubblico. Guidati dalle docenti di matematica e scienze, gli allievi sono stati suddivisi in piccoli gruppi, ciascuno dei quali ha 'adottato' uno scienziato, e hanno poi discusso in classe e condiviso il frutto del loro lavoro, con l'obiettivo di creare un unico prodotto multimediale open source. Questo lapbook è stato pubblicato sul sito della scuola in occasione del Giorno della Memoria 2021, in modo da condividere tutte queste 'storie' raccolte con gli altri studenti e con gli adulti, genitori e personale scolastico *in primis*.¹² Con l'obiettivo di rendere comodamente fruibile questo prodotto digitale, è stata creata una mappa interattiva degli spostamenti degli scienziati analizzati. Sono stati evidenziati con appositi segnaposti i luoghi che hanno accolto gli esuli dall'Italia fascista e dalla Germania nazista (Nord America, Sud America e la parte di Europa non occupata dalle potenze nazi-fasciste) e le località in cui sono vissuti in clandestinità coloro che non hanno voluto o non sono riusciti ad emigrare (Fig. 2).



¹² Il lapbook, intitolato 'Appartengo all'unica razza che conosco, quella umana'. Gli scienziati di origine ebraica di fronte alle leggi razziali, è disponibile al link: https://www.icfoscolo.org/wp-content/uploads/2021/01/MOOC_Giornata-della-Memoria.pdf.

Figure 2. Mappa della migrazione intellettuale ebraica realizzata dagli studenti dell'IC "U. Foscolo" (prof.sse D'Alisa e Favale)

Per ogni area geografica, sono stati selezionati alcuni scienziati che vi trovarono rifugio, per un totale di 16 scienziati, tra cui 9 matematici e matematiche. Per ciascuno di loro è stata realizzata una sorta di 'carta d'identità' che, oltre alle informazioni biografiche più rilevanti, contiene la descrizione delle attività svolte prima dell'avvento delle leggi razziali e durante la tempesta 1938-1945. Sono state inoltre inserite alcune citazioni di frasi famose o significative pronunciate da questi scienziati e, nei casi in cui è stato possibile, una selezione di brani tratti dai carteggi dell'epoca.¹³ Da queste lettere emergono nitidamente le aspettative e le speranze dei matematici in fuga, così come le molteplici difficoltà affrontate per trovare una collocazione all'estero e costruirsi una nuova vita.

Nell'a.s. 2021-2022 le docenti hanno deciso di dedicarsi alle storie delle donne di scienza italiane colpite dalle leggi razziali, all'interno di un percorso interdisciplinare più ampio dedicato alle scienziate nel corso dei secoli. A livello storico, infatti, si è registrato un fenomeno che fa riflettere: le intellettuali che, come i loro colleghi maschi, furono radiate dalle Università e delle scuole statali di ogni ordine e grado, sono perlopiù rimaste 'invisibili' (Simili, 2010). È quindi parso necessario 'fare Memoria' di queste donne, facendole conoscere e dando alle loro vicende di vita personale e professionale – prima e dopo le leggi razziali – una doverosa 'visibilità'. Le 22 scienziate prese in considerazione sono state suddivise in tre gruppi, a seconda del destino cui sono andate incontro. Seppure in misura decisamente minore rispetto agli uomini, vi sono coloro che sono riuscite a lasciare l'Italia, andando alla ricerca di uno spazio di sopravvivenza intellettuale. Diverse donne di scienza vissero in clandestinità, spesso nascondendosi sotto falsi nomi. Alcune di queste riscoprirono le proprie origini, impegnandosi – prima dell'occupazione nazista dell'Italia – nelle scuole ebraiche, sorte per permettere agli studenti cacciati dagli istituti statali di proseguire gli studi, e all'interno dell'Università clandestina di Roma. Numerose intellettuali, infine, andarono incontro al triste destino della deportazione nei campi di concentramento: tra queste, pochissime sopravvissero alla *Shoah*.¹⁴ L'elaborato finale degli studenti, intitolato *Le scienziate italiane ebreiche di fronte alle leggi razziali: «Non esistono le razze. Esistono i razzisti»*, è stato pubblicato in rete per la Giornata della Memoria 2022.¹⁵

Durante l'a.s. 2022-2023 gli studenti hanno consultato, letto e analizzato i lavori dei loro compagni dei due anni precedenti e si sono dedicati a riprodurre tramite l'applicativo Google Earth il viaggio di alcuni/e scienziati/e emigrati/e all'estero a causa delle leggi razziali, corredando questo percorso interattivo con video, spiegazioni e immagini illustrative, a partire dalla storia di Enrico Fermi, uno dei 'ragazzi di Via Panisperna', trasferitosi negli Stati Uniti.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Dai riscontri positivi degli insegnanti e studenti coinvolti in questo progetto – che, tra l'altro, mettono in luce l'efficacia di un percorso di sensibilizzazione verso la *Shoah* e di educazione all'antirazzismo dal punto di vista della storia delle STEAM – sono emersi alcuni aspetti significativi.

In primo luogo, percorsi didattici di questo genere ben si prestano ad essere declinati in molti modi e a diversi livelli scolari, come mostrato negli itinerari descritti, promuovendo al contempo un approccio più inclusivo e interdisciplinare. Alcuni docenti hanno infatti sottolineato che le attività proposte hanno favorito l'integrazione e l'inclusione sociale e culturale degli alunni di fasce fragili.

In secondo luogo, è emersa l'efficacia dell'utilizzo delle fonti storiche nella pratica didattica: al di là della loro importanza intrinseca, i documenti storici originali hanno colpito e affascinato gli studenti, favorendo l'immedesimazione e il coinvolgimento e, di conseguenza, il loro impegno. La lettura critica

¹³ Trattasi di brevi estratti di alcune delle lettere pubblicate in (Luciano, 2024 c.s.).

¹⁴ È questo il caso di Bianca Morpurgo e Luciana Nissim Momigliano; quest'ultima fece ritorno da Auschwitz insieme a Primo Levi.

¹⁵ L'elaborato finale è disponibile in rete, al link:

https://www.icfoscolo.org/wp-content/uploads/2022/01/Scienziate-ebree_MOOC.pdf

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia dei documenti storici ha anche contribuito a rendere le discipline STEM materie ‘vive’ agli occhi degli studenti e ha suggerito interessanti spunti per riflettere sull’attualità.

Un ruolo rilevante, inoltre, è stato rivestito dalle le nuove tecnologie: le esperienze illustrate confermano che la storia della scienza può trarre un valido aiuto dalle modalità di educazione digitale, anche per stimolare il confronto attivo attorno a concetti chiave quali quelli di razza, discriminazione e pregiudizio. Allo stesso tempo, l’utilizzo dei mezzi digitali ha consentito di raggiungere un pubblico più vasto interessato ad affrontare questi temi a partire dalla rilettura critica di alcuni aspetti e momenti storici. Infine, educare alla tolleranza e all’antirazzismo è stato segnalato come un aspetto importante anche sul fronte dell’Educazione Civica: imparare ad apprezzare l’altro con il proprio bagaglio culturale di tradizioni – ma anche di ‘differenze’ – sarà una delle competenze chiave delle future generazioni di cittadini. In questa prospettiva, la storia delle STEAM può diventare mezzo importante per stimolare la consapevolezza degli studenti verso i temi del razzismo e della discriminazione: d’altronde “la storia è qualcosa che può renderci consapevoli di chi siamo e di come siamo arrivati a essere ciò che siamo”.¹⁶

L’adozione di una prospettiva storica può dunque rivelarsi importante per educare la coscienza civile. È, questo, un aspetto sottolineato in più occasioni anche dalla senatrice a vita Liliana Segre, superstite dell’Olocausto e testimone attiva della *Shoah*: ribadendo l’importanza dello studio della storia, poiché “senza storia non c’è memoria”, ci invita ad “aiutare gli italiani di oggi a respingere la tentazione dell’indifferenza verso le ingiustizie e le sofferenze che ci circondano”.¹⁷

In conclusione, la storia delle STEAM costituisce un mezzo importante per guidare e accompagnare gli studenti lungo la tortuosa strada del contrasto all’intolleranza e ad ogni forma di discriminazione. Con la speranza che le idee e le esperienze qui illustrate possano costituire un punto di partenza per nuove azioni educative in questa direzione, è importante rilevare che essa permette anche di individuare adeguate risorse antirazziste da inserire all’interno della programmazione didattica.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare di cuore la prof.ssa Luciano, grazie alla quale ho iniziato a lavorare su questo progetto e le cui numerose pubblicazioni sull’emigrazione intellettuale ebraica sono state per me una fonte inesauribile di riflessione. Un immenso ringraziamento va altresì ai numerosi docenti che, nel corso di questi anni, hanno aderito con entusiasmo e con grande impegno a questo modulo del PLS. Un sincero grazie anche a tutti gli studenti coinvolti, che non smettono mai di sorprendere.

BIBLIOGRAFIA

- Capristo, A. (2014). *Gather What You Can and Flee. Jewish Intellectual Emigration From Fascist Italy*. CPL Editions.
- Castelnuovo, E. (1997). Federigo Enriques e Guido Castelnuovo nel ricordo di Emma Castelnuovo. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* (7) 11-A, 227–235.
- Charnitzky, J. (1996). *Fascismo e scuola. La politica scolastica del regime (1922-1943)*. La Nuova Italia.
- Israel, G. (2010). *Il fascismo e la razza. La scienza italiana e le politiche razziali del regime*. Il Mulino.
- Israel, G., & Nastasi, P. (1998). *Scienza e razza nell’Italia fascista*. Il Mulino.
- Luciano, E. (2015). La stagione del consenso forzato: l’insegnamento della Matematica nel Ventennio fascista. *Annali del Centro Pannunzio* 45, 181–202.

¹⁶ Cfr. (Radford, 2014), p. 89: *History is something that can make us aware of who we are, and how we have come to be the individuals that we are.*

¹⁷ Intervista a Liliana Segre nella Giornata della Memoria 2020: *Raccontare l’orrore senza seminare odio*, <http://www.vaticannews.cn/it/mondo/news/2020-01/75-liberazione-auschwitz-liliana-segreraccontare.html>

- Luciano, E. (2018). From Emancipation to Persecution: Aspects and Moments of the Jewish Mathematical Milieu in Turin (1848-1938). *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 38(1), 127–166.
- Luciano, E. (2024 c.s.). *Looking for a space of intellectual survival. The mathematical diaspora from racist Italy*. Springer.
- Muncinelli, A. (2006). *Even: Pietruzza della memoria. Ebrei 1938-1945*. Edizioni Gruppo Abele.
- Piazza, A. (2020). *Genetica e destino. Riflessioni su identità, memoria ed evoluzione*. Codice Edizioni.
- Piazza, A., Cavalli-Sforza, L.L., & Menozzi, P. (2000). *Storia e geografia dei geni umani*. Adelphi.
- Radford, L. (2014). Reflections on History of Mathematics. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp. 89–109). Springer.
- Rinaldelli, L. (1998). In nome della razza. L'effetto delle leggi del 1938 sull'ambiente matematico torinese. *Quaderni di Storia dell'Università di Torino* 2, 149–208.
- Rutherford, A. (2020). *How to Argue With a Racist: History, Science, Race and Reality*. Weidenfeld & Nicolson.
- Segre, L. (2018, February 19). *Incontro con Liliana Segre al Teatro Ponchielli di Cremona* [video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=bX5BA2-V5lQ>
- Simili, R. (2010). *Sotto falso nome. Scienziate italiane ebree (1938-1945)*. Pendragon.

DEBATE E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Matteo Torre

Liceo Scientifico “G. Peano”, Tortona (AL), Italy

matteo.torre1984@gmail.com

Abstract

Il Debate è una strategia didattica che si sta diffondendo sempre più nelle scuole italiane per la sua forte valenza formativa ed educativa. Si tratta di un confronto tra posizioni diverse (pro e contro), strutturato da ben precise regole, su una tematica di carattere generale, da cui scaturisce una mozione, ovvero un'affermazione dibattibile che ammette la possibilità di uno schieramento a favore o contro.

La matematica non si è mai accontentata di misurare la realtà che appare, ma si è proposta di andare oltre le apparenze, per conoscere le cause, con il debate in matematica (di cui presenteremo due format) si potrebbero sviluppare competenze chiave sull'argomentazione e la confutazione in matematica, imparando ad usare la propria “voce matematica” e con l'obiettivo di migliorare il linguaggio specifico della matematica, nonché conoscere nuovi aspetti legati alla storia della matematica. Il contributo vuole proporre due format per il debate in matematica con il tentativo di rivalorizzare il ruolo della dimostrazione e della storia e filosofia della matematica nella scuola secondaria.

Parole-chiave

Debate, Didattica della matematica, Dimostrazione matematica, Metacognizione, Metamatematica

INTRODUZIONE

Nella scuola ancora troppi docenti di scuola superiore (in una buona percentuale di materie scientifiche) considerano la filosofia inseparabile dalla speculazione e ritengono che il filosofo non possa usare metodi conoscitivi connessi con il sapere empirico. Essi pensano che l'attività filosofica, escludendo l'uso di linguaggi soggetti a criteri di verifica, sia pressoché priva di carattere scientifico. Sono, invece, convinto che le influenze reciproche tra filosofia e matematica siano state molteplici e nella storia del pensiero occidentale molti sono stati i matematici filosofi, o viceversa i filosofi matematici o i filosofi interessati alla matematica: Pitagora, Platone, Aristotele, Descartes, Pascal, Leibniz, Condorcet, Hume, Kant, Husserl, Russel, Wittgenstein, solo per citarne alcuni molto noti. Inoltre, non condivido l'idea di alcuni filosofi della matematica che individuano nella logica matematica il punto più alto di questa mutua e proficua interferenza. Credo che il posto che la matematica occupa nella conoscenza umana sia più interessante di quello della logica pura. L'eccessivo risalto dato alla logica e l'ambigua identificazione della logica con la matematica affermatasi nella filosofia contemporanea, tendono a eludere questioni filosofiche sostanziali per la matematica, come la relazione tra matematica e fisica o il ruolo della dimostrazione in matematica. In questo articolo vedremo come un adattamento alla matematica della metodologia didattica del Debate potrebbe riuscire a coniugare una reintegrata centralità della dimostrazione nella didattica della matematica con la trasversalità tra la matematica e la filosofia, in particolare la filosofia del linguaggio. La convinzione che questa proposta possa risultare vincente risiede, a nostro giudizio, proprio nel fatto che le dimostrazioni matematiche impiegano la logica espressa in simboli matematici insieme al linguaggio naturale, il quale di solito ammette una certa ambiguità: è proprio su questo aspetto che Debate e filosofia del linguaggio possono dare un apporto innovativo e decisivo verso il reintegro della dimostrazione nella prassi didattica della matematica nelle attuali scuole secondarie di secondo grado.

IL DEBATE: CENNI INTRODUTTIVI

Il Debate è una strategia didattica che si sta diffondendo sempre più nelle scuole italiane per la sua forte valenza formativa ed educativa. Si tratta di un confronto tra posizioni diverse (pro e contro), strutturato da ben precise regole, su una tematica di carattere generale (sia curricolare che extracurricolare, di attualità o di altro genere), da cui scaturisce una mozione, vale a dire un'affermazione dibattibile, che quindi ammetta la possibilità di uno schieramento a favore o contro. Nel seguito delineiamo una breve introduzione storica del Debate che, come vedremo, ha le sue fondamenta nella storia e nel patrimonio classico, ma che ha saputo rinnovarsi fino ai giorni nostri. All'interno dell'orizzonte culturale occidentale, l'impiego del dibattito come metodo educativo condotto da un'istituzione scolastica può essere fatto risalire al Liceo, ossia al giardino dedicato ad Apollo Liceo in cui Aristotele iniziò a far scuola (335 o 334 a.C.) e che prese poi il nome di Peripato. La civiltà romana si riduce a sistemare, in questo ambito, l'eredità greca attraverso la teorizzazione catoniana del *vir bonus dicendi peritus* e il filtro ciceroniano, che accompagna la res publica verso l'epilogo; anche l'età dell'impero attesta da un lato la sterile spettacolarizzazione nella raccolta delle Declamationes di Seneca, dall'altro il tentativo di riforma dell'istruzione e della società costituito dall'Institutio oratoria di Quintiliano e ritorna, con il Dialogus de oratoribus di Tacito, alla lettura della crisi dell'oratoria come effetto della crisi politica. Nel Medioevo, in particolare nel periodo tra i secoli XI e XVII, il Debate può essere identificato o assimilato alla forma della disputatio. La disputatio, che germogliò in Italia e Francia, era un avvenimento di grande richiamo in particolare nella sua forma di *disputationes quodlibetales*, disputa in cui i maestri non potevano porre l'argomento da discutere ma questo veniva scelto (spesso in forma di questioni inedite) dagli studenti, da altri maestri presenti alla disputa o dal pubblico. Più specificamente, essa era una forma di esercitazione universitaria che costituiva parte integrante del curriculum scolastico nelle facoltà d'arte, medicina, teologia e legge, che aveva molteplici funzioni: serviva a promuovere le proprie abilità logiche, ad analizzare e suddividere, ad addestrare all'esposizione delle proprie tesi, ad abituare a porre domande e far fronte alle obiezioni, ad affinare l'ingegno e a coltivare la prontezza nella replica e a dare fondamento argomentativo a cose già note. È proprio questo lo spirito che troviamo anche nelle dispute matematiche dello stesso periodo e di cui parleremo nel seguito.

Concludiamo questa breve panoramica sull'evoluzione del Debate andando nell'Inghilterra e negli Stati Uniti del XVIII e XIX secolo in cui si formarono, sulla scia dei dibattiti parlamentari britannici e americani, club e associazioni che consideravano il Debate un metodo di miglioramento e progresso. I membri si riunivano per discutere le più rilevanti questioni religiose, morali, sociali e politiche del tempo. Dal XX secolo il Debate ha iniziato a far parte, più o meno diffusamente e in modo più o meno integrato, dei sistemi educativi dei paesi di tutto il mondo. A oggi, i club e le associazioni che secondo regole diverse lo propongono come efficace sistema di crescita personale, professionale e civile sono davvero innumerevoli. Per esempio, il World Schools Debate Championship, una competizione internazionale rivolta agli studenti delle Scuole secondarie di secondo grado, ha raggiunto nel 2019 la sua trentesima edizione contando 64 nazioni coinvolte.

Il format del moderno debate, il World School Debate (WSD), è costruito sul modello parlamentare in cui due squadre (squadra di governo o squadra pro, e squadra di opposizione o squadra contro) discutono su una proposta (detta mozione) che viene avanzata e della quale la squadra contro vuole dimostrare l'inefficacia. Ogni squadra è composta da tre componenti (speaker), completano il debate un timekeeper e tre giudici. Ciascuno speaker ha a disposizione 8 minuti e i vari interventi delle due squadre si susseguono secondo un ordine prestabilito (si veda Fig. 1); ciascuna squadra ha poi diritto a una replica di 4 minuti. Inoltre, durante i primi 6 interventi, dopo il primo minuto e fino al penultimo minuto gli speakers della squadra opposta a quella che ha in quel momento la parola possono chiedere all'oratore di poter fare una domanda. Il protocollo WSD, anche se non analiticamente, ipotizza per ciascun speaker un ruolo e un compito ben precisi che se interpretati correttamente possono portare alla vittoria, unitamente a una gestione ottimale della propria posizione nei confronti della mozione. Le finalità di questo articolo non consentono di approfondire ulteriormente l'interessante discorso sulle regole e i principi dei vari format di Debate, nonché sui principi morali del buon debate e perciò rimandiamo il

lettore interessato alla nutrita bibliografia italiana e straniera. Cerchiamo ora di discutere delle motivazioni che ci hanno spinto a credere nel Debate come approccio didattico che coniuga matematica e filosofia.

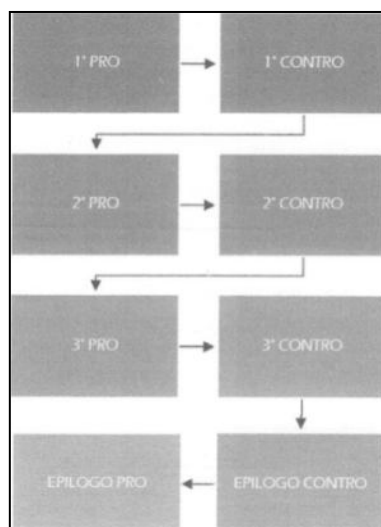


Figura 1. Struttura degli interventi nel format WSD

IL LINGUAGGIO NATURALE È DAVVERO UN OSTACOLO?

Nulla è più importante in matematica delle dimostrazioni e paradossalmente nulla è meno studiato e proposto, in particolare nella scuola superiore. La matematica insegnata nella scuola, a tutti i livelli, si presenta ancora troppo spesso come un argomento chiuso e concluso (scandito e affrontato a ipotetiche tappe propedeutiche una all'altra): un sapere fatto solo di regole e tecniche, sospeso in un cielo di cose immutabili come le sfere celesti della cosmogonia antica. Chi conosce davvero la matematica sa, invece, che essa è dominata da una potenza creatrice, dall'invenzione umana, che continuamente la rinnova e la arricchisce in funzione di nuovi obiettivi da perseguire. Gli obiettivi sono sempre stati, genericamente, quelli di conoscere la realtà, prima quella astronomica, poi quella intorno a noi, fisica e solida, poi quella fluida, quindi il movimento, i fenomeni casuali delle molteplicità aggregate e delle popolazioni, oggi addirittura lo strumento stesso della conoscenza, il cervello e la coscienza. La matematica non si è mai accontentata di misurare la realtà che appare, con strumenti che si sovrappongono a essa dall'esterno, ma si è proposta di andare oltre le apparenze, per conoscere le cause. Questa è la funzione della dimostrazione, come sosteneva Aristotele. Entrare nella realtà nascosta delle apparenze richiede la formazione di rappresentazioni nella mente, che mostrino la trama e l'ordito invisibile ai sensi di un modello (algoritmo) appartenente a un altro mondo, che in mancanza di un termine più specifico possiamo chiamare astratto. Con la nascita della dimostrazione la matematica si trasforma, da un insieme di nozioni, regole e tecniche utili per risolvere problemi pratici, a una disciplina fortemente caratterizzata dalla preoccupazione di giustificare quelle nozioni, quelle regole, quelle tecniche, di riflettere su di esse e sulle loro conseguenze, indipendentemente dalla possibilità di applicarle. Nell'Antica Grecia la dimostrazione appare come un atto sociale che mira a convincere l'interlocutore. Se la dimostrazione è un'argomentazione tesa a convincere, allora le persone coinvolte in questa argomentazione devono convenire su un certo numero di conoscenze, su cui l'argomentazione si fonda e che non devono, a loro volta, essere oggetto di ulteriore argomentazione. È proprio in questo atto di grande oratoria e dal profondo legame con la logica che la dimostrazione può essere assoggettata al Debate. Una profonda trasformazione nel concetto di dimostrazione è avvenuta agli inizi del '900: con Euclide una dimostrazione è un ragionamento che partendo da premesse vere arriva a conclusioni vere. Verso gli inizi del '900 la cosiddetta crisi dei fondamenti, con la scoperta delle geometrie non euclidee e la

scoperta dell'esistenza di antinomie nella teoria degli insiemi, porta all'esigenza di ripensare le conoscenze e le tecniche matematiche in uso, cercando di fondarle su basi "sicure". Bisogna precisare i concetti di assioma, teorema, dimostrazione, teoria; bisogna essere sicuri che le tecniche utilizzate nella ricerca matematica non portino a contraddizioni. Ma dimostrazione, contraddizione, teorema sono termini di un linguaggio e allora come precisarli se non si hanno chiari i limiti e le potenzialità del linguaggio con cui questi concetti vengono espressi? Ma di quali linguaggi si sta parlando? Non certo della lingua naturale, così ambigua, sfumata, in evoluzione.

Si tratta di precisare il concetto stesso di linguaggio, di costruire linguaggi adeguati non solo a parlare degli oggetti di matematica, ma a definirli. Nascono così i linguaggi formali. Si inizia a comprendere che occorre condurre l'analisi distinguendo il piano semantico, il significato di una proposizione, dal piano sintattico, cioè la stessa proposizione come collezione di segni di un dato linguaggio. Sulla base di questo cambiamento di prospettiva, la dimostrazione non è più da considerarsi come un ragionamento che conduce da premesse necessariamente vere a conclusioni vere: si parte, invece, da formule ben definite di un certo linguaggio (gli assiomi); si stabiliscono alcune regole di inferenza che, operando sulle formule di partenza consentono di ottenere da queste altre formule, dette teoremi. Il processo che dagli assiomi conduce ai teoremi è proprio la dimostrazione, la quale diviene con Hilbert un calcolo logico che precisa la nozione di conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria. Nasce così il concetto di dimostrazione formale che si distingue dalla nozione intuitiva di dimostrazione. Imre Lakatos ha criticato la tendenza alla formalizzazione, intesa come attività che rischia di ridurre la matematica a una disciplina scheletrica e fossilizzata. Egli propone un'immagine della matematica come disciplina fallibile, che si costruisce e cresce attraverso dimostrazioni e contro esempi. Le dimostrazioni alle quali si riferisce Lakatos sono distanti dalle procedure meccaniche e molto più vicine al modo di procedere tipico del Debate: esse sono spiegazioni, giustificazioni, che non solo consentono di convincersi dei risultati matematici, ma che guidano (ascoltatori e interlocutori) alla loro scoperta. Ogni passo di una dimostrazione viene sottoposto a critica, attraverso la ricerca di controesempi che contestino il singolo passo o la conclusione stessa della dimostrazione. L'interesse di Lakatos è rivolto, quindi, alla matematica informale, quella che guida il processo di scoperta e di ricerca, evidenziando anche come la matematica cresce attraverso la critica e la correzione di teorie. È questo un aspetto centrale che bisognerebbe trasmettere nella scuola superiore, in particolare nei Licei: la matematica è fallibile e i fenomeni mentali (da intendersi come fenomeni psicologici) non hanno maggiore priorità o rilevanza logica rispetto a qualcosa che accade sulla carta o in un discorso orale. È necessario che in classe si discuterà di matematica e sulla matematica.

A mio giudizio sarebbe, quindi, molto utile sfruttare le potenzialità didattiche del Debate per introdurre nella scuola superiore l'identità di struttura tra il mondo matematico e il linguaggio, come sosteneva Wittgenstein: la percezione del mondo matematico avviene attraverso il nostro pensiero e il nostro pensiero lo esprimiamo con il linguaggio, perciò per comprendere la matematica e la sua potenza creatrice è importante conoscerne il linguaggio. Allo stesso tempo, però, il linguaggio formale ha delle limitazioni perché ci sono concetti della matematica che esso può mostrare ma non dire, per usa la metafora di Wittgenstein: *"ci sono aspetti detti dal linguaggio ma non detti nel linguaggio, cioè non ci sono parole per mostrare tali aspetti"*. Ecco quindi che interviene l'utilizzo del linguaggio naturale che ancora troppo spesso viene "demonizzato" ed entra in opposizione con il linguaggio "della matematica" e che va quindi a costituire un ostacolo alla comprensione. Penso, invece, sia un dovere di ogni insegnante di matematica fa capire che sia nel linguaggio algebrico che in quello geometrico (in particolare nelle dimostrazioni) sussistono contemporaneamente componenti sintattiche e semantiche e concorrono almeno tre registri linguistici: il linguaggio simbolico, il linguaggio specialistico e il linguaggio naturale. È impensabile accettare che gli studenti usino soltanto per la manipolazione il linguaggio specialistico e simbolico, "riempiendo una pagina di simboli" di cui non conoscono il significato e il potere comunicativo. È ragionevole, invece, trasmettere agli studenti che il sistema dei simboli algebrici e geometrici costituiscano un linguaggio "sottoinsieme" e abituarli a comprendere la

correttezza di un ragionamento matematico a partire dalla valutazione di correttezza di una struttura logica di un discorso espresso in linguaggio naturale. Perché non provare a trasmettere queste idee attraverso il debate in matematica? È importante accettare anche a livello didattico il fatto che non esiste un unico linguaggio universale (come credevano Russell e Frege), ma esistono delle regole comuni, la logica matematica, gli assiomi e i teoremi, mediati da tanti piccoli linguaggi “locali” rappresentati dai linguaggi naturali.

PERCHÉ IL DEBATE IN MATEMATICA?

Contrariamente agli studenti, che spesso considerano la matematica noiosa e incomprensibile, gli insegnanti sostengono che la matematica sia bella e semplice ma ancora troppo pochi, tuttavia, sanno spiegare in cosa consista tale bellezza. Penso che molti matematici (e anche molti filosofi) siano concordi nel ritenere che nella costruzione di una dimostrazione matematica si possono rintracciare momenti decisionali che, tuttavia scompaiono nel resoconto finale, assolutamente associabili agli atti creativi che rendono unico il pensiero umano. È questa creatività che ancora manca nelle ore di matematica. Lo studente (della scuola superiore italiana) raramente viene sollecitato a pensare alle “questioni matematiche” da differenti prospettive, ma molto più spesso viene “addestrato” alla risoluzione di problemi con pattern simili e all’applicazione di medesimi schemi risolutivi. Credo che andando in questa direzione si vada verso una distorsione dell’essenza della matematica, che invece è argomentazione e discussione di soluzioni creative, in cui lo studente non viene spinto a vedere la “bellezza della matematica”. A tal proposito, mi permetto di riportare una breve citazione del bellissimo libro *Contro l’ora di matematica* di Paul Lockart:

Eliminando il processo creativo per lasciare solo i suoi risultati, avrete la certezza praticamente assoluta che nessuno entrerà davvero in contatto con la disciplina. È come se mi si dicesse che Michelangelo ha creato una scultura magnifica senza darmi la possibilità di vederla. Come potrei mai trarne ispirazione? Se ci si concentra sul che cosa e si trascuri il perché, la matematica si riduce a un guscio vuoto. L’arte non sta nella «verità», ma nella spiegazione, nell’argomentazione. È proprio l’argomentazione che conferisce alla verità il suo contesto e stabilisce che cosa viene effettivamente affermato e il suo significato. La matematica è l’arte della spiegazione. Se si nega agli studenti la possibilità di dedicarsi a questa attività – di proporre i propri quesiti, di elaborare le proprie congetture e le proprie scoperte, di sbagliare, di vedere i propri sforzi creativi frustrati, di avere un’ispirazione e di formulare con fatica le proprie spiegazioni e dimostrazioni – si nega loro la matematica stessa. Sia ben chiaro: non mi sto lamentando per la presenza di formule nelle ore scolastiche di matematica, mi sto lamentando per l’assenza della matematica nelle ore scolastiche di matematica.

Penso che il Debate possa costituire un valido strumento per rivalorizzare l’argomentazione nelle ore di matematica della scuola superiore attraverso una struttura del format WSD opportunamente rivisitata. Inoltre, il debate in matematica potrebbe offrire la possibilità di sviluppare competenze chiave sull’argomentazione e la confutazione in matematica, imparando ad usare la propria “voce matematica” con l’obiettivo di migliorare il linguaggio specifico ma soprattutto cambiare il mindset verso l’ora di matematica, spostando l’attenzione dello studente verso una discussione sulle migliori strategie, ovvero spostare l’attenzione sulla metamatematica, implementando la concentrazione dello studente sul processo matematico e meno sul risultato.

Il debate in matematica (e, più in generale, il debate) non è certamente una scoperta della pedagogia del XXI secolo: sin dal XVI secolo le dispute su problemi algebrici e geometrici costituivano il modo per ottenere la cattedra o per ricevere gradi accademici e gli argomenti delle dispute erano contenuti in specifici libri detti *tesari*. Un esempio è la famosa disputa che coinvolse Tartaglia e Gerolamo Cardano circa la paternità della soluzione delle equazioni di terzo grado. Tartaglia nel febbraio 1535 giunse alla

risoluzione delle equazioni di terzo grado nel corso di una disputa con il maestro d'abaco Antonio Maria Fiore (l'allievo a cui Scipione del Ferro aveva lasciato in eredità la formula risolutiva da lui scoperta trent'anni prima). Gerolamo Cardano tra il 1539 e il 1540, ospitando a Milano Tartaglia, ottenne che la formula gli fosse rivelata con l'impegno di mantenerla segreta. L'impegno non fu rispettato da Cardano, il quale iniziò a lavorare con il suo allievo Ludovico Ferrari sul materiale fornito dal Tartaglia, andando oltre le sue scoperte e riuscendo a fornire una dimostrazione rigorosa della soluzione dell'equazione di terzo grado che pubblicò nel suo libro *Artis Maginae sive de regulis algebraicis* del 1545. Questo fatto scatenò le ire di Tartaglia che offese pubblicamente Cardano chiamandolo “*huomo di poco sugo*”. Questo breve resoconto storico potrebbe costituire un utile spunto per introdurre debate in matematica, sul solco della tradizione degli algebristi italiani del '500 e senza dimenticare l'insegnamento di Lakatos: “*la matematica non è l'accumulo costante di verità, ma il progressivo miglioramento di ipotesi creative per prove ed errori e attraverso le loro confutazioni*”.

DUE PROPOSTE DI PROTOCOLLO PER IL DEBATE IN MATEMATICA

Vengono proposti 2 format di debate, adatti per la scuola secondaria di I e II grado: l'*impromptu* e il preparato, fondati sul già citato format WSD. Partiamo dal format dell'*impromptu*.

Le squadre sono composte da 2 studenti (l'ideale sarebbe di sesso differente, per affrontare anche la questione del gender gap) e vengono a conoscenza della mozione pochi minuti prima della gara, così come accade anche nel generico format WSD impromptu. La mozione è una problema di geometria analitica o di geometria (piana o solida) o di trigonometria dalla difficoltà intermedia che può essere tratto, ovvero liberamente ispirato, da esercizi presenti nei manuali scolastici attualmente in uso o in uso alcuni decenni fa. L'idea di struttura per questa tipologia potrebbe essere:

- I giudici consegnano alle squadre la mozione e il foglio con due dimostrazioni del problema geometrico; estraggono quale delle due squadre inizierà per prima (la squadra che dà inizio al debate la chiameremo Squadra A) e quale dimostrazione dovrà sostenere.
- Ciascuna squadra nel foglio che le è stato consegnato dai giudici troverà due dimostrazioni, quella che dovrà sostenere e quella assegnata alla squadra avversaria. Ogni squadra ha a disposizione 10 minuti per analizzare la dimostrazione assegnata. È consentito l'uso solo di carta e penna, riga, squadra, compasso, un formulario, la calcolatrice. In questa fase gli speakers devono inquadrare didatticamente l'anno e il periodo scolastico in cui (a loro giudizio) presenterebbero il problema geometrico assegnato e quali pre-requisiti sono necessari per comprenderlo, ragionare sui punti di forza della dimostrazione loro assegnata e pensare a una strategia di attacco su quella avversaria. Di fatto compiono un ragionamento di meta-cognizione matematica su entrambe le dimostrazioni, attivando abilità e competenze nella disciplina.
- Si passa allo svolgimento del gara vera e propria. Gli speakers si alternano nei loro interventi come previsto nel format WSD (si veda Fig. 1), ognuno avrà a disposizione 4 minuti e si presuppone che il primo speaker inquadri didatticamente la mozione e presenti i punti di forza della propria dimostrazione, mentre il secondo “attacchi” la dimostrazione della squadra avversaria evidenziandone eventuali ostacoli alla comprensione, passaggi complessi per gli studenti ai quali si proporrà quel tipo di problema. Ogni squadra avrà poi a disposizione 2 minuti di tempo per la replica.
- I giudici stabiliscono la migliore difesa. Saranno parametri di giudizio: i ragionamenti meta-cognitivi evidenziati nei discorsi delle squadre, la capacità espositiva e l'uso di un corretto linguaggio specifico ovvero l'uso di un adeguato linguaggio naturale facilmente traducibile in linguaggio formale, il corretto inquadramento e la valutazione dei pre-requisiti necessari per affrontare la mozione e la sua dimostrazione, l'eleganza formale nell'individuare aspetti di differenziazione tra le due dimostrazioni proposte alle squadre.

Come si può notare da un banale calcolo dei tempi, lo sviluppo di questa tipologia di debate si adatta egregiamente a quelli della classica ora di lezione e può quindi anche costituire un modo alternativo per presentare e far discutere il gruppo classe su un problema di geometria a partire da un dibattito peer to peer. Inoltre, credo che questa tipologia di debate possa avere una grande valenza didattica per far comprendere agli studenti che per affrontare (e risolvere) problemi geometrici sussistono spesso, a differenza delle equazioni, più strade contemporaneamente corrette. La presenza di più possibili soluzioni, spesso, disorienta gli studenti della scuola superiore, che spesso sono incapaci di considerare come corretta una dimostrazione da loro individuata, seppur differente da quella proposta dal loro insegnante. Instaurare qualche momento di debate in matematica nella prassi didattica, in particolare in quella della geometria, penso possa costituire un modo pregnante per gli studenti di comprendere e superare questa difficoltà.

Passiamo ora al format del debate preparato. Le squadre sono composte da 3 studenti e ad esse viene inviata la mozione almeno 5 giorni prima dello svolgimento della gara. La mozione è un problema di realtà, un compito autentico oppure una mozione sulla storia della matematica. Possibili esempi di mozioni storiche o filosofiche sono: “La storia del numero π è più affascinante della storia del numero e ”, “La matematica è un’invenzione della mente umana e non una scoperta”. Per i problemi geometrici inquadrabili come compiti autentici, si consigliano quelli proposti nell’ambito dell’iniziativa Flatlandia dell’Univ. di Ferrara, o problemi geometrici o di realtà altrettanto stimolanti. La possibile idea di struttura per questa tipologia di debate potrebbe essere:

- I giudici consegnano alle due squadre la mozione qualche giorno prima dello svolgimento della gara. Nel tempo che separa le due squadre dalla gara, esse dovranno avviare una ricerca documentale sia per schierarsi pro o contro la mozione. Nel caso, però, di mozioni sulla geometria le squadre dovrebbero essere attente nel produrre almeno due dimostrazioni per affrontare problematiche che potrebbero capitare durante la gara: essere pronti a cambiare strategia argomentativa la possibilità che la squadra avversaria scelga la stessa dimostrazione, “contrastare” la squadra avversaria in maniera efficace.
- La gara ha inizio con l’estrazione di quale delle due squadre sarà pro e quale contro, nel caso di mozione di storia/filosofia della matematica, ovvero nell’estrazione di quale squadra inizierà il debate per prima (Squadra A). Ogni speaker ha a disposizione 5 minuti e gli interventi si alternano come nel format WSD (si veda Fig. 1). In particolare, nel caso della mozione di tipo geometrico, il compito del primo speaker è quello di inquadrare didatticamente l’anno e il periodo scolastico in cui presenterebbero il problema geometrico assegnato, quali pre-requisiti sono necessari per comprenderlo e di presentare la dimostrazione sostenuta dalla squadra. Nel caso in cui la squadra avversaria abbia scelto la stessa linea dimostrativa, lo speaker (dopo averlo dichiarato pubblicamente) avrà invece il compito di proporre un’altra dimostrazione dicendo differenze e caratteristiche simili rispetto a quella precedentemente illustrata dal primo speaker della sua squadra. Sarà poi compito del secondo speaker valorizzare i punti di forza della dimostrazione proposta dalla squadra e, infine, il terzo speaker ha il compito di “attaccare” la dimostrazione della squadra avversaria cercando invece di valorizzare la relativa “semplicità” della dimostrazione sostenuta dalla propria squadra cercando di sostenere anche la bontà didattica delle scelte fatte. Ogni squadra ha quindi 3 minuti di tempo per la replica.
- I giudici stabiliscono la migliore difesa con i parametri di giudizio già descritti in precedenza.

Osservando i tempi di gestione di questo protocollo di debate possiamo affermare che esso costituisca una buona palestra di allenamento per preparare la prova orale dell’Esame di Stato. Per quanto riguarda, invece, i tempi di svolgimento confermiamo anche per questa tipologia di debate la possibilità di svolgimento all’interno dei tempi classici di un’ora di lezione per la scuola superiore. Il lettore attento avrà indubbiamente individuato nella presente proposta alcuni aspetti ancora in fase di definizione e passibili di miglioramenti pedagogici e concettuali, come ad esempio la difficoltà di individuare mozioni

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia adeguate alla matematica senza ricadere nel banale o nel divertissement, l'individuazione di protocolli alternativi a quelli presentati in questo articolo (ugualmente validi e replicabili) a cui si aggiunge la necessità di una sperimentazione su ampia scala della validità dei protocolli qui proposti, ovvero di protocolli alternativi.

RIFLESSIONI CONCLUSIVE E PROPOSTE DI SPERIMENTAZIONE

Sono convinto che il debate costituisca una buona approssimazione del pensiero dialettico messo in atto (parafrasando il pensiero di Hegel) che la scuola italiana, visti i pessimi esempi che i ragazzi osservano sui mass media e sui social, può sfruttare per insegnare agli studenti ad affrontare con maturità e consapevolezza le contraddizioni che emergono quasi quotidianamente nella società moderna. Il debate in matematica può, inoltre, anche avere delle ricadute positive nella pratica didattica di classe: esso dovrebbe contribuire a far capire agli studenti che “sbagliare” non è un problema, ammesso che le loro competenze volgano di più sul processo e meno sul risultato; che in una lezione matematica è importante saper ascoltare ma anche saper rispondere agli stimoli del docente usando un vocabolario matematico corretto e/o in relazione alle cose del mondo esterno (linguaggio naturale). In definitiva, il debate potrebbe costituire un rinforzo delle competenze metacognitive (cognizione più profonda) in matematica come sostenuto, in relazione all'importanza della meta cognizione, anche da Carpenter (2003). Come già detto ampiamente, bisogna però essere molto prudenti nel saper scegliere in maniera corretta come usare il debate nell'ambito della didattica della matematica e, soprattutto, definire in maniera corretta come formulare un format di dibattito adatto a questioni matematiche e come scrivere mozioni “dibattibili” relative al curriculum di matematica della scuola superiore, magari raccogliendo una lista esauriente e abbondante di mozioni matematiche. Invito quindi i lettori interessati a contattarmi per iniziare una discussione proficua e collaborativa. Allo stesso tempo, è indubbio che ci vorrà del tempo (e dei docenti entusiasti) per sviluppare abitudini e disposizioni argomentative negli studenti per evitare che essi confondano il debate in matematica con il discutere di mozioni matematiche in senso stretto, intese come proposizioni che affermino la verità o la falsità di determinate proprietà di particolari enti matematici.

Concludo con una frase che spero possa essere d'insegnamento per tutti gli studenti e i docenti che si avvicinano all'affascinante mondo del debate, tratta dai *Pensieri* di Joseph Joubert del 1917: *lo scopo di una discussione o di un dibattito non deve essere la vittoria, ma il miglioramento.*

BIBLIOGRAFIA

- Carpenter T., Levi L., Franke M.L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*, Portsmouth: Heinemann.
- Davis P., Hersh R. (2003). *L'esperienza matematica*, Milano: Edizioni Comunità.
- De Conti M., Giangrande M. (2017). *Debate. Pratica, teoria e pedagogia*, Milano: Pearson.
- De Conti M., Giangrande M. (2019). *Debate e scuola: un legame antico*, consultabile al link: <https://it.pearson.com/aree-disciplinari/italiano/rubriche/debate-metodo-didattico/nuovo-corso-puntate-Debate.html#>
- Lakatos I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, trad. it. di Proofs and Refutations, a cura di D. Benelli, Milano: Feltrinelli.
- Lockart P. (2010). *Contro l'ora di matematica*, Milano: Rizzoli.
- Lolli G., Tortoriello F.S. (2020). *L'arte di pensare*, Torino: UTET.
- Lolli G. (2020). *QED. Fenomenologia della dimostrazione*, Torino: Bollati Boringhieri.
- Lolli G. (2014). *Se viceversa*, Torino: Bollati Boringhieri.

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

Paola D., Robutti O. (1998). La dimostrazione alla prova, Serie Quaderni del MIUR, consultabile al link: <http://www.matematica.it/paola/quaderno%20ministero%20novembre%201998.pdf>

Wittgenstein L. (2014). Ricerche filosofiche, Torino: Einaudi.

PROMUOVERE IL PASSAGGIO DALL'ARITMETICA ALL'ALGEBRA: UN'ANALISI DEL RUOLO DELL'ESEMPIO IN TERMINI DI RAZIONALITÀ

Boscolo Alessandra¹, Morselli Francesca¹, Robotti Elisabetta¹, Quartara Simone²

¹ Università di Genova, ² IIS Italo Calvino (Genova)

boscolo@dima.unige.it

Abstract

Nell'avvio al pensiero algebrico, il ruolo degli esempi numerici per verificare e dimostrare affermazioni di natura generale risulta un elemento di criticità e, dunque, una preziosa opportunità didattica. Presentiamo un teaching experiment che si configura come un'attività di introduzione al pensiero algebrico, in ottica espressamente argomentativa. Sono stati proposti, ad una classe prima di un liceo scientifico, due quesiti INVALSI opportunamente riformulati per promuovere un'attività argomentativa. Le discussioni emerse in classe dal confronto tra le argomentazioni scritte prodotte dagli studenti, che hanno lavorato dapprima individualmente e successivamente in piccolo gruppo, sono qui analizzate attraverso la lente della razionalità di Habermas. Tale analisi ci ha permesso di inquadrare la natura degli interventi e di fornire una possibile interpretazione del ruolo degli esempi all'interno delle produzioni degli studenti. In questo contributo, osserveremo in particolare gli interventi del docente.

Parole-chiave:

Symbol sense, pensiero algebrico, argomentazione, razionalità di Habermas, teaching experiment

CONTESTO E QUADRO TEORICO

Questo contributo trae origine da una sperimentazione prodotta all'interno della comunità di ricerca DIVA (Didattica Inclusione Valutazione formativa Argomentazione) al DIMA (Dipartimento di Matematica) di Genova, costituitosi nel febbraio 2023. Si tratta di una comunità di insegnanti di scuola secondaria di secondo grado, che acquistano il profilo di insegnanti-ricercatori, e di ricercatori, coinvolti in programmi di sviluppo professionale e progetti di ricerca, che lavorano con un atteggiamento di critical alignment (Goodchild, Fuglestad & Jaworski, 2013) e sulla messa a punto e la creazione di strumenti che rispondono alle esigenze emergenti dalla riflessione sulla pratica (Jaworski, 2006). Come quadro teorico per guidare la riflessione sulla pratica, è stato selezionato lo strumento teorico TRU, Teaching for Robust Understanding (Schoenfeld, 2016). All'interno di questo quadro, si è deciso di concentrarsi su tre principali focus, dai quali è tratto il nome del gruppo di ricerca: l'inclusione, in particolare è stato selezionato l'UDL (*Universal Design for Learning*) come modello per la promozione di una didattica inclusiva (Cast, 2018); la valutazione formativa in riferimento alla Didattica della Matematica, intesa nell'accezione di Black & Wiliam (2009); l'argomentazione in matematica (Morselli, Sibilla, Testera, 2015), sia come competenza specifica da sviluppare che come strumento per promuovere la valutazione formativa e l'inclusione. Strumenti teorici espressamente concernenti gli obiettivi didattici delle attività proposte sono stati via via condivisi all'interno del gruppo di ricerca.

Il teaching experiment che presentiamo in questo contributo riguarda una sequenza didattica di introduzione al pensiero algebrico e promozione della competenza argomentativa, proposto al termine di una classe prima di un Liceo Scientifico. Per quanto riguarda il pensiero algebrico, l'obiettivo dell'unità didattica che è stata proposta si può inquadrare in ottica di sviluppo del *symbol sense* (Arcavi, 1994): gli studenti devono sviluppare una comprensione profonda di come e quando utilizzare il

linguaggio algebrico per rappresentare relazioni, generalizzare e dimostrare, un'abilità nel manipolare ed interpretare le espressioni simboliche che vada al di là della mera applicazione di procedure, la capacità di selezionare la rappresentazione simbolica più adatta allo scopo, la consapevolezza del fatto che i simboli possono assumere ruoli diversi in contesti diversi. In altri termini, lo sviluppo del *symbol sense* ha quindi radici nella consapevolezza del ruolo dell'algebra come strumento di pensiero, una consapevolezza che deve accompagnarsi allo svolgimento delle attività matematiche condotte dagli studenti. Questo aspetto della consapevolezza risulta centrale anche nella lettura del costrutto della razionalità di Habermas (1998) in ottica didattica. Nel discorso razionale, declinato nel caso particolare della matematica, vengono identificate tre componenti fondamentali, da considerarsi intrecciate tra loro e non distinte: la *componente epistemica*, legata alla validazione in termini di criteri di verità e validità legati agli argomenti proposti; la *componente teleologica*, legata alla scelta della strategia in termini di possibilità di realizzare una risoluzione alla questione posta, e la *componente comunicativa*, legata agli aspetti di chiarezza nella comunicazione della propria argomentazione e della possibilità di essere conformi agli standard della comunità di riferimento (Morselli, 2015). Secondo Boero e Morselli (2009), la congettura e dimostrazione possono essere lette come forme di comportamento razionale al senso di Habermas. Quindi, sembra particolarmente calzante, in una attività che mira allo sviluppo dell'algebra come strumento di pensiero, andare a considerare la lente della razionalità di Habermas per analizzare le argomentazioni degli studenti, nell'ottica di inquadrare la natura degli interventi e per individuare elementi chiave rispetto all'emergere della consapevolezza del ruolo dell'algebra e delle difficoltà con le quali si presenta.

In questo contributo andremo in particolare ad osservare come l'insegnante, con il quale sono stati condivisi gli strumenti teorici finora richiamati, partendo dagli stimoli provenienti dai protocolli prodotti dai gruppi di studenti, riconosca in fase di discussione questi elementi chiave all'interno delle argomentazioni degli studenti e stimoli la riflessione sul ruolo dell'esempio, coinvolgendo le diverse componenti del discorso razionale.

LA SEQUENZA DIDATTICA

La sequenza didattica, progettata in risposta agli stimoli dello strumento teorico TRU, è stata proposta al termine di una classe prima di un Liceo Scientifico. Gli studenti in questo periodo dell'anno si trovavano ad affrontare le prime attività presentate in un contesto algebrico. Quindi il percorso si situa precisamente nella fase di passaggio dall'aritmetica all'algebra. La progettazione, oltre che allo sviluppo del *symbol sense*, era volta all'argomentazione e alla promozione di strategie di valutazione formativa, che concorrono all'esplicitazione delle criticità di questo passaggio, fino ad una presa di consapevolezza del ruolo dell'algebra come strumento di pensiero. Come abbiamo già sottolineato, in particolare, il ruolo ricoperto dall'esempio numerico in questo passaggio tra aritmetica e algebra è cruciale. La prima attività proposta nel percorso è tratta da un quesito INVALSI, tramutato in veste esplorativa, che gli studenti sono dapprima chiamati ad affrontare individualmente, per familiarizzare con il problema: *Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$? Viene in seguito chiesto agli studenti di stabilire il valore di verità delle tre seguenti affermazioni, rispettivamente attribuite ai personaggi denominati Mario, Luisa e Giovanni, e produrre un'argomentazione in piccoli gruppi: «Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri», «Si ottiene sempre un numero dispari», «Si ottiene sempre un multiplo di 3». Le argomentazioni prodotte dai gruppi, proiettate alla LIM dal docente, vengono discusse dall'intera classe. Gli interventi del docente, in ottica di valutazione formativa, mirano a fornire feedback agli studenti, lavorando sugli elementi di criticità che emergono, non solo riguardanti gli aspetti matematici ma anche in relazione all'argomentazione.*

METODOLOGIA

Le discussioni condotte in classe sono state video registrate e successivamente trascritte. L'analisi è stata condotta separatamente da ciascun autore e successivamente è stato effettuato un confronto, al fine

di arrivare a un'analisi condivisa. L'analisi condotta mira a individuare le diverse componenti di comportamento razionale negli interventi in discussione, con un focus particolare su come il docente gestisce il passaggio aritmetica-algebra in relazione all'uso degli esempi.

ANALISI

L'estratto della discussione che abbiamo analizzato si situa all'inizio del secondo incontro. Nel primo incontro gli studenti hanno lavorato, dapprima in modo individuale e poi confrontandosi in piccolo gruppo, consegnando le loro produzioni relative alla risoluzione del Task 1. Ha fatto seguito l'inizio della discussione di classe, che ha avuto come oggetto l'elaborato di un gruppo (Gruppo 1), proiettato sulla LIM. La seconda parte della discussione, svoltasi nel secondo incontro, non verte più sull'aspetto di risoluzione del problema: assodato che tutti i gruppi hanno risposto correttamente, il docente si concentra sul fatto che, nei vari protocolli, vengono inseriti degli esempi numerici, a vario titolo. Identificato questo elemento come un'opportunità per affrontare gli aspetti di difficoltà nel passaggio tra aritmetica ed algebra, gli interventi del docente vanno quindi nella direzione di rendere esplicito il ruolo degli esempi numerici nelle produzioni degli studenti, rispetto ai tre livelli di razionalità. Presenteremo, di seguito, tre episodi della discussione in cui osserviamo, attraverso la lente della razionalità di Habermas, come gli interventi del docente vadano a stimolare le risposte degli studenti sulle funzioni dell'esempio numerico rispetto alle varie componenti del discorso razionale. Per ogni episodio, riporteremo il protocollo degli studenti che viene mostrato alla lavagna al momento della discussione, seguito dalla trascrizione dello stralcio di discussione relativa all'episodio d'interesse.

Episodio 1 [min. 04.02 – 08.21]: l'esperimento cruciale, tra razionalità epistemica e teleologica

Gruppo_4 ⚠️ +

Giovanni ha ragione perché: se si sommano
 $2n+3$ $2n+3$ $2n+3 = 6n+9 \rightarrow 3 \cdot (2n+3) = 3 \cdot k \rightarrow$
 tutti multipli di 3.

Luisa ha ragione perché: $3 \cdot (2n+3) = 3 \cdot k$
 $n=0 \rightarrow 3 \cdot (2 \cdot 0 + 3) = 3 \cdot 3 \rightarrow$ valore minimo k
 è il valore minimo di n 9 DISPARI

Mario ha ragione perché: se si moltiplica $\times 3$
 quindi il Triplo si ottiene lo stesso numero che
 viene se sommi i tre numeri.

$2n+3 + 2n+3 + 2n+3 = 6n+9$ $3 \cdot 3 = 9$
 $(2n+3) \cdot 3 = 6n+9$
 $(2n+3) \cdot 3 = 6n+9$
 $(2n+5) \cdot 3 = 6n+15$

$2m+3$ DISPARI
 $2m+2+1$
 $2(m+1)+1 = 2k+1$

Figura 1. Protocollo Task 1 del gruppo 4

1. [...] Gemma: "Abbiamo provato a sostituire n con il valore minimo che è 0, così ottenendo $3 \times 2 + 0 + 3$, che è 3×3 , e otteniamo 9 e vediamo che è un numero dispari"
2. T: "Quindi Luisa ha ragione, se capisco bene, che è sempre un numero dispari, perché provando con $n=0$ ottenete 9 che è dispari?"

[Attimo di silenzio, 2 mani alzate, parla Luca]

3. Luca: "Più o meno, perché abbiamo provato 0, cioè che è il numero, diciamo, più basso, che è all'interno dei numeri naturali".
4. T: "Sì"

5. Luca: "Siccome all'interno c'è proprio $2n$, quindi n facciamo finta che sia 0, $2 \times 0 = 0$ più 3. Il 3 indica che il k , il nostro k , sarà come numero minimo 3."
6. T: "Mm, però.."
7. Luca: "Quindi sempre un numero dispari"
8. T: "Quindi.. [dà la parola Silvio, che aveva alzato la mano] Silvio?"
9. Silvio: "Se non sbaglio, avevamo fatto il ragionamento che k è sempre un numero dispari, perché $2n$ è un numero positivo - $2n$ è un numero pari. Se aggiungiamo a un numero dispari un numero pari il numero verrà sempre dispari"
10. T: "[...] Quindi, scusate, ritorno alla domanda che ho fatto inizialmente. Voi qua avete detto che Luisa ha ragione perché per $n=0$, che è il minimo valore che potevate pensare, vi viene un numero dispari. È quello che c'è scritto?"
11. Luca: "Sì"
12. T: "Siamo tutti d'accordo che basta un esempio, ad esempio, un esempio particolare - loro hanno preso $n=0$, che ha la particolarità di essere il numero più piccolo - basta per dimostrare che Luisa ha ragione, cioè dimostrare che si ottiene sempre un numero dispari?"
13. Filippo: "Essendo che i numeri che si possono inserire sono infiniti, cioè, non basta diciamo. Però basta un controesempio per disfare la teoria."
14. T: "Sì, certo. Ma noi vogliamo disfare la teoria di Luisa, cioè, dire che si ottiene un numero dispari?"
15. No no (mormorio generale)
16. T: "La vogliamo confermare, però.. guardiamo bene. L'abbiamo già confermata. Dove?"
17. Luca: "Dove abbiamo modellizzato $2n+3$ "

Lo stralcio si apre con un intervento di Gemma (battuta 1), che illustra la scelta del gruppo di sostituire il valore numerico $n=0$ per verificare la verità dell'affermazione di Luisa. Il successivo intervento del docente T (battuta 2), volto a richiamare i criteri di validità e verità alla base della dimostrazione matematica, chiama in causa la dimensione epistemica. Il fatto che la discussione si stia concentrando sulla dimensione epistemica trova conferma nella battuta 4: Luca fa riferimento a una prova pragmatica del tipo *esperimento cruciale* (Balacheff, 1982), che però non soddisfa i criteri di validità per la comunità di riferimento. Dopo l'intervento di Silvio (battuta 10), che propone una diversa linea argomentativa, il docente promuove a più riprese (battuta 10, battuta 12) la riflessione collettiva sui criteri di verità e validità, agendo sempre sulla dimensione epistemica. Nella successiva battuta 14 entra in gioco anche la dimensione teleologica, dal momento che il docente richiama l'attenzione anche sullo scopo dell'attività. Nella battuta 17 Luca, grazie agli stimoli del docente, arriva a interpretare la scrittura algebrica in relazione al fine dimostrativo. La scrittura $2n+3$ è interpretata in modo corretto e utile allo scopo (dimensioni epistemica a teleologica).

Episodio 2 [min. 14.36 – 17.54]: la dimensione comunicativa

Gruppo_3

$$m \in \mathbb{N}$$

$$2m+1 + 2m+3 + 2m+5 = 6m+9 = 3 \cdot (2m+3) = 3K$$

$K = 2m+3$ $(2m+3) = 1$ = dispari
 → concentrato di un m+3 quindi con m+3 dispari

LUISA HA RAGIONE

numero numero numero
 $2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 3K$

$K = 2n+3$

$3 \cdot K$
 triplo

MARIO HA RAGIONE

"Si ottiene il triplo di uno dei numeri"
 $\downarrow$
 $\cdot 3$

$3 \cdot K$
 un multiplo di 3, perché $K \in \mathbb{N}$

(GIOVANNI) HA RAGIONE

Figura 2. Protocollo Task 1 del gruppo 3

1. T: [...] *“Ormai lo abbiamo già sviscerato, adesso, il quesito. Quindi adesso lavoriamo anche sull’aspetto di capacità comunicativa di quello che vedete. Al secondo gruppo, adesso, sappiamo già tutto del quesito. Giusto? Allora facciamo un upgrade: andiamo anche a indagare sul livello di comunicabilità, di efficacia comunicativa, di quello che avete detto. Tradotto: se io lo leggo così, capisco cosa volevano dire? Ci siamo? Anche voi che lo avete scritto, riflettete su questa cosa. Anche gli altri possono intervenire. Vai Fazio”*
 2. Fazio: *“Intanto possiamo partire dal perché abbiamo affermato che Mario ha ragione [...] Abbiamo sommato $2n+1$ più $2n+3$ più $2n+5$, si ottiene $6n+9$, e lo abbiamo poi modellizzato come $3(2n+3)$ che equivale a 3 per k ”*
 3. T: *“In realtà non avete modellizzato, ma qual è la parola..?”*
 4. Fazio: *“Fattorizzato”*
 5. T: *“Ok, allora. Benissimo. Domanda: ma com’è che allora avete avuto l’esigenza di riscriverlo e aggiungere, vedo qua, ad esempio, un ‘numero’, che qua invece non c’era? Ok? Io mi domando: io guardo la prima riga, già in tutta quella riga c’è la risposta di tutti e tre i casi. Siamo d’accordo?”*
 6. Più voci: Timido Sì di risposta
 7. T: *“Cioè, scrivere questa prima riga, questa catena di uguaglianze, risponde alla domande se Luisa ha ragione, Giovanni ha ragione, Mario ha ragione, .. Basta vedere cosa ci dicono quegli oggettini, no? Allora, vedo però che c’è un upgrade, qua [indicando la riga sul foglio condiviso], quando parlate di Mario, perché avete scritto il ‘numero’. Intanto, perché ce lo avete scritto, per esempio?”*
 8. Adam: *“L’avevamo messo perché così non si confondeva, magari, che dal testo i tre numeri qualcuno poteva capire che fosse $1+2n$, $3+2n$ e così.. Così lo abbiamo..”*
 9. Fazio: *“Che fossero numeri diversi”*
 10. T: *“È capitato a qualcuno di non riconoscere da subito i tre numeri?”*
- [Alzano le mani Marta, Michel].
11. T: *“A Marta, a Michel. Solo a due? Forse a qualcuno in più? Forse vi siete già dimenticati. Allora, voi avete usato, diciamo, questa iconografia, solo per ricordare. Ma qua [indicando la prima catena di uguaglianze] invece vi era chiaro?”*
 12. Marta e Michel: *“Sì [rispondono insieme].”*
 13. T: *“Non solo in teoria. Avete sentito l’esigenza di specificare meglio in questo caso che erano tre numeri diversi?”*
 14. Adam: *“Sì, volevamo esplicitarlo”.*

Nella battuta 1 il docente introduce la dimensione comunicativa, che sarà poi in tutto lo stralcio strettamente intrecciata con la dimensione teleologica. Tale intreccio è evidente nella battuta 5, in cui il docente sollecita l’esplicitazione delle ragioni che hanno portato ad aggiungere l’espressione “numero”, ricordando al tempo stesso lo scopo dimostrativo alla base della manipolazione della scrittura simbolica. Lo stesso nella successiva battuta 7, volta a esplicitare il fatto che la catena di uguaglianze tra scritture simboliche ha valore dimostrativo e a promuovere una riflessione sulle ragioni dietro alla scelta di aggiungere la scritta “numero” sopra le formule (razionalità teleologica e razionalità comunicativa). Le risposte di Adam (battute 8 e 14) giustificano le scelte del gruppo in termini di dimensione comunicativa.

Episodio 3 [min. 24.08 – 29.23]: dal ruolo dell'esempio al ruolo dell'algebra

Gruppo_2

MARCO HA RAGIONE PERCHÉ:

$$2n+1 + 2n+3 + 2n+5 \Rightarrow 6n+9$$

$$3 \cdot (2n+3)$$

$$6n+9 = 3 \cdot (2n+3)$$

esempio?

$n=1$

$$2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$6 \cdot 1 + 9 = 15$$

WISLA HA RAGIONE PERCHÉ: ~~ORA~~ SE SOTTO UN NUMERO DISPARI AD UN NUMERO PARI OTTIENGO UN NUMERO DISPARI

$$2n+2n+1 = 4n+1$$

GIOVANNI HA RAGIONE:

$$6n+9 \xrightarrow{\text{Fatt.}} 3 \cdot (2n+3) = 3z \text{ dove } z \text{ sarà un multiplo di } 3$$

ogni numero sostituito a $n \in \mathbb{N}$ rende vera l'affermazione

Figura 3. Protocollo Task 1 del gruppo 2

1. [...] Marco: "E poi abbiamo fatto un esempio"
2. T: "Bene. Perché? Paola, se lo ricorda Paola, perché avete fatto un esempio?"
3. Paola: "Abbiamo fatto un esempio per verificare che.. Perché comunque volevamo anche una conferma pratica del fatto che la nostra osservazione fosse vera. Volevamo anche dare un modo per quando avremmo, magari, presentato anche per, come dire, avere un punto in più d'appoggio. Non saprei"
4. T: "Sentiamo anche gli altri due. L'avete messo come punto su cui appoggiarsi, come punto di appoggio, come ancora di sicurezza, provare con $n=1$ e far vedere che viene 15?"
5. Marco: "Sì, cioè sì, anche se sappiamo che non generalizza tutti i numeri. Cioè, generalizzare tutti i numeri lo abbiamo già scritto sopra con $6n+9$ e 3 per $2n+3$, però abbiamo deciso di mettere un esempio non per confermare ma.."
6. T: "Non vi fidate ancora tanto dell'algebra ma dei numeri ancora sì? Domanda, posso? Sembrerebbe così. Tu hai detto: sopra, algebricamente, lo abbiamo già fatto vedere in generale, poi abbiamo fatto l'esempio numerico. Allora io mi chiedo: perché non ci fidiamo ancora completamente dell'algebra che va a generalizzare, quindi devo fare uno sforzo..?"
7. Paola: "No, secondo me, è sempre meglio farlo. Non si sa mai, non è che.. Però.."
8. T: "Dici: non si sa mai. Bah, io direi.."
9. Edoardo: "Io non mi fido ancora"
10. T: "Oh, ecco. Lui non si fida ancora. Come mai tu non ti fidi ancora? Diccelo. Hai fatto una bellissima osservazione"
11. Edoardo: "No non lo so. Mi viene naturale fare ancora dei calcoli. Cioè.."
12. T: "Eh, ma orientati a che cosa? Bella osservazione Edoardo"
13. Edoardo: "Non lo so, mi sento più sicuro con i numeri."
14. Luca: "Forse perché ancora, che adesso che è da poco che abbiamo a che fare con l'algebra allora ci sembra strano che una cosa grande come la matematica - che, tutti i numeri infiniti, cose infinite, riescano a concentrarsi in poche parole, in poco scritto."
15. T: "In pochi simboli! Beh sì, è la potenza dell'algebra: quella di generalizzare e condensare in una scrittura atomica infiniti numeri. Effettivamente è così eh. $2n$: abbiamo scritto in un secondo gli infiniti numeri pari. Eh beh, sì certo. Però è il problema.. Diciamo, è sia, come dire, un limite, perché non mi sto fidando, ma è una potenza quella di poter scrivere $2n$. Certo, non

li vediamo tutti, bisogna fare affidamento all'astrazione. Effettivamente sì. Quindi, diciamo, un ricorso a un numero ti dà sempre.. Dice: «maniman» trovassi un..»

16. Paola: *“Controesempio”*

17. T: *“Che allora dici: ho sbagliato la manipolazione sopra. Eh? Dimmi Tino.”*

18. Tino: *“Secondo me, allora, comunque, vedendo dai lavori che abbiamo fatto, ci stiamo comunque abituando ad usare l'algebra, perché, ad esempio, questo esempio, lo hanno fatto dopo aver avuto la conferma di essere riusciti, cioè di..”*

19. T: *“Ah, guardate che bello! Tino fa una osservazione proprio sull'aspetto di struttura di come compare la soluzione e ha detto: guardate che l'esempio non è stato il primo, quindi vuol dire che ci stiamo abituando. Non abbiamo – non hanno usato l'esempio numerico, come dire, come partenza e poi hanno generalizzato. Sono andati a partire a generalizzare e poi dopo sono tornati indietro. Quindi, per Tino, è un esempio del fatto che ci stiamo abituando a dare, in maniera, magari, non ancora esplicita importanza all'algebra invece che all'aritmetica. Potrebbe anche essere un'osservazione corretta”*

20. Paola: *“Noi avevamo fatto così perché sappiamo che con un esempio - ci basterebbe trovare anche solo un controesempio per mandare a rotoli tutta la nostra affermazione. Allora c'è sembrato magari più sicuro agire in primo luogo con l'algebra”*

21. T: *“Quindi, attenzione! Lui dice: avevamo il sentore che l'affermazione fosse vera. E quindi sapevamo che per dimostrare qualcosa non basta un esempio, allora abbiamo usato l'algebra..” [...] “Bene. Anche perché se si sa che si ha ragione non si cerca nemmeno il controesempio, no?”*

22. Edoardo: *“È anche vero che, però, cioè, usando l'algebra, magari, ti fa anche vedere se generalizzando si è sbagliato qualcosa e allora poi capire che, cioè, hai fatto qualcosa di sbagliato e poi andare a correggere”*

23. T: *“Quindi, mi stai dicendo, potevi magari trovare un controesempio e dire: ‘Cavolo qualche manipolazione mi è sfuggita’, e andare a rivedere. Va bene.*

L'intervento del docente (battuta 2) mira a far esplicitare le ragioni alla base della scelta del gruppo di effettuare un esempio numerico: si intrecciano la razionalità epistemica (criteri di validità) e teleologica (scelte strategiche in relazione allo scopo dimostrativo). Dalle dichiarazioni di Paola (battuta 3) pare che le ragioni dietro l'esempio numerico siano legate in parte alla dimensione epistemica e in parte a quella comunicativa. Emerge la difficoltà insita nel passaggio all'algebra. Il successivo intervento del docente (battuta 6) vuole promuovere una riflessione a livello di dimensione epistemica, in relazione ai criteri di verità e validità, e teleologica per la riflessione sulla scelta dell'algebra come strumento dimostrativo. Tale spunto è colto da Edoardo (battuta 10), che manifesta una difficoltà ad accettare l'algebra come strumento dimostrativo. L'intervento intreccia la dimensione teleologica ed epistemica. Il docente (battuta 11) accoglie la difficoltà, incoraggiando Edoardo a rendere esplicite le ragioni. Edoardo (battuta 14) esplicita il suo criterio di validità (razionalità epistemica), Luca (battuta 15) esplicita la difficoltà a riconoscere il potere dimostrativo dell'algebra (razionalità epistemica). Il successivo intervento del docente (battuta 16) è volto a esplicitare i criteri verità e validità (dimensione epistemica), ma lasciando sempre un'apertura verso le esigenze espresse degli studenti e le ragioni alla base delle loro scelte strategiche (dimensione teleologica). L'intervento di Tino, poi rilanciato dal docente (battute 19 e 20) mette in luce la funzione dell'esempio numerico all'interno della risposta proposta dal gruppo: emerge quindi la dimensione comunicativa. Successivamente, Paola (battuta 21) giustifica la scelta strategica di utilizzare l'algebra come strumento dimostrativo (razionalità teleologica e, secondariamente, epistemica). L'intervento del docente (battuta 22) verte sui criteri di verità e validità (dimensione epistemica) e sulla scelta degli strumenti dimostrativi (dimensione teleologica). Infine, Edoardo (battuta 23) sottolinea la funzione di controllo favorita dall'esempio numerico (dimensione teleologica).

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI

Avendo soltanto recentemente iniziato a familiarizzare con lo strumento dell'algebra, nel periodo della sperimentazione, gli studenti si trovavano ad affrontare alcune delle criticità che porta con sé questo passaggio, che sono state messe in luce dall'uso che viene fatto degli esempi all'interno delle loro argomentazioni scritte. La sequenza didattica proposta aveva pertanto, come obiettivo, quello di promuovere un uso consapevole dell'algebra come strumento di pensiero, e si strutturava perciò come un'attività argomentativa con l'obiettivo di fare emergere questi aspetti di consapevolezza. Oltre alla progettazione di un'attività che promuovesse l'argomentazione degli studenti, sono stati essenziali, per l'emergere di questa consapevolezza, anche gli interventi del docente, in ottica di valutazione formativa (Black & Wiliam, 2009), che hanno portato gli studenti ad esplicitare delle meta-riflessioni su quanto avevano prodotto loro stessi o i compagni.

Dall'analisi dei tre estratti che abbiamo riportato, possiamo osservare come, nella discussione, il docente accolga la problematicità del passaggio tra l'aritmetica e l'algebra, ed intervenga cercando di comprendere le criticità che emergono dalle argomentazioni degli studenti per poterli aiutare nel superamento della difficoltà, fino ad una presa di consapevolezza del ruolo dell'algebra come strumento di pensiero. Negli episodi che abbiamo presentato si evidenzia come, all'interno della discussione, gli interventi del docente vadano a stimolare la riflessione sulle varie componenti del discorso razionale individuate da Habermas, con l'obiettivo di affrontare, in ultima analisi, da un lato, il ruolo dell'esempio numerico nella dimostrazione algebrica e, dall'altro, di portare in evidenza le caratteristiche dell'algebra come strumento di pensiero.

Questo contributo presenta un esempio di come una conoscenza consapevole degli strumenti teorici abbia guidato l'insegnante nell'intervenire durante la discussione in classe per la costruzione di un'esperienza didattica significativa. Questo, a nostro avviso, può essere interpretato come il risultato di percorsi di formazione e ricerca, promossi attraverso il lavoro in una comunità di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

- Arcavi, A. (1994) Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en Mathématiques au collège, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 3(3), 261-304.
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5–31.
- CAST (2018). Universal Design for Learning Guidelines version 2.2. Retrieved from <http://udlguidelines.cast.org>
- Goodchild, S., Fuglestad, A. B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 393–412.
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9 (2), 187–211.
- Morselli, F. & Boero, P. (2010). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame or the teaching and learning of proof. in Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S., Arzarello, F. (eds.), *Proceedings of CERME 6, 6th Congress of European Research in Mathematics Education*, Lyon (France), 211–220.
- Morselli, F. (2015). La razionalità nel dimostrare mediante il linguaggio algebrico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38, 279–298.
- Morselli, F., Sibilla, A., Testera, M. (2015). Lo sviluppo delle competenze argomentative nella scuola secondaria di primo e secondo grado. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38, 548–565.

Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from <http://map.mathshell.org/trumath.php>.

IL PROBLEMA DI MONTY HALL UNA SEMPLICE INTRODUZIONE AL TEOREMA DI BAYES

Jahier Matteo
I.I.S. ‘Michele Buniva’ di Pinerolo (TO)

matteojhr@gmail.com

Abstract

Questo contributo presenta una proposta educativa per la scuola secondaria superiore di secondo grado, che si colloca nel filone di ricerca didattica incentrato sull'indagine sperimentale – Inquiry- Based Science Education (IBSE). Nella didattica della Matematica, ricercare un'approccio laboratoriale che permetta agli studenti di toccare con mano le ricadute applicative e le conseguenze pratiche degli argomenti trattati, ha un grande valore motivazionale e libera quella parte di creatività spesso imbrigliata tra definizioni, teoremi ed esercizi meccanici.

L'argomento proposto rappresenta il tentativo di introdurre in maniera essenziale il teorema di Bayes al termine del primo biennio, dopo aver trattato i primi rudimenti di teoria della probabilità. Il problema scelto ben si presta a soddisfare lo spirito e le metodologie che muovono l'azione didattica, essendo: accattivante, immediatamente verificabile con un set sperimentale minimo – tre tazzine opache ed un sassolino – e facilmente riconducibile alla teoria classicamente trattata. Da questa particolare variante del ‘gioco delle tre carte’ infatti si può costruire un percorso didattico che stimoli gli studenti a porsi le domande corrette, nell'approcciare un semplice problema di inferenza probabilistica, direttamente dall'emergere delle evidenze sperimentali.

Dopo un'introduzione storica del problema di Monty Hall il docente veste i panni del conduttore televisivo, sfidando gli studenti a fare la scelta che massimizza le probabilità di vittoria – dando al primo approccio il carattere ludico pensato per fare breccia nell'interesse dei ragazzi. In seguito la classe viene suddivisa in due gruppi che dovranno verificare sperimentalmente le frequenze. Una volta emerse le frequenze dall'esperimento la classe viene invitata al dibattito con l'obiettivo di far affiorare i ragionamenti che possono condurre alla modellizzazione teorica del problema. Solo a questo punto, raccolte tutte le considerazioni, vengono ripresi (e verificati) i prerequisiti e viene spiegata la teoria che porta alla formulazione del teorema di Bayes. Dopo un'altro momento collegiale di esercitazione peer to peer, con semplici esercizi di applicazione della teoria trattata, la verifica finale consiste nel chiedere agli studenti di definire gli eventi – e loro probabilità associate – che permettono di pervenire alla corretta interpretazione probabilistica del problema di Monty Hall attraverso l'utilizzo del teorema di Bayes.

Parole-chiave

Probabilità, teorema di Bayes, didattica laboratoriale, Problem solving, IBSE

IL PROBLEMA DI MONTY HALL

– Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere fra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre. Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra. Quindi ti domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?" Ti conviene cambiare la tua scelta originale? –

Figura 1. Formulazione del problema di Monty Hall contenuta nella rivista ‘Parade’ (febbraio 1990)

Originariamente formulato dal matematico francese Joseph Louis Francois Bertrand nella seconda metà del XIX secolo, nella formulazione sopra riportata (Figura 1) contenuta in una lettera indirizzata alla rubrica di Maylin Von Savant — saggista ed editorialista statunitense riconosciuta dal Guinness dei primati come uno dei QI più alti di sempre — (Parade, 1990), viene proposto come una variante del gioco a premi ‘Let’s make a deal’, condotto dal presentatore TV Monty Hall.

OBIETTIVI E PRIMO APPROCCIO CON LA CLASSE

L’unità didattica è pensata per il primo biennio di scuola secondaria superiore, dopo la trattazione introduttiva al calcolo delle probabilità. Gli obiettivi sono quelli di sviluppare le competenze necessarie a distinguere — e trattare opportunamente — eventi dipendenti ed indipendenti, ed imparare ad utilizzare correttamente il teorema di Bayes per risolvere semplici problemi di inferenza probabilistica. Attraverso un esempio stimolante, il problema di Monty Hall si rivela un utile strumento per declinare il percorso didattico in chiave costruttivista, e far emergere i risultati ‘a priori’ da un semplice esperimento frequentata ‘a posteriori’. L’utilizzo di un approccio didattico ludico-sperimentale, basato sul problem-solving, facilita l’inizio del percorso ed aiuta a vincere la frustrazione derivante dal cimentarsi con qualcosa di nuovo e non banale.

Il percorso comincia proprio con la simulazione del gioco a premi da parte del docente e la raccolta delle prime impressioni degli studenti, monitorate in un test esplorativo (Figure 2 e 3). I risultati mettono bene in evidenza la difficoltà di pervenire alla corretta interpretazione probabilistica del quesito posto, dopo l’apertura della porta da parte del presentatore.

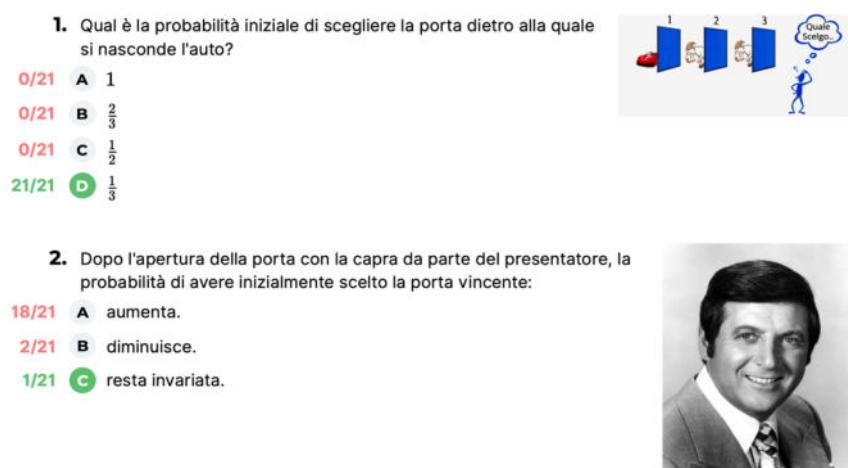
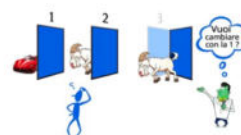


Figura 2. Risultati test esplorativo (parte 1)

3. La scelta di cambiare la porta inizialmente selezionata, proposta dal presentatore:
- 11/21 **A** conviene ed aumenta la probabilità di vittoria.
- 1/21 **B** non conviene e diminuisce la probabilità di vittoria.
- 9/21 **C** non cambia la probabilità di vittoria.



4. La probabilità di vincere, cambiando la scelta iniziale, è quindi pari a:
- 0/21 **A** 0
- 3/21 **B** $\frac{2}{3}$
- 1/21 **C** $\frac{1}{3}$
- 17/21 **D** $\frac{1}{2}$

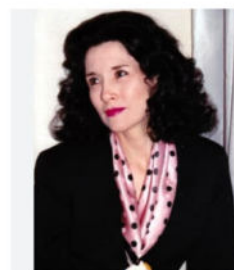


Figura 3. Risultati test esplorativo (parte 2)

L'ESPERIMENTO FREQUENTISTA

Il momento successivo, chiave dell'unità didattica dal punto di vista induttivo-sperimentale, consiste nel verificare con un 'grande' numero di prove le probabilità a posteriori nei due casi possibili. Operativamente la classe viene divisa in due gruppi di coppie, che simulano il problema con un set sperimentale composto da tre contenitori opachi ed un 'marcatore' invisibile dall'esterno. La prima evidenza maturata dal gruppo di coppie simulanti la scelta di non cambiare il contenitore iniziale, è quella che la probabilità iniziale non può cambiare nel loro caso, perché operativamente aspettare o meno la domanda del presentatore non ha alcun effetto, se la scelta di non cambiare contenitore è già stata presa a monte. Durante la sperimentazione in classe non è stato possibile effettuare un numero di prove adeguato, e solo accidentalmente il risultato più significativo è risultato essere quello più vicino alla reale probabilità a priori (Figura 4). Questa informazione, sovrapposta alla considerazione 'sperimentale' sopra menzionata, ha indirizzato gli studenti verso la corretta interpretazione del problema, rendendo davvero importante l'investimento di tempo a livello didattico.

IL PROBLEMA DI MONTY HALL		
RISULTATI ESPERIENZA FREQUENTISTA		
CAMBIO		RESTO
16 / 20 - (80%)		17 / 34 (50%)
11 / 20 - (55%)		17 / 33 (52%)
13 / 20 - (65%)		11 / 33 (33%)
11 / 20 - (55%)		
13 / 20 - (65%)		
64 / 100 - (64%)		45 / 100 - (45%)

Figura 4. Risultati dell'esperienza frequentista

LEZIONI TEORICHE ESERCITAZIONI E PROVE DI VERIFICA

Terminato l'esperimento viene somministrato un test dei prerequisiti, per verificare che siano stati assimilati i concetti di spazio campione ed evento, la definizione classica di probabilità e le leggi della probabilità della somma logica e del prodotto logico di eventi. A questo punto viene introdotta la teoria che estende i concetti già visti per includere il teorema di Bayes (figura 5). Dalla definizione di probabilità condizionata vengono enunciati il teorema della probabilità composta e le condizioni di dipendenza / indipendenza di due eventi. Con questi strumenti solamente si perviene alla più semplice formulazione del teorema di Bayes. Vengono proposti semplici esercizi ed esempi per corroborare la spiegazione, da svolgere a gruppi. Dopo un ultimo momento di brain storming collegiale, mirato a sciogliere gli ultimi dubbi, a rispondere alle ultime domande ed a discutere le ultime perplessità; le prove di verifica consistono in un test, dove vengono proposti esercizi simili a quelli svolti in classe, ed una prova di 'problem solving' dove viene richiesto di applicare il teorema di Bayes alla risoluzione del problema di Monty Hall, definendo opportunamente gli eventi in gioco e le relative probabilità.

I)

- definizione **probabilità condizionata**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **teorema della probabilità composta**:

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$$

II)

- condizione di **dipendenza/indipendenza** di due eventi:

$$(A \text{ indipendente da } B \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \wedge P(B|A) = P(B)) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

III)

- **teorema di Bayes**:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

Figura 5. Contenuti teorici

CONCLUSIONI

L'utilizzo di un approccio ludico-sperimentale è stato molto efficace nel catturare la curiosità dei ragazzi e far emergere la consapevolezza della teoria in maniera induttiva. I risultati della classe non sono stati eccellenti — in figura 6 i risultati delle due prove finali sono stati ponderati conferendo al test l'80% del peso della prova ed alla prova di problem solving il restante 20% — ma le condizioni al contorno sono state poco favorevoli. Classe di nuova formazione, docente nuovo, prima unità didattica svolta. Da migliorare sicuramente la messa in atto dell'esperimento, per incrementare il numero di prove e dare

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia maggiore spessore statistico ai risultati ottenuti. L'indice di gradimento da parte della classe è stato in ogni caso alto e ritengo che l'unità didattica possa essere ripetuta in futuro e l'approccio esteso alla trattazione di argomenti affini.

TEST PRE-REQUISITI	PUNTEGGIO MEDIO:	RISPOSTE CORRETTE:
CAMPIONE: 20 STUDENTI	49%	3,9 / 8
PROVA FINALE	PUNTEGGIO MEDIO:	RISPOSTE CORRETTE:
CAMPIONE: 20 STUDENTI	61%	6,1 / 10

Figura 6. Risultati delle prove iniziali e finali

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio DI.FI.MA. per l'opportunità datami e la fiducia concessami. Ringrazio il prof. Andrea Gheri per il confronto che ha portato all'idea dell'esperimento. Ringrazio la mia famiglia per il supporto e l'amore.

LA CLASSE COME COMUNITA' DI RICERCA

Stefania Pancanti

I.I.S. "Leonardo Da Vinci – Fascetti"

stefania.pancanti@davincifascetti.it

Abstract

Durante la didattica a distanza con una classe quarta di un Istituto Tecnico Industriale è stata avviata una modalità di lavoro che da allora è diventata caratteristica per le classi quarte e quinte. Gli studenti, a piccoli gruppi, sono coinvolti nella preparazione e nella presentazione alla classe di approfondimenti legati al percorso disciplinare che riguarda l'introduzione allo studio di funzione e al calcolo infinitesimale. Gli approfondimenti hanno sia carattere storico sia carattere disciplinare. Ai diversi gruppi vengono fornite delle indicazioni di ricerca con l'obiettivo di focalizzare, con l'aiuto dell'insegnante, gli aspetti più significativi. Successivamente il lavoro è presentato e condiviso con la classe. Alcuni lavori prevedono anche l'utilizzo di Geogebra e del foglio di calcolo. Queste attività hanno permesso, inoltre, anche lavori di tipo interdisciplinare con Storia, Italiano ed Educazione Civica.

Parole-chiave

Calcolo Infinitesimale, Storia della Matematica, Apprendimento Attivo, Interdisciplinarietà

INTRODUZIONE

Durante la didattica a distanza con una classe quarta di un Istituto Tecnico Industriale è stata avviata una modalità di lavoro che da allora è diventata caratteristica per le classi quarte e quinte. Gli studenti, a piccoli gruppi, sono coinvolti nella preparazione e nella presentazione alla classe di approfondimenti legati al percorso disciplinare che riguarda l'introduzione allo studio di funzione e al calcolo infinitesimale. Gli approfondimenti hanno sia carattere storico, facendo riferimento ai risultati di apprendimento attesi rispetto al profilo educativo, culturale e professionale riportato nelle Linee Guida, "collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche", sia carattere disciplinare, con l'obiettivo di concorrere, sempre facendo riferimento alla Linee Guida, al raggiungimento dei seguenti risultati di apprendimento in termini di competenze:

- utilizzare il linguaggio ed i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative;
- utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche elaborando opportune soluzioni;
- utilizzare le reti e gli strumenti informatici nelle attività di studio, ricerca e approfondimento disciplinare;
- correlare la conoscenza storica generale agli sviluppi delle scienze, delle tecnologie e delle tecniche negli specifici campi professionali di riferimento.

Anche le Indicazioni Nazionali nelle Linee Generali e Competenze riportano: "lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che

conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica”. Per quanto riguarda il lavoro nei diversi gruppi, vengono fornite agli studenti delle indicazioni di ricerca attraverso la consegna di testi oppure l’indicazione di riferimenti da sviluppare, anche attraverso la rete, con l’obiettivo di focalizzare, con l’aiuto dell’insegnante, gli aspetti più significativi. Successivamente il lavoro è presentato alla classe. Alcuni lavori prevedono anche l’utilizzo di strumenti informatici come il foglio di calcolo e di ambienti digitali di geometria dinamica come Geogebra.

CARATTERISTICHE DELLE ATTIVITA’ DI APPROFONDIMENTO

Una delle caratteristiche più importanti delle attività proposte è quella di realizzare un apprendimento attivo che metta lo studente al centro del processo di apprendimento. L’obiettivo di queste attività è quello di rendere lo studente protagonista e responsabile del suo percorso formativo attraverso un ruolo attivo nella costruzione della conoscenza matematica della classe, diventando anche consapevole del processo di sviluppo della Matematica come ricerca di risposte a problemi e domande.

Per quanto riguarda il tipo di approccio utilizzato nell’affrontare gli argomenti trattati, facendo riferimento a quanto indicato in (Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R., 2012), la scelta è quella di rispettare la gradualità nei processi di astrazione e la genesi storica nello sviluppo del Calcolo Infinitesimale. Un altro riferimento guida è la famosa frase che Hilbert pronunciò nel 1925, «L’Analisi è la sinfonia dell’Infinito», riportata anche in (Prodi, G., 1991). Questo indirizza il lavoro verso l’approfondimento e lo studio dell’Infinito Matematico con le problematiche ad esso connesse. Inoltre, attraverso le attività proposte gli studenti possono “incontrare” i protagonisti del processo di ricerca e di sviluppo del pensiero matematico, conoscendo anche il contesto nel quale i diversi risultati sono stati ottenuti.

DESCRIZIONE DEGLI ARGOMENTI DEGLI APPROFONDIMENTI

Di seguito si riportano gli argomenti affrontati, con l’indicazione di alcuni esempi di lavori assegnati ai singoli gruppi. Le attività sono sviluppate a partire dai diversi testi riportati in bibliografia, in modo combinato. Si riporta inoltre l’eventuale tipologia di strumenti ed ambienti digitali utilizzati:

SUL CALCOLO INFINITESIMALE: Newton, Leibniz ed i problemi che hanno portato alla nascita del Calcolo Differenziale; Dalla quadratura delle lunule alla quadratura in moto di Leonardo Da Vinci; Cavalieri ed il problema delle quadrature e cubature; I limiti e la definizione degli Integrali Definiti (Geogebra); Dalla quadratura della parabola di Archimede agli Integrali Definiti; Dalla sfera di Archimede al calcolo Integrale dei volumi (Geogebra)

DALLE SUCCESSIONI ALLE FUNZIONI DI VARIABILE REALE: Successione di Fibonacci, sezione aurea e introduzione al significato di limite (Foglio di calcolo); Rappresentazione e studio grafico delle successioni con Geogebra; Successioni e...salute: le progressioni geometriche come modello per lo studio dei livelli del tasso alcolemico del sangue (Geogebra); Successioni e...guadagni: Le progressioni geometriche come modello nella Matematica Finanziaria ed introduzione alla costante di Nepero (Foglio di calcolo); Problemi di massimi e minimo in due dimensioni (Geogebra); “Tutte le funzioni sono rappresentabili graficamente?“, approfondimento che tratta di Dirichlet e della funzione che porta il suo nome; Peano, Weierstrass e le «stranezze» delle funzioni continue: si tratta dello studio della relazione tra continuità e derivabilità fino agli esempi della curva di Weierstrass e di Peano come caso di funzioni continue e non derivabili in nessun punto (studio da un punto di vista intuitivo); Se è impossibile.... allora lo calcolo (Geogebra): sull’approssimazione di zeri di funzioni continue attraverso metodi iterativi.

SULL’INFINITO...: Cantor, Hilbert e l’Infinito Matematico; Parlando di Infinito o di Infiniti?; Torricelli e la tromba degli angeli (Geogebra)

APPROFONDIMENTI INTERDISCIPLINARI: Il problema dello studio del moto: da Galileo al calcolo differenziale ed il testo “Vita di Galileo” di Brecht; La funzione esponenziale come generalizzazione del modello delle progressioni geometriche nella piegatura del foglio “immaginando” di poter arrivare fino alla luna ed oltre e la Conquista dello Spazio; Dal libro Flatlandia: una storia a più dimensioni, la geometria analitica nello spazio, in particolare la sfera e le linee di livello, ed i temi “caldi” delle classi sociali, del ruolo della donna e dell’accettazione del diverso.

PUNTI DI FORZA E CRITICITA’ DELLE ATTIVITA’

Questo tipo di attività permette di individuare un filo conduttore nel percorso disciplinare affrontato e contribuisce a rendere la classe una “comunità di ricerca” nella quale ognuno assume un ruolo attivo. E’ da stimolo all’autonomia e alla responsabilità nel lavoro sia individuale sia di gruppo e permette ai ragazzi di lavorare sia sulla comprensione dei contenuti matematici sia sugli aspetti argomentativi.

Da un punto di vista strettamente disciplinare, i lavori proposti mettono in evidenza come il Calcolo Differenziale e Integrale costituisca un “punto di arrivo” di un processo di ricerca matematico e scientifico iniziato nell’antichità e la possibilità di utilizzare il foglio di calcolo ed un ambiente di geometria dinamica come Geogebra ha permesso di esplorare e studiare le problematiche affrontate da diversi punti di vista.

Questa metodologia di lavoro contribuisce a costruire un gruppo-classe che condivide e si sostiene nel processo di apprendimento e di scoperta, delineandosi appunto come “comunità di ricerca” e si è mostrata inclusiva anche rispetto ai ragazzi con DSA o con difficoltà di apprendimento.

Queste attività hanno permesso, inoltre, anche lavori di tipo interdisciplinare con Storia, Italiano ed Educazione Civica.

Per quanto riguarda le criticità emerse, queste riguardano le difficoltà nella comprensione dei testi proposti, le difficoltà a livello argomentativo, le difficoltà nella ricerca autonoma dei materiali dalle diverse fonti ed in alcuni casi anche nell’organizzazione del lavoro di gruppo. Un aspetto di criticità non da sottovalutare è, inoltre, il tempo richiesto per la realizzazione delle attività proposte.

CONCLUSIONI

La modalità di lavoro descritta in questo contributo è diventata caratterizzante per le classi quarte e quinte dopo la didattica a distanza e consiste nel coinvolgere gli studenti, a piccoli gruppi, nella preparazione e nella presentazione alla classe di approfondimenti legati al percorso disciplinare che riguarda l’introduzione allo studio di funzione e al calcolo infinitesimale. Questo tipo di attività si sono mostrate efficaci nel realizzare la centralità dello studente nel processo di apprendimento, rendendolo protagonista e responsabile del suo percorso formativo. Inoltre si evidenzia un ruolo attivo dello studente nella costruzione della conoscenza Matematica della classe che diventa una “comunità di ricerca”. Da sottolineare anche l’aspetto interdisciplinare delle attività proposte con Italiano, Storia ed Educazione Civica.

BIBLIOGRAFIA

- Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. (2012): *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della Matematica*, Springer, Milano
- Giusti, E. (2007): *Piccola storia del Calcolo Infinitesimale dall’Antichità al Novecento*, Il Giardino di Archimede, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa-Roma
- Prodi, G. ed Altri (2005): *Scoprire la Matematica*, Ghisetti e Corvi Editore, Milano
- Prodi, G. (1991): *Riflessioni sull’insegnamento dell’Analisi Matematica*, *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 43, A-B N. Kline, M. (1999): *Storia del pensiero Matematico*, Einaudi, Torino

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

Courant, R., Robbins, E. (2004): *Che cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino

D'Amore, B., Sbaragli, S. (2019): *La Matematica e la sua storia*, Edizioni Dedalo, Bari

Arrigo, G., D'Amore, B., Sbaragli, S. (2010): *Infiniti Infiniti*, Erickson, Trento

Abbot Abbot, E. (1966): *Flatlandia: racconto fantastico a più dimensioni*, Adelphi, Milano

Brecht, B. (1971): *Vita di Galileo*, Einaudi, Torino

Indicazioni Nazionali per i Licei,

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf, ultimo accesso 05/09/2023

Linee Guida per gli Istituti Tecnici,

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI.pdf, ultimo accesso 05/09/2023

Linee Guida per gli Istituti Professionali,

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/INDIC/_LINEE_GUIDA_PROFESSIONALI.pdf accesso 05/09/2023.

DIVA AL DIMA: UN TEACHING EXPERIMENT IN OTTICA TRU. L'ESPERIENZA DI UN INSEGNANTE

Simone Quartara*, Francesca Morselli, Elisabetta Robotti**, Alessandra Boscolo****

***I.I.S. Calvino, **DIMA Unige**

simonequartara@gmail.com

Abstract

In questo contributo esamineremo uno dei primi prodotti elaborati dalla comunità di ricerca-azione DIVA (Didattica Inclusione Valutazione (formativa) Argomentazione) al DIMA (Dipartimento di Matematica) di Genova. Verrà presentato come lo strumento teorico TRU, Teaching for Robust Understanding, è stato utilizzato, da un docente, interno alla comunità di ricerca, in risposta alle specifiche esigenze emerse nella sua pratica d'insegnamento, per progettare, monitorare ed analizzare un'unità didattica condotta in una classe prima di liceo scientifico. L'unità aveva come obiettivo di apprendimento lo sviluppo del pensiero algebrico accanto ad altri obiettivi specifici, in ottica inclusiva, uno per ciascuna delle dimensioni del TRU.

Parole-chiave

TRU, pratiche didattiche, symbol sense, valutazione formativa.

INTRODUZIONE

L'attività didattica oggetto di analisi in questo contributo è il primo esempio di teaching experiment elaborato dalla comunità di ricerca-azione DIVA (Didattica Inclusione Valutazione (formativa) Argomentazione) al DIMA di Genova costituitosi nel febbraio del 2023.

Il DIVA si configura come una comunità di indagine e ricerca (sviluppata a partire dall'idea di Jaworski, 2006) costituita da insegnanti e ricercatori coinvolti insieme in programmi di formazione e progetti di ricerca, che lavorano con un atteggiamento di critical alignment, sulla messa a punto e la creazione di strumenti che rispondono alle esigenze emergenti dalla riflessione sulla pratica.

Con il termine critical alignment si intende l'auspicabile processo attraverso il quale i membri di una comunità mettono in discussione norme e pratiche condivise, ponendosi domande ed analizzando tali pratiche in maniera critica con l'obiettivo di svilupparle e migliorarle, in contrasto al meccanismo di alignment mirato esclusivamente a preservare norme e aspettative di una comunità ed al perpetuarsi di pratiche condivise (Cusi & Robutti, 2017).

Questa pratica riflessiva, condotta dagli insegnanti, permette di sviluppare la consapevolezza e l'esplicitazione di approcci e processi di insegnamento per analizzarli in modo critico.

In accordo con quanto afferma Sfard (2005, pg. 408) - *"the first thing to stress is that the current rapprochement between the researcher and the teacher means, among others, that the impact is mutual rather than one-way: that is, there are cycles of research that observes practice, practice that feeds back and inspires new research and, eventually, research that returns to practice as a modifying agent"* - i principi che caratterizzano il gruppo, dove gli insegnanti sono membri del team di ricerca, si possono sintetizzare con: la ricerca a servizio della scuola e la scuola come stimolo per la ricerca.

L'ambizione è quindi duplice: sia rispetto all'attività di insegnamento che rispetto all'attività di ricerca. Rispetto all'attività di insegnamento, si auspica che la partecipazione alla comunità, permetta una crescita professionale e personale sfruttando le proprie esperienze, gli strumenti forniti dai ricercatori e le condivisioni con i colleghi. Rispetto alla ricerca, si auspica che le condivisioni portino alla creazione e messa a punto di strumenti teorici e proposte di attività che siano rispondenti alle necessità avvertite dal sistema scuola.

Quanto verrà proposto nel seguito è il primo prodotto di questo lavoro sinergico: una sequenza didattica concepita in risposta alle specifiche esigenze emerse dalla pratica d'insegnamento del docente coinvolto (il primo autore). L'unità di apprendimento aveva come obiettivo lo sviluppo del pensiero algebrico (Arcavi, 1994), accanto ad altri obiettivi specifici, in ottica inclusiva, uno per ciascuna delle dimensioni dello strumento teorico TRU (*Teaching for Robust Understanding*) (Schoenfeld, 2016).

QUADRO TEORICO

Lo strumento teorico adottato come framework all'interno del gruppo di ricerca ed azione ed in particolare per la sperimentazione oggetto di analisi è il TRU (Teaching for Robust Understanding) elaborato da Schoenfeld (2016). Il TRU fornisce una risposta, basata sulla ricerca, all'interrogativo: *quali sono le caratteristiche di un ambiente di apprendimento equo ed efficace, ambiente in cui tutti gli studenti sono supportati per diventare pensatori matematici, competenti, flessibili nei ragionamenti ed attivi?* Secondo il modello, la qualità di un ambiente di apprendimento dipende dalla possibilità di offrire opportunità agli studenti riguardanti cinque dimensioni: il contenuto matematico, il carico cognitivo, l'accesso equo ai contenuti, l'agency – ownership - identity e la valutazione formativa.

Per *contenuto matematico* si intende la dimensione relativa allo sviluppo di idee matematiche e alla costruzione di collegamenti significativi tra esse. Nel caso di studio l'obiettivo di apprendimento è da riferirsi allo sviluppo del pensiero algebrico, declinato da noi in termini di *symbol sense* (Arcavi, 1994). I comportamenti che, secondo Arcavi, possono caratterizzare lo sviluppo del *symbol sense* implicano: comprendere come e quando utilizzare i simboli per rappresentare relazioni, generalizzare, dimostrare; essere consapevoli che in alcuni casi è più conveniente abbandonare le manipolazioni a favore di altri approcci; affrontare la dialettica tra manipolazione ed interpretazione dei simboli; essere consapevoli della possibilità di creare espressioni simboliche; essere in grado di selezionare, ma anche di abbandonare o cambiare, una rappresentazione simbolica; essere consapevoli della necessità di verificare costantemente i significati dei simboli durante la risoluzione di un problema; essere consapevoli che i simboli possono svolgere ruoli diversi.

Il contenuto matematico, nel modello TRU, si presenta come la dimensione centrale, attorno alla quale si sviluppano le altre quattro dimensioni che vengono indicate per promuovere un apprendimento robusto della matematica.

La dimensione del *carico cognitivo* è legata al livello di difficoltà del compito che gli studenti sono invitati a svolgere in relazione alle loro conoscenze pregresse. L'obiettivo è quello di trovare un equilibrio nell'attività in modo che gli studenti riescano a costruire nuove conoscenze a partire da ciò che già padroneggiano, affrontando una "sfida produttiva".

L'*accesso equo ai contenuti* si concentra sulla questione di rendere equo l'accesso alle informazioni, a tutti e ciascuno degli studenti/studentesse della classe. In classe ci possono essere discussioni ricche od attività significative, ma tutti gli studenti partecipano a quelle discussioni od attività? La ricerca indica che gli insegnanti "efficaci" sono coloro che incoraggiano la partecipazione di tutti, progettando compiti ed attività che consentano a tutti di contribuire all'interno della classe.

L'*agency* è la dimensione che pone l'attenzione su quali opportunità hanno gli studenti di generare e condividere idee matematiche, sia in classe che in piccolo gruppo. L'aspetto cruciale riguarda la volontà di ciascuno studente di agire autonomamente e prendere decisioni sull'attività proposta, che deriva dalla percezione di proattività nell'affrontare il compito e dalla fiducia nel giungere ad una conclusione.

Infine, la *valutazione formativa* prevede l'orchestrazione di attività che permettano di osservare evidenze sull'evoluzione del livello di apprendimento degli studenti durante il percorso. Ciò consente agli insegnanti e agli studenti stessi di capire come stanno imparando, ed offre loro la possibilità di costruire i passi successivi dell'attività a partire proprio da questo.

PROGETTAZIONE

In fase di pianificazione si è scelto di considerare tutte le dimensioni del modello TRU, andando a selezionare, all'interno di ciascuna dimensione, specificare domande guida per pensare a lezioni efficaci:

- *in che modo vengono sviluppate le idee matematiche nella sequenza didattica?* (questione relativa alla dimensione matematica).
- *Quali opportunità hanno gli studenti per dare senso alle idee matematiche?* (questione relativa alla dimensione carico cognitivo).
- *Come aumentare, per ogni studente, la possibilità di partecipare in modo significativo?* (questione relativa alla dimensione accesso equo ai contenuti).
- *Quali opportunità hanno gli studenti per spiegare le proprie idee e valutare quelle dei compagni?* (questione relativa alla dimensione agency).
- *Che cosa sappiamo del pensiero matematico di ogni studente, e come possiamo costruirci sopra?* (questione relativa alla dimensione valutazione formativa).

Focalizzando dapprima l'attenzione sull'obiettivo relativo al contenuto matematico e, conseguentemente, a tutte le altre dimensioni, si è costruita la sequenza didattica oggetto di analisi, schematizzata in Figura 1., che ha previsto la sequenza di quattro fasi.

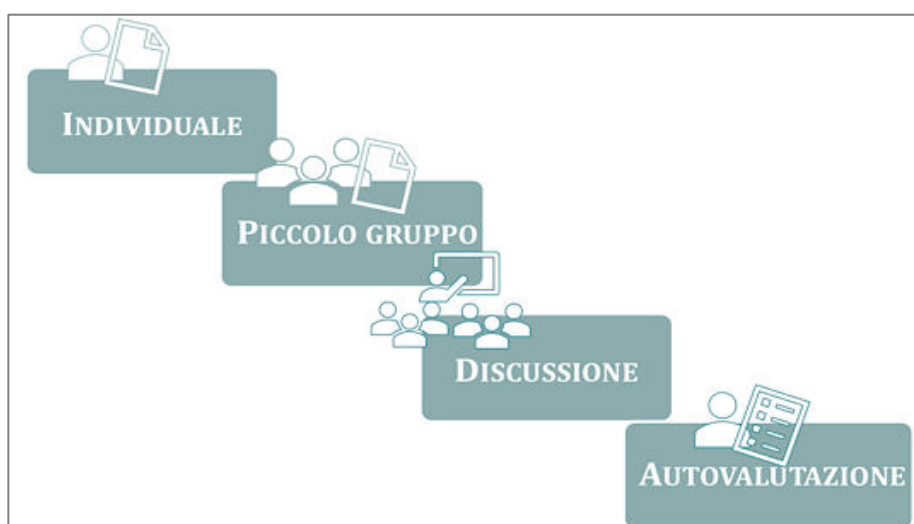


Figura 1. Schema di una sequenza didattica.

Come indicato nell'introduzione l'unità di apprendimento aveva come obiettivo lo sviluppo del pensiero algebrico sfruttando un'attività di problem solving su un quesito algebrico formulato a partire da un item Invalsi di grado 10.

Nella fase individuale, lo studente è stato coinvolto in un'esplorazione della situazione matematica tramite una scheda di lavoro, contenente esplicite richieste atte a sollecitare, oltre alle risposte, anche spiegazioni da condividere con il gruppo. Le scelte progettuali fatte in questa fase sono legate principalmente alla gestione del *carico cognitivo*, ossia volte a favorire la comprensione e il coinvolgimento in pratiche matematiche, e all'*accesso equo ai contenuti*, ossia volte a sostenere attivamente la partecipazione significativa di un ampio numero di studenti.

Per il lavoro in piccolo gruppo gli studenti sono stati organizzati in gruppi omogenei, questo per aumentare la possibilità, di partecipazione in modo significativo di ogni studente, e di vedere sé stesso

e gli altri come buoni pensatori matematici. Questa scelta, inoltre, ha permesso agli studenti di riflettere in termini di *agency*, ossia la capacità di prendere decisioni e di agire autonomamente.

La discussione è stata pensata per essere un momento di esposizione e condivisione delle congetture elaborate nei piccoli gruppi e successivamente come spazio di analisi critica da parte del gruppo classe sulle argomentazioni prodotte in termini di correttezza, chiarezza e completezza (Cusi, Morselli & Sabena, 2018), con l'obiettivo della costruzione di un linguaggio condiviso ed una cultura matematica di classe.

La sequenza didattica si è conclusa con un questionario di autovalutazione proposto tramite un modulo Google. Il questionario è stato pensato e realizzato con un duplice fine: per il docente/ricercatore con il fine di valutare l'efficacia del percorso in ordine alle cinque dimensioni del modello TRU, per lo studente con il fine di favorire una meta-riflessione sul proprio processo di apprendimento.

Per la costruzione delle schede di lavoro si sono scelte ed opportunamente modificate alcune domande INVALSI di grado 10. La selezione dei quesiti da utilizzare per la sperimentazione è avvenuta sfruttando il repository Gestinv (<https://www.gestinv.it/Index.aspx>).

Il quesito selezionato che ha caratterizzato le schede di lavoro della prima sequenza didattica è stato il D14 (G10, 2010). Per comprendere al meglio il lavoro svolto in fase di progettazione, la domanda verrà presentata nella versione originale – come proposto nelle rilevazioni standardizzate – e, successivamente, nella versione rivisitata – come proposto nell'attività.

La formulazione originale del quesito D14 è la seguente: *l'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?" Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri". Luisa afferma: "Si ottiene sempre un numero dispari". Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3". Chi ha ragione? A. Tutti e tre B. Solo Mario C. Solo Luisa D. Solo Giovanni.*

Per adattare il quesito agli obiettivi della sperimentazione si è scelto di presentarlo agli studenti in chiave più esplorativa, in particolare sono state create tre schede di lavoro. La prima costituita dal quesito: *se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$?* e dalla consegna: *dopo aver letto il quesito compi una prima esplorazione della situazione proposta. Si tratta di un primo approccio al problema per cui non sentirti costretto/ta a dover fornire una congettura definitiva.* Le richieste della scheda hanno lo scopo di sostenere gli studenti nella loro "sfida produttiva" al fine di favorire la comprensione e il coinvolgimento nell'attività matematica.

La seconda scheda, sempre da affrontare individualmente, propone il seguente quesito: *l'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?" Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri". Luisa afferma: "Si ottiene sempre un numero dispari". Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3", seguito dalla consegna: *facendo seguito alla tua esplorazione iniziale del problema e avendo letto le affermazioni di Mario, Luisa e Giovanni discuti, motivando la scelta, il valore di verità delle tre affermazioni.* Si tratta di una scheda che conduce tutti gli studenti a valutare le diverse congetture a partire dalle loro idee e ragionamenti iniziali.*

La terza scheda presenta il quesito D14 nella forma originale seguito dalla consegna: *"Scrivi qual è la soluzione scelta dal gruppo, specifica il motivo di tale scelta e spiega perché sono state scartate le altre opzioni".* In questa fase gli studenti sono chiamati a proporre e mettere in discussione le proprie risposte con i componenti del gruppo per contribuire alla costruzione della congettura di gruppo da condividere con la classe.

Raccolti tutti i protocolli dei gruppi si è passati alla fase di discussione. Dapprima si sono proiettate le soluzioni alla lavagna per essere presentate dai gruppi e per essere vagliate dalla classe in termini di correttezza. In seconda battuta, docente e studenti, si sono confrontati sugli aspetti legati alla completezza delle proposte e alla loro chiarezza.

ANALISI DELLA SPERIMENTAZIONE

Come si può evincere da quanto descritto in precedenza, le cinque dimensioni del modello TRU possono essere anche uno strumento di osservazione e riflessione sul proprio insegnamento con l'obiettivo di pianificare un'attività didattica, ma anche di valutarne l'efficacia.

In questo senso nel seguito proporremo alcune risposte degli studenti al questionario finale di autovalutazione. Lo scopo è quello, tramite la voce dei protagonisti della sperimentazione, di andare a ricercare evidenze di successo o di criticità dell'attività rispetto alle dimensioni del TRU in riferimento alle domande guida ad esse correlate proposte all'inizio del paragrafo.

La domanda guida - *in che modo vengono sviluppate le idee matematiche nella sequenza didattica?* - relativa alla dimensione *matematica*, è stata riformulata all'interno del questionario di autovalutazione in questo modo: *“L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ci ha aiutato?”*.

Esempi di risposte a questa domanda sono quella di DAN, che afferma: *“L'uso dell'algebra mi ha aiutato a generalizzare parti che se no avrebbero necessitato di infiniti esempi”*, e quella di FED, che scrive: *“Ho imparato di più a capire l'algebra e gli oggetti che avevo davanti. Infatti, ho imparato (con molta più consapevolezza di prima) che per esempio $n(n-1)$ verrà sempre un numero pari perché se si moltiplica un numero dispari per uno pari verrà sempre pari. L'unica difficoltà in questo lavoro è capire il ragionamento degli altri.”*

Tra le righe si evince anche un riferimento alla criticità relativa alla dimensione del carico cognitivo (domanda guida: *quali opportunità hanno gli studenti per dare senso alle idee matematiche?*), legato a momenti di difficoltà nel comprendere i ragionamenti dei compagni.

Questo aspetto si ritrova in alcune risposte degli studenti alla domanda del questionario di autovalutazione: *“Fai riferimento al Modulo 2. Che effetto ti ha fatto e che cosa ti ha dato analizzare le risposte all'esercizio, in cui venivano analizzate le affermazioni relative a $n(n-1)$, date da un gruppo diverso dal tuo?”*. Per esempio FIL scrive: *“Sicuramente è difficile comprendere al volo il metodo risolutivo di un gruppo, anche perché entrare nella testa dei compagni non è mai facile. Certe volte dei processi risolutivi adottati da altri gruppi mi facevano pensare ad altri processi risolutivi magari più chiari e completi che avremmo potuto usare, inoltre scelgo se immagazzinare i metodi adottati da altri gruppi per a mia volta usarli in futuro o se non immagazzinarli.”* In quest'ultima affermazione si possono anche osservare aspetti legati alle dimensioni di *accesso equo ai contenuti* e all'*agency*: infatti, la partecipazione attiva ha permesso agli studenti di condividere e spiegare le proprie idee e valutare quelle dei compagni.

Un altro feedback alla domanda è quello di IGO, che risponde: *“Inizialmente ho un po' faticato a cercare di capire cosa i miei compagni volessero intendere poiché dovevo cercare di capire il loro punto di vista. È stato comunque un lavoro particolarmente interessante perché mi sono sentita come un insegnante che analizza i compiti.”*

La domanda del questionario: *“Quali analogie e quali differenze hai notato, nel modo di lavorare durante le lezioni del venerdì, rispetto al modo usuale di procedere durante lezioni di matematica?”* aveva lo scopo di raccogliere feedback sull'effetto delle modalità del lavoro che avevano l'obiettivo di aumentare la possibilità di partecipare in modo significativo e permettere agli studenti di spiegare le proprie idee. A tal proposito, GIO scrive: *“Ho notato una maggiore condivisione delle proprie idee risolutive perché, il prof invece di chiedere chi aveva avuto determinate idee ha messo a confronto ogni ragionamento (poiché glieli avevamo consegnati) lasciando ancora di più la parola a noi. Sono riuscita sia ad esprimere il mio ragionamento sia i dubbi che avevo, per questo motivo i miei compagni mi sono stati di aiuto”*.

Aspetti legati al lavoro di gruppo, come elemento di novità, sono condivisi da MAT: *“La differenza principale è che, dopo una prima visione del problema dato, si fanno dei piccoli gruppi, la seconda differenza secondo me è che, si parla del lavoro del gruppo e non del singolo lavoro, come per esempio, facciamo nelle normali lezioni di matematica”* e da NIC: *“Una delle differenze, è che ci siamo divisi a gruppi per poi esporre la idea di gruppo, un'altra differenza, ognuno di noi, tramite un Google moduli ha potuto dire cosa funzionava oppure no sul lavoro degli altri”*.

Riferimenti agli effetti della modalità di lavoro si possono evincere anche dalle risposte di FED: *“Penso che ultimamente le lezioni del venerdì siano più interessanti, perché sono i momenti in cui mettiamo insieme tutte le nostre idee nel modo migliore, inoltre mi piace lavorare nei piccoli gruppi per risolvere un quesito insieme.”* e di SIM, che evidenzia anche le analogie con le usuali lezioni di matematica: *“Le differenze più grosse sono il lavorare in piccoli gruppi dove bisogna saper ascoltare gli altri. Invece di uguale c'è il fatto che alla fine si fa una lezione con tutta la classe, ognuno espone i suoi dubbi e sicuramente c'è qualcuno che riesce a farglieli passare, questo secondo me è la cosa più bella oltre che la più analoga.”*

Queste risposte sono solo alcuni dei feedback raccolti con l'analisi a posteriori delle risposte al questionario di autovalutazione. In generale si evince come l'attività abbia promosso collegamenti significativi tra procedure, concetti e contesti dando l'opportunità di coinvolgimento in pratiche fondamentali come l'argomentazione e il problem solving.

Gli studenti hanno potuto spiegare le loro idee e ragionamenti con estrema libertà e nessuna remora poiché era chiaro a tutti che commettere errori è inevitabile in attività matematiche significative. Inizi promettenti, ma anche mancate comprensioni sono stati riconosciuti come contributi essenziali per la costruzione di significati condivisi che abbiano la caratteristica di essere stabili nel tempo.

CONCLUSIONI

Il contributo ha avuto come oggetto di analisi uno dei primi prodotti elaborati dalla comunità di ricerca-azione DIVA (Didattica Inclusione Valutazione (formativa) Argomentazione) al DIMA (Dipartimento di Matematica) dell'Università di Genova. Si è potuto esaminare come lo strumento teorico TRU è stato utilizzato per progettare, monitorare ed analizzare un'unità didattica sullo sviluppo del pensiero algebrico, condotta in una classe prima di liceo scientifico.

L'uso del modello TRU ha messo in luce come le cinque dimensioni che lo caratterizzano (il *contenuto matematico*, il *carico cognitivo*, l'*accesso equo ai contenuti*, l'*agency*, *ownership*, *identity* e la *valutazione formativa*) sono inevitabilmente intrecciate poiché decompongono un processo complesso come è quello di insegnamento-apprendimento.

Avere a disposizione strumenti per condurre un'analisi più raffinata delle situazioni di apprendimento è risultato importante perché ha consentito in primo luogo di dare dei feedback più dettagliati, precisi e quindi significativi agli studenti, ma ha anche permesso di pianificare in maniera più analitica l'intervento didattico, le singole attività e l'ambiente di apprendimento ed infine ha permesso al docente coinvolto di riflettere in maniera critica sulle proprie strategie di insegnamento e quindi di esplicitarne le caratteristiche.

L'uso dei protocolli degli studenti, dei questionari di autovalutazione, dei video delle discussioni di classe e il confronto con le ricercatrici presenti alla sperimentazione ha permesso l'analisi a posteriori delle sequenze didattiche.

Questo lavoro di indagine a posteriori ha evidenziato l'efficacia di essersi posti a priori domande guida per pensare alla realizzazione delle attività, ma ha anche fatto emergere elementi di criticità relativi, per esempio, alla dimensione del carico cognitivo, legati a momenti di difficoltà nel comprendere i ragionamenti dei compagni nel piccolo gruppo oppure nella gestione della discussione di classe che in alcune occasioni ha portato a momenti di blocco o al parziale coinvolgimento degli studenti.

L'esperienza presentata può essere esemplificativa del lavoro di crescita formativa e di ricaduta sulle pratiche d'insegnamento che è possibile svolgere all'interno di una comunità di ricerca che si pone in continuità tra ricerca e prassi scolastica. Il confronto con tutti i membri della comunità di ricerca (insegnanti e ricercatori) permette la messa in discussione di norme e pratiche. Questo aspetto ha una ricaduta positiva sullo sviluppo professionale del docente che è chiamato a porsi domande in maniera critica con l'obiettivo di sviluppare e migliorare approcci e processi per poter creare ambienti di apprendimento efficaci.

BIBLIOGRAFIA

- Arcavi, A. (1994) Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Cusi, A., Morselli, F., e Sabena, C. (2018). Promuovere strategie di valutazione formativa in Matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, Vol. 9, n. 14/2017, 91-107.
- Cusi, A., & Robutti, O. (2017). La collaborazione per rendere i docenti protagonisti della propria formazione: esempi dall'Italia e dal mondo. In L. Giacardi, M. Mosca & C. Sabena (eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017* (pp.231-248). L'Artistica Editrice.
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9 (2), pp. 187-211.
- Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from <http://map.mathshell.org/trumath.php>.
- Sfard, A. (2005). What Could be More Practical than Good Research?. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 393–413.

PEER TUTORING “INVERSO”: COINVOLGERE E RENDERE PROTAGONISTI ATTIVI GLI STUDENTI PIÙ FRAGILI

Tallone Chiara⁽¹⁾, Carrino Stefania⁽¹⁾, Cavallera Laura⁽²⁾

⁽¹⁾ IIS “Virginio-Donadio”, Cuneo, ⁽²⁾ IIS “Denina-Pellico-Rivoira” Saluzzo (CN)

matepraticamente.info@gmail.com

Abstract

Nel periodo post pandemia si evidenziano negli allievi difficoltà relazionali, personali e disciplinari. Per questo motivo, durante l’a.s. 22/23, il progetto “Matepraticamente - 2° grado” ha scelto come destinatari gli studenti del primo biennio che presentavano maggiori fragilità. L’obiettivo, in linea con gli anni precedenti, è stato quello di favorire un rapporto positivo con la matematica attraverso un percorso laboratoriale pomeridiano. In questo articolo si analizza la ricaduta che tale progetto ha avuto sulle attività curriculari di statistica e probabilità in una classe seconda dell’ITA “Virginio-Donadio” di Cuneo. Gli studenti più fragili, dopo aver partecipato al progetto pomeridiano “Matepraticamente”, hanno svolto il ruolo di tutor per i propri compagni di classe, proponendo alcune delle attività laboratoriali svolte nell’ambito di “Dati e previsioni”. Nelle varie fasi dell’unità didattica, comprese quelle valutative, sono stati introdotti alcuni compiti di realtà. Vengono qui descritti gli stadi di tale percorso, ponendo l’attenzione sulle metodologie impiegate. L’obiettivo è quello di fornire un esempio concreto per una maggiore inclusione di tutti i soggetti del gruppo classe e contrastare la dispersione scolastica.

Parole-chiave

Peer tutoring - autoefficacia - probabilità e statistica - compito di realtà - educazione civica

INTRODUZIONE AL PERCORSO

Laboratori pomeridiani “Matepraticamente”

Matepraticamente è un progetto del Dipartimento di Matematica “Peano” dell’Università di Torino, portato avanti da un gruppo di docenti delle scuole secondarie e laureandi in matematica, che propone attività didattiche laboratoriali e inclusive per le scuole piemontesi dal 2014 ad oggi. Il progetto negli anni ha cambiato forma: da percorso *in presenza* svolto nelle palestre delle scuole ospitanti (Tallone et al., 2017), alle edizioni *a distanza* durante l’epoca della pandemia (Tallone et al., 2021), fino ad arrivare all’a.s. 22/23 in cui si è proposto il progetto in una *nuova forma*. In quest’ultima si è tenuto conto di evoluzioni e arricchimenti degli anni precedenti, mantenendo l’obiettivo di coinvolgere e motivare gli allievi nell’approccio alla matematica. La nuova proposta è stata rivolta sia a studenti con difficoltà o scarsa motivazione, per favorire un rapporto più sereno con la disciplina, sia a docenti interessati ad approcciarsi in modo differente alla didattica della matematica.

Il percorso, aperto a tutte le scuole secondarie cuneesi, si è svolto presso i locali dell’Istituto Tecnico Agrario “Virginio” di Cuneo, da gennaio a marzo 2023, in due cicli di quattro incontri pomeridiani, uno per le classi prime e l’altro per le seconde. La proposta si è articolata in workshop dedicati ad un singolo nucleo della matematica (Numeri, Spazio e Figure, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni), proponendo per ogni ambito attività didattiche con le TIC, laboratori con materiali poveri e attività miste.

Attività curricolare in classe

Gli studenti che hanno partecipato al progetto pomeridiano, in un secondo momento, sono stati coinvolti nell’attività curricolare come *tutor* dei compagni di classe non partecipanti all’edizione di Matepraticamente.

Gli alunni scelti come *tutor* presentavano fragilità di vario tipo: personali, motivazionali e disciplinari in matematica. Ciò ha consentito un'inversione dei ruoli e delle dinamiche abitualmente presenti in classe.

Questa sperimentazione ha coinvolto una classe seconda dell'Istituto Tecnico Agrario dell'IIS "Virginio-Donadio" di Cuneo con la docente curricolare Tallone Chiara e la sua tutor per l'anno di prova per il ruolo Carrino Stefania, entrambe membri del gruppo di lavoro di Matepraticamente. Gli studenti più fragili hanno assunto il ruolo di *tutor* nelle varie fasi in cui si è articolato il percorso di classe su Statistica e Probabilità, riproponendo alcune attività del workshop pomeridiano su Dati e Previsioni a cui hanno preso parte. Si è creato così un *peer tutoring inverso* all'interno di un percorso completo che analizzeremo nel dettaglio nelle seguenti parti dell'articolo.

PERCORSO LABORATORIALE DI DATI E PREVISIONI

Il percorso curricolare si è articolato in 13 ore da fine marzo a inizio maggio dell'a.s. 22/23, con diverse modalità, tra cui attività laboratoriali riprese dal progetto Matepraticamente, lezioni dialogate, esercizi a piccoli gruppi, discussioni collettive e un compito di realtà proposto come verifica finale (si veda Figura 1).

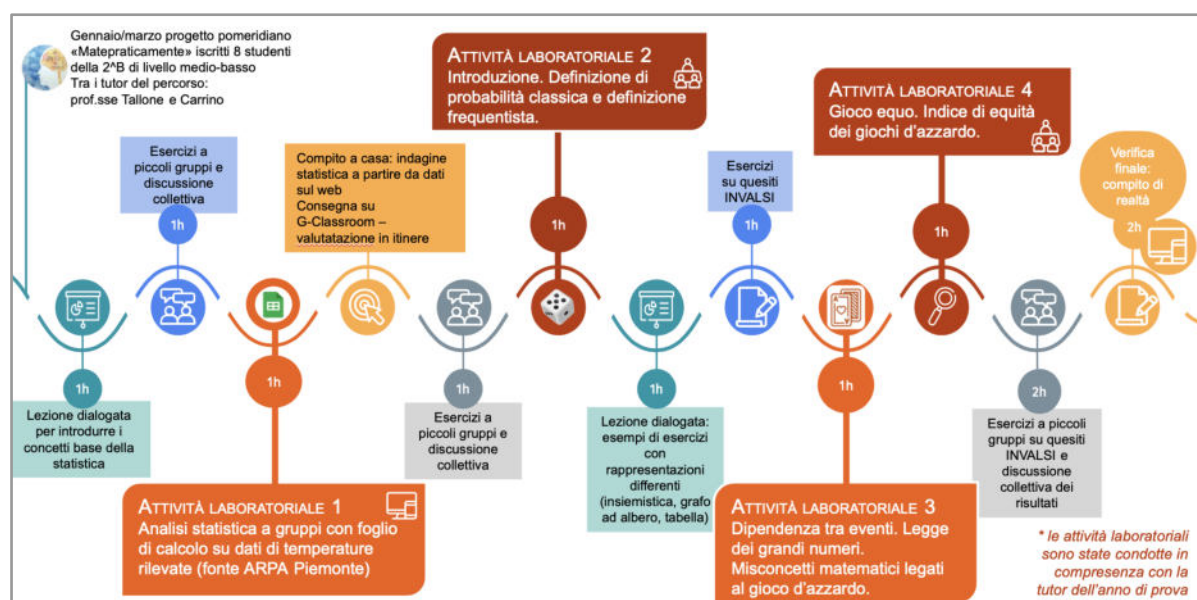


Figura 1. Attività curricolare in classe. Percorso per introdurre statistica e probabilità.

Contesto classe

La classe coinvolta nella sperimentazione era composta da 20 studenti, di cui 2 con BES, 2 con BES e con sostegno, 2 con DSA. In essa erano presenti alcuni allievi con un'elevata motivazione nei confronti della disciplina e un alto livello di rendimento e 8 tra gli studenti più fragili hanno partecipato agli incontri pomeridiani di Matepraticamente.

Il gruppo era quindi eterogeneo per abilità, potenzialità e partecipazione. A livello globale, durante l'intero anno scolastico, è stato necessario consolidare le competenze disciplinari e trasversali imprescindibili per affrontare le classi successive, con la proposta di attività più pratiche, molto apprezzate dagli studenti.

L'obiettivo del percorso, oggetto di questo articolo, è stato quello di coinvolgere attivamente gli alunni che erano soliti porsi ai margini e delegare interventi e discussioni ai compagni più capaci e intraprendenti. Si è quindi deciso di affidare il ruolo di *tutor* agli studenti di livello medio-basso che hanno partecipato a Matepraticamente, per aiutarli a sperimentare situazioni di *successo* e incrementare la loro *autoefficacia*.

Nelle quattro attività laboratoriali del percorso curricolare la classe è stata suddivisa a gruppi, con almeno un *tutor* ciascuno. Gli studenti *tutor* sono stati coinvolti dalle insegnanti nelle varie fasi, sia a livello collettivo sia all'interno dei gruppi, per introdurre le consegne, per fare riepiloghi, per la gestione del tempo e per la risoluzione di eventuali problematiche.

Fasi delle attività laboratoriali

Per agevolare il lettore nella comprensione del percorso in *Figura 1* e per la sua eventuale riproduzione o riadattamento in altri contesti, in questa sezione si riepilogano le fasi dei 4 laboratori proposti tralasciando le altre parti svolte con l'approccio più classico del libro di testo. Nelle tabelle sottostanti sono riportate nel dettaglio le diverse metodologie e gli intrecci tra nodi concettuali e attività pratiche.

Il filo conduttore nella progettazione è stato quello di ricreare il *Laboratorio di matematica* (UMI, 2003).

Si sono alternati momenti *esplorativi* e di *problem solving* in piccoli gruppi, a successive fasi di discussioni collettive per confronti in itinere e per l'istituzionalizzazione dei risultati ottenuti.

Inizialmente sono stati introdotti in classe i concetti base della statistica mediante una lezione dialogata, a partire dalle conoscenze pregresse degli studenti, seguita da un'esercitazione a gruppi con discussione finale. Si è poi proposta la prima attività laboratoriale, descritta schematicamente in *Tabella 1*. Gli allievi, suddivisi in gruppi con almeno uno studente *tutor*, hanno svolto un'analisi statistica delle temperature rilevate dall'ARPA Piemonte mediante il *foglio di calcolo*. In questo modo è stato possibile contestualizzare il significato reale degli *indici statistici* e le *differenti rappresentazioni*.

Tabella 1. Fasi dell'attività laboratoriale 1.

Fase 1	Attività su <i>foglio di calcolo</i> : calcolare gli indici statistici su un set di dati (evoluzione delle temperature nelle province piemontesi negli anni). Ciascun gruppo lavora su un file Google Fogli su cartella condivisa con la classe in Google Drive.
Fase 2	<i>Discussione collettiva dei risultati</i> guidata dall'insegnante. Constatazione dell'innalzamento delle temperature, interpretazione degli indici nel contesto e significato (sbalzi di temperatura, provincia più fredda, ...).
Fase 3	Attività su <i>foglio di calcolo</i> a gruppi: <i>rappresentare i dati</i> graficamente.
Fase 4	<i>Discussione collettiva dei risultati</i> guidata dall'insegnante e <i>istituzionalizzazione</i> dei concetti. "Qual è la <i>percezione</i> variando l'intervallo di rappresentazione?" Attenzione ai grafici sui giornali e sui social. "Quali previsioni possiamo fare per il futuro a partire dalla linea di tendenza?"
Fase 5	Compito a casa: <i>caccia all'errore</i> in alcuni grafici di giornali e siti web. Valutazione in itinere dei lavori.

Nella seconda parte del percorso, più corposa, il focus è stato la probabilità: i concetti sono stati introdotti ed esplorati in modo pratico proprio a partire dalle attività laboratoriali (descritte nelle *Tabelle 2, 3, 4*) e successivamente formalizzati e applicati in contesti ed esercizi differenti.

Tabella 2. Fasi dell'attività laboratoriale 2. Diverse definizioni di probabilità: soggettiva, classica e frequentista.

Fase 1	<i>Attività introduttiva</i> : evento probabile, improbabile, impossibile, certo. Valutazione <i>soggettiva</i> a piccoli gruppi di alcune affermazioni proiettate alla digital-board.
Fase 2	<i>Discussione collettiva</i> riguardo la fase 1, esempi e confronto di probabilità molto piccole (vincita al SuperEnalotto, rapina in una tabaccheria → dal progetto Bet On Math del PoliMI).
Fase 3	Attività in piccoli gruppi: <i>laboratorio con i dadi</i> (con numero di facce differenti) per introdurre la definizione di probabilità classica e frequentista.
Fase 4	Discussione collettiva sui risultati e <i>istituzionalizzazione</i> dei concetti: definizioni di probabilità e introduzione intuitiva della legge dei grandi numeri.

Tabella 3. Fasi dell'attività laboratoriale 3. Dipendenza tra eventi, legge dei grandi numeri, misconcetti matematici legati al gioco d'azzardo.

Fase 1	<i>Riepilogo</i> dell'attività laboratoriale 2 da parte degli studenti tutor.
Fase 2	<i>Laboratorio con le carte</i> : differenza tra reimbussolamento o no. Lezione partecipata.
Fase 3	Fase di <i>istituzionalizzazione</i> : <i>dipendenza</i> tra eventi e esempi di <i>misconcetti</i> legati al gioco d'azzardo (→ dal progetto Bet On Math del PoliMI). Esempi di eventi e <i>rappresentazione</i> con diagramma ad albero.
Fase 4	Attività a piccoli <i>gruppi</i> : esercizi sul libro di testo stile <i>INVALSI</i> e risolvibili con una rappresentazione ad albero.
Fase 5	<i>Approfondimento</i> a casa: misconcetti legati al gioco d'azzardo.

Tabella 4. Fasi dell'attività laboratoriale 4. Gioco equo, indice di equità dei giochi d'azzardo.

Fase 0	<i>Video</i> sul gioco equo (di Matepraticamente) visualizzato come <i>compito</i> a casa.
Fase 1	Ripresa dei concetti del video: <i>definizione</i> di <i>gioco equo</i> , vantaggioso e svantaggioso.
Fase 2	<i>Laboratorio</i> a gruppi: crea un gioco equo!
Fase 3	<i>Discussione collettiva</i> dei risultati ottenuti nella fase 2.
Fase 4	Definizione di <i>indice di equità</i> ed esempi nei più comuni giochi d'azzardo
Fase 5	Attività a gruppi l'equità di 4 giochi proposti.

Nella realizzazione del percorso si è scelto di adottare diverse *metodologie* in modo da favorire e personalizzare l'apprendimento di tutti gli studenti della classe. Nello specifico si è prevista l'alternanza di cooperative learning, lezioni dialogate e discussioni matematiche gestite dagli studenti *tutor* con la supervisione delle docenti, intervenute soprattutto in fase di istituzionalizzazione dei saperi acquisiti. Il centro dell'azione didattica sono stati gli studenti che hanno appreso maggiormente nel confronto con i pari e che nelle diverse metodologie hanno potuto, con le loro caratteristiche personali, sentirsi protagonisti e partecipi.

A supporto delle varie metodologie sono stati utilizzati diversi *strumenti* al fine di agevolare il passaggio da un registro di rappresentazione all'altro e di concretizzare il più possibile gli argomenti trattati. Solitamente il punto di partenza sono stati materiali poveri di uso comune e familiari per gli allievi (come dadi, carte da gioco, ...) che rendessero accessibile l'approccio ai nuovi concetti, a cui è seguito l'impiego delle TIC e di software specifici. Si sono infatti sfruttate le Digital Board presenti nell'istituto e alcuni PC dei ragazzi per accedere a Google for Education (Classroom, Documenti, Fogli) e GeoGebra.

Peer tutoring “inverso”

Il *peer tutoring* è una modalità di apprendimento cooperativo nella quale un allievo più esperto, *tutor*, aiuta uno o più compagni, *tutees*, meno preparati in una specifica attività didattica. Solitamente il ruolo di tutor è ricoperto dagli studenti più competenti e più motivati che sono naturalmente portati a essere leader dei gruppi di lavoro.

L'*approccio cooperativo tra pari* nella didattica ha radici storiche antiche e nel corso dei secoli è stato variamente utilizzato perché presenta numerosi benefici relativi all'apprendimento. Nello specifico a

trarre giovamento dall'attività di peer tutoring non sono solo i *tutees* ma anche gli stessi *tutor*, in quanto per insegnare ad altri non occorre solamente padroneggiare bene i contenuti ma anche trovare modi di presentarli, proporre esempi e dimostrazioni in modo da renderli accessibili e fruibili. I *tutor*, inoltre, sono chiamati a comprendere la prospettiva dell'altro e a sviluppare delle competenze sociali e comunicative assieme ad una maggiore autostima, poiché l'efficacia nell'insegnare sostiene la fiducia in sé (Topping, 2000).

Il docente rende gli allievi i veri e propri *protagonisti* della lezione, assumendo il ruolo di progettista, supervisore e mediatore durante tutto il percorso didattico. Questo suo atteggiamento apparentemente marginale in realtà prevede la formazione ragionata dei gruppi di lavoro e un'attenta selezione di materiali e strumenti che rendano accessibili gli obiettivi dell'attività e che favoriscano la consapevolezza del processo di apprendimento.

Nel caso della sperimentazione didattica oggetto di questo articolo, parlando di *peer tutoring inverso* si intende un rovesciamento di ruoli in cui a fare da tutor sono alcuni allievi con difficoltà nella materia e con scarsa autostima. Questi studenti, di livello medio-basso, hanno partecipato al progetto extracurricolare Matepraticamente, in cui hanno potuto sperimentare attività pratiche accessibili in una situazione in cui tutti avessero le stesse possibilità di successo. Per far loro assumere il ruolo di *tutor* si è deciso, in fase di ideazione dell'intervento nell'intera classe, di riprendere le attività didattiche svolte nel workshop di Dati e Previsioni.

Durante il percorso curricolare, gli studenti *tutor*, resi protagonisti, hanno finalmente sperimentato una condizione di *vantaggio* rispetto al resto della classe, solitamente più competente. Si è stabilito infatti di affidare a loro la conduzione della maggior parte delle attività. La distanza tra il livello di padronanza dei *tutor*, mediatori dei medesimi processi già sperimentati, e quello dei compagni non partecipanti agli incontri pomeridiani ha costituito infatti la Zona di Sviluppo Prossimale (Vygotskij, 1978) di questi ultimi. Un coetaneo che propone una strategia di risoluzione di un compito o di un problema risulta spesso maggiormente efficace, in quanto offre modelli più semplici e più vicini ai pari, utilizzando un *linguaggio* più chiaro ed accessibile. Questa situazione permette anche di sviluppare in prima persona maggiore *fiducia* in se stessi e di accrescere la *motivazione*.

Invertendo i ruoli, quindi, a guidare il laboratorio e la discussione collettiva sono stati proprio quei discenti che solitamente si lasciavano trascinare o che risultavano meno propositivi e molto demotivati durante le lezioni di matematica per scarsa fiducia nei propri mezzi e capacità. Il controllo e la *supervisione* da parte della docente hanno permesso inoltre di incentivare e *incoraggiare* i ragazzi del gruppo classe, creando un *contesto collaborativo* ed un ambiente sereno che favorisse l'apprendimento di tutti.

I ragazzi di solito ricoprono il ruolo di *tutor* in modo spontaneo sia per caratteristiche individuali, di leadership e di competenze disciplinari consolidate, sia per un riconoscimento sociale all'interno del gruppo classe. La scelta di assegnare il compito di *tutor* agli studenti con maggiori difficoltà ha permesso di renderli interlocutori degni di credibilità agli occhi dei compagni più bravi, stimolando l'*interdipendenza positiva*, il *rispetto reciproco* e un *atteggiamento cooperativo*. In quest'ottica il *peer tutoring inverso*, facendo sperimentare il *successo* ai ragazzi più fragili, ha consentito un netto incremento dell'autoefficacia, dell'autostima e delle abilità relazionali e comunicative.

Il rinforzo positivo da parte dell'insegnante e dei compagni di classe è risultato un valore aggiunto a supporto della motivazione intrinseca e a discapito di un atteggiamento troppo spesso rinunciatario nei confronti della matematica. In un'ottica più ampia si ritiene che la proposta di attività di *peer tutoring inverso* all'interno del gruppo classe comporti dei vantaggi operativi e rappresenti un utile strumento contro la *dispersione scolastica*.

Compito di realtà

L'intera proposta, e il compito di realtà in particolare, ha mirato al potenziamento e allo sviluppo di diverse *competenze trasversali*. Si ritiene infatti che la motivazione e l'autoefficacia siano accresciute per alcuni e consolidate per altri, sia per quanto riguarda il percorso curricolare sia nel ruolo di cittadini attivi e consapevoli. I lavori a gruppi e il *peer tutoring inverso* hanno promosso attivamente, a livelli diversi, il pensiero laterale, specialmente nelle occasioni in cui si è reso necessario formulare *strategie*

risolutive e gestire lo stress di fronte a problematiche sia emotive individuali sia disciplinari. Sono stati sviluppati, inoltre, aspetti gestionali quali *team working* e *time management* per il rispetto delle consegne.

Le diverse fasi, riassunte in *Figura 1*, sono state occasione per un utilizzo consapevole degli strumenti informatici, avvalendosi di diversi applicativi e potenziando le competenze di cittadinanza digitale declinate nel DigComp 2.2 (2023). Nello specifico le attività proposte, compresa la prova di valutazione finale, hanno riguardato l'*Alfabetizzazione su informazioni e dati* (con particolare attenzione a *Valutare dati, informazioni e contenuti digitali, Gestire dati, informazioni e contenuti digitali*), *Comunicare e collaborare* (in particolare *Interagire con gli altri attraverso le tecnologie, Condividere informazioni attraverso le tecnologie digitali, Collaborare attraverso le tecnologie digitali*) e *Creazione di contenuti digitali* (in particolare *Sviluppare contenuti digitali, Integrare e rielaborare contenuti digitali*).

L'ultimo laboratorio sul gioco equo, descritto in *Tabella 4*, ha permesso di affrontare alcune tematiche inerenti l'*educazione civica* quali il gioco d'azzardo e la ludopatia.

Si ritiene, inoltre, che il percorso abbia anticipato e sia perfettamente aderente a quanto contenuto nelle Linee Guida per le STEM del 23 ottobre 2023, da cui, a titolo esplicativo, si possono citare le competenze potenziate nell'approccio integrato STEM (4C): *Critical thinking* (pensiero critico), *Communication* (comunicazione), *Collaboration* (collaborazione) e *Creativity* (creatività).

L'effettivo raggiungimento delle conoscenze ed abilità previste è stato verificato con una *prova di valutazione* articolata in due parti. La prima, di probabilità, ha richiesto di risolvere un problema ambientato in un caseificio¹⁸ ed è stata progettata, proposta e svolta su GeoGebra Classroom. La seconda parte, di statistica, ha invece previsto la stesura di un report su un aspetto scelto all'interno del 7° censimento ISTAT¹⁹ sull'agricoltura relativo al 2021, seguendo una serie di domande guida e compilando una "scheda studente"²⁰.

	Abilità e competenze	Livello di padronanza							
		Non raggiunto	punti	Base	punti	Intermedio	punti	Avanzato	punti
1) Attività laboratoriale in classe 20%	Si impegna nel portare a termine il lavoro	1		2		3-4		5	
	Lavoro a gruppi: comunica e interagisce con i compagni	1		2		3-4		5	
	Segue con attenzione	1		2		3-4		5	
	Partecipa e contribuisce attivamente e in modo costruttivo	1		2		3-4		5	
totale 1 =									/20
2) Lavoro a casa 10%	Organizza il lavoro in modo:	lavoro non consegnato 1		superficiale, con diversi errori 2		lineare e curato ma con qualche errore 3-4		organico, chiaro e originale 5	
	Sceglie l'approfondimento in modo:	lavoro non consegnato 1		superficiale 2		significativo ma essenziale 3-4		significativo, coerente e originale 5	
totale 2 =									/10
3) Compito di realità in aula informatica 70%	Conosce i concetti della disciplina e li applica nel contesto:	con gravi lacune 1-5		con alcune lacune 6-8		in modo generalmente corretto 9-12		correttamente 13-15	
	Risolve i problemi:	presentando gravi lacune e diverse difficoltà 1-5		in modo non autonomo e con errori nei calcoli 6-8		in modo autonomo ma con qualche errore 9-12		in modo autonomo e corretto 13-15	
	Ricerca i dati, li interpreta e li rielabora:	in modo errato 1-2		solo se guidato e con diversi errori 3-5		in modo autonomo, ma elementare e con alcuni errori 6-8		in modo ricco ed efficace 9-10	
	Usa il materiale a disposizione (web, Classroom e personale) in modo:	non autonomo 1		autonomo ma non critico 2		critico 3-4		del tutto consapevole 5	
	Usa gli strumenti TIC (foglio di calcolo, di testo) in modo:	non autonomo e con gravi errori 1-2		spesso errato 3-5		consapevole ma con alcuni errori 6-8		consapevole ed efficace 9-10	
	Comunica il proprio lavoro in modo:	incompleto, disorganico e non curato 1-5		incompleto 6-8		completo ma non sempre accurato 9-12		completo ed efficace 13-15	
totale 3 =									/70
tot1 + tot2 + tot3 =									/100 valutazione: /10

Figura 2. Griglia di valutazione del percorso di statistica e probabilità suddivisa in 3 parti: la prima per le attività laboratoriali in classe, la seconda per i compiti a casa, la terza per il compito di realtà svolto in aula informatica.

¹⁸ <https://www.geogebra.org/m/tfurpbhp>

¹⁹ <https://www.istat.it/it/archivio/274950>

²⁰ https://docs.google.com/document/d/1ujCuWIB_2pXRML8S3lQFlnVsgj-WAmwY/copy

La prova è stata creata ad hoc e costruita sulla base delle competenze che si è inteso perseguire, *coerenti con l'indirizzo di studi* dell'istituto tecnico agrario in cui è stata somministrata. Tale scelta è risultata funzionale all'accrescimento e consolidamento della motivazione allo studio di materie scientifiche in un curriculum tecnico. In particolare il percorso statistico ha arricchito il profilo di un perito agrario, considerata la necessità di interpretare relazioni tecniche redatte da Istituti quali l'Arpa.

CONCLUSIONI

Per la disamina dell'intero percorso è stata utilizzata una griglia di valutazione²¹ che tenesse conto, con percentuali diverse, di tutte le fasi (*Figura 2*). In essa sono stati considerati aspetti disciplinari come la conoscenza dei concetti, la rielaborazione dei dati e la risoluzione di problemi, ma anche le abilità trasversali già trattate precedentemente.

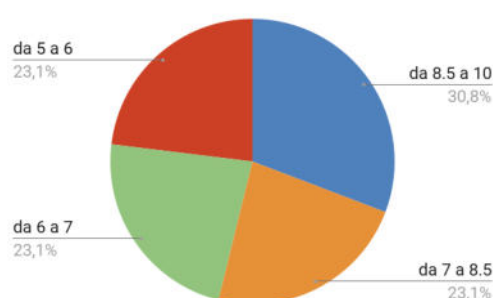


Figura 3. Valutazioni finali derivate dalla griglia di valutazione dell'intero percorso.

Gli esiti finali riportati in *Figura 3* denotano che la classe ha raggiunto dei risultati mediamente buoni. Soltanto il 20% degli studenti ha riportato un'insufficienza lieve, ma comunque superiore a 5, mentre per quasi un terzo le valutazioni risultano eccellenti, con esito maggiore di 8,5. Complessivamente il percorso proposto ha inciso sia sulla motivazione sia sulla conseguente valutazione. A questo proposito si segnala che nelle due fasce di voto più alte si sono collocati anche studenti che hanno svolto il ruolo di *tutor*, migliorando notevolmente il loro profitto. Ciò è stato possibile grazie alle diverse modalità utilizzate per la presentazione degli argomenti, facilitando la comprensione dei concetti.

L'elemento che emerge nel bilancio finale della sperimentazione proposta è un significativo incremento di autostima, autoefficacia e motivazione allo studio della matematica, determinante per studenti in età adolescenziale e alle prese con le difficoltà relazionali ingenerate dal lungo periodo Covid-19. Sul versante del benessere in classe e nelle interazioni tra pari la partecipazione attiva degli studenti più fragili ha portato ad un maggiore coinvolgimento di tutti e non solo di alcuni elementi trainanti.

Il percorso presentato si inserisce inoltre tra le proposte trasversali che affrontano tematiche di educazione civica: sono state infatti raggiunte competenze di cittadinanza attiva che più recentemente si sono aperte ad un utilizzo critico e consapevole delle tecnologie, come previsto dal DigComp 2.2.

Alla luce di tutte queste considerazioni, si ritiene che il percorso di statistica e probabilità presentato possa essere un buon riferimento per la progettazione di altre attività, attinenti a nuclei tematici differenti. In particolare, risulta utile incentivare il ricorso all'uso di dati reali *grezzi* provenienti da istituti di riferimento a livello nazionale, quali ISTAT o Arpa, come descritto anche nel workshop del convegno Di.Fi.Ma. 2023 intitolato "Matepraticamente post-pandemia: tra TIC e materiali poveri per una didattica più inclusiva". La somministrazione di compiti autentici, relativi a contesti reali, permette di strutturare percorsi significativi di *cittadinanza attiva e digitale*, favorendo lo sviluppo di molteplici competenze trasversali e rafforzando la motivazione, la cui carenza nel periodo attuale è spesso un ostacolo per la didattica.

²¹ <https://bit.ly/grigliavalutazionedifima>

Il contributo di questo articolo si inserisce tra le proposte che raggiungono buoni e solidi risultati a livello degli apprendimenti, anche grazie alla considerazione degli aspetti psicologici ed emotivi che sostengono la motivazione intrinseca degli studenti. Citando l'intervista alla prof.ssa Daniela Lucangeli (2020) "...se ci si concentra solamente sull'aspetto didattico o cognitivo si rischia di perdere di vista il legame forte tra emozioni e apprendimento, che possiamo far sperimentare proprio nei contesti scolastici ed educativi. Occorre dunque che gli adulti e gli insegnanti per primi si sentano protagonisti del cambiamento che vorremmo vedere tutti nella scuola, che si pongano come differenziali di sviluppo, veri e propri *potenziatori di funzione* pronti non a sostituire o a giudicare, ma ad accompagnare ogni persona in ciò che sta vivendo e di cui ha bisogno in questa particolare finestra evolutiva" e ancora "È necessario che ogni insegnante conosca bene le emozioni che *transitano* nell'apprendimento: ci si può occupare di apprendimento solo se si comprende la potenza della sincronicità fra le informazioni e le memorie emozionali".

BIBLIOGRAFIA

- Andrà, C., Parolini, N., Verani, M. (2016). *BetOnMath: Azzardo e matematica a scuola*. Springer.
- AAVV. UMI (2003), Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L. and Robutti O. (Eds.), *Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica (Scuola Primaria. Scuola Secondaria di primo grado)*. Matteoni stampatore.
- Bandura, A. (2000). *Autoefficacia: Teoria e applicazioni*. Edizioni Erickson.
- Bergamini, M., Barozzi, G., & Trifone, A. (2020). *Matematica multimediale.verde (Vol. 2)*, Bologna: Zanichelli.
- MIUR (2010). *Istituti tecnici. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento*. d.P.R. 15 marzo 2010. Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.
- Lucangeli, D. (2019). *Cinque lezioni leggere sull'emozione di apprendere*. Erickson.
- Lucangeli, D. (2020). *A mente accesa. Crescere e far crescere*. Mondadori.
- Lucangeli, D. (2022). *Il tempo del Noi. Giganti del pensiero che ci hanno indicato la via*. Mondadori.
- Martinez, M.E., & Comoglio, M. (1994). *Apprendere insegnando. Il "Peer tutoring": teoria, storia, ricerca, applicazione*. Istituto di Didattica, Roma.
- 2018/C 189/01. Raccomandazione del Consiglio, del 22 maggio 2018, relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (Testo rilevante ai fini del SEE.). (2018). *Gazzetta ufficiale*, C 189, 1–13. CELEX: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32018H0604(01))
- Tallone, C., Minisola, R., Olivero, F., and Raspitzu, M. (2017). *Matepraticamente: una palestra per la mente*. In L. Giacardi, M. Mosca, and C. Sabena (A cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017* (p. 265–284). L'artistica Editrice.
- Tallone, C., Alocco, I., Cavallera, L., Durando, C., Isoardi, G., Olivero, F., Raspitzu, M., & Zamboni, F. (2022). *Matepraticamente 2.0: laboratorio a distanza, da esigenza temporanea a risorsa innovativa*. In R. Bonino et al., *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza*. Torino, 11-12-13 ottobre 2021 - online (pp. 457–464). Collane@unito.it, <https://www.collane.unito.it/oa/items/show/105>.
- Topping K. (2000), *Tutoring*. UNESCO – INTERNATIONAL BUREAU OF EDUCATION. <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001254/125454e.pdf>
- Topping, K. (2014). *Tutoring - Nuova Edizione: L'insegnamento reciproco tra compagni*. Edizioni Centro Studi Erickson.
- Vygotskij, L. S. (1978). *Pensiero e linguaggio*. Laterza.

SITOGRAFIA

- Arpa Piemonte: <https://www.arpa.piemonte.it/>
- DigComp 2.2. Il Quadro delle Competenze Digitali per i Cittadini: https://www.ditals.com/wp-content/uploads/2023/04/DigComp-2_2-Italiano-marzo-2023.pdf

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

INVALSI: <https://www.invalsi.it/>

Istat: <https://www.istat.it/>

Riflessioni sul laboratorio di matematica, *Matematica per il cittadino* (UMI-CIIM):

<https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>

Le emozioni come fonte di apprendimento - Intervista a Daniela Lucangeli (2020)

<https://www.federica.eu/emozioni-come-fonte-apprendimento-intervista-daniela-lucangeli/>

A PIDAY 3D LUNCH

Andrea Centomo

Liceo “F. Corradini di Thiene”

andrea.centomo@liceocorradini.edu.it

Abstract

Il Pi-day è una celebrazione che, secondo Wikipedia, si tenne per la prima volta nel 1988 all’*Exploratorium* di San Francisco e per iniziativa del fisico statunitense Larry Shaw. Da allora questa festa si celebra anche in diverse scuole e nei modi più disparati, il 14 marzo di ogni anno. Muovendo da una riflessione sul menù di una colazione per un Pi-day lunch può scaturire una semplice proposta didattica per l’uso della stampante 3d al quarto anno del liceo delle Scienze Applicate?

Parole-chiave

Analisi Matematica, Curve, Superfici, Design, Stampa 3d.

Nel corso dell’anno scolastico l’insegnante ha a disposizione alcune date di cui poter approfittare per poter istruire qualche attività didattica alternativa che, volendo, può avere come obiettivo anche il rafforzamento della socializzazione all’interno della classe o di un gruppo classe, come potrebbe essere quello formato dai partecipanti ai giochi di matematica. Tra queste date vale la pena menzionare almeno:

- il FIB-DAY (giornata di Fibonacci) che cade il 23 novembre;
- l’E-DAY (giornata del numero di Nepero) che cade il 7 febbraio;
- il PI-DAY (giornata del Pigreco) che cade il 14 marzo.

Il rischio legato al festeggiamento di queste celebrazioni è che esse si riducano a momenti comunitari che impegnano debolmente sul piano intellettuale gli studenti più interessati alla matematica, risultando fondamentalmente di scarso interesse e poco coinvolgenti per gli altri. Se per far fronte alla prima criticità potrebbe essere sufficiente per l’insegnante, ad esempio, imbastire una piccola gara all’interno della celebrazione, più difficile appare il compito di coinvolgere nella progettazione e nella realizzazione dell’evento gli studenti meno interessati. Durante un PI-DAY lunch ho avuto modo di discutere di questo problema, cercando di focalizzare l’attenzione anche sui possibili utilizzi di una stampante 3d, ricevuta in dono dalla nostra scuola.

CANAPE’ A BASE CIRCOLARE

La scelta di un’*entrée* a base circolare per un PI-DAY lunch è senza dubbio scontata, quanto la scelta di introdurre le funzioni trigonometriche elementari, servendosi del circolo unitario di $\mathbb{R}^2$

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sono noti da tempo i limiti di questo approccio [1], che si fonda su un certo numero di assunzioni di cui non viene data alcuna dimostrazione. Prima fra tutte, ma certamente non l’unica, quella racchiusa nella seguente:

Proposizione 1. La lunghezza di S^1 è 2, dove π è un numero irrazionale.

Non ha tuttavia grande interesse per noi approfondire questa discussione, in quanto non è certo immaginabile di poter sviluppare nella scuola secondaria la trigonometria ricorrendo agli esponenziali

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia nel campo complesso o facendo leva su concetti troppo sofisticati, come quello di serie, che avrebbero l'effetto di oscurare del tutto un argomento notoriamente ostico per lo studente medio. Dunque, accettiamo l'idea che quest'ultimo sia stato persuaso del fatto che se P è un punto di $\mathcal{S}$ allora

$$P = (\cos \theta, \sin \theta)$$

dove θ è un numero reale, che esprime l'ampiezza in radianti di un opportuno angolo. Da ciò conseguono le usuali proprietà delle funzioni seno e coseno (limitatezza e periodicità²²), dal teorema di Pitagora si ha anche subito che

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

per ogni θ reale. A questo punto ci sarebbe qualche osservazione da fare che, per quanto ne sappiamo, non viene mai fatta nei libri di testo. $\mathcal{S}$, come il sostegno di una qualsiasi curva del piano euclideo $\mathbb{R}^2$, si può definire in due modi:

1. implicitamente, come luogo geometrico dei punti del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano l'equazione algebrica

$$x^2 + y^2 = 1$$

2. esplicitamente, come sostegno della curva

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

dove indichiamo con t il parametro per enfatizzare una sua possibile lettura in chiave Fisica, come tempo.

Se da una parte il silenzio dei libri di testo per la scuola secondaria sul secondo aspetto si giustifica per il fatto che esula dai curricula lo studio generale delle curve, dall'altra le parametrizzazioni di curve piane sono cruciali proprio per lo studio della Fisica. Sarà allora certamente di interesse analizzare, con l'uso di GeoGebra, che cosa succede quando un punto si muove nel piano con legge oraria

$$\gamma(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

per qualche fissato valore del parametro reale positivo ω e con $t \in [0, 2\pi]$ e far comprendere allo studente che se t si pensa come tempo, allora ω indica il modulo della velocità angolare in un moto circolare uniforme che ha per traiettoria $\mathcal{S}$. Se si utilizza il comando *Curva* (piana) di GeoGebra sarà poi possibile divertirsi un poco nell'esplorazione di curve che si ottengono dalla circonferenza con lievissime modifiche. Lo si può fare in una maniera che può apparire bizzarra, solo spostando il numero 2:

$$\gamma_1(t) = (2\cos t, \sin t) \quad \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin t)$$

$$\gamma_3(t) = (\cos t, 2\sin t) \quad \gamma_4(t) = (\cos t, \sin(2t))$$

²² A livello elementare la periodicità talvolta non viene introdotta in modo ineccepibile, in quanto non viene data enfasi al fatto che 2π è il minimo periodo strettamente positivo.

con $t \in [0, 2\pi]$. Per quanto riguarda le curve γ_1 e γ_3 non credo sarà complicato persuadere lo studente che, in entrambi i casi, il loro sostegno è un'ellisse. Anche comprendere che il sostegno di γ_2 è un segmento parabolico segue subito dal fatto che

$$(\cos(2t), \sin t) = (1 - 2\sin^2 t, \sin t).$$

Per quanto riguarda γ_4 si tratta invece di una curva di Lissajous. Si capisce che questa attività ludica di esplorazione delle curve non potrà trovare tantissimo spazio nel curriculum ma, come vedremo a breve, potrebbe trovare un'utile prosecuzione in forma laboratoriale. L'occasione da non perdere, soprattutto se si opera nel liceo delle Scienze Applicate, non è tanto quella di approfondire il tema curve, ma di volgere l'attenzione al loro impiego e, per fare questo, è sufficiente chiedersi: come sono stati ottenuti quei canapè a base circolare che sono stati serviti per antipasto? La risposta è che sono stati ottenuti tagliando del pane in cassetta con uno stampo di plastica e, cosa più importante, che questo stampo è assai facilmente riproducibile con una stampante 3d.

Per poter comprendere come realizzare lo stampo è però necessario transitare dal piano allo spazio. Un modo possibile per effettuare questo passaggio con GeoGebra potrebbe consistere nell'esplorare prima il comando Curva (nello spazio), studiando un segmento di elica cilindrica

$$\lambda: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \lambda(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$$

e giustificare l'attributo *cilindrica* analizzando con il comando Superficie la superficie

$$\sigma_c: [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, z) \mapsto (\cos t, \sin t, z)$$

che ha per sostegno la superficie laterale di un cilindro circolare retto di altezza $h > 0$.

Nota 2. Se nel passaggio dal piano cartesiano allo spazio cartesiano, all'interno di trattazioni che fanno leva su oggetti geometrici definiti implicitamente, è naturale muovere dalla circonferenza alla superficie di una sfera, se si ragiona sulle curve la transizione più naturale si ha tra circonferenza e cilindro.

MACCHERONI

Dopo i 3 canapè per ciascun commensale di antipasto, la colazione del PI-DAY lunch è proseguita con un generoso piatto di maccheroni. A seguito della pubblicazione nel 2011 del volume *Pasta by design* di George L. Legendre [2] è noto che una possibile parametrizzazione della sua superficie (vedi Figura 1) è data da:

$$\sigma(t, z) = \begin{cases} x(t, z) = 8\cos\left(\frac{t}{75}\pi\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{4t}{15}\pi\right) + 5\cos\left(\frac{z}{100}\pi\right) \\ y(t, z) = 8\sin\left(\frac{t}{75}\pi\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{4t}{15}\pi\right) + 4\sin\left(\frac{z}{100}\pi\right) \\ z(t, z) = \frac{6}{5}z \end{cases}$$

con $t \in [0, 150]$ e $z \in [0, 50]$.

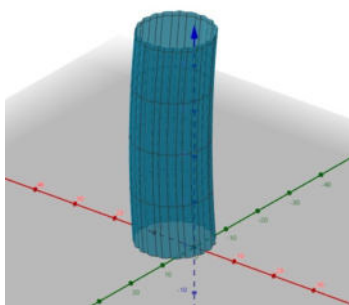


Figura 1. Superficie esterna di un maccherone

Non è difficile spiegare la logica che governa il design di questo formato di pasta. Infatti

$$\sigma_c(t,z) = \begin{cases} x(t,z) = 8 \cos\left(\frac{t}{75} \pi\right) \\ y(t,z) = 8 \sin\left(\frac{t}{75} \pi\right) \\ z(t,z) = \frac{6}{5} z \end{cases}$$

individua la superficie di un cilindro retto di raggio 8 e altezza 60. L'aggiunta di una piccola perturbazione di ampiezza $1/5$ ha l'effetto di rigare il cilindro, mentre l'ultimo addendo conferisce curvatura al cilindro. Si noti che il periodo del primo addendo è

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{75}} = 150$$

mentre il periodo del secondo addendo è

$$\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{15}} = \frac{15}{2}$$

e da questo si riesce a calcolare il numero di righe che caratterizza la rigatura (sono 20).

Nota 3. L'argomento precedente sarà proposto al mero scopo di suscitare la curiosità dello studente verso il campo del design della pasta, che ha ricevuto recentemente un certo impulso, non da ultimo anche per la possibilità di stampare la stessa in 3d²³, ma difficilmente si può immaginare di dedicare troppo spazio curriculare al tema della parametrizzazione delle superfici. A livello di scuola secondaria mancano infatti gli strumenti per studiarne approfonditamente le loro proprietà e questo si traduce in una limitazione delle capacità progettuali di nuovi formati di pasta. Accanto a questo va anche detto che le stampanti 3d per la pasta non sono ancora commercializzate e dunque l'unica cosa a cui lo studente potrebbe ambire sarebbe di vedere il suo progetto stampato con materiali non edibili.

²³ La startup Rhapsody blue produce per Barilla formati di pasta gourmet stampati in 3d.

BISCOTTI

La terza e la quarta cifra decimale di π sono rispettivamente 1 e 5 e, come noto, si ha subito che $1+5=6$. Dunque, il dessert con cui si è conclusa la colazione del PI-DAY lunch, era costituito da un piatto con sei piccoli biscotti cuoriformi, per accompagnare il caffè.

Il lettore troverà questa conclusione della colazione ancora una volta piuttosto banale: in verità una curva chiusa cuoriforme si può dividere in due curve i cui sostegni hanno una forma molto simile a un numero 3 e a un numero 1; inoltre $\pi \approx 3.1$. Tuttavia lo stampo utilizzato per creare i biscotti non era esattamente della forma desiderata. Proprio questo ha innescato una riflessione sulla questione degli stampi realizzati per strati a partire da una curva piana. Le forme che si trovano in commercio sono piuttosto stereotipate e, spesso, assai poco interessanti. Ecco allora l'idea di un progetto non utopico che potrebbe essere sviluppato didatticamente con gli studenti al quarto anno del liceo delle Scienze Applicate:

Progettare uno stampo per biscotti da stampare in 3d.

Una volta realizzati gli stampi si potranno creare dei biscotti da portare in varie occasioni: celebrazione del Piday, tè pomeridiani dopo gli allenamenti per le Olimpiadi di Matematica e via di seguito. Gli studenti hanno già visto l'esempio del cilindro circolare retto e per orientarli sarà sufficiente mostrare loro un nuovo esempio.

Un esempio con ChatGPT

Ci sarebbero molti esempi possibili di curve chiuse interessanti e utili per creare la base di uno stampo per biscotti. Volendo rimanere fermi alla forma cuoriforme e cercando uno spunto in una maniera che va di moda oggi un'idea potrebbe essere quella di interrogare un motore di intelligenza artificiale. Ho pensato allora di interrogare ChatGPT, chiedendogli di suggerire l'equazione di una curva cuoriforme ottenendo una valida risposta

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = (16\sin^3(t), 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t))$$

che ho un po' semplificato e adattato al mio gusto mutandola nella più semplice

$$\gamma_G: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = (6\sin^3(t), 6\cos(t) - 2\cos(2t) - \cos(3t))$$



Figura 2. Sostegno di γ_G

da cui si è ottenuta finalmente la superficie per creare lo stampo 3d di Figura 3.

$$\sigma_G: [0, 2\pi] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, z) \mapsto \sigma_G(t, z) = (6\sin^3(t), 6\cos(t) - 2\cos(2t) - \cos(3t), z)$$



Figura 3. Stampo 3d

Per stampare i biscotti, di cui si può vedere un esempio in Figura 4, è necessario ricoprire lo stampo di plastica con una pellicola per alimenti atossica.



Figura 4. Esempio di biscotto

BIBLIOGRAFIA

- [1] De Marco, G. (1996). *Analisi uno*, Zanichelli.
- [2] Legendre, G. L. (2011). *Pasta by Design*, Thames & Hudson.

IL PROGETTO “FLOWING WITH THE RIVERS”: FISICA (E NON SOLO) IN MODALITÀ OUTDOOR EDUCATION

Cristiano Giorda¹, Matteo Leone¹, Marta Rinaudo², Marina Serio², Marco Davide Tonon³

¹Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino

²Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Torino

³Dipartimento di Scienze della Terra, Università degli Studi di Torino

marta.rinaudo@unito.it

Abstract

L'outdoor education, come attivazione dei bambini e dei ragazzi partendo dalla conoscenza della realtà che li circonda, si è rilevata, durante e soprattutto dopo il periodo pandemico, come una pratica didattica fondamentale legata al paradigma ecologico e sostenibile. All'interno di questa cornice, si inserisce il progetto di Public Engagement “Flowing with the rivers” dell'Università di Torino. Il progetto ha l'obiettivo di sviluppare un modello alternativo di educazione al territorio, con carattere transdisciplinare e replicabile.

Parole-chiave

Outdoor education, laboratorio, territorio, fiumi transdisciplinarietà.

INTRODUZIONE

Il progetto nasce dall'idea di sviluppare forme attive e prevalentemente outdoor di educazione al territorio. Si rivolge prioritariamente a scuole e insegnanti di ogni ordine e grado, per estendersi ad alunni e famiglie e raggiungere infine le comunità attraversate. Le attività vedono coinvolte più figure (docenti, assegnisti e studenti laureandi) di diverse discipline scientifiche, provenienti da diversi dipartimenti dell'Università di Torino.

Per quanto riguarda l'area fisica, l'attenzione si è rivolta al concetto di misura in ambiente outdoor ed in particolare a misure di spazio, tempo e velocità. Le attività proposte negli incontri di formazione sono state la costruzione di orologi solari o ad acqua, stime della velocità del flusso del fiume attraverso misure di spazio e tempo, misure di altezze degli alberi con bastoni o ricorrendo all'osservazione di ombre.

IL PROGETTO

Il progetto ha come focus la didattica e la divulgazione basate sull'esperienza sensoriale e sul coinvolgimento della corporeità in un laboratorio legato ai luoghi e prevalentemente outdoor.

Le motivazioni che hanno portato all'avvio del progetto sono state:

- ripensare l'offerta educativa e formativa in un contesto pandemico e post-pandemico, per riappropriarsi della dimensione spaziale e corporea della conoscenza
- sperimentare moduli innovativi di educazione al territorio
- offrire al territorio un supporto di idee e di esperienze educative “localizzate”, rimodulate e adattate alle risorse, ai valori, al paesaggio e alle comunità locali, in un processo di riappropriazione sensoriale, cognitiva ed emozionale dei luoghi, di cura del territorio e di cittadinanza attiva e partecipata.

I territori coinvolti sono quelli localizzati tra i fiumi Maira, Mellea, Po e Banna e i siti legati al passaggio di corsi d'acqua. Inoltre sono stati coinvolti siti specifici presso Cavallermaggiore (CN) e Cambiano (TO), oltre che nell'area del Paleo-Po, che dalla zona di Carignano/Carmagnola si estende fino a sud della Collina di Torino attraverso l'Altopiano di Poirino. Le istituzioni coinvolte sono la sede universitaria di Savigliano, l'Ecomuseo dell'argilla MunLab di Cambiano e i comuni di Savigliano, Cavallermaggiore e Cambiano

Le attività sono state coordinate dal Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, in stretta collaborazione con i Dipartimenti di Scienze della Terra, Scienze della Vita e Biologia dei Sistemi, Lingue e Letterature Straniere e Culture Moderne, Chimica, Fisica e il Dipartimento Interateneo Scienze, Progetto e Politiche del Territorio. Sono state coinvolte diverse figure professionali quali docenti, assegnisti e studenti, con 10 progetti di tesi magistrale in Scienze della Formazione Primaria.

LA SPERIMENTAZIONE DI FISICA

Per quanto riguarda la disciplina fisica, l'attenzione si è rivolta al concetto di misura in ambiente outdoor ed in particolare a misure di spazio, tempo e velocità. La progettazione formativa ha richiesto la ricerca di esperimenti e attività in ambiente outdoor per lo svolgimento delle quali è sufficiente l'utilizzo di materiale povero e sovente reperibile nell'ambiente esterno (ad esempio bottiglie, foglie e bastoncini). In questo modo si garantisce la replicabilità delle esperienze da parte dei docenti con i propri studenti. L'attenzione è stata posta sulla procedura di misura (per fare riflettere sull'atto di misurare) e, là dove possibile, sull'analisi dei dati ambientali misurati.

Le prime misure hanno riguardato la lunghezza, in particolare la stima dell'altezza degli alberi con diverse tecniche. La più intuitiva, che permette di introdurre anche la tematica della luce, è la misura della lunghezza dell'ombra prodotta dall'albero con una serie di passi. Questa lunghezza però dipende dalla posizione del Sole e quindi è necessario valutare a che ora si può fare la misura. Si può ad esempio piantare un bastoncino in un piano di cartone appoggiato sul terreno. Al passare del tempo si disegna sul cartone l'ombra del bastoncino e la si misura: quando ha la stessa lunghezza del bastoncino, si può effettuare la misura della lunghezza dell'ombra dell'albero. Un altro problema sperimentale che si presenta in questa procedura è la definizione di "passo medio": i partecipanti hanno discusso su come valutarlo, convenendo di misurare con rondella metrica una distanza percorsa su un sentiero, dividendola per il numero di passi compiuti. Una procedura possibile è riportata presso il sito https://scoutwiki.scouts.org.za/wiki/Height_estimation.

In relazione alla misura del tempo e alla presenza dell'elemento fiume, si è proposta la costruzione e la taratura di un orologio ad acqua. L'orologio è costituito da una bottiglia di plastica tagliata a metà altezza. La parte superiore viene inserita capovolta nella metà inferiore (vedi Figura 1). Si pratica un foro nel tappo della bottiglia, si riempie la parte superiore e si registra il livello del liquido a intervalli di tempo regolari.



Figura 1. L'orologio ad acqua

L'attenzione alla misura del tempo si può affiancare allo studio della luce e alla formazione delle ombre tramite orologi solari e modellini di meridiane (Figura 2).

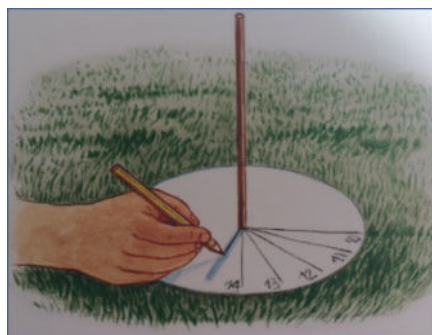


Figura 2. L'orologio solare

La relazione tra due variabili, spazio e tempo, diventa lo strumento per stimare una misura indiretta quale la velocità del flusso del fiume (Figura 3). I misuratori sono posti a distanza regolare lungo la riva del fiume e registrano il tempo impiegato da un legnetto, lanciato a monte, per raggiungere la loro postazione. Si possono quindi stimare la velocità media di transito e le velocità impiegate nei singoli tratti, per studiarne l'andamento. La realizzazione di questa attività ha richiesto di osservare e descrivere il moto reale dovuto a fondale irregolare, microvortici, presenza di ostacoli e resistenza al flusso del legnetto, che non ha forma geometricamente regolare. Questa fase di pre-sperimentazione è stata fondamentale per commentare criticamente i risultati ottenuti. Uno step successivo può essere la stima della portata, valutata come prodotto della sezione utile al flusso per la velocità media.



Figura 3. Esperimento per il calcolo della velocità di flusso in modalità outdoor

Si possono fare interessanti considerazioni geometriche su come valutare la sezione del flusso in relazione alla forma del letto del fiume (Figura 4): queste considerazioni richiedono una fase di misura della profondità del fiume in punti diversi per la determinazione del profilo, mediante l'uso di corde con nodi ad intervalli regolari o asta metrata.

Si è infine proposto ai docenti di considerare variabili termodinamiche e la loro variazione nel tempo evidenziando fenomeni di spicco, ad esempio, al variare delle stagioni. Oltre a costruire strumenti per la misura di queste variabili (anemometro, pluviometro, barometro, etc.), per le classi della secondaria di I grado si può fare riferimento ai database a libero accesso. Per esempio, sul sito dell'Arpa Piemonte (<https://www.arpa.piemonte.it/>) è possibile reperire livello idrometrico e portata giornalieri e annuali.

Questi dati possono essere scaricati e utilizzati per attività interdisciplinari di informatica al fine di realizzare i grafici e condurre analisi di base.

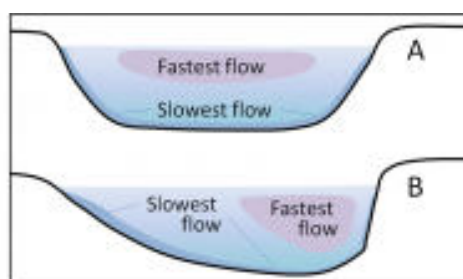


Figura 4. Profili del letto del fiume

Un altro tema affrontato all'interno del progetto è il galleggiamento. In particolare, uno dei progetti di tesi in Scienze della Formazione Primaria, sviluppati in ambito fisico, ha focalizzato l'attenzione sul tale fenomeno e sulle previsioni dei bambini in tal senso utilizzando elementi presenti in natura. Come applicazione di tali concetti, si è proposta la costruzione di una barchetta galleggiante dando loro a disposizione una serie di materiali tra cui scegliere per assemblarla in modo creativo.

LA FORMAZIONE DOCENTI

Il corso di formazione docenti si è strutturato, per ciascuna delle due sedi, in 4 ore in aula (con 2 incontri all'inizio e alla fine del percorso) e 12 ore suddivise in 3 uscite sul territorio. Sono stati previsti due gruppi composti rispettivamente da 23 e 32 insegnanti, uno per l'area di Savigliano (Bacino del Maira) e l'altro per l'area Cambiano (Bacino del Po e Paleo-Po). Al termine del corso di formazione è stata prevista un'attività di monitoraggio attraverso la somministrazione di un questionario anonimo per valutare la soddisfazione degli insegnanti al corso, verificare il raggiungimento degli obiettivi e capire eventuali ambiti di miglioramento. Il questionario, impostato sulla base della scala di Likert da 0 (completo disaccordo) a 5 (completo accordo), è stato compilato da 42 utenti. Si riportano alcune risposte significative, in particolare in Figura 5 l'accordo dei docenti in riferimento alla trasferibilità dei contenuti del corso di formazione e in Figura 6 il parere dei docenti sulle nuove metodologie presentate nel corso.

I risultati sulla trasferibilità evidenziano un accordo favorevole sul possibile utilizzo didattico delle attività proposte, con il 70% circa di valutazioni positive ed estremamente positive. Analogamente il 70% dei docenti ha ritenuto che il corso proposto favorisse l'apprendimento di nuove metodologie di lavoro.

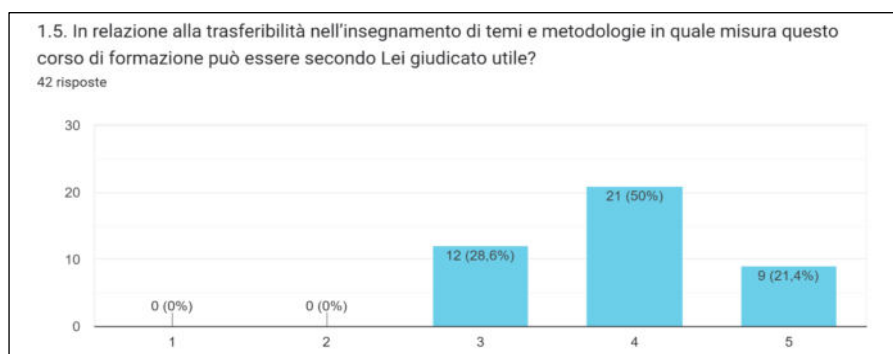


Figura 5. Domanda 1.5 del questionario docenti riferito alla trasferibilità dei contenuti del corso di formazione

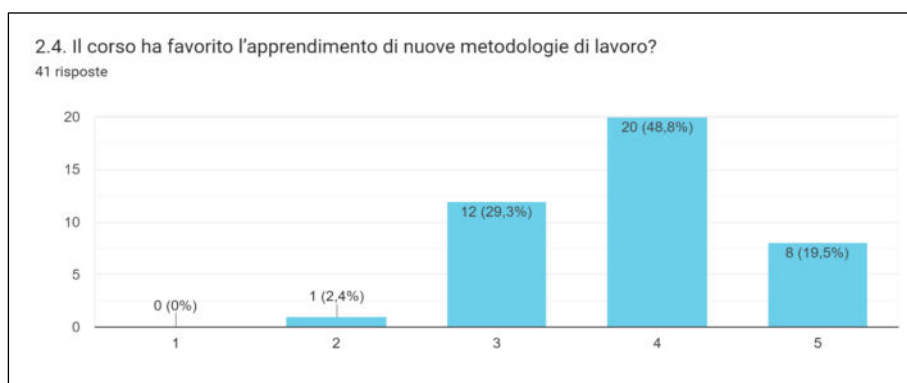


Figura 6. Domanda 2.4 del questionario docenti riferito alle metodologie presentate durante il corso

I PERCORSI NELLE SCUOLE

Complessivamente 55 docenti hanno partecipato al corso di formazione e in molti casi hanno coinvolto colleghi dell'istituto comprensivo di appartenenza per l'attuazione dei percorsi didattici nelle proprie sedi. Di conseguenza il totale di docenti che hanno svolto attività a scuola all'interno del progetto è di 88 soggetti, di cui 17 di scuola dell'infanzia, 51 di scuola primaria e 20 di scuola secondaria di I grado. Il totale di studenti coinvolti nel progetto è di 775 per i diversi gradi scolastici, riportati in dettaglio in Figura 7.

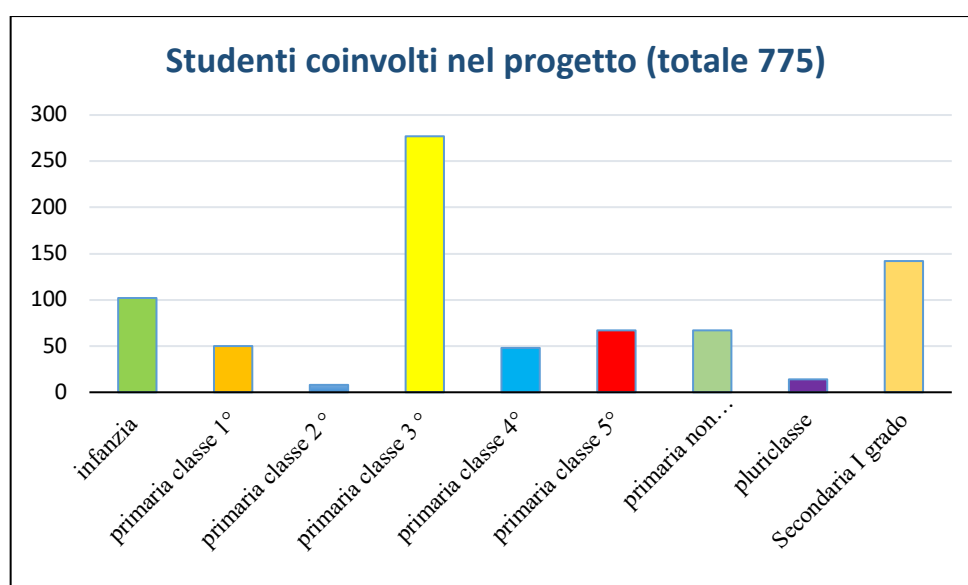


Figura 7. Distribuzione degli studenti coinvolti nel progetto per fascia di età

EVENTI ED INIZIATIVE

Al termine del progetto è stata programmata una camminata esplorativa aperta ai cittadini, con un percorso di 65 km che percorreva i luoghi toccati dai fiumi coinvolti nelle attività. È stata un'esperienza di trekking lungo i fiumi Maira, Po, Banna e resti del Paleo-Po, partendo dalla sede dell'Università di Savigliano venerdì 5 maggio per raggiungere il Munlab a Cambiano domenica 7 maggio. Il percorso è stato ricco di tappe ed esperienze e si sono potute incontrare le classi della scuola dell'infanzia e primaria che hanno partecipato al progetto e curato diverse installazioni. Un camminatore dice dell'evento: *“Oltre ad un percorso disegnato dalle coordinate GPS, per me è stato un viaggio a contatto con parti lontane di me. Il cammino svolto è stato un percorso immersivo a contatto con la materia che compone il*

paesaggio plasmato dall'incontro tra artificio e natura. Polline, ortiche, pioppi, campi, colori, forme, odori...Un cammino di condivisione, la voglia di impastare il proprio vissuto e le proprie conoscenze con quelle altrui."

E' stato inoltre organizzato nell'ottobre 2022 un picnic per le famiglie, percorrendo luoghi toccati dai fiumi e proponendo attività di osservazione durante il percorso.

Il progetto è stato coinvolto in eventi dell'Ateneo, quali:

- Notte dei ricercatori Unight 2022
- Un giorno all'Università (aprile 2023)
- Notte dei ricercatori Unight 2023

Per quanto riguarda l'evento del 2023 della Notte dei Ricercatori, il progetto è stato presente sia nella sede di Savigliano che in quella di Torino.

Presso la sede di Savigliano è stato proposto un laboratorio rivolto ai bambini per permettere loro di manipolare e utilizzare l'argilla per manufatti, accompagnando questa esperienza a un racconto sul fiume e il legame tra il fiume e il materiale in oggetto. Presso la sede di Torino si è allestito uno stand, inserito nel cluster "acque pulite", una delle sei aree tematiche dell'evento Unight. Nello stand è stato presentato il progetto e i docenti e volontari presenti hanno coinvolto la cittadinanza in esperimenti legati alle attività proposte alle scuole, quali esperimenti sul galleggiamento, sullo studio di luce e ombre. La partecipazione è stata numerosa, come testimoniato dalla raccolta di disegni sul fiume (in parte mostrati in Figura 8) e di previsioni su uno degli esperimenti mostrati legati a tematiche fisiche attraverso brevi questionari in cui si proponeva una situazione problema.

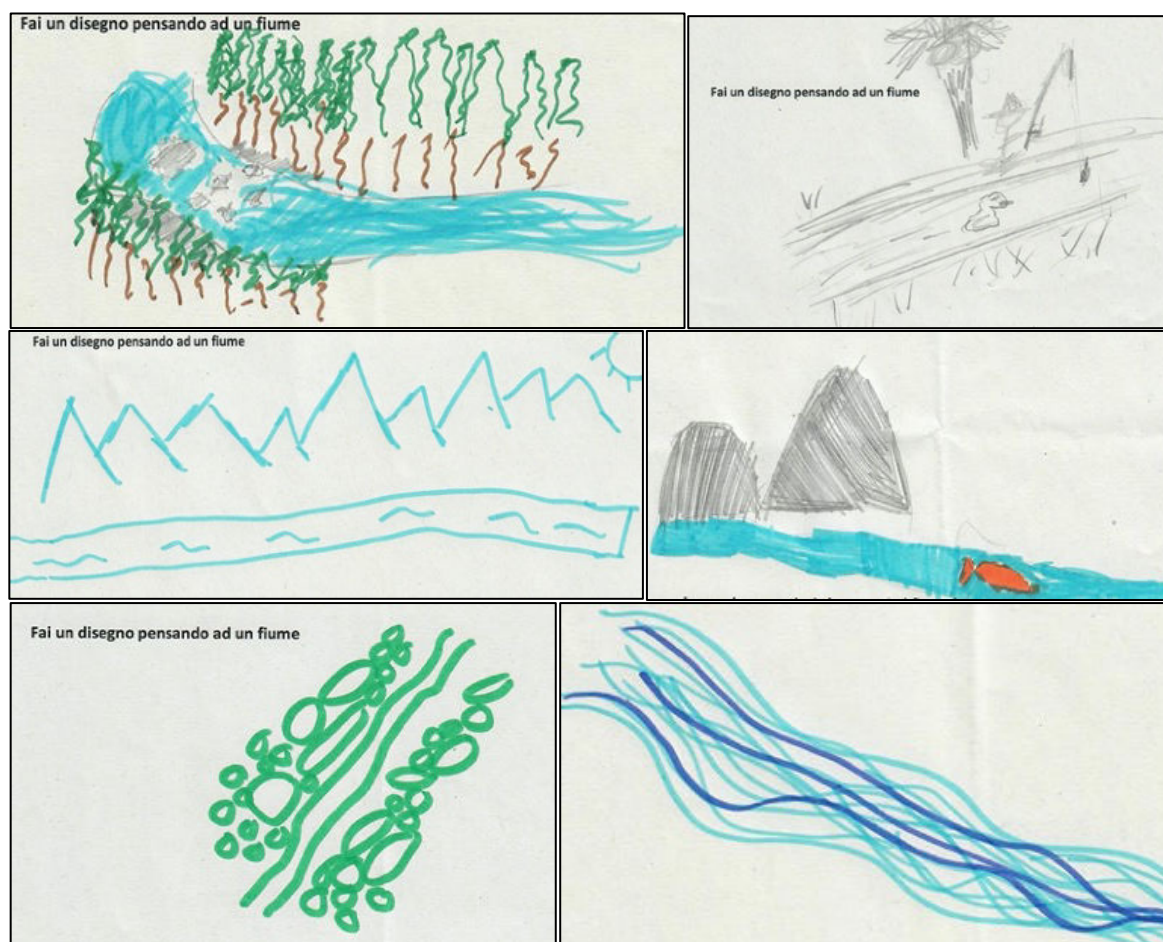


Figura 8. Alcuni dei disegni raccolti durante la "Notte dei ricercatori"

BIBLIOGRAFIA

Bouquet, F., Bobroff, J., Etienne, L. A., & Vardon, C. (2023). Teaching Physics in the Woods. *American Journal of Physics* 91, 685–689, ... Giorda C., Rosmo C., Il ruolo dell'ambiente nell'apprendimento. L'educazione geografica fra neuroscienze, *place-based* e *outdoor education*
Giorda C. (2023), "Inclusivo come l'outdoor education. Approcci ed esperienze negli ambiti della formazione degli insegnanti e del public engagement", in Coggi C., Bellacicco R. (a cura di), *Per l'inclusione*, Milano, Franco Angeli, pp. 89-96

OUTDOOR EDUCATION E LA FISICA NELLA SCUOLA PRIMARIA. STORIA DI UN PERCORSO ALLA SCOPERTA DELLA MISURAZIONE DI LUNGHEZZE, TEMPO E VELOCITÀ IN NATURA

Chiara Bosia

insegnante di scuola primaria, dott.sa in Scienze della Formazione primaria

chiara.bosia@libero.it

Abstract

Originario dei paesi nordeuropei e lì diffuso, in questi ultimi anni l'Outdoor education sta vedendo una rapida diffusione anche in Italia. Nato come risposta a fenomeni di indoorization, oggi l'Outdoor education è una proposta pedagogica che si sta sviluppando sempre di più in vari ambiti socio-relazionali; tuttavia, sono ancora pochi e sporadici gli interventi didattico-educativi che gli insegnanti compiono nelle loro classi.

“Flowing with the rivers”, un progetto di public engagement dell'università di Torino, nasce quindi con l'obiettivo di sviluppare un modello di educazione al territorio alternativo, transdisciplinare e replicabile, per ricostruire in modo sostenibile le relazioni tra comunità umane e territorio intorno ai fiumi, risorsa fondamentale dei sistemi naturali e umani dal punto di vista ecologico, simbolico-culturale ed economico.

L'obiettivo di questa sperimentazione, all'interno del progetto sopracitato, è quello di verificare l'efficacia di alcune metodologie, prevalentemente outdoor, durante le ore di lezione delle discipline scientifico-matematiche, nello sviluppo di importanti concetti fisici inerenti alla misura di lunghezza, tempo e velocità, in alunni di quinta primaria. A questo proposito la domanda della ricerca è la seguente: “L'utilizzo dell'Outdoor education durante le lezioni di matematica e scienze in quinta primaria, aumenta lo sviluppo dell'apprendimento dei concetti fisici sulla misura di lunghezza e di tempo?”

Per rispondere a tale domanda di ricerca gli alunni di una classe quinta primaria del territorio a sud di Torino, sono stati coinvolti in una serie di attività di misurazione di lunghezze, di tempo e di velocità, utilizzando perlopiù la metodologia outdoor.

In quanto progetto sperimentale, ha previsto il monitoraggio delle fasi di sviluppo del bambino durante lo stesso: per questo motivo, è stata somministrata, prima dell'inizio del percorso, una prova iniziale, al fine di collocare i concetti prima elencati e verificarne l'effettivo miglioramento, per poi svolgere una prova finale, con esercizi simili, a fine sperimentazione.

Tali prove sono state somministrate anche ad un'altra classe quinta, della stessa scuola, la quale è stata utilizzata come gruppo di controllo, al fine di studiare gli effetti dell'azione didattica.

A conclusione, dall'analisi e dal confronto dei dati, si evince un significativo miglioramento da parte del gruppo sperimentale di concetti quali l'iterazione di unità e la relazione tra numero e misura per quanto riguarda la misura di lunghezza e di transività e iterazione di unità per quanto riguarda i concetti di misura del tempo. Infine, grazie ad una autovalutazione del progetto svolto, si è potuto constatare che l'educazione all'aperto e quella basata sulla natura apportano benefici ai bambini in età scolare dal punto di vista fisico, cognitivo, ma anche emotivo e sociale e possono promuovere un comportamento favorevole all'ambiente.

A tale proposito si consiglia la progettazione di un curriculum che tenga conto dell'utilizzo di tale metodologia in maniera costante e regolare nell'insegnamento delle discipline matematico-scientifiche. L'obiettivo che quindi potrebbe nascere, a seguito di future ricerche, potrebbe essere quello di coinvolgere altre scuole e comunità locali in un percorso di scoperta o ri-scoperta dei propri luoghi di vita, sviluppando il senso del luogo e il legame di appartenenza e di cura con il proprio spazio vicino, magari coinvolgendo anche le altre discipline più umanistiche.

Parole-chiave

Outdoor Education – didattica – scuola primaria – fisica – misurazione

L'APPRENDIMENTO DELLA FISICA NELLA SCUOLA PRIMARIA

“Alla voce *Fisica* del dizionario Treccani possiamo leggere che la fisica è la scienza rivolta a fornire una descrizione razionale di quelli tra i fenomeni naturali che sono suscettibili di sperimentazione e che implicano grandezze misurabili. La fisica si occupa, quindi, di tutto ciò che è misurabile.” (M. Leone, *Insegnare e apprendere fisica nella scuola dell'infanzia e primaria*, 2020). Ecco che, una disciplina che può sembrare astratta, di difficile comprensione e adatta solo dalla scuola secondaria di secondo grado, in realtà comprende aspetti dell'educazione scientifica che prendono avvio molto presto nella scuola dell'infanzia e poi in quella primaria, attraverso le osservazioni e le rappresentazioni del mondo circostante.

Esplorando quindi i principi base di una buona azione didattica, si avvalora il peso del metodo scientifico come ispiratore di un apprendimento profondo e maturo delle scienze e come esso contribuisca allo sviluppo del senso critico, non solo scientifico, negli alunni.

L'analisi qui descritta si concentra in particolare sull'apprendimento di alcuni concetti della Fisica riguardanti la misura e di come essi possano essere compresi e consolidati all'interno della scuola primaria. Dagli studi di seguito riportati, insieme all'esperienza didattica descritta nel capitolo 3, ho infatti ricevuto incentivanti conferme sulla possibilità di comunicare tali concetti ai ragazzi delle classi della scuola primaria, interessati a tutto il mondo di questa misteriosa e accattivante disciplina.

Flowing with the rivers

La mia sperimentazione di tesi nasce dalla collaborazione all'interno di un progetto, presentatomi dal mio relatore e dalla mia correlatrice, che vede al suo interno la partecipazione di molti dei professori universitari della facoltà di Scienze della Formazione primaria di Torino. Ricostruire le relazioni del territorio intorno ai fiumi: è questo il sottotitolo che accompagna “Flowing with the rivers”, un progetto di public engagement dell'università di Torino con l'obiettivo di sviluppare un modello di educazione al territorio alternativo, transdisciplinare e replicabile, per ricostruire in modo sostenibile le relazioni tra comunità umane e territorio intorno ai fiumi, risorsa fondamentale dei sistemi naturali e umani dal punto di vista ecologico, simbolico-culturale ed economico. L'intervento, rivolto a scuole e insegnanti di ogni ordine e grado, nasce dall'idea di sviluppare forme attive e prevalentemente outdoor di educazione al territorio. Il progetto si sviluppa dalla sede universitaria di Savigliano, tra i fiumi Maira e Mellea e in siti del territorio legati al passaggio di corsi d'acqua fondamentali per comprendere il paesaggio, l'ambiente e le attività umane. L'area selezionata si estende su Cavallermaggiore (CN) e Cambiano (TO), con l'Ecomuseo dell'argilla MunLab, oltre che nell'area del Paleo-Po che dalla zona di Carignano/Carmagnola si estende fino a sud della Collina di Torino. Le attività del progetto nascono dalla collaborazione di diversi dipartimenti dell'Università di Torino: Filosofia e Scienze dell'Educazione, Scienze della Terra, Scienze della Vita e Biologia dei Sistemi, Lingue e letterature straniere e culture moderne, Chimica, Fisica e il dipartimento Interateneo Scienze, Progetto e Politiche del Territorio e sono basate su: osservazione diretta, esperienza condivisa e movimento a piedi. Il progetto insiste inoltre sulla sensibilizzazione alla sostenibilità e alla transizione ecologica sperimentando approcci e moduli innovativi di educazione “localizzati”. Il territorio diventa quindi, non solo sede, ma anche destinatario e beneficiario di un'offerta educativa esperienziale condiviso a livello locale in termini di idee ed esperienze. Inoltre camminare con la propria classe aiuta a conoscersi, valorizzando le peculiarità dei compagni, a rimescolare le dinamiche di gruppo ed insegna la convivenza con i propri limiti. Il camminare nel proprio territorio permette un contatto diretto con l'ambiente circostante inducendo una sensibilità attiva ed un senso di appartenenza verso i luoghi che si attraversano lentamente. Tale approccio è pensato per essere adattato alle risorse, ai valori, al paesaggio e alle

comunità locali, in un processo di riappropriazione cognitiva e fisica dei luoghi, di cura del territorio e di cittadinanza attiva e partecipata per ricostruire il legame di radicamento coi fiumi e il paesaggio, per accrescere la conoscenza dei valori ambientali e culturali del territorio e di una mentalità ecologica legata alla gestione sostenibile delle risorse locali. Il progetto in particolare è iniziato in primavera 2022, durante la quale sono iniziati i corsi di formazione per gli insegnanti, a cui abbiamo partecipato anche noi tesiste affiancate dai nostri insegnanti, relatori e collaboratori del progetto. Le classi inserite nel progetto hanno partecipato a laboratori esperienziali durante l'autunno 2022 e la primavera 2023 mettendo in pratica metodologie, strumenti e visioni del territorio diverse e lasciandosi accompagnare da noi tesiste affiancate dagli insegnanti di classe. Noi, nel ruolo di ricercatori, abbiamo preparato materiali di studio e di progettazione delle esperienze grazie anche ad un lavoro sul campo con sopralluoghi per documentare luoghi, paesaggi, percorsi, raccogliendo interviste e testimonianze da incontri con attori privilegiati. Per concludere tale progetto si è pensato ad un evento finale aperto a tutti i partecipanti: un itinerario esperienziale a tappe da percorrere a piedi di circa 50 km lungo i luoghi, i fiumi e i territori al centro dell'iniziativa, con cui sono stati condivisi e comunicati i risultati. Grazie a tale aspetto il progetto ha avuto parecchie adesioni coinvolgendo 15 istituti comprensivi e 12 tesiste di Scienze della Formazione primaria dell'Università di Torino.

LA SPERIMENTAZIONE

L'obiettivo di tale sperimentazione è stato quello di verificare l'efficacia di alcune metodologie, prevalentemente outdoor, durante le ore di lezione delle discipline scientifico-matematiche, nello sviluppo di importanti concetti fisici inerenti alla misura di lunghezza, tempo e velocità. È stata compiuta quindi una ricerca empirica quantitativa in ambito didattico-educativo. Essa si avvale di un campione accidentale, individuato cioè in modo arbitrario secondo le opportunità offerte dall'ambiente di ricerca. Infatti, in base alle disponibilità delle scuole che hanno aderito al progetto prima descritto, mi è stata assegnata una scuola primaria nella zona sud della provincia di Torino e in particolare due classi quinte con un totale di 37 alunni. Trattandosi di una ricerca con intervento, si è agito compiendo una rilevazione iniziale e una finale, compiendo un piano d'esperimento a due gruppi. Al primo gruppo, a seguito della somministrazione dei test iniziali, sono state proposte attività di potenziamento di tali concetti avvalendosi della metodologia di outdoor education (fattore di esperimento), per poi infine vedere il cambiamento e l'eventuale sviluppo di alcune competenze, attraverso la somministrazione dei test finali, con esercizi simili a quelli del test iniziali. Al secondo gruppo, quello di controllo, è stato somministrato il test iniziale, per poi continuare con le lezioni tradizionali (fattore ordinario), cioè senza cambiare alcuna variabile e infine è stato somministrato il test finale.

L'azione didattica

Agli allievi del gruppo sperimentale, come attività coinvolgente e motivante, è stato chiesto di entrare a far parte di un progetto insieme a molte altre classi e scuole, che ha visto al suo interno la riscoperta della natura e del fiume, al fine di aiutare nella progettazione di una camminata a cui hanno potuto aderire in primavera 2023 verso la fine dell'anno scolastico insieme a tutti i partecipanti di questa avventura. In particolare, gli alunni hanno avuto il compito di realizzare delle brevi attività che i camminatori hanno potuto eseguire durante un pezzo di camminata. Per realizzare tutto ciò sono diventati degli esperti matematici e fisici e si sono cimentati in attività sulla misurazione del tempo, dello spazio e della velocità.

I ragazzi accettando questa nuova avventura si sono impegnati a diventare degli attenti osservatori. È stato quindi consegnato a ciascuno di loro un taccuino che li ha accompagnati per l'intera esperienza e che è servito per prendere tutti gli appunti possibili e utili alle attività affrontate. Dopo aver riflettuto insieme attraverso un brainstorming, gli alunni, divisi in gruppi hanno compiuto una

ricerca/approfondimento sulla misura. Ciascun gruppo si è occupato di un aspetto diverso della misura (cosa si può misurare, la storia del metro, le unità di misura, il metodo sperimentale), avendo a disposizione materiale di vario tipo. Successivamente gli alunni sono stati accompagnati dalle insegnanti nel tratto di percorso del progetto a loro assegnato. Lì, divisi a coppie hanno trovato unità di misura arbitrarie (es: legnetto, sasso, foglia...) e hanno misurato con esse più elementi possibili appuntandosi le misure sul loro taccuino (es: larghezza strada = 6 foglie; altezza cestino = 4 legnetti). Allo scadere del tempo l'insegnante ha consegnato un metro a ciascuna coppia con cui misurare gli stessi elementi di prima, poiché al ritorno in classe hanno creato una tabella con le equivalenze tra le unità di misura arbitrarie e il metro. Per quanto riguarda la misurazione del tempo in natura si è concentrata l'attenzione sul sole (attraverso la costruzione di uno gnomone) e sull'acqua (attraverso la costruzione di un orologio ad acqua). Attraverso tali attività sulla lunghezza e sul tempo e ragionando sull'unità di misura della velocità, gli alunni hanno capito facilmente che quest'ultima si può ricavare utilizzando la formula *spazio/tempo*. Nel cortile della scuola cronometrando le loro varie andature e misurando lo spazio percorso, hanno quindi calcolato le velocità. Come conclusione del progetto, a gruppi gli alunni hanno quindi realizzato del materiale da osservare e con cui interagire nel tratto di percorso analizzato insieme durante le attività precedenti, così che anche tutte le persone che sarebbero passate avrebbero potuto osservare quello che la classe ha vissuto.

I gruppi si sono occupati di:

- Natura che misura: costruzione di un lapbook sulla misura (utilizzando gli appunti di ciascuno raccolti nella prima attività)
- Natura che crea: creazione di quadri da esporre come mostra con gli oggetti che hanno usato nella seconda attività come unità di misura (interdisciplinare con Arte e immagine)
- Natura nel tempo: creazione di un altro orologio ad acqua e di un'altra meridiana con le relative istruzioni dettagliate per la loro creazione
- Natura e velocità: creazione di una descrizione di come calcolare la velocità della corrente del fiume e della velocità dei camminatori

Le metodologie

I documenti ministeriali che hanno accompagnato le riforme scolastiche negli ultimi anni sottolineano l'importanza sempre maggiore di progettare percorsi didattici volti a guidare ogni studente verso il raggiungimento del proprio successo formativo, garantendogli la possibilità di apprendere lungo tutto l'arco della vita in un'ottica di *lifelong learning*. Viene ribadita, dunque, la necessità di utilizzare metodologie didattiche "attive" che consentano la realizzazione di "percorsi formativi sempre più rispondenti alle inclinazioni personali degli studenti, nella prospettiva di valorizzare gli aspetti peculiari della personalità di ciascuno" (Decreto Ministeriale 254 del 16 novembre 2012 - Indicazioni nazionali curriculum scuola infanzia e primo ciclo).

Partendo da tale presupposto, tale sperimentazione si è servita delle seguenti metodologie:

- Didattica laboratoriale ed esperienziale
- Analisi delle preconoscenze
- Autovalutazione
- Outdoor Education

I RISULTATI

Ogni quesito dei test finali delle due classi è stato analizzato al fine di comprendere quali concetti sono stati acquisiti e consolidati negli alunni di quinta e quali differenze sono emerse nelle due classi (gruppo sperimentale e gruppo di controllo). Come si evince dalle analisi, i concetti che gli alunni di entrambe

le classi hanno appreso maggiormente sono quelli di partizione, transitività, conservazione della lunghezza e la conservazione di velocità di tempo. L'esercizio che invece ha riscontrato maggiore difficoltà in entrambe le classi è quello riferito all'iterazione di unità di tempo nel confronto tra due durate di percorrenza con la clessidra o orologio ad acqua. Si nota inoltre come la classe sperimentale ha raggiunto risultati significativamente maggiori della classe di controllo in tutti gli esercizi del test, dimostrando un livello di apprendimento maggiore e l'acquisizione di particolari competenze in materia di misurazione sia di lunghezza sia di tempo. Compiuta la sperimentazione e analizzate e studiate le metodologie di apprendimento/insegnamento, nonché il quadro teorico di riferimento, si può affermare che nella classe dove si è svolta la sperimentazione si è certamente evidenziata una significativa comprensione di concetti matematici e fisici che ancora non erano stati consolidati grazie all'incremento motivazionale dato dall'apprendere "al di fuori delle mura scolastiche". In particolare alcune attività proposte hanno apportato maggiori risultati conducendo all'apprendimento e al consolidamento di importanti concetti sulla misura di lunghezza e di tempo. Si evince un significativo miglioramento da parte del gruppo sperimentale di concetti quali l'iterazione di unità e la relazione tra numero e misura per quanto riguarda la misura di lunghezza e di transitività e iterazione di unità per quanto riguarda i concetti di misura del tempo. Inoltre gli alunni hanno sviluppato nuove competenze in materia di educazione alla cittadinanza attiva e di cura dell'ambiente. La quasi totalità dei ragazzi ha infatti manifestato un accresciuto interesse per le attività di tipo scientifico, nonché l'esigenza di maggior approfondimento per quei concetti che hanno già avuto l'occasione di sentire, seppur senza la completa comprensione. Ritengo molto importante il fatto che alcune attività didattiche abbiano suscitato curiosità e a volte entusiasmo, poiché questi stimoli sono essenziali nella crescita di un ragazzo che vorrà approfondire la Fisica con strumenti matematici più complicati. Grazie alla metodologia outdoor gli alunni hanno potuto sperimentare concretamente tali concetti sviluppando una coscienza critica e attenta, costruendo il proprio apprendimento attivamente da veri protagonisti.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio il mio relatore di tesi Matteo Leone e la mia correlatrice Marta Rinaudo che, con la loro disponibilità e professionalità, mi hanno permesso di entrare a far parte del progetto "Flowing with the rivers" e che mi hanno aiutata a sentirmi sempre più sicura e felice di aver scelto questa tematica. Ringrazio poi tutti gli insegnanti, professori e tutor che sono stati parte del mio percorso professionale, perché mi hanno permesso di attingere dalla loro esperienza e professionalità per costruirmi un bagaglio di conoscenze e competenze che formano un buon insegnante.

BIBLIOGRAFIA

- D. Allasia, V. Montel, G. Rinaudo, *La Fisica per maestri*, Cortina, Torino 2004
G. Arduini, *La didattica esperienziale come strategia inclusiva*, Università degli Studi di Cassino e del Lazio meridionale, 2020
T. Bernadet, *Mathematics and natural sciences teaching models in primary school using outdoor education*, Journal Plus Education, Vol 29, 2021
O. Brondo, G. Chirico, *Insegnare la fisica nella scuola primaria. Il laboratorio e il metodo scientifico*, Carocci editore, 2019
M. Douglas, C. M. Stephan, *Measurement in PreK-2 Mathematics*, University at Buffalo, State University of New York Purdue University Calumet 2004
C. Giorda, M. Puttilli, *Educare al territorio, educare il territorio. Geografia per la formazione*, Carocci editore 2012

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

Heras, Raquel, Medir, Rosa M. e Salazar, Olga, *Children's perceptions on the benefits of school nature field trips* 2020

M. Leone, *Fisica "spontanea": le rappresentazioni mentali degli studenti della scuola primaria*, Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino

M. Leone, *Insegnare e apprendere fisica nella scuola dell'infanzia e primaria*, I saperi dell'educazione, Mondadori università 2020

K. Long, C. Kamii, *The Measurement of Time: Children's Construction of Transitivity, Unit Iteration, and Conservation of Speed*, University of California, University of Alabama at Birmingham 2001

F. Mantovani, F. Petrucci, A. Turrichia, G. Zini, L. Benacchio, A. Zanella, *Attività legate alla fisica moderna eseguite nelle scuole dell'obbligo a partire dalle elementari*, Dip. di Fisica dell'Università degli Studi di Ferrara

Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca, *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, in "Annali della Pubblica istruzione", numero speciale 2012

Munlab, *Didattica, patrimonio culturale e patrimonio paesaggistico, valorizzazione dei luoghi e del saper fare, per l'educazione sostenibile*, 2022

S. Sbaragli, *Misura. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Bologna: Pitagora, 2011

I MOTI APPARENTI DEL CIELO NOTTURNO: LA MODELLIZZAZIONE COME METODO DI INDAGINE PER I BAMBINI NELLA SCUOLA PRIMARIA

Giada Cerrato

cristinaegiada98@gmail.com

Abstract

La ricerca condotta riguarda un ambito della didattica della fisica ancora poco analizzato, seppur interessante: i moti apparenti del cielo notturno. Lo studio si pone l'obiettivo di verificare la funzionalità di una didattica attiva, che utilizzi come metodo di lavoro la modellizzazione nell'indagine dei moti apparenti delle stelle, alla scuola primaria. L'ipotesi si basa sulla verifica della funzionalità della somministrazione di un'unità di apprendimento che utilizza come metodo di indagine primario la modellizzazione nello studio dei moti apparenti delle stelle nella comprensione di tali movimenti, rispetto a una didattica di tipo tradizionale. La ricerca si snoda a partire da una rassegna dettagliata sugli studi teorici che si sono occupati del cielo e dei principali corpi celesti, unitamente ai movimenti apparenti che li caratterizzano; in seguito, si definiscono le cause che generano tali moti. L'analisi procede poi focalizzandosi, in particolare, sulle costellazioni che le stelle disegnano sulla volta celeste, ragionando sul movimento che queste ultime sembrano compiere alle nostre latitudini, soffermandosi, in ultima istanza, sulla presenza della Stella Polare, delle costellazioni circumpolari, e dei movimenti che le caratterizzano. Si riflette poi sulla modalità di lavoro in aula, sull'importanza che per il docente devono avere, nella progettazione delle attività didattiche e sull'importanza di sviluppare una didattica attiva, che consenta agli alunni di co-costruire le loro conoscenze, tramite l'esperienza concreta dei fenomeni indagati. A tale proposito, l'uso della modellizzazione per visualizzare ciò che non sarebbe visibile altrimenti, o che comunque sarebbe complesso da osservare, risulta fondamentale. Infine, sono stati riportati la sperimentazione didattica effettuata con i 19 alunni di età compresa tra i 10 e gli 11 anni, di una scuola primaria ubicata in un quartiere periferico della città di Asti e i risultati ottenuti. Gli studenti avevano già precedentemente affrontato il tema delle costellazioni, dei loro movimenti apparenti nel cielo notturno e delle loro rispettive cause, attraverso una didattica di tipo tradizionale.

Parole-chiave

Modellizzazione; movimento; costellazioni; didattica laboratoriale.

INTRODUZIONE

All'interno di una classe ogni docente si trova a dover fare i conti con la trattazione di alcuni fenomeni naturali di cui è difficile fare esperienza diretta. In questi casi l'insegnante deve predisporre le modalità di lavoro adeguate all'analisi di tali fenomeni, per consentire a ogni alunno di comprenderli, secondo la modalità che meglio si addice al metodo di apprendimento che lo caratterizza. Tale modalità di lavoro si traduce a scuola nella didattica laboratoriale e si presta bene all'indagine di questioni che sono difficilmente osservabili in prima persona, come, nel nostro caso, lo studio della volta celeste e dei suoi movimenti apparenti giornalieri. Tali prodotti possono essere realizzanti dall'insegnante o dagli alunni, in modo che diventi possibile considerare tanto i concetti astrofisici, quanto il meccanismo che si cela dietro i moti celesti. Sulla base di quanto detto finora metto in evidenza che, attraverso tale ricerca, sia stato studiato come si possibile un miglioramento nella comprensione di tali eventi, sulla base di un approccio metodologico laboratoriale, che implichi l'uso di rappresentazioni tridimensionali, del proprio corpo, del confronto e della discussione tra pari.

La volta celeste, le costellazioni e i loro movimenti apparenti

Il cielo notturno si presenta come una distesa nera che tende all'infinito, ricco di corpi brillanti. Esso, però, non può essere concepito in questo modo, in quanto l'uomo non riesce a pensare all'infinità dell'universo, siccome è un principio troppo grande per lui. La volta celeste, infatti, viene normalmente considerata "Come una cupola blu, appoggiata a Terra lungo il cerchio dell'orizzonte" (Leone, M., 2020, pp. 265) che ha come centro, il punto esattamente sopra la testa dell'osservatore, definito zenith, mentre l'area in cui la semisfera incontra la terra è detta orizzonte. L'uso di questo costrutto permette di considerare il cielo come finito e consente di descrivere più facilmente i corpi celesti che la popolano.

Tra questi troviamo le stelle (che noi abbiamo considerato raggruppate in costellazioni, perchè il movimento del cielo notturno non riguarda i singoli corpi celesti, ma l'intera volta che essi popolano) le quali, come il Sole, variano la loro posizione ogni notte. Il "cammino" apparente che esse compiono nel cielo da Est a Ovest, è causato dal moto di rotazione della Terra, che ruota al contrario, da Ovest verso Est. Questo movimento genera, dal punto di vista dell'osservatore, una credenza simile a quella degli antichi, ossia che "Sia la sfera celeste a muoversi da Est verso Ovest, attorno a un asse passante per il polo Nord e il polo Sud celeste, compiendo una rotazione di circa 23 ore e 56 minuti" (Leone, M., 2020, pp. 268), e che quindi siano il Sole di giorno e le stelle di notte, a spostarsi.

L'ipotesi e il campione

L'ipotesi di ricerca si propone di verificare che la somministrazione di un'unità di apprendimento di tipo laboratoriale, che utilizza come metodo di indagine primario la modellizzazione nello studio dei moti apparenti delle stelle, favorisca la comprensione di tali movimenti, molto più di una didattica di tipo tradizionale. Tale ricerca è stata condotta su un campione di 19 allievi, frequentanti la classe V, di una scuola ubicata nella zona periferica nel Sud del Piemonte.

Sequenza delle attività

L'analisi delle preconoscenze.

Per comprendere quali fossero le preconoscenze degli alunni in merito ai movimenti apparenti del cielo notturno, nella fase preliminare le attività, è stato somministrato un questionario. Le domande vertevano principalmente sul movimento apparente delle costellazioni durante la notte e sulle loro cause e il testo del compito da svolgere è stato predisposto in modo che fosse adeguato in termini di comprensione, leggibilità e realtà.

In secondo luogo, abbiamo compiuto un'osservazione su due "viste del cielo" (figura 1) del cielo del Nord, osservato in primavera. Le osservazioni condotte sono state due: in primo luogo è stata analizzata un'immagine rappresentante il cielo com'è nella realtà (Figura 1) e, solo in seconda battuta, il cielo con le costellazioni evidenziate (Figura 2). La discussione che ne è derivata ha permesso agli allievi di capire come si presenti il cielo primaverile a Nord dell'Equatore, di mettere in evidenza la Stella Polare, sempre fissa, e di introdurre l'idea della rotazione apparente del cielo stellato intorno alla Stella Polare, grazie alla rotazione della Terra intorno al proprio asse.



Figura 1: rappresentazione del cielo notturno primaverile a Nord dell'equatore



Figura 2: vista nord (a sinistra) e vista sud (a destra) del cielo, con le costellazioni raffigurate, in Primavera (Rey, H. A., 2008, pp. 37-39).

La didattica a stazioni per prendere coscienza del concetto di costellazione e delle costellazioni circumpolari.

Successivamente alla discussione collettiva gli alunni si sono impegnati in attività differenti, all'interno di diverse stazioni di lavoro. Gli allievi hanno avuto la possibilità di conoscere le costellazioni circumpolari e di imparare i nomi e le curiosità relative alle costellazioni non circumpolari, magari, meno conosciute. La classe è stata rimodulata, in modo che i banchi potessero essere disposti a isole e, all'interno di ogni isola, sono stati predisposti il foglio delle istruzioni per svolgere l'attività e gli strumenti di lavoro necessari. Le stazioni erano quattro: la stazione dei miti, in venivano presentati i miti delle quattro costellazioni circumpolari principali; la stazione del memory, una stazione di gioco e pausa, nella quale potevano fermarsi per il tempo loro necessario per passare ad un'altra stazione e divertirsi a conoscere le curiosità sulle costellazioni non circumpolari; la stazione della costruzione della costellazione, in cui potevano puntellare una delle quattro costellazioni circumpolari a loro scelta, che sarebbe servita loro nella fase successiva; la stazione degli anni luce, in cui gli allievi avevano il compito di osservare un video su questo argomento e rispondere alle relative domande. Gli allievi erano liberi di spostarsi all'interno delle varie stazioni, secondo la modalità in cui meglio credevano, l'importante era che non fossero mai disoccupati e che all'interno della stazione del memory fossero almeno in due per poter giocare.

L'intervista sotto la cupola.

L'idea di intervistare gli allievi sotto una cupola (figura 2) rappresentante il cielo notturno, è derivata dall'analisi dei testi di Plummer (2009) e Plummer e Krajcik (2010). L'intervista è stata strutturata inserendo una breve fase di spiegazione iniziale dell'attività svolta al di sotto della cupola; questi primi minuti "rompighiaccio" sono stati utili per mettere i bambini a proprio agio e iniziare l'intervista.

Le domande, che sono state elaborate osservando il protocollo prodotto da Plummer (2009), erano relative ai movimenti apparenti delle costellazioni durante la notte e alla fissità della Stella Polare. Per quanto concerne i movimenti delle stelle durante la notte, durante l'intervista sono state fornite domande guida ulteriori per aiutare gli alunni a rievocare le conoscenze apprese sulle quattro costellazioni circumpolari o per sostenere gli studenti a immaginare di essere all'aperto, a guardare le stelle, per dimostrare come si muovessero. La dimostrazione dei movimenti delle costellazioni durante la notte è stata fornita, proiettando sul telo della cupola, la costellazione che essi avevano puntellato precedentemente e, successivamente, la costellazione dell'Orsa Minore, e spostandola in relazione alla risposta verbale appena fornita.

La proiezione della costellazione sul telo e la dimostrazione dei suoi movimenti sono state possibili grazie alla precedente preparazione e all'uso del proiettore di costellazioni (Figura 3), una scatola nera con una torcia all'interno, posizionata dietro al cartoncino con la costellazione puntellata.

Dall'intervista è emerso che gli allievi possedessero idee molto diverse sul cielo notturno e sui fenomeni che vi si manifestano: spesso hanno fornito risposte contraddittorie, anche in relazione a quanto detto da loro in precedenza, durante le loro stesse interviste.



Figura 3: proiezione della costellazione del Piccolo Carro sull'interno della cupola, possibile grazie all'utilizzo del proiettore (in basso nell'immagine).

Il modello dell'ombrello per l'osservazione e la comprensione dei movimenti celesti.

La quarta fase del progetto ha previsto la costruzione e la sperimentazione del modello dell'ombrello, una rappresentazione tridimensionale del cielo che avrebbe consentito loro di comprendere più adeguatamente il moto apparente del cielo notturno, e la sua causa. Il lavoro è stato svolto a coppie, sfruttando la metodologia del Peer tutoring (Figura 4); le coppie sono state strutturate in modo che all'interno di ognuna fosse presente un allievo che durante l'intervista aveva dimostrato di possedere una migliore conoscenza degli ambiti indagati, e uno meno forte. All'interno di ogni gruppo i ruoli assegnati per lo svolgimento dell'attività sono stati quello di misuratore e di disegnatore. Gli allievi, fuori dalla classe, hanno disegnato in scala, sul loro ombrello le quattro costellazioni circumpolari più conosciute, ponendo al centro la Stella Polare. Essi dovevano anche tenere in considerazione che, le stelle sul telo, dovevano essere rappresentate con forme diverse: il motivo di questa rappresentazione è stato spiegato con la magnitudine apparente delle stelle, ossia la luminosità che le stelle sembrano avere dalla prospettiva terrestre. Essa dipende dalla luminosità intrinseca degli astri, unita alla loro distanza dalla Terra. Questi due elementi fanno in modo che, dalla prospettiva terrestre, si vedano stelle più grandi e più piccole.

Grazie a questo modello è stato possibile visualizzare, sperimentare e ragionare con gli allievi sulla fissità della Stella Polare e sui movimenti delle costellazioni circumpolari e non circumpolari durante la notte. Le traiettorie sono state visualizzate facendo ruotare l'ombrello, inclinato adeguatamente, avendo come linea di orizzonte il banco. Hanno poi ragionato sul moto di rotazione della Terra, come causa del moto apparente della volta celeste, ruotando su se stessi in senso antiorario, e tenendo lo sguardo verso l'ombrello; così si sono resi conto che, quest'ultimo, sembrasse muoversi in senso opposto alla loro rotazione.



Figura 4: costruzione del modello dell'ombrello secondo la modalità del Peer tutoring. Rappresentazione, sull'ombrello delle 4 costellazioni circumpolari scelte.

Fase finale: sfruttare il modello dell'ombrello.

La funzione dell'ombrello è stata analizzata nella fase 5, quando i bambini hanno dovuto rispondere ad un questionario a risposta aperta che ha permesso loro di utilizzare l'ombrello per ragionare e rispondere alle domande relative alla direzione del moto apparente del cielo, alla posizione della Stella Polare e alla visibilità delle costellazioni circumpolari (Figura 5).

Le domande sono state organizzate in base all'ambito che andavano a indagare e gli alunni, avrebbero dovuto rispondervi lavorando in coppia. È stato deciso di mantenere le coppie già precedentemente costituite, formate da un allievo che aveva dimostrato di possedere una migliore conoscenza in tutti gli ambiti indagati, e uno meno forte cosicché il primo facesse da tutor al secondo e, dalla loro discussione, emergesse la conoscenza di tipo corretto. A ogni allievo, all'interno della coppia, è stato fornito un compito: scrivere le risposte o mobilitare il modello in base alla domanda proposta; a entrambi, inoltre è stato chiesto di comunicare con il compagno, quindi di confrontarsi, proprio per elaborare la miglior risposta possibile.

Il questionario è stato introdotto da un breve testo scritto che spiegava agli alunni quello che dovevano fare, per poter rispondere al meglio alle domande proposte. Di nuovo, sia il testo, che le domande, sono stati scritti utilizzando lo stampatello maiuscolo e un carattere che fosse leggibile, senza grazie, per consentire al meglio la lettura da parte di tutti gli allievi.

Al questionario è succeduta una fase di discussione collettiva e correzione delle risposte fornite, utile al fine di riprendere gli argomenti trattati e chiarire eventuali dubbi.



Figura 5: la compilazione del questionario secondo la modalità del Peer tutoring, manipolando il modello dell'ombrello.

Analisi dei dati raccolti

Gli esiti dei questionari realizzati dagli studenti all'inizio e alla fine dell'intervento laboratoriale riportano differenze nette in tutti gli ambiti del sapere. I dati emersi dal questionario finale evidenziano un incremento delle conoscenze rispetto all'inizio dell'intervento. Si riportano alcuni dei risultati a confronto in merito al movimento apparente del cielo (Figura 6) e alla causa di tale moto (Figura 7), in modo da avere una visione chiara di quanto è emerso in fase iniziale di lavoro in relazione agli esiti emersi nella fase finale.

Come si evince dal grafico riportato (Figura 6) la maggior parte degli allievi, 14 su 19, ha compreso che il cielo sembra muoversi. Di questi, 4 su 19 hanno mostrato di aver appreso anche la direzione verso cui sembra muoversi, quindi da Est a Ovest, mentre 2 su 19 sostengono che il movimento sia da sinistra a destra di 360°. In ultimo, 8 alunni su 19 hanno solo affermato che il cielo sembri muoversi. Questi dati sono interessanti, soprattutto alla luce del fatto che, nella fase iniziale, solamente 2 bambini su 18 avevano affermato che il cielo sembrasse muoversi. Gli altri, invece, come si può notare, avevano fornito risposte poco adeguate.

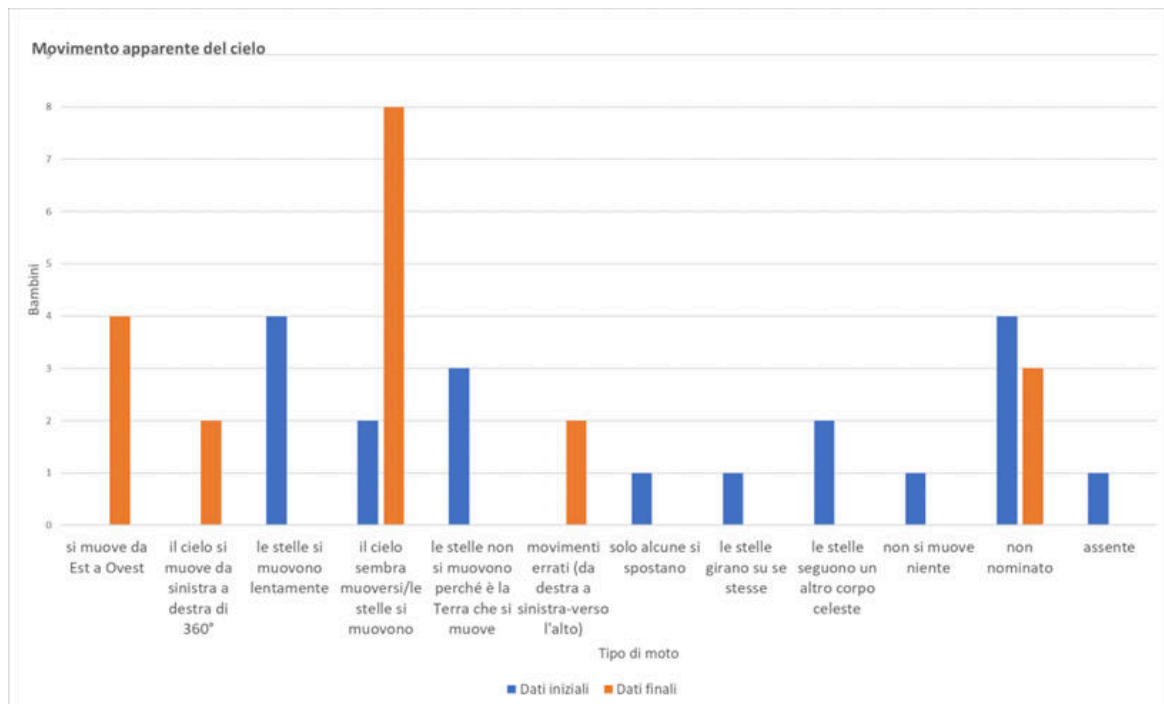


Figura 6: dati dei questionari a risposta aperta a confronto; movimento apparente del cielo.

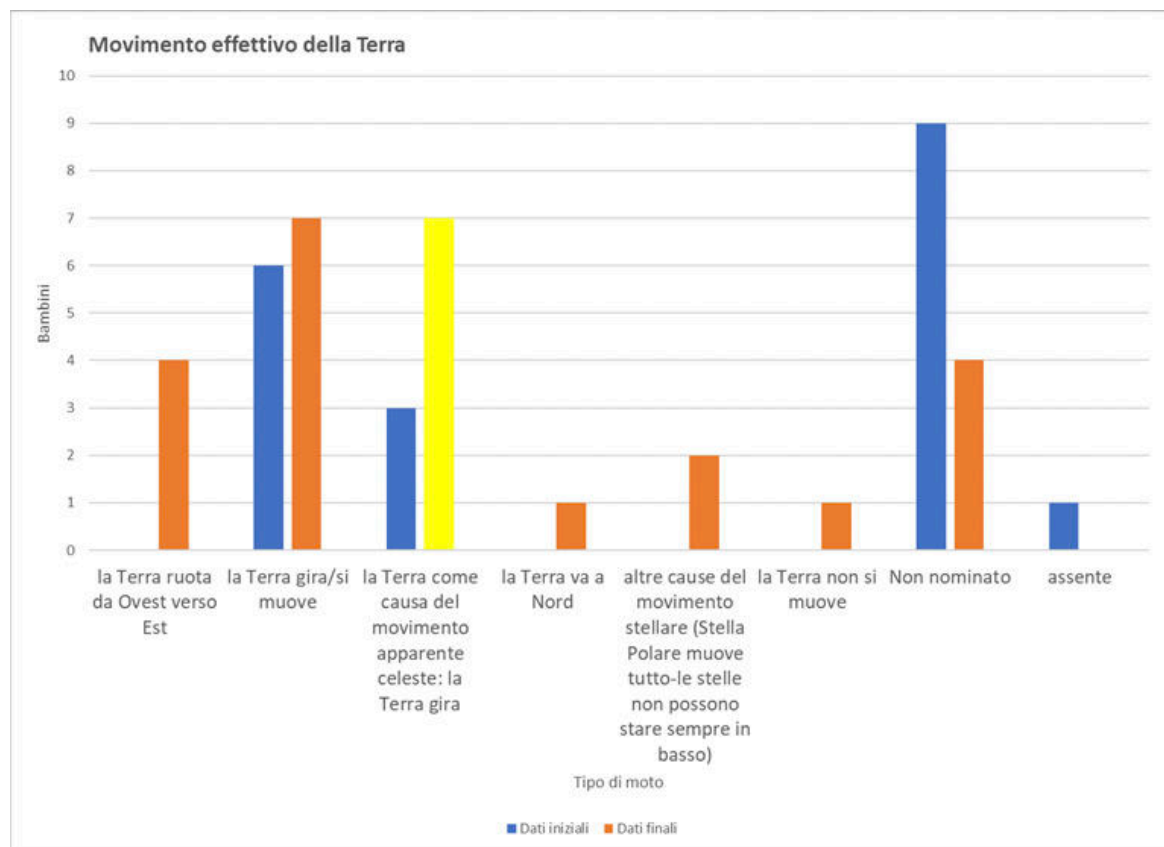


Figura 7: dati dei questionari a risposta aperta a confronto; movimento effettivo della Terra.

Anche dal punto di vista del movimento effettivo della Terra, si può notare dal grafico (Figura 7), le conoscenze dei bambini siano migliorate. 4 allievi su 19 hanno sostenuto che la Terra si muova da Ovest verso Est, quindi al contrario rispetto al moto apparente del cielo. Interessante è il dato che si riferisce al movimento della Terra come causa del moto celeste apparente: la colonnina in giallo mette in risalto che 7 degli allievi che avevano già dato una risposta alla domanda, sottolineando la presenza del moto terrestre, abbiano anche messo in evidenza che sia la Terra che ruotando, causa il moto celeste apparente. Anche in questo caso, i risultati ottenuti sono positivi rispetto ai dati iniziali.

Conclusioni

Alla luce di quanto messo in evidenza, si può concludere che: sfruttare la metodologia della modellizzazione, che consente di partire dalle esperienze dei bambini e successivamente di promuovere la costruzione e l'uso di modelli per l'osservazione e la sperimentazione dei fenomeni reali, consentirebbe di visualizzarli concretamente e successivamente di comprenderli in quanto permette di adottare il punto di vista adeguato in relazione al fenomeno da conoscere, e ciò permette poi di giungere alla comprensione corretta della realtà. Pertanto, si può affermare che una didattica laboratoriale basata sulla modellizzazione, consenta molto meglio rispetto ad una didattica di tipo tradizionale di analizzare e conoscere fenomeni complessi, come quello del moto notturno apparente delle stelle.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio il mio relatore di tesi Leone Matteo e la mia correlatrice Rinaudo Marta, perché mi hanno permesso di dare vita ad un progetto che ha contribuito a evidenziare l'importanza della didattica laboratoriale e dell'uso della modellizzazione nella pratica di insegnamento-apprendimento.

BIBLIOGRAFIA

- Leone, M. (2020). Insegnare e apprendere fisica. Nella scuola dell'infanzia e primaria.
- Plummer, J. D. (2009). A cross-age study of children's knowledge of apparent celestial motion. *International Journal of Science Education*, 31(12), 1571-1605.
- Plummer, J. D., & Krajcik, J. (2010). Building a learning progression for celestial motion: Elementary levels from an earth-based perspective. *Journal of research in science teaching*, 47(7), 768-787.
- Rey, H. A. (2008). Find the constellations. Houghton Mifflin Harcourt.

UN FIUME DI FISICA: UN'ESPERIENZA DI OUTDOOR EDUCATION SUL GALLEGGIAMENTO NELLA SCUOLA PRIMARIA

Chiara Gazzera

chiaragazzera36@gmail.com

Abstract

Il seguente lavoro di ricerca si colloca all'interno di "*Flowing with the Rivers*", progetto di *Public Engagement* promosso dall'Università di Torino, il cui obiettivo principale è quello di promuovere un modello di educazione al territorio alternativa, transdisciplinare e replicabile. Nello specifico, il lavoro di ricerca si propone di indagare le idee spontanee dei bambini sul fenomeno fisico del galleggiamento e la successiva costruzione attiva di competenze scientifiche e trasversali. Si tratta di un percorso didattico, svolto nel periodo compreso tra settembre 2022 e giugno 2023, che ha coinvolto due classi di una scuola primaria: una classe terza e una pluriclasse di seconda e terza.

L'orizzonte normativo in cui si colloca tale percorso didattico è quello delle Competenze Chiave per l'Apprendimento Permanente (2018), dell'Agenda 2030 a livello europeo, e delle Indicazioni Nazionali e dei Nuovi Scenari (2012, 2018) a livello nazionale. Le attività sono state condotte in aula e in *outdoor*, lungo i siti fluviali dei paesi in cui sono ubicate le scuole, integrando l'utilizzo della didattica laboratoriale e dell'*Outdoor Education*. L'adozione di tali metodologie ha permesso di rendere gli alunni protagonisti attivi del loro processo di apprendimento. Le attività esplorative, manipolative, di scoperta hanno valorizzato la dimensione "del fare", mentre quelle riflessive hanno favorito lo sviluppo di capacità critiche, argomentative e di analisi scientifica. Le attività in natura, oltre ai benefici a livello fisico, cognitivo, psicologico e sull'apprendimento, hanno promosso un avvicinamento degli alunni alla fisica, rafforzando in loro la consapevolezza che tale disciplina non è così lontana e distante dalla realtà nella quale si manifestano e sono visibili i fenomeni. Ai fini della ricerca, sono stati somministrati un questionario iniziale e uno finale, redatti alla luce della letteratura esistente, per indagare le idee spontanee degli alunni sul fenomeno del galleggiamento e per verificare eventuali cambiamenti dopo le attività svolte, nelle risposte degli alunni, che possano evidenziare una ristrutturazione delle conoscenze trattate. Dall'analisi dei dati rilevati, il seguente lavoro di ricerca ha contribuito efficacemente alla costruzione di conoscenze sul fenomeno fisico del galleggiamento e di competenze scientifiche e trasversali. I risultati ottenuti e il confronto con le docenti delle classi sono stati molto incoraggianti, suggerendo un buon potenziale di applicabilità delle metodologie adottate.

Parole chiave

fluidi, galleggiamento, idee spontanee, didattica laboratoriale, Outdoor Education.

CAMPIONE DI RICERCA

Le due classi coinvolte hanno aderito al progetto grazie alla partecipazione delle rispettive docenti al corso di formazione di "*Flowing with the Rivers*", tenutosi nella primavera del 2022. Complessivamente il campione è di 35 alunni della scuola primaria: una classe terza e una pluriclasse di seconda e terza. All'inizio della sperimentazione la classe terza era composta da 22 bambini di 7/8 anni. Dopo i primi due incontri, un alunno si è trasferito in un altro paese. Si è dunque verificata la cosiddetta mortalità dell'esperimento (Coggi, Ricchiardi, 2005). Pertanto, il campione coinvolto nelle successive attività annovera 21 bambini. Negli ultimi due incontri si è aggiunto un nuovo alunno che è stato coinvolto nelle

attività, tra cui la somministrazione del test finale. Ai fini dell'analisi dei dati, tale questionario non è stato preso in considerazione in quanto l'alunno non ha seguito il percorso nella sua totalità. La pluriclasse, invece, è composta da 14 bambini di cui 8 di 7/ 8 anni e 6 di 6/7 anni. L'intervento sui due campioni è stato avviato con una fase di osservazione per meglio adattare al contesto le attività sul fenomeno fisico del galleggiamento.

SCOPO E TEMPI

Lo scopo del seguente lavoro di ricerca è quello di avvicinare i bambini alla fisica attraverso attività esplorative e di scoperta orientate all'acquisizione del fenomeno del galleggiamento. L'ambiente fluviale rappresenta il contesto nel quale gli alunni hanno l'opportunità di costruire il proprio apprendimento in modo attivo e diretto. In questo modo, si promuove l'idea che è possibile far fisica anche in assenza di un "laboratorio" in quanto i fenomeni sono osservabili nell'ambiente esterno. Lo scopo del seguente lavoro di ricerca è quello di indagare le idee spontanee degli alunni sul galleggiamento, confrontandole con i risultati della letteratura scientifica al fine di promuoverne la successiva evoluzione in idee accreditate. La progettazione ha previsto lo svolgimento di 20 ore nella classe terza e 19 ore nella pluriclasse. Le attività sono state svolte nel periodo compreso tra settembre 2022 e giugno 2023 e organizzate compatibilmente con la disponibilità delle docenti accoglienti.

METODOLOGIE

Alcune attività sono state svolte lungo i torrenti Maira e Mellea, secondo la metodologia dell'*Outdoor Education*, altre in aula seguendo la metodologia della didattica laboratoriale.

Outdoor Education

Il termine *Outdoor Education* assume al suo interno numerose sfumature di significato, questo spiega l'esistenza di molteplici definizioni. Una delle prime elaborate in letteratura è attribuibile a George e Luis Donaldson (1985, p.17) che scrivono "*OE is in, about and for the outdoors*", ovvero le attività riguardano ciò che si fa nei (in), sui (about) e per (for) i diversi contesti *outdoors*, declinati appositamente al plurale. L'OE può essere definita come "*la modalità con cui a livello internazionale si definiscono le teorie e le pratiche educative (scolastiche ed extrascolastiche) connotate dalla centralità che viene riconosciuta all'ambiente esterno come luogo privilegiato della formazione*" (Farné, Agostini, 2014, p.10). Secondo tale prospettiva, nella realtà odierna, l'*Outdoor Education* assume il ruolo di un vero e proprio progetto pedagogico che si struttura prendendo come punto di riferimento le realtà socioculturali di un territorio e delle istituzioni educative (Farné, Agostini, 2014).

Didattica laboratoriale

La seconda metodologia fondamentale è stata la didattica laboratoriale grazie alla quale è stato possibile promuovere attività didattiche ad alto contenuto esperienziale attraverso l'organizzazione del laboratorio così da favorire l'incontro attivo degli alunni con la disciplina. L'importanza di strutturare attività didattiche in forma laboratoriale è messa in luce anche all'interno delle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012, p.35).

Altre metodologie

Tutte le attività hanno previsto l'utilizzo della discussione collettiva. La condivisione di idee, di ragionamenti e di riflessioni sono stati fondamentali al fine di rilevare le idee degli alunni durante gli esperimenti. I momenti di discussione collettiva hanno fatto emergere aspetti interessanti che non sarebbero stati presi in considerazione con la sola modalità scritta. La tecnica del brainstorming si è rivelata utile per raccogliere le idee degli alunni così come l'utilizzo di *Excel* per l'elaborazione di istogrammi sulle loro ipotesi. Un'altra metodologia utilizzata è stata quella del *Cooperative Learning*. Gli alunni hanno svolto la maggior parte delle attività a coppie o in piccoli gruppi. Le metodologie

adottate hanno permesso agli alunni di rivestire i panni di osservatori, esploratori e costruttori attivi delle loro conoscenze. La progettazione è in linea con il principio “*Learning by doing*” definito da John Dewey (2014). Secondo il pedagogista, la scuola non deve trasmettere saperi, ma è il luogo di attività concrete e di risoluzione di problemi. Egli sostiene che l’insegnante riveste un ruolo fondamentale nella selezione di esperienze funzionali alla crescita dell’alunno. Attraverso una serie di esperienze attive e dirette, l’alunno ha la possibilità di avvicinarsi sempre di più al sapere (Dewey, 2014). Naturalmente, oltre ai contenuti specifici legati alla disciplina, l’intero percorso ha posto una certa attenzione ai fattori emotivo-affettivi.

L’ANALISI DELLE IDEE SPONTANEE NELLA DIDATTICA DELLA FISICA

Dagli anni ‘70 le “*conoscenze che lo studente già possiede*” hanno iniziato a diventare oggetto di studio delle ricerche in *Science Education*. Questo è dimostrato dalla varietà e ricchezza di termini impiegati tra i quali: concezioni, idee, rappresentazioni, ragionamenti, schemi associati a un certo numero di prefissi (quali pre-, e mis-) e aggettivi (comuni, ingenui, spontanee). “*Le rappresentazioni mentali, dette anche concezioni spontanee, sono definite come chiavi di lettura che ogni individuo possiede per comprendere i fenomeni della realtà quotidiana*” (Tonon, Ferrero, Provera, 2004). Le esperienze in ambito educativo e didattico conducono ogni persona a costruirsi un’immagine di un fenomeno o oggetto senza aver ricevuto una spiegazione dal punto di vista scientifico. Dal confronto tra la propria visione personale e quella degli scienziati si possono riconoscere, però, delle discrepanze o delle somiglianze. Si parla di concezione accreditata quando è riconosciuta dalla comunità scientifica e di concezione difforme quando la rappresentazione mentale differisce da quella scientifica. Essa sarà a sua volta una preconcezione se l’idea è precedente ad una spiegazione formale, oppure una misconcezione se relativa a qualche nozione già affrontata e acquisita nel contesto scolastico. L’utilizzo metodologico dell’analisi accurata e puntuale delle concezioni difformi degli alunni permette di elaborare un percorso didattico finalizzato a far evolvere tale concetto. L’alunno, nel passaggio da concezione difforme a riconosciuta, attraversa una fase di conflitto cognitivo che lo costringe a mettere in crisi il modello ingenuo, integrandolo con i nuovi concetti. Questo condurrà l’alunno alla costruzione di un modello accreditato e riconosciuto dalla comunità scientifica. Nel seguente lavoro di ricerca, l’indagine delle idee spontanee, possedute dagli alunni sul fenomeno del galleggiamento, ha rappresentato il punto di partenza per la strutturazione di un percorso finalizzato all’acquisizione di un sapere riconosciuto e accreditato dal punto di vista scientifico. Se questa operazione di analisi delle rappresentazioni mentali non si verifica o fallisce si possono generare due situazioni:

- • presenza di due rappresentazioni mentali della stessa cosa: una didattica e una personale,
- • accantonamento temporaneo della rappresentazione personale che riemergerà in futuro.

Per un insegnante la conoscenza delle rappresentazioni mentali dei propri studenti si configura come strumento principale per l’individuazione e successiva rimozione degli ostacoli concettuali che si interpongono all’apprendimento. L’esperienza diretta è una delle strategie didattiche utilizzate per promuovere l’evoluzione delle concezioni preesistenti e l’integrazione delle nuove nozioni acquisite. È opportuno indagare la natura di queste conoscenze spontanee in quanto sono personali, incoerenti e stabili. Le idee personali influenzano il modo attraverso il quale vengono acquisite le informazioni. Le idee incoerenti sono le molteplici interpretazioni che un bambino può possedere su un determinato fenomeno che non viene spiegato in maniera univoca. Infine, le idee sono stabili in quanto vi è la tendenza di non vedere un cambiamento nonostante i tentativi di offrire delle controprove (Driver et al., 1985). A prescindere dalla loro natura, le idee spontanee rappresentano un’opportunità per l’apprendimento. La conoscenza delle idee degli alunni permette di pianificare in modo consapevole le esperienze di apprendimento coerenti e funzionali alla loro evoluzione. Per raccogliere le rappresentazioni mentali degli studenti si possono utilizzare differenti strumenti quali: disegno, questionario, intervista. È importante sottolineare ai bambini che non si tratta di un momento valutativo e che è importante che rispondano liberamente senza avere timore di giudizi negativi. Nel seguente lavoro di ricerca è stato somministrato un questionario iniziale per indagare le idee spontanee dei bambini sul fenomeno fisico, attraverso domande di tipo qualitativo e quantitativo. Gli item del

questionario sono stati strutturati alla luce dei risultati ottenuti dalla letteratura esistente. I risultati iniziali, ricavati dal questionario, hanno costituito il punto di partenza per la progettazione delle attività didattiche e sono stati confrontati con i risultati finali per indagare l'efficacia dell'intervento.

QUADRO TEORICO DEGLI STUDI SUL GALLEGGIAMENTO

Il lavoro di ricerca pone le sue basi teoriche su studi condotti da illustri ricercatori in ambito scientifico. Di seguito vengono riportati alcuni degli autori che hanno approfondito con le loro ricerche l'idea di galleggiamento nei bambini. Inseguito alla tendenza a ignorare il galleggiamento e l'affondamento come argomento di valore per il curriculum scolastico, Biddulph e Osborne (1984) hanno deciso di condurre una ricerca per indagare le idee dei bambini su questi fenomeni fisici. I due studiosi sostengono che attraverso questi due concetti è possibile iniziare a sviluppare, in modo informale, altri concetti scientifici come il peso e il volume. Biddulph e Osborne, nel 1984, conducono uno studio su un campione di 144 bambini di età compresa tra i 7 e i 14 anni per indagare le loro idee sui concetti di galleggiamento e affondamento.

Dagli studi Biddulph e Osborne sono emersi diversi aspetti interessanti:

- presenza nei bambini di una forte idea di galleggiamento in relazione alla posizione dell'oggetto in acqua;
- «peso», inteso come massa, è considerato la causa principale del galleggiamento per i bambini;
- influenza della lunghezza di un oggetto e della profondità dell'acqua sul galleggiamento di un corpo sul galleggiamento.

Tali idee sono state rilevate anche nello studio di Yong Jae Joung (2009) che pone il focus sulle situazioni tipicamente percepite dai bambini sul fenomeno fisico. Sempre nel 2009, Carey mette in luce l'assenza di differenziazione nei bambini del concetto di peso e di densità. Dagli studi è emerso che il galleggiamento si configura come contesto privilegiato per rilevare le rappresentazioni mentali dei bambini sul concetto di densità che risulta essere complesso da comprendere. L'analisi della letteratura scientifica ha permesso di capire i principali nodi critici per i bambini nella comprensione del fenomeno e di costruire un solido quadro teorico di riferimento sul quale basare l'intero progetto di ricerca.

STRUMENTI

Per lo svolgimento delle attività sono stati utilizzati differenti strumenti:

- Test iniziale e uno finale: finalizzati a raccogliere dei dati utili all'analisi e al confronto per verificare l'efficacia del percorso.
- Quaderno delle scoperte: per tener traccia delle osservazioni e nuove conoscenze acquisite come dei veri scienziati.
- Schede di autovalutazione: finalizzate a ricevere un *feedback* dagli alunni e stimolarli in un lavoro di riflessione e consapevolezza rispetto al lavoro svolto e alle conoscenze acquisite.
- Materiali per gli esperimenti: necessari per lo svolgimento delle diverse attività

Il percorso ha previsto attività laboratoriali attraverso le quali gli alunni hanno potuto sperimentare direttamente e concretamente il fenomeno fisico, attività di creazione di prodotti che hanno valorizzato la creatività e attività di riflessione, di osservazione e di discussione.

IL PROGETTO

Attività iniziali

L'intervento sperimentale è stato strutturato in tre fasi:

- 1° fase: sono state progettate alcune attività iniziali per sondare le idee spontanee dei bambini.

- 2° fase: sono state progettate attività sperimentali e laboratoriali per lavorare sul fenomeno fisico in modo pratico e concreto.
- 3° fase: sono state proposte attività finali per verificare l'efficacia del lavoro di ricerca e verificare la significatività del percorso per lo sviluppo di competenze scientifiche.

Una delle attività, svolte nella prima fase, è stata la somministrazione di un questionario iniziale composto da 7 quesiti, suddivisi a loro volta in altri item, elaborati alla luce degli studi di illustri ricercatori (Biddulph e Osborne 1984, Kohn 1993, Carey 2009, Joung 2009). In ogni item si è posto il focus su un aspetto specifico del galleggiamento. A titolo esemplificativo si riporta, nella figura 1, il quesito relativo all'analisi delle idee spontanee degli alunni sull'accezione di galleggiamento che risulta essere problematica sotto diversi punti di vista. Per verificare l'esistenza della difficoltà rispetto al significato di galleggiamento, è stato elaborato il quesito riportato nella figura 1. Tale quesito presenta sei situazioni nelle quali un parallelepipedo assume posizioni diverse all'interno del contenitore pieno d'acqua: sulla superficie dell'acqua, la maggior parte sopra la superficie e una piccola parte sotto, la maggior parte sott'acqua e una piccola parte sopra, quasi sul fondo (immerso completamente), sul fondo, nell'aria. Agli alunni è stato chiesto di osservare l'oggetto e scegliere la risposta che ne rappresenta il comportamento. L'oggetto raffigurato è un semplice parallelepipedo. Non viene specificato il materiale o altre caratteristiche che potrebbero influenzare le risposte degli alunni.

Samuele e Marta hanno buttato sei oggetti gialli in un contenitore pieno d'acqua. Dopo un po' di tempo, osservano le posizioni assunte dagli oggetti. Osserva bene l'immagine. Crocetta la risposta che, secondo te, rappresenta l'immagine.



A) L'oggetto numero 1	D) L'oggetto numero 4
☐ Sta galleggiando	☐ Sta galleggiando
☐ È affondato	☐ È affondato
☐ In parte galleggia e in parte affonda	☐ In parte galleggia e in parte affonda
☐ Altro:	☐ Altro:

Figura 1. Esempio di item “il significato di galleggiamento”

Come si osserva dalla tabella nella figura 2, 31 alunni (88%) identificano correttamente come situazione di galleggiamento la posizione dell'oggetto sulla superficie dell'acqua (domanda A). La risposta conferma gli esiti ottenuti dalla letteratura scientifica. Anche la situazione dell'oggetto sul fondo (domanda B) è correttamente interpretata da 34 alunni (97%) come affondamento. Queste due condizioni risultano essere chiare ancora prima di affrontare nello specifico il fenomeno. Per quanto riguarda le situazioni intermedie, invece, emergono maggiori criticità. Nello specifico, l'oggetto raffigurato con “una porzione significativa sulla superficie e una piccola parte sotto” (domanda C) per 23 alunni (65%) in parte galleggia e in parte no. Solo 9 alunni (26%) considerano correttamente la situazione come galleggiamento, mentre 2 (6%) ritengono sia affondato poiché non è completamente sopra la superficie. Un solo alunno (3%) crocetta la categoria “altro” senza fornire una spiegazione a riguardo. Con l'aumento dell'immersione dell'oggetto aumenta anche la frequenza degli alunni nel considerarlo non galleggiante, come si osserva nella situazione D. Per 28 alunni (80%) l'oggetto “quasi sul fondo” è affondato, mentre per 4 (11%) in parte galleggia e in parte no. Anche in questo caso 3 alunni (9%) crocettano “altro” specificando di non essere sicuri della risposta. Nessun alunno considera l'oggetto completamente immerso e quasi sul fondo come situazione di galleggiamento. Questa situazione si ripresenta anche nella domanda F dove 22 alunni (63%) affermano che l'oggetto in parte galleggia e in parte no. Per gli alunni la piccola parte sopra l'acqua galleggia, mentre quella sotto no. Il numero di risposte corrette, rispetto alla situazione B, scende a 5 (14%). Questo esito suggerisce che il

grado di immersione nell'acqua è considerato come un parametro per definire la condizione o meno di galleggiamento. Tali risultati confermano le ricerche di Biddulph e Osborne (1984) dove è emerso che per i bambini un oggetto completamente immerso non galleggia. Infine, si è proposta la situazione E in cui l'oggetto è collocato fuori dall'acqua, ossia "nell'aria". 25 alunni (72%) identificano correttamente la risposta, mentre 6 bambini (17%) considerano l'oggetto in una situazione di galleggiamento e 4 (11%) in parte. L'analisi delle risposte suggerisce che per i bambini il termine "affondare" non fa solo riferimento all'oggetto sul fondo ma anche ad oggetti sott' acqua o completamente immersi. Infatti, questi oggetti per gli alunni sono affondati in quanto non galleggiano. Rilevata questa idea spontanea, attraverso attività sperimentali e di osservazione diretta, si è cercato di far acquisire l'idea corretta dal punto di vista scientifico.

IL SIGNIFICATO DI GALLEGGIAMENTO (Quesito 3 iniziale)								
DOMANDA	RISPOSTA 1		RISPOSTA 2		RISPOSTA 3		RISPOSTA 4	
	STA GALLEGGIANDO		È AFFONDATO		IN PARTE GALLEGGIA IN PARTE NO		ALTRO	
A (Sulla superficie)	31	88%	2	6%	1	3%	1	3%
B (sul fondo)	0	0%	34	97%	0	0%	1	3%
C (la maggior parte sulla superficie e una piccola parte sotto)	9	26%	2	6%	23	65%	1	3%
D (quasi sul fondo, immerso completamente)	0	0%	28	80%	4	11%	3	9%
E (nell'aria)	6	17%	0	0%	4	11%	25	72%
F (la maggior parte sott'acqua e una piccola parte sopra)	5	14%	7	20%	22	63%	1	3%

Figura 2. Tabella dei dati item "il significato di galleggiamento" questionario iniziale

Attività sperimentali

La seconda fase dell'intervento ha previsto attività sperimentali e laboratoriali nelle quali gli alunni hanno rivestito il ruolo di scienziati ed esploratori. Come si osserva dalla figura 3, gli alunni hanno verificato le loro ipotesi immergendo alcuni oggetti sul fiume e in una vaschetta. Successivamente hanno registrato le osservazioni sulla scheda dell'esperimento.



Figura 3. Attività laboratoriali sul fiume

È stato chiesto agli alunni di suddividere gli oggetti in due gruppi:

- oggetti che galleggiano (es. bottiglia di plastica, tappo di sughero)
- oggetti che affondano (es. sasso, gomma scolastica)

Durante questa fase, è stato chiesto di formulare delle spiegazioni sulle cause di tali galleggiamenti e affondamenti. Inizialmente la risposta condivisa da tutti gli alunni faceva riferimento alla variabile

“peso” intesa come massa.

In un secondo momento, grazie agli esperimenti, iniziano a emergere le prime perplessità in quanto non riescono ad applicare questo criterio a tutte le situazioni osservate. Attraverso numerose attività (*esperimento arancia, costruzione barchette, esperimento pongo, oggetti nell'acqua e nell'acqua e sale...*) sperimentali gli alunni sono arrivati a identificare tre le spiegazioni del fenomeno fisico la presenza della forza di Archimede, la variabile materiale, liquido in cui è immerso un oggetto.

Attività finali

Nella terza fase dell'intervento, tra le attività finali, è stata prevista la somministrazione di un questionario per verificare l'efficacia del percorso attraverso il confronto con i dati iniziali. Alcuni item sono stati riproposti in una versione simile a quella iniziale così da rendere possibile il confronto. A titolo esemplificativo si riportano i risultati ottenuti nel quesito iniziale, riportato nella figura 1, relativo all'accezione di galleggiamento riproposto al termine del percorso per mettere in luce il cambiamento nelle idee degli alunni. La tabella della figura 4 mostra un aumento significativo delle risposte corrette in tutti e sei gli item. Le situazioni in cui la posizione dell'oggetto è sulla superficie e sul fondo erano chiare all'inizio e rimangono tali anche alla fine. In aggiunta, anche le situazioni intermedie risultano essere comprese dalla maggior parte degli alunni. La frequenza degli errori nelle situazioni intermedie (domanda C, D, E) è diminuita radicalmente rispetto al test iniziale. Ad esempio, nel test iniziale l'oggetto “completamente immerso, quasi sul fondo” affondava per l'80% del campione e per lo 0% galleggiava. Nel test finale, invece, il 77% ritiene che galleggi e solo il 6% che affondi. Tutti gli alunni sanno riconoscere una situazione di affondamento (domanda F). Questo dato suggerisce che le attività sperimentali hanno svolto un ruolo importante per supportare e favorire la comprensione dell'accezione di galleggiamento negli alunni. Gli alunni hanno compreso che un corpo può galleggiare in differenti posizioni per via di alcune variabili, mentre un oggetto è considerato affondato solo quando tocca il fondo.

IL SIGNIFICATO DI GALLEGGIAMENTO (Quesito 3 finale)								
DOMANDA	RISPOSTA 1		RISPOSTA 2		RISPOSTA 3		RISPOSTA 4	
	STA GALLEGGIANDO		È AFFONDATO		IN PARTE GALLEGGIA IN PARTE NO		ALTRO	
A (nell'aria)	0	0%	0	0%	0	0%	35	100%
B (sulla superficie)	34	97%	0	0%	1	3%	0	0%
C (a metà tra superficie e sotto)	33	94%	0	0%	2	6%	0	0%
D (appena sotto la superficie)	31	88%	1	3%	2	6%	1	3%
E (completamente immerso quasi sul fondo)	27	77%	2	6%	6	17%	0	0%
F (sul fondo)	0	0%	35	100%	0	0%	0	0%

Figura 4. Tabella dei dati item “il significato di galleggiamento” questionario finale

ANALISI DEI DATI

L'analisi dei dati, di cui si è illustrato solo un quesito a titolo esemplificativo, ha evidenziato il progressivo aumento delle risposte corrette da parte degli alunni rispetto alle tematiche indagate sul fenomeno fisico del galleggiamento. Questo permette di affermare che il percorso è stato significativo per lo sviluppo di competenze scientifiche. Gli alunni hanno compreso, attraverso gli esperimenti, che sono diverse le variabili da considerare nel galleggiamento di un corpo in acqua. Infatti, hanno

implementato le motivazioni associate al galleggiamento rispetto all'inizio del percorso dove la variabile principale era il "peso". Le misconcezioni iniziali si sono evolute in idee accreditate dalla comunità scientifica. Gli alunni hanno acquisito l'accezione corretta del termine galleggiamento, compreso che la profondità e la lunghezza non influenzano il galleggiamento di un corpo, osservato lo spostamento del volume d'acqua di un oggetto dello stesso materiale ma con forma diversa, e scoperto la presenza della forza di Archimede. Gli alunni hanno iniziato ad avvicinarsi indirettamente al concetto di densità grazie agli esperimenti. Hanno affinato le loro capacità osservative, riflessive e argomentative grazie agli esperimenti e alle discussioni collettive svolte sulle scoperte effettuate. Le attività sono state strutturate seguendo il metodo scientifico così da integrare la conoscenza teorica del metodo con la sperimentazione pratica. Gli alunni hanno affermato di essersi divertiti a lavorare sul galleggiamento e di essere soddisfatti del percorso svolto. Questo suggerisce che si tratta di un argomento con un grande potenziale didattico.

CONCLUSIONI

Riprendendo le parole di Confucio (551 a.C. – 479 a. C): “*se ascolto dimentico, se vedo ricordo, se faccio capisco*”, questo lavoro di ricerca ha reso possibile la comprensione del fenomeno attraverso la valorizzazione della dimensione del “fare”. La conoscenza del fenomeno scientifico non è più un semplice contenuto astratto bensì ha assunto i connotati di qualcosa di concreto che è possibile sperimentare direttamente sia in aula sia in outdoor. L'esplorazione del fenomeno fisico, tramite la dimensione del “fare”, ha contribuito a rendere l'apprendimento divertente e motivante confermando anche una buona potenzialità delle metodologie adottate per l'insegnamento delle discipline scientifiche.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i professori Matteo Leone e Marta Rinaudo dell'Università degli Studi di Torino per aver reso possibile l'attuazione del progetto sperimentale, l'organizzazione del Convegno DI.FI.MA per la preziosa opportunità, le insegnanti e i bambini della scuola primaria a cui è stato rivolto il progetto di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

- Biddulph, F., Osborne, R. (1984). *Pupils' ideas about floating and sinking*, Research in Science Education, 14, 11424.
- Carey S. (2009). *The origin of concepts*, Oxford University Press.
- Coggi C., Ricchiardi P. (2005). *Progettare la ricerca empirica in educazione*, Carocci editore.
- Dewey J. (2014). *Esperienza ed educazione*, Raffaello Cortina Editore.
- Donaldson G. W., Donaldson L.E. (1958). Outdoor Education: A Definition. *Journal of Health, Physical Education and Recreation*, 29, p.17. <https://doi.org/10.1080/00221473.1958.10630353>
- Farné R., Agostini F. (2014). (a cura di), *Outdoor Education. L'educazione si-cura all'aperto*, p.10, Edizioni Junior.
- Joung Y.J., Song J. (2004). An analysis of the features of “Typically-Perceived-Situation (TPS)” for in- depth understanding of students' ideas: the case of fuor elementary school students' TPSs related to action of force. *Journal of the Korean Association for Research in Science Education*, 24(4), p.785803. <http://dx.doi.org/10.1080/09500690903159352>
- Joung Y.J. (2009). *Children's Typically-Perceived-Situations of Floating and Sinking*, International Journal of Science Education, 31:1, 101127. <http://dx.doi.org/10.1080/09500690701744603>
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) (2012). *Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) (2018). *Indicazioni nazionali e Nuovi scenari*, comitato scientifico nazionale per le Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione.

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

<https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/>

ONU, Agenda 2030 (2015). <https://unric.org/it/agenda-2030/>

Tonon M., Ferrero E., Provera A. (2004). *Esperienze pratiche e riflessioni in Scienze della Terra e Scienze della Vita*. In Pera T. (a cura di): Incontri con le scienze, testi e contesti per la didattica, Verbania: 16-18 maggio 2003. Ed. Scholé Futuro, 2004.

https://www.researchgate.net/publication/313250550_Le_Scienze_della_Terra_fondamenti_ed_esperienze_pratiche.

ESCAPE ROOM FISICA MEDICA – sblocca la scoperta della fisica in medicina

Aurora Camperi¹, Arianna Ferro^{1,2}, Elisabetta Medina^{1,2}, Umberto Deut^{1,2}, Diango Manuel Montalvan Olivares^{1,2}, Elisa Fiorina¹, Francesco Pennazio¹, Franco Mostardi^{1,2}, Maria Beatrice Vallero³, Marta Rinaudo², Piergiorgio Cerello¹, Roberto Cirio^{1,2}, Roberto Sacchi^{1,2}, Simona Giordanengo^{1,2}, Veronica Ferrero^{1,2}, Anna Vignati^{1,2}

1. Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

2. Università degli studi di Torino

3. Liceo Botta - Liceo Classico - Linguistico Statale - Internazionale Linguistico e Scientifico a opzione Spagnola (Ivrea, TO)

aurora.camperi@edu.unito.it

Abstract

L'Escape Room di Fisica Medica (ER Fis Med) è stata realizzata dal gruppo di Fisica Medica dell'Università degli Studi di Torino (UNITO) e dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) di Torino, in collaborazione con l'Associazione Italiana di Fisica Medica (AIFM).

L'ER Fis Med si sviluppa come un gioco/laboratorio interattivo all'interno del quale un piccolo gruppo di giocatori è chiamato a risolvere enigmi e indovinelli attinenti alla fisica medica così da sbloccare lucchetti e trovare indizi al fine di uscire da una stanza nel minor tempo possibile.

Il percorso dell'ER Fis Med è suddiviso in tre ambienti differenti, ognuno della durata massima di 15 minuti. Inizialmente i tre ambienti guidavano il giocatore nel percorso di un paziente oncologico, dalla diagnosi alla terapia, ma con il successo dell'ER Fis Med sono poi stati aggiunti nuovi ambienti da sostituire occasionalmente agli originari per rivolgersi a un pubblico con età e preconoscenze differenti. Al termine di ciascun ambiente il ricercatore che ha accompagnato i giocatori durante l'esperienza si occupa di riassumere i concetti emersi durante la risoluzione degli indovinelli di modo da trasmettere un "take home message" efficace; a tal fine possono essere utilizzate molteplici tecnologie didattiche.

L'ER Fis Med ha finora ricevuto un'ottima accoglienza in tutte le occasioni in cui è stata presentata e ha dimostrato una notevole versatilità sia dal punto di vista logistico sia dal punto di vista della varietà di pubblico che è in grado di coinvolgere.

Parole-chiave

Escape Room, Fisica Medica

Introduzione

Nel contesto educativo contemporaneo, la ricerca di approcci innovativi per coinvolgere gli studenti e favorire l'apprendimento attivo è diventata una priorità [1]. In questo scenario, l'Escape Room (ER), una forma di gioco che ha guadagnato popolarità negli ultimi anni, emerge come un'opzione promettente [2]. Caratterizzata da un ambiente immersivo e da sfide coinvolgenti, l'ER offre un'esperienza di apprendimento interattiva che può essere adattata a una vasta gamma di discipline.

Questo articolo presenta il potenziale emerso dall'esperienza di una ER a tema fisica medica impiegata come strumento didattico, a partire dalla descrizione del modo in cui l'ER è stata progettata e implementata per favorire lo sviluppo di competenze chiave, quali il pensiero critico, la risoluzione dei problemi, la collaborazione e la comunicazione.

L'ER Fisica Medica (ER Fis Med) nasce nel 2020 da un'idea del gruppo di ricerca in fisica medica dell'Università degli Studi di Torino e della sezione di Torino dell'INFN allo scopo di introdurre bambin* e ragazz* a questa disciplina [3]. Inizialmente pensata per bambin* dagli 8 agli 11 anni, è poi stata rivista e modificata in modo da renderla avvincente anche per ragazz* della scuola secondaria di

secondo grado. La creazione dei vari ambienti con l'utilizzo di materiale semplice e con installazioni mobili ha consentito di esporre l'ER in molteplici sedi: i laboratori del Dipartimento di Fisica di Torino, il Giardino Botanico di Torino, il Palazzo Reale di Genova, il Palazzo dei Congressi di Firenze, il Castello Visconteo di Pavia, ecc.

Materiali e Metodi

Idealmente sono necessari spazi di circa $5 \times 5 \text{ m}^2$ per ciascun ambiente tematico (di norma tre), ma grazie alla versatilità dell'ER Fis Med è possibile allestire il gioco in circa due ore sfruttando le caratteristiche di ambienti anche molto diversi e sopperendo a eventuali mancanze degli stessi. L'allestimento della stanza prevede l'utilizzo di armadietti e scatole chiusi per mezzo di lucchetti a 3 o 4 cifre all'interno dei quali sono nascosti giochi o indovinelli da risolvere. A seconda poi della tematica vi sono oggetti più specifici per ciascun ambiente, ad esempio nella stanza dedicata alla diagnostica è presente un finto distributore automatico di merendine (Fig. 1) e ancora, nella stanza dedicata all'adroterapia vi è un tavolo sul quale sono stati incollati degli ostacoli (Fig. 2) per spiegare le potenzialità della radioterapia con ioni pesanti rispetto a quella convenzionale con fotoni o elettroni, sfruttando e osservando il rotolamento di diversi oggetti (palline di polistirolo, palline da tennis e bocce). Il gioco, in ciascun ambiente, inizia con la consegna ai giocatori di una tessera-indizio (Fig. 3) da parte del ricercatore e il conseguente avvio del cronometro; da questo momento la squadra dovrà risolvere autonomamente il primo enigma di modo da trovare le tessere-indizio successive. Se richiesto, il ricercatore può fornire un aiuto ma questo "costerà" un minuto di tempo alla squadra.

Il termine di ciascun ambiente è sancito da un cicalino (Fig. 4), il quale produce una melodia vittoriosa quando viene digitata sul tastierino la combinazione corretta. Al suono del cicalino, il cronometro viene stoppato e si registra il tempo impiegato a uscire dall'ambiente sommando gli eventuali minuti aggiuntivi dovuti agli aiuti richiesti. Al termine di tutta l'ER si calcolerà il tempo totale impiegato per stilare una classifica dei gruppi partecipanti. Una volta che i giocatori sono usciti da un ambiente, a cronometro fermo, il ricercatore si occupa di fornire una spiegazione maggiormente dettagliata dei concetti introdotti durante la fase di gioco; a tale scopo possono essere utilizzati anche video o presentazioni multimediali, pensati in relazione all'età e alle preconoscenze dei giocatori.

Il numero di componenti della squadra può variare da un minimo di due persone a un massimo di dieci; questi numeri, tuttavia, sono indicativi e dipendono strettamente dagli spazi disponibili e dall'affluenza all'ER. Idealmente, la squadra dovrebbe essere composta da cinque elementi, in questo modo si ha un buon coinvolgimento di tutti i partecipanti e si riesce a beneficiare appieno del lavoro di gruppo.

Gli ambienti tematici sviluppati fino a oggi sono cinque:

- Diagnostica;
- Adroterapia;
- Ricerca & imaging;
- Radioterapia FLASH;
- Boron Neutron Capture Therapy (BNCT)

I primi tre, sono adatti anche a bambin* a partire dagli 8 anni, in quanto la ricerca degli indizi si svolge in modo lineare e senza troppe difficoltà. Gli ultimi due ambienti, invece, sono adatti a ragazz* più grandi (dai 15 anni) poiché il ragionamento logico richiesto è leggermente più complesso. È bene sottolineare che la maggior difficoltà della ER non consiste nei concetti fisici a cui si fa riferimento, ma nei nessi logici richiesti, di conseguenza le preconoscenze sul tema specifico sono utili, ma non indispensabili.

In occasione della Notte dei Ricercatori 2022, l'ER è stata esposta a Palazzo Badini (Torino), aperta a un pubblico generico e l'allestimento prevedeva tre ambienti da svolgere in successione: diagnostica, adroterapia e ricerca & imaging. Al termine di ciascun ambiente sono stati proiettati dei brevi video, disponibili su YouTube e ideati e montati durante il periodo di pandemia, in cui dei ricercatori e/o fisici medici spiegano in maniera semplificata i concetti introdotti nella fase ludica; inoltre, conclusa l'intera esperienza, è stato chiesto ai partecipanti di compilare un questionario di gradimento. Dato il ventaglio

di età dei partecipanti, sono stati elaborati due questionari, uno per i bambini e uno per i ragazzi/adulti: l'età discriminante è stata fissata a 11 anni.

I questionari, in entrambi i casi, prevedono 4 domande, di cui una aperta e tre a scala di Likert. La domanda aperta indaga cosa è rimasto maggiormente impresso nei giocatori, mentre i quesiti a risposta multipla, approfondiscono il livello di gradimento delle materie STEM e dell'aspetto ludico della ER e il livello di interesse nel perseguire degli studi scientifici in futuro. A proposito di questo ultimo tema, sono state analizzate solamente le risposte fornite dai partecipanti in età scolare.

Discussione

L'ER FisMed è nata come semplice tentativo di coinvolgere un pubblico generico su tematiche inerenti la fisica medica e la ricerca in tale ambito e il successo che ha ottenuto ha sorpreso gli ideatori stessi dell'ER. Per questo motivo, la pianificazione delle attività da svolgere per quantificare l'impatto del gioco è iniziata solo in un secondo momento e alcuni degli aspetti da indagare non sono ancora stati valutati adeguatamente. Tra questi, un aspetto fondamentale che emerge dall'esposizione della ER è il concetto di team building: durante il gioco, infatti, ogni membro della squadra ha la possibilità di dare il proprio contributo per la risoluzione degli indovinelli, deve ascoltare e scendere a compromessi con i propri compagni. La comunicazione diviene indispensabile per la riuscita del gioco e si palesano soft skills come leadership e problem solving.

Dai questionari raccolti finora (231) è stato possibile analizzare il target di pubblico coinvolto e quanto l'esperienza della ER sia piaciuta. Nel caso dei bambin* (sotto gli 11 anni) (Fig. 5A) la matematica è considerata divertente (molto o abbastanza) nel 68% dei casi, mentre "fare scienze" lo è nell'86% dei casi. Al termine dell'ER, il 95% dei partecipanti sostiene di essersi divertito e di essere consapevole di aver utilizzato la matematica e di aver "fatto scienze" (85% in entrambi i casi).

Per quanto riguarda i ragazz* (Fig. 5B), il 91% dei partecipanti afferma di apprezzare le discipline STEM e il 95% sostiene di essersi divertito durante l'ER.

L'analisi evidenzia come in un evento pubblico, come la Notte dei Ricercatori, l'ER cattura l'attenzione di persone già mediamente interessate alle materie STEM; di queste la quasi totalità (95% sia tra i bambin* sia tra i ragazz*) poi si diverte durante l'esperienza.

La domanda aperta dei questionari chiedeva quali aspetti fossero rimasti maggiormente impressi a fine ER. Le risposte dei bambin* sono state troppo poche per effettuare un'analisi significativa, questo è probabilmente dovuto al fatto che dopo un'ora di esperienza solo pochi hanno avuto la pazienza di scrivere un commento. Dalle risposte dei ragazz* è invece emerso come gli argomenti maggiormente impressi siano stati i raggi X, l'acceleratore lineare e le varie tecniche diagnostiche, principalmente la PET: queste parole chiave, infatti, sono state scritte ciascuna almeno 5 volte nelle 74 risposte registrate.

Conclusioni

In generale l'ER Fis Med ha ricevuto un'ottima accoglienza ogni qual volta è stata esposta, dimostrando una notevole versatilità sia in termini di ambientazione sia di pubblico coinvolto.

Il gruppo di fisica medica sta attualmente lavorando per elaborare questionari per la valutazione quantitativa dell'impatto del gioco su vari livelli, sia in termini di coinvolgimento e divertimento dei partecipanti, sia in termini di apprendimento di concetti specifici. I questionari allo studio considereranno le diverse fasce di età e anche indirizzi di scuole differenti nel caso di secondarie di II grado.

Inoltre, si sta pensando di effettuare dei test prima della partecipazione alla ER e dei test dopo circa un mese dallo svolgimento del gioco, attraverso l'aiuto degli insegnanti che accompagnano le classi. In questo modo sarà possibile valutare le potenzialità didattiche di questo strumento e vedere come migliorarlo a seconda delle varie fasce d'età [4].

Recentemente, l'Università degli Studi di Torino ha approvato un progetto di Public Engagement che, a partire dall'esperienza dell'ER FisMed e di quella dell'ER elaborata dal dipartimento di Lingue e Letterature straniere e Culture moderne, punta a creare strumenti originali di insegnamento delle STEM e comunicazione della ricerca scientifica, integrati con lingua straniera e contenuto disciplinare (CLIL, Content and Language Integrated Learning). In tal modo, l'esperienza maturata grazie all'ER FisMed

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia contribuirà a rispondere alla necessità di potenziare le competenze STEM e multilinguistiche in età scolare, evidenziata dal Piano nazionale di ripresa e resilienza (Pnrr, M4C1 – Investimento 3.1.).

Figure



Fig. 1. Distributore di vivande costruito tramite l'assemblaggio di materiale povero.

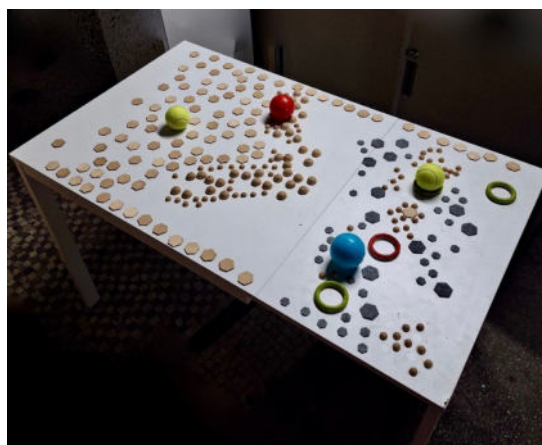


Fig. 2. Tavolo con ostacoli e obiettivi da raggiungere con diversi tipi di particelle (palline varie). Il concetto che si vuole trasmettere è quello della terapia con adroni.

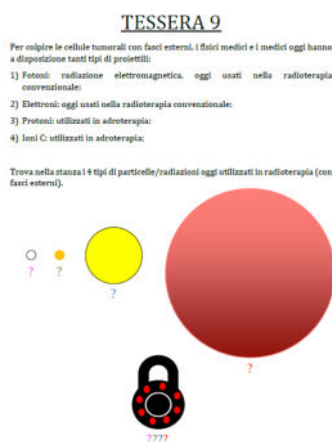


Fig. 3. Esempio di una tessera indizio che si può trovare durante il gioco. (Ambiente: Adroterapia)



Fig. 4. Uno dei tre cicalini che sancisce il termine dell'ambiente quando è digitata la combinazione corretta producendo una melodia vittoriosa.

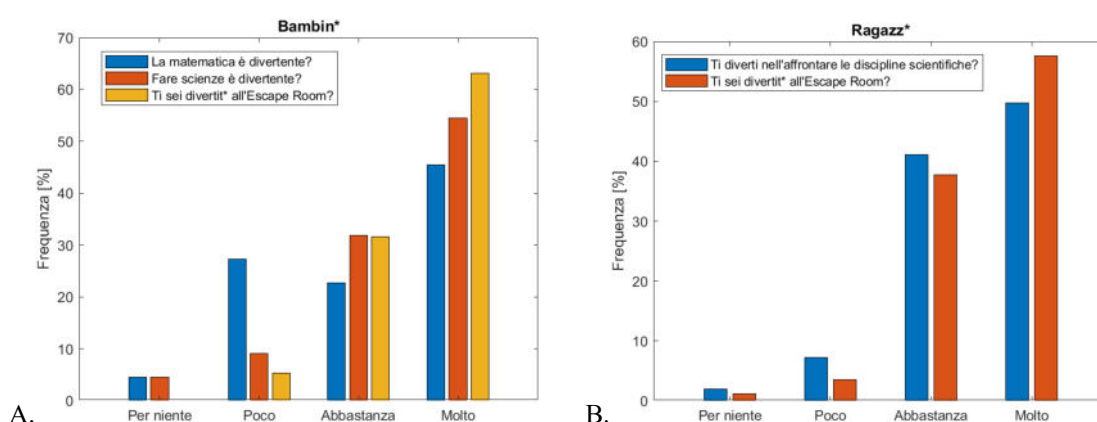


Fig. 5. Risultati dei questionari somministrati in occasione della Notte dei Ricercatori di Torino 2022. Istogramma rappresentante il grado di divertimento nell'affrontare le materie scientifiche in confronto al divertimento provato durante l'ER nel caso dei bambin* (A) e dei ragazz* (B)

BIBLIOGRAFIA

- [1] Iacopini, Ilaria. (2023). Il ruolo delle attività ludodidattiche nella scuola media. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*. 115-134. 10.33683/ddm.23.13.6.
- [2] Vizzari, A. R. (2022). *Didattica con le Escape Room. Spunti metodologici e percorsi operativi disciplinari*. Erickson.
- [3] Lathwesen, C.; Belova, N. Escape Rooms in STEM Teaching and Learning—Prospective Field or Declining Trend? A Literature Review. *Educ. Sci.* 2021, 11, 308. <https://doi.org/10.3390/educsci11060308>.
- [4] Alice Veldkamp, Liesbeth van de Grint, Marie-Christine P.J. Knippels, Wouter R. van Joolingen, Escape education: A systematic review on escape rooms in education, *Educational Research Review*, Volume 31, 2020, 100364, ISSN 1747-938X, <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100364>

IL MUSEO DI FISICA: STRUMENTO DI RICERCA DIDATTICA E STORICA

Antonio Amoroso^{1,3}, Matteo Leone^{2,3}, Daniela Marocchi¹, Marta Rinaudo^{1,3}, Marina Serio¹

¹Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Torino

²Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Torino

³Museo di Fisica, Università degli Studi di Torino

a.amoroso@unito.it

Abstract

Il museo di Fisica dell'Università di Torino si occupa della conservazione della collezione di strumenti scientifici in ambito fisico e della ricerca storica in merito allo sviluppo della Fisica a Torino.

Il Museo offre visite didattiche rivolte all'intera classe e pianificate con il docente per offrire il percorso più adatto alla programmazione curricolare. La visita si compone di una parte sperimentale con attività laboratoriali atte a replicare strumenti ed esperimenti storici ispirati alla collezione museale.

Parole-chiave

Laboratorio, storia della Fisica, museo

INTRODUZIONE

Il Museo di Fisica conserva e valorizza il patrimonio di strumenti scientifici usati per ricerca e didattica in Fisica, nell'Università degli Studi di Torino, dalla fine del Settecento ai giorni nostri. La collezione comprende oltre un migliaio di strumenti. La sede del Museo si trova presso il Dipartimento di Fisica: nell'edificio storico, in vetrine poste nei corridoi del piano terra, del primo piano e nella Sala Wataghin dove è esposta una parte considerevole del patrimonio (figure 1-4).

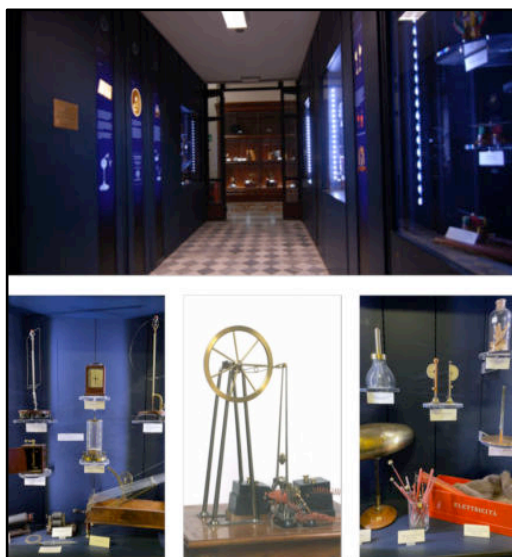


Figure 1-4: In alto - Ingresso dell'esposizione museale; da sinistra a destra – strumenti di produzione Jest, Motore di Botto, strumenti per lo studio dell'elettricità statica.

Da novembre 2022 è stata allestita una nuova sala per permettere l'esposizione di una parte della strumentazione di grandi dimensioni che non era possibile sistemare nelle vetrine espositive già presenti. Sono esposti, ad esempio, una coppia di specchi ustori, una grande macchina elettrica, un modello di nonio didattico della lunghezza di 2,5 m ed una lampada a scarica entrambe di produzione Jest (figura 5).

E' entrata inoltre a far parte dell'esposizione museale una sezione dedicata alla Fisica moderna con particolare attenzione al Laboratorio del Sincrotrone dell'Università, attivo dagli anni '50 agli anni '70 del secolo scorso (figura 6).

L'apertura di nuove sale e sezioni espositive ha dato una ulteriore spinta al lavoro di ricerca storica, affinché la nuova strumentazione si inserisca al meglio nei percorsi didattici e di visita.

Nel prossimo futuro è prevista l'apertura di una sezione dedicata alle macchine di calcolo che dagli anni '50 in poi sono legati in modo indissolubile agli esperimenti di fisica moderna.



Figura 5: Nuova sala espositiva per i grandi strumenti



Figura 6: area espositiva dedicata alla fisica moderna

IL PROGETTO “VICINI”

Nel corso dell'a.a. 2022-2023 il Museo è stato coinvolto anche in un progetto di public engagement (PE) di Ateneo dal titolo “*VICINI - Viaggio alla scoperta della Città della Scienza di UniTo: le radici del futuro*”.

La realizzazione del progetto della città della Scienza, prevedeva anche un Istituto di Fisica, e fu resa possibile dalla collaborazione tra mondo accademico, organi centrali di governo ed enti locali, che individuarono nell'incremento della scienza sperimentale e nell'industrializzazione le leve principali su cui agire. Sulla scelta del luogo in cui far sorgere gli istituti scientifici universitari e su quanti edificarne si aprì un dibattito che vide schierate due opposte fazioni: una che auspicava che il luogo scelto fosse quello prospiciente il Cimitero Generale, in zona Vanchiglia, della cui vicinanza avrebbe certamente tratto giovamento il costituendo Palazzo destinato agli Istituti di Anatomia Umana e Medicina Legale; mentre la seconda, risultata poi vincitrice, quelli che chiedevano che il nuovo complesso universitario sorgesse vicino al Parco del Valentino (figura 7).

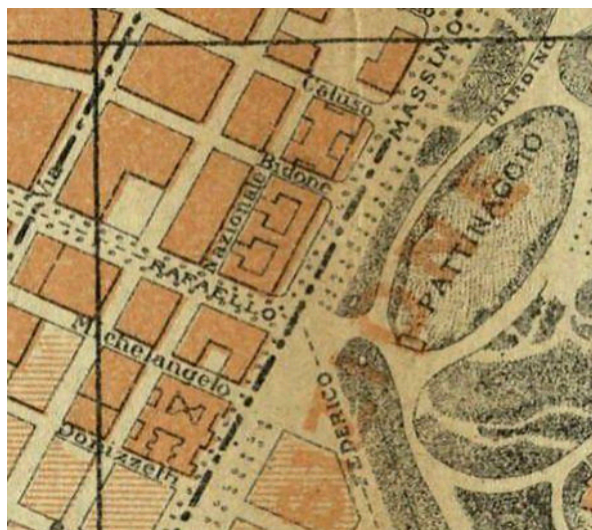


Figura 7: Particolare della mappa della zona del Valentino con le sagome degli edifici universitari

In particolare, il Dipartimento di Fisica, nell'ambito del progetto "Vicini" ha offerto, nella settimana 14-20 novembre 2022, la visita guidata al museo di Fisica in due formati:

- 1) Dal lunedì al venerdì - una classe al giorno è stata coinvolta in un percorso didattico della durata di 3 ore che prevedeva la visita guidata e attività laboratoriali legate a strumenti esposti nelle vetrine.
- 2) Sabato e domenica – apertura al pubblico con la programmazione di 10 turni di visita della durata di 1 ora e mezza ciascuno con 20 posti disponibili per turno. L'attività prevedeva un seminario iniziale tenuto da ricercatori del Dipartimento per far conoscere alcune linee di ricerca attuali nell'ambito della Fisica, seguito dalla visita guidata al museo. La partecipazione all'evento è stata ampia per un totale di 160 persone (figura 8).

Per le attività legate al progetto, il Museo si è avvalso della collaborazione di studenti universitari con borsa di collaborazione per un totale di 100 ore, che hanno sviluppato competenze didattiche e laboratoriali a seguito di una formazione specifica offerta dal gruppo di ricerca.

In aggiunta ai visitatori legati al progetto Vicini, le attività del Museo nell'a.a. 22-23 hanno accolto circa 300 studenti e i relativi docenti, consentendo il proseguimento della ricerca sulla validità della storia della Fisica come strumento didattico.



Figura 8: Un momento di una delle visite guidate al museo

PERCORSI DIDATTICI AL MUSEO

Il Museo di Fisica è aperto alle scuole secondarie per le attività didattiche dedicate che vengono adattate alle esigenze delle classi partecipanti. La proposta suggerita per una classe alla volta ha la durata di 3 ore e si compone di due parti: una parte sperimentale e una di visita.

Nella fase sperimentale si cerca di ricostruire alcuni degli strumenti esposti nel Museo con materiale moderno e a basso costo. Lo scopo di questa attività è permettere la comprensione del fenomeno fisico attraverso l'utilizzo di materiale a basso costo e di facile reperibilità, evidenziando le difficoltà tecniche e lo sviluppo tecnologico che hanno portato al perfezionamento dello strumento. La seconda parte dell'attività prevede la visita guidata al Museo.

I percorsi didattici vengono proposti agli insegnanti e adattati in base alle esigenze delle classi, ove possibile. All'inizio dell'attività viene proposto un test anonimo di raccolta delle loro idee sui fenomeni che verranno affrontati in laboratorio; Questo ha il duplice obiettivo di far riflettere gli studenti sulla loro conoscenza del fenomeno da confrontare poi con l'esperimento per poter valutare il legame tra il percorso storico di scoperta del fenomeno e il pensiero degli studenti ma anche per proseguire nella ricerca didattica sulle concezioni spontanee degli studenti.

I percorsi, inizialmente pensati per gli alunni delle scuole superiori di secondo grado, sono in fase di adattamento per poterli rendere fruibili dagli alunni delle scuole superiori di primo grado, dando maggior risalto alla fenomenologia e meno al rigore matematico. La visita del museo inoltre è ripensata per essere più breve selezionando alcune vetrine di maggior interesse arricchendola tuttavia con dimostrazioni pratiche di altri esperimenti.

In particolare, l'attività "temperatura e calore" che ha come obiettivo lo studio degli effetti della radiazione termica sui metalli, è stata adattata e proposta a 6 classi prime di scuola secondaria di primo grado. Le esperienze sono volte ad approfondire il fenomeno della dilatazione termica con riferimento all'anello di Gravesande, la costruzione di un termoscopio e lo studio dei passaggi di stato mediante l'uso della campana da vuoto.

Le altre tematiche proposte alle scuole sono legate allo studio dei fenomeni elettrici (elettrizzazione ed esperienza di Millikan), al magnetismo (osservazione delle linee di campo e misura dell'intensità del campo generato da una bobina cilindrica), le leggi dei fluidi e del vuoto (principio di Archimede e leggi di Pascal e Stevino), ottica geometrica (funzionamento di specchi e lenti convergenti e divergenti), ottica fisica (diffrazione e fenomeni ottici in astrofisica) e il suono (sovrapposizione di onde e la loro propagazione in aria e nei metalli).

Le attività didattiche del museo vengono costantemente integrate nel tempo con nuovi percorsi didattici progettati in linea con gli strumenti esposti.

BIBLIOGRAFIA

Amoroso A., Leone M., Marocchi D., Rinaudo M. (2019), The dust catcher: discovering the educational value of the historical-scientific heritage, In: *McLoughlin E., van Kampen P. (eds) Concepts, Strategies and Models to Enhance Physics Teaching and Learning. Springer, Cham*, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-18137-6_20

Falomo Bernarduzzi L., Albanesi G., Bevilacqua F. (2014), Museum heroes all: the Pavia approach to school-science museum interaction. *Science Education*. 23, 762–780. <https://doi.org/10.1007/s11191-012-9541-x>

Filippopoliti A., Koliopoulos D. (2014), Informal and non-formal education: an outline of history of science in museums. *Sci. Educ.* 23, 781–791, <https://doi.org/10.1007/s11191-014-9681-2>

Heering P. (2017), Science museums and science education, *Isis* 108(2), 399–406 (2017). <https://doi.org/10.1086/692689>

Leone M. (2014), History of physics as a tool to detect the conceptual difficulties experienced by students: the case of simple electric circuits in primary education. *Science education*. 23, 923–953. <https://doi.org/10.1007/s11191-014-9676-z>

Matthews M. (2015), *Science Teaching. The Role of History and Philosophy of Science*, 2nd edn. Routledge, London and New York

Rinaudo M., Leone M. (2024), History of physics as a heuristic device to anticipate students' ideas: the case of electrostatics, *Physics Education*, 59 (015019), DOI 10.1088/1361-6552/ad08cd

Rinaudo M., Leone M. (2020), Should the history of physics be rated X? A survey of physics teachers' expectations, , *Physics Education*, 55 (035013) DOI 10.1088/1361-6552/ab73d1

Rinaudo M., Leone M., Marocchi D., Amoroso A. (2019). The educational role of a scientific museum: a case study, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1287 (012050), doi:10.1088/1742-6596/1287/1/012050

CINEMATICA COOPERATIVA: *IN-GROUP-PROBLEM-SOLVING* PER SUPERARE GLI EFFETTI POST-PANDEMICI

Valentina Bologna⁽¹⁾, Cristina La Mura⁽²⁾, Francesco Longo⁽¹⁾, Francesco Piccoli⁽³⁾

(1) Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Trieste, Via Alfonso Valerio 2, 34127, Trieste, Italia

(2) Liceo Scientifico Internazionale, Educando Statale Collegio Uccellis, Via Giovanni da Udine 23, 33100, Udine, Italia

Abstract. Per superare gli effetti causati durante il periodo pandemico dall'isolamento sociale, dalla distanza relazionale e dall'assenza di interazioni tra pari (Porru et al., 2022), abbiamo proposto durante le lezioni di Fisica agli studenti di una classe seconda di un Liceo Scientifico Internazionale un periodo didattico caratterizzato dall'utilizzo prevalente del *team-group working* (Stamovlasis et al., 2006). L'obiettivo pedagogico-educativo ci ha permesso di favorire la costruzione di un ambiente di apprendimento dove gli studenti sperimentavano e condividevano il ruolo e la potenzialità sociale del "fare scienza insieme" (Sin, 2014), promuovendo così il benessere nel processo di costruzione della conoscenza (Brookes et al., 2020). Abbiamo cercato di sviluppare l'aspetto sociologico dell'apprendimento della cinematica unidimensionale coinvolgendo gli studenti nella risoluzione di situazioni problematiche "non standard" (Etkina et al., 2019), secondo le tipologie di esercizi e problemi tipici dell'approccio didattico ISLE (Investigative Science Learning Environment; Etkina et al., 2019). Si tratta di dieci tipologie di esercizi/problemi "non convenzionali" che promuovono lo sviluppo di competenze scientifiche piuttosto che la mera verifica di conoscenze come i problemi tipicamente richiedono. La caratteristica principale di queste tipologie di problemi è quella di focalizzare le richieste sulla rappresentazione della situazione fisica in esame facendo uso di diversi linguaggi disciplinari, secondo il riferimento teorico delle Rappresentazioni Multiple (Van Heuleven, 1991; Ainsworth, 1999), attivando in tal modo processi di ragionamento scientifico (induttivo, analogico e ipotetico/deduttivo – Osborne et al., 2018). Alcune tipologie inoltre potenziano l'aspetto epistemico generativo di conoscenza (Brookes et al. 2020), come il "progetta un esperimento" o "problemi basati su dati reali". Tra le tipologie più interessanti, gli studenti hanno apprezzato quella denominata "Jeopardy" (Van Heuleven & Maloney, 1999). Ai gruppi veniva proposta una situazione fisica rappresentata in linguaggio matematico o grafico o vettoriale e il problema era ricostruire il fenomeno che aveva quella rappresentazione come descrizione. La valutazione molto positiva degli apprendimenti e del percorso didattico effettuato ci conferma che l'apprendimento cooperativo è una strategia vincente quando vengono proposte attività che ne valorizzano realmente l'efficacia.

Parole – chiave: team-group working, Investigative Science Learning Environment (ISLE), Jeopardy

INTRODUZIONE

L'Investigative Science Learning Environment, in ciò che segue ISLE - "ambiente di apprendimento investigativo della Scienza" - è un metodo didattico sviluppato a partire dal 1982 dalla Professoressa Eugenia Etkina della Rutgers University e, nel corso degli anni, arricchito dai contributi di Alan Van Heuleven, David Brookes e Gorazd Planinšič. Negli ultimi decenni, questa proposta è stata favorevolmente accolta dalla comunità dei docenti, soprattutto negli USA e in altre nazioni, ma la pratica didattica a tutt'oggi non è ancora consueta. È rilevante osservare che gli studi a riguardo sono numerosi e gli ideatori e sviluppatori dell'ISLE stanno cercando di renderne sempre più trasversale l'utilizzo, invitando a sperimentarlo in diversi indirizzi di studio della Scuola Secondaria di Secondo Grado e finanche in seno a diverse Facoltà Universitarie, così da raccogliere anche una maggior quantità di dati che possano confermarne la validità.

Il caso di studio qui presentato vede ISLE proposto in una classe seconda del Liceo Scientifico Internazionale annesso all'Educando Statale "Collegio Uccellis" di Udine.

Le studentesse e gli studenti coinvolti hanno sofferto dell'isolamento sociale durante il periodo pandemico, avendo frequentato il terzo anno della Scuola Secondaria di Primo Grado in regime di lock-down, soggetti, dunque, alla totale assenza di interazioni tra pari e nell'impossibilità di vivere e condividere la fisicità come parte dell'apprendimento. Lo studio ha avuto la durata di otto settimane, nell'A.S. 2022/2023, durante le quali si è prevalentemente promosso il *team-group working* (Stamovlasis et al., 2006) focalizzandosi sulla formulazione di esercizi riguardanti la Cinematica dei corpi, proponendo agli alunni dei problemi strutturati in modo differente rispetto a quelli solitamente presenti nei libri di testo adottati in Italia; nel caso di studio il testo in adozione è "La realtà e i modelli della Fisica" di James S. Walker, edizione Pearson.

Gli esercizi presentati alla classe sono ispirati dal seguente: "College Physics: Explore and Apply, 2nd Edition" di Etkina, Planinšič e Van Heuvelen (edizione Pearson) e sono stati funzionali ad implementare alcune caratteristiche tipiche dell'ISLE con l'obiettivo di mostrare l'approccio ISLE e la sua efficacia nel porre i discenti al centro dell'attività didattica e non relegarli al ruolo di utilizzatori seriali di procedure presentate come uniche e supreme.

In tal modo si intende rilevare una sensibile variazione nel modo in cui il discente espone il problema (modifica del linguaggio), ma anche un cambio di prospettiva rispetto alle richieste (variazione del focus per lo studente), oltre che promuovere lo sviluppo di una nuova *forma mentis* atta alla risoluzione.

APPROCCIO ISLE

Senza la pretesa di entrare nel dettaglio degli studi di neuroscienze relativi all'apprendimento, si vuole ricordare che fin dalle prime teorie pubblicate dai neuroscienziati, traspare che, a livello della corteccia cerebrale, le informazioni vengono immagazzinate in sistemi neuronali ramificati. Quando si apprende una nuova nozione, questa viene archiviata tramite una classificazione "per somiglianza", associandola a reti preesistenti di neuroni. Secondo J. Zull (2002), un processo di apprendimento è proficuo se si vive un ciclo di esperienze concrete: osservazioni, ipotesi astratte e sperimentazioni attive. Ciò suggerisce il ricorso a un approccio didattico che consenta agli alunni di avvicinarsi a nuovi argomenti facendo leva su conoscenze già consolidate in precedenza, ricorrendo poi ad attività concrete di analisi dei fenomeni, ragionando attivamente su quanto osservato. Inoltre, non si può trascurare la forte interconnessione tra nuove conoscenze ed emozioni: una grande quantità di sostanze chimiche (ormoni) quali adrenalina e dopamina, per citare alcune delle più note, modifica la risposta dei neuroni e la solidità strutturale delle sinapsi. Dunque, risulta produttivo realizzare un "contesto classe" in cui gli alunni si sentano liberi di esprimersi senza temere il giudizio dell'insegnante, e in cui sia permesso loro di sentirsi spesso appagati perché capaci di risolvere con successo degli esercizi. Tutto ciò beneficia anche del grado di interesse dei discenti: più sono incuriositi dagli argomenti trattati e più i loro neuroni saranno stimolati e formeranno connessioni (e quindi l'apprendimento sarà maggiormente incisivo).

L'approccio ISLE propone una procedura pedagogica che cerca di soddisfare i bisogni dei discenti senza incutere in essi sentimenti di timore e inadeguatezza e conseguente frustrazione rispetto alla disciplina Fisica.

Innanzitutto, ogni unità concettuale (che di norma corrisponde ad un capitolo del libro) comincia con un esperimento osservativo, che il professore mostra agli studenti: si può attuare concretamente in classe, o in laboratorio, oppure può essere visualizzato tramite video, se il setup strumentale è troppo complicato.

Tale esperimento dovrebbe riferirsi a fenomeni ritenuti quotidiani dai ragazzi; in questo modo può diventare interessante per loro e può attivare la loro curiosità. In questa fase, gli alunni sono invitati a descrivere verbalmente - con il loro linguaggio e quindi a partire dalle loro conoscenze pregresse e dalle loro idee intuitive - quanto vedono. Una volta divisi gli alunni in gruppi, lo step successivo è quello della raccolta dati relativa a quanto osservato. L'insegnante può aiutare gli studenti suggerendo loro in che modalità registrarli (se con tabelle, grafici, ecc...), così da facilitare il passaggio seguente, che consiste nella ricerca di schemi (*pattern*) ricorrenti ripetuti all'interno dei dati ottenuti. Dunque, ai ragazzi non viene presentata una Fisica *ready-made*, con formule prima enunciate e poi spiegate, ma sono loro stessi, in prima persona, a mettere le mani in pasta e a ragionare sul fenomeno fisico di

partenza, senza sapere già la soluzione. A questo punto, i discenti elaborano delle ipotesi (che corrispondono a delle spiegazioni qualitative del fenomeno in esame e/o a dei modelli matematici che legano le quantità in gioco), sulla base delle quali sono poi incoraggiati a progettare degli esperimenti di test. Così, essi testano le loro predizioni, formulate esclusivamente a partire dalle ipotesi avanzate in precedenza, confutandole o confermandole sperimentalmente. Durante questo processo, il professore deve stare attento a non sbilanciarsi circa la correttezza delle ipotesi sviluppate dagli alunni, lasciando che siano loro a scoprire se siano sbagliate o imprecise, non subendo quindi il giudizio da parte del docente.

Nel caso in cui l'esperimento di test confermi l'ipotesi, allora se ne possono ideare altri, per corroborare la teoria, e infine si può procedere con degli esperimenti applicativi (anche per questo motivo è preferibile che l'esperimento osservativo sia tratto da situazioni di vita quotidiana).

Se invece quanto formulato dai ragazzi viene smentito dai loro stessi test, allora possono cercare di correggere le loro congetture, ponendo il focus su tre aspetti fondamentali: prima di tutto, si revisiona il processo di raccolta dati, accertandosi che siano stati ottenuti in modo opportuno; poi, si può migliorare il setup strumentale, magari adoperando strumenti di misura più accurati; da ultimo, si può avanzare una differente spiegazione del fenomeno osservato.

Tutto ciò si può ripetere diverse volte, dando vita ad un vero e proprio "processo investigativo" - che molto somiglia al metodo utilizzato dalla comunità scientifica. L'approccio ISLE è presentato nel seguente work flow (Figura 1):

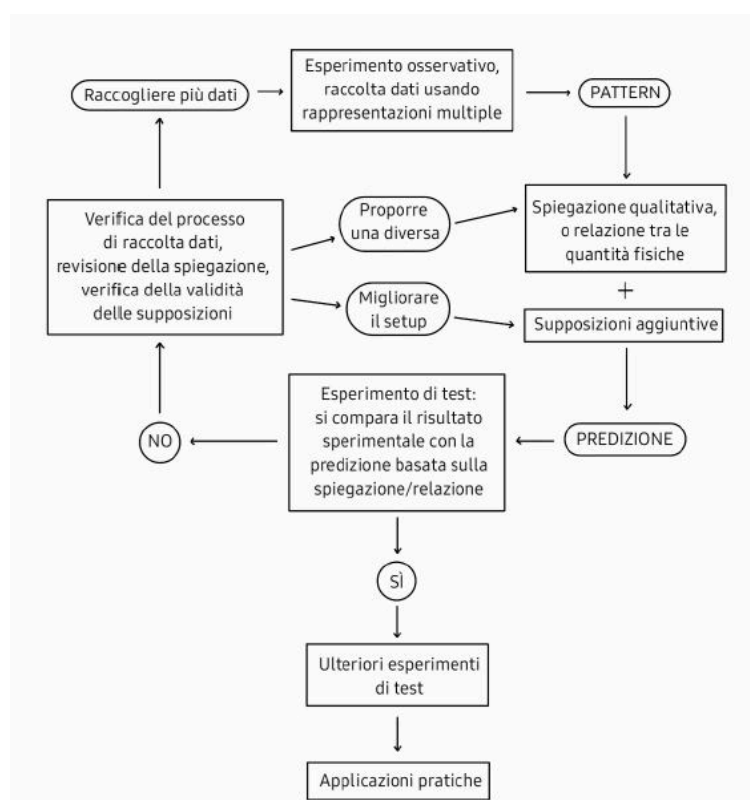


Figura 1. Diagramma che riassume il processo ISLE.

È opportuno qui evidenziare il ruolo cruciale del *team working* promosso dalla didattica basata su ISLE: gli alunni interagiscono tra pari, confrontandosi ed esercitandosi a sostenere le proprie opinioni, imparando a collaborare in un ambiente che risulta molto più fertile per l'apprendimento, siccome il docente diventa per loro un conduttore attraverso i vari step, piuttosto che un giudice che ne corregge gli errori. Inoltre, l'importanza data alle rappresentazioni multiple permette al discente di esprimere le

nuove informazioni acquisite nella forma a lui più congeniale e, al contempo, le raffigurazioni utilizzate dai suoi compagni di gruppo lo aiutano a capire più in profondità. Numerosi studi hanno dimostrato che i discenti che imparano nuovi argomenti in un ambiente didattico che si serve delle rappresentazioni multiple sono meno condizionati dal modo in cui un esercizio viene presentato, perché abituati a risolvere diversi tipi di richieste.

Così procedendo, gli studenti fanno propria l'idea che uno stesso fenomeno può essere descritto in tanti modi diversi e nel futuro, a seconda del problema che si troveranno ad affrontare, potranno avvalersi del metodo risolutivo che considerano più efficace.

ESERCIZI ISLE-based

La didattica ISLE-based si adatta anche alla fase di esercitazione e svolgimento dei problemi di consolidamento delle conoscenze, infatti, con l'intento di applicare *in itinere* le nozioni e sperimentarle in modo più concreto, gli esercizi e i problemi diventano parte delle stesse lezioni; in alternativa per introdurre un argomento si può ricorrere a certi esercizi che vengono quindi identificati come un primo avvicinamento all'argomento, catturando così l'attenzione dei ragazzi e ponendoli di fronte ad un problema del quale non conoscono la soluzione. In questo modo saranno sin da subito coinvolti nell'attività presentata loro. Uno dei propositi degli esercizi ISLE-based è quello di disincentivare la prassi, solitamente adottata, di iniziare la risoluzione di un esercizio cercando la formula migliore da adoperare, senza nemmeno aver letto attentamente il testo e capito a fondo la situazione descritta.

Per implementare le caratteristiche dell'ISLE e consentire ai ragazzi di potenziare le loro capacità di problem solving, di pensiero critico e di comunicazione, gli sviluppatori dell'approccio hanno ideato dieci tipologie di esercizi. Ognuna di queste ha uno o più obiettivi peculiari – per dettagli dei quali si rimanda alle seguenti voci - e si serve di diversi strumenti, prima fra tutti la rappresentazione multipla, che verrà esaminata nel caso specifico della Cinematica nel prossimo capitolo.

CASO DI SPERIMENTAZIONE DIDATTICA

Lo studio condotto nella classe seconda del Liceo Scientifico Internazionale coinvolta ha visto la progettazione e lo svolgimento di otto lezioni di esercizi ISLE-based – applicando le dieci tipologie previste - riguardanti i concetti e le grandezze fisiche tipici della Cinematica (Figura 2).



Figura 2. Schema completo delle tipologie di esercizi ISLE-based e QR-code di rimando ad una dettagliata descrizione di ciascuna tipologia.

La scelta della Cinematica è stata suggerita dalla necessità di consolidare le conoscenze relative alla natura vettoriale della velocità e dell'accelerazione, specialmente per mezzo dei diagrammi del moto, le

cui caratteristiche sono state anticipate agli alunni. L'interesse particolare rivolto a questi argomenti risulta fondamentale soprattutto come introduzione alla Dinamica e allo studio delle forze legate alle accelerazioni tramite la Seconda Legge di Newton.

Altro obiettivo, non secondario, è stato quello che i discenti imparassero le relazioni più importanti tra spazio, tempo, velocità e accelerazione nei casi dei moti rettilineo uniforme ed uniformemente accelerato.

La compagine degli studenti è stata suddivisa in quattro gruppi; per ciascuna attività i membri dei gruppi variavano, al fine di permettere ad ogni ragazzo di vivere le dinamiche del team working con più persone possibile, nell'arco di tutto l'approccio ISLE. La divisione in quattro gruppi era funzionale ad un lavoro cooperativo in cui tutti i partecipanti avessero l'opportunità di esprimersi e di essere ascoltati dai compagni, interagendo attivamente.

Per ciascuna tipologia le schede di esercizi sono state consegnate a ciascun gruppo; al termine di ciascun problema, i singoli gruppi di lavoro sono stati invitati a condividere con gli altri il loro ragionamento, cercando di motivare le loro scelte.

Gli esercizi ISLE-based hanno inciso sul processo di apprendimento principalmente nel modo in cui i problemi sono stati presentati agli studenti. Infatti, a differenza degli esercizi di norma proposti dal libro di testo in uso, quelli inventati per le otto lezioni si sono serviti abbondantemente delle rappresentazioni multiple (diagrammi del moto, grafici, sketch e rappresentazioni in linguaggio matematico), sia nella posizione di un problema che nel richiedere una soluzione.

Gli studenti sono stati letteralmente "rapiti" dai *Jeopardy – problems* basati sulla tipologia Jeopardy che sorprende poiché invita a procedere nella direzione contraria a quella comunemente presentata dagli esercizi tradizionali. Invece di descrivere verbalmente una situazione e richiedere di ottenere, mediante una formula, qualche risultato relativo ad essa, si parte da una relazione numerica, da un grafico, da un diagramma del moto o da disegni e inventare un testo di cui essi siano una rappresentazione possibile: è un lavoro creativo innanzitutto, molto fantasioso, ma non banale poiché si richiede attinenza alla realtà fisica. I discenti si sentono sereni e stimolati, non percependo un'imposizione rigida da parte del problema (e quindi, indirettamente, dell'insegnante). In questo modo, poi, approfondiscono il significato fisico delle leggi matematiche e delle raffigurazioni astratte, evidenziando il substrato legato alla realtà. Si può inoltre migliorare la comprensione delle unità di misura e il loro valore.

Questa tipologia è di sicuro una di quelle che aiuta maggiormente gli alunni a tradurre i concetti fisici in più rappresentazioni: scoprire che uno stesso fenomeno può essere descritto in tanti modi diversi e riuscire a passare rapidamente da uno all'altro avvicina i ragazzi ad una comprensione profonda e robusta. In particolare, i *Jeopardy problems* assicurano che gli studenti non risolvano un esercizio esclusivamente tramite l'uso di una formula, anzi: sono costretti a dare un significato alle grandezze presentate e a destrutturare il problema per carpirne il substrato fisico. Volendo ricercare delle parole chiave per identificarne le caratteristiche si potrebbero elencare le seguenti: *scrivi, inventa, ricostruisci, traduci, rappresenta*.

LIVING JEOPARDY

Il lavoro con la classe è stato sempre organizzato presentando un'attività Jeopardy da svolgere durante la lezione e assegnandone una come compito da svolgere autonomamente a casa da parte di ciascuno Studente.

In aula sono stati proposti due esercizi che illustravano delle situazioni fisiche con modalità diverse: si desiderava che, tramite l'uso di rappresentazioni multiple, gli studenti avessero l'opportunità di approfondire le relazioni tra le diverse raffigurazioni di un fenomeno, intuendone l'equivalenza. In aggiunta, come da caratteristica di questo tipo di problemi, uno degli obiettivi era concedere loro ampia libertà, in fase di elaborazione del testo, assecondando la loro fantasia, purché la situazione descritta fosse coerente con la formula o il diagramma di partenza.

Di seguito si riportano i due esercizi proposti.

Jeopardizing esercizio 1

Il punto di partenza per la creazione del testo del primo esercizio consisteva in un diagramma del moto che rappresentava un rallentamento a decelerazione non costante e più intensa inizialmente (Figura 3a).

TESTO dell'ESERCIZIO:

"A partire dal diagramma del moto riportato qui sotto, inventate il testo di una situazione che può essere descritta da esso. Cercate di pensare a una situazione plausibile in base all'intensità dei vettori velocità e dei vettori differenza di velocità."

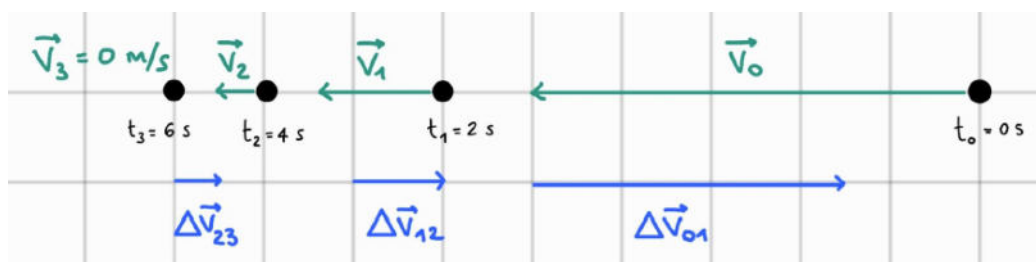


Figura 3a. Diagramma del moto dell'esercizio 1

Le reazioni dei quattro gruppi composti dalle studentesse e dagli studenti a questa proposta sono riassunte nel seguito:

- tutti i gruppi hanno inizialmente trascurato i vettori differenza di velocità, concentrandosi esclusivamente sull'intensità decrescente dei vettori velocità;
- un gruppo ha provato a quantificare le velocità, assumendo che un quadretto della figura corrispondesse ad un metro;
- pur avendo compreso che la velocità diminuiva al passare del tempo, due gruppi non hanno poi inserito questa considerazione nel testo dell'esercizio che hanno proposto.

Dapprima, un gruppo ha pensato ad un esempio in cui l'accelerazione iniziale era piccola e in seguito aumentava ("macchina che rallenta piano vedendo il semaforo rosso e poi frena di più per via di un gatto che attraversa la strada"); sono stati accompagnati nel comprendere che la situazione descritta dal diagramma del moto poteva essere quella opposta.

Successivamente, è emerso un dubbio condiviso circa l'avverbio che meglio potesse descrivere questa diminuzione dell'accelerazione: "Rallenta gradualmente oppure progressivamente?". Si è ragionato su questi termini, concludendo che la risposta più opportuna potesse essere "rallenta progressivamente", specificando tra parentesi "l'accelerazione diminuisce sempre di più". In Figura 3b un esempio di testo proposto.

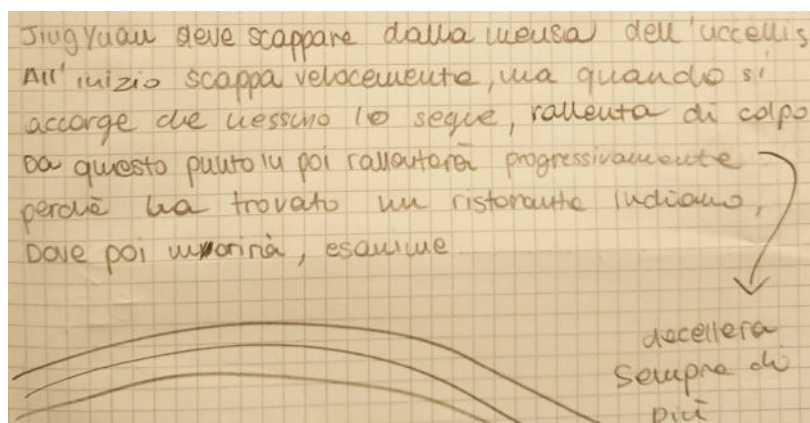


Figura 3b. Uno scenario immaginato per l'esercizio 1

Jeopardizing esercizio 2

Il punto di partenza per la creazione del testo del secondo esercizio consisteva in una rappresentazione in linguaggio matematico concernente la legge oraria della posizione.

TESTO dell'ESERCIZIO:

"A partire dalla formula

$$x(t)[m] = 14 \left[\frac{m}{s} \right] + t[s] + 25[m]$$

Individuate le grandezze fisiche in gioco ed esprimete il loro valore.

Create il testo di un esercizio la cui situazione fisica sia descritta da questa formula. Tenete conto dell'intensità dei valori riportati, per inventare una situazione verosimile."

Le reazioni dei quattro gruppi composti dalle studentesse e dagli studenti a questa proposta sono riassunte nel seguito. Tre gruppi hanno avuto difficoltà a riconoscere la posizione iniziale, sostenendo che il valore in questione ("25 m" nella formula) fosse un tipo di spostamento.

A questi tre gruppi è stato consigliato di rappresentare alcuni valori dell'equazione in un grafico spazio-tempo, scegliendo degli istanti di tempo e calcolando le posizioni corrispondenti tramite la formula. Dunque, hanno dedotto che si trattava di una posizione e poiché era quella relativa all'istante zero l'hanno riconosciuta come iniziale. È opportuno sottolineare che al tempo in cui è avvenuta questa attività, la Classe non era ancora edotta di geometria analitica. In Figura 4 un esempio di foglio di lavoro.

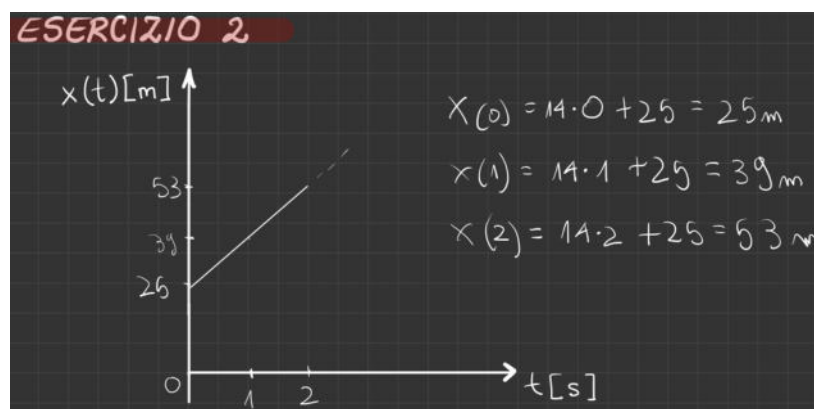


Figura 4. Foglio di lavoro inerente l'esercizio 2.

Un gruppo, invece, ha capito che si trattava della posizione iniziale, ma in principio non ha specificato nel testo quale fosse il luogo indicato come origine del sistema di riferimento scelto ("dista 25 m", senza dire da dove).

CONCLUSIONI

Nell'arco delle tre settimane in cui gli alunni hanno sperimentato le dieci tipologie di esercizi si sono notati alcuni miglioramenti sostanziali ed una modifica del loro modus operandi nell'affrontare un problema. Innanzitutto, uno degli strumenti cruciali dell'attività ISLE è stato il diagramma del moto, che all'inizio è risultato poco intuitivo agli studenti: non essendo abituati a ragionare in modo qualitativo sulle situazioni presentate da un esercizio, trovavano di poco aiuto realizzare tale rappresentazione. Gli esercizi solitamente proposti dai libri, in cui la natura vettoriale delle grandezze in gioco passa in secondo piano, dando più spazio ai calcoli algebrici e all'applicazione delle relazioni matematiche, non aiutano i discenti a familiarizzare con l'ente vettore, che per essi rimane sempre un oggetto la cui necessità non risulta mai evidente, ma solo come un intralcio.

Tuttavia, dopo averne sperimentato essi stessi la validità nella comprensione profonda di un fenomeno, hanno imparato a realizzarli nella maniera accurata che richiedono. Per questo motivo, si ritiene che i diagrammi del moto ideati dagli sviluppatori ISLE siano un ottimo strumento anche per accertarsi della profondità con cui gli studenti apprendono i nuovi concetti, non limitandosi a memorizzare formule.

A seguito della sperimentazione la docente si è detta entusiasta poiché ha osservato che i discenti non

percepiscono più la Fisica come “una materia che si è destinati a non capire” e rispetto alla quale, quindi, si è destinati a fallire se non si fa un grande sforzo di memoria necessario a incamerare le formule e ad associarle a una vasta varietà di esercizi che possono essere proposti. Poiché una regola in Fisica è che “non esiste una regola che dica quale formula usare”, l’approccio tradizionale produce molta frustrazione negli studenti e nelle studentesse più fragili e, comunque, ostili all’esercizio della memorizzazione. I ragazzi hanno collaborato molto volentieri all’interno dei gruppi e hanno interagito attivamente, confrontandosi ed aiutandosi. Utilissimo riscontro si è avuto dalla partecipazione, dapprima timida e un po’ contorta, nel seguito più attiva e spedita, di un allievo affetto da DSA. Un’analisi più attenta è da fare rispetto alle rubriche valutative, utilizzate durante il processo, ma che in questa sede sono state omesse per focalizzarsi sul ruolo del lavoro di gruppo piuttosto che sulla valutazione.

Il parere delle studentesse e degli studenti ha trasudato contentezza e grande partecipazione. Al passare del tempo, però, sono riusciti a capire le potenzialità dell’approccio ISLE e ne hanno apprezzato le caratteristiche; in particolare, hanno gradito che i calcoli algebrici avessero meno risalto e si sono sentiti capaci di risolvere gli esercizi. Tutti gli alunni hanno poi dichiarato di aver preferito la tipologia di lezioni proposte - lavorando a gruppi - rispetto a quella abituale, con spiegazioni frontali, e anche per questo motivo hanno contribuito più volentieri. La classe si è divertita, la Fisica è diventata un gioco intellettuale, una sfida creativa da fare insieme e rispetto alla quale confrontarsi, ma non nell’ambito della valutazione come usualmente accade, bensì in merito alle idee, alle ipotesi, agli scenari da supporre, alle osservazioni e alle interpretazioni che si possono dare dei fenomeni. Sicuramente, meglio affrontare questa sfida insieme piuttosto che soli, davanti allo schermo.

BIBLIOGRAFIA

- Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & education*, 33, 131-152.
- Brooks S.K., Webster R.K., Smith L.E., Woodland L., Wessely S., Greenberg N. and Rubin G.J. (2020). The psychological impact of quarantine and how to reduce it: rapid review of the evidence. *The Lancet* 395, 912–920.
- Etkina E., Brookes D., Planinšič G., Van Heuvelen A. (2019). *Instructor’s Guide for College Physics: Explore and Apply, 2nd Edition*. Pearson.
- Piccoli, F. (2022). *Ideazione e costruzione di esercizi e problemi ISLE based per la scuola secondaria*. Tesi di Laurea Triennale in Fisica, Università di Trieste.
- Porru, F., Schuring, M., Bültmann, U., Portoghesi, I., Burdorf, A., Suzan, J., et al. (2022). Associations of university student life challenges with mental health and self-rated health: a longitudinal study with 6 months follow-up. *J. Affect. Disord.* 296, 250–257. doi: 10.1016/j.jad.2021.09.057
- Rosenblatt R., Heckler A.F. (2011). Systematic study of student understanding of the relationships between the directions of force, velocity, and acceleration in one dimension. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 7(2), 1–20.
- Rosengrant D., Etkina E., Van Heuvelen A. (2007). An Overview of Recent Research on Multiple Representations. *AIP Conference Proceedings*, 883, 149.
- Sin C. (2014). Epistemology, Sociology, and Learning and Teaching in Physics. *Science Education*, 98(2), 342-365.
- Stamovlasis, D., Dimos, A., Tsapalis, G. (2006). A study of group interaction processes in learning lower secondary physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 43(6), 556-576.
- Van Heuvelen, A. (1991). Learning to think like a physicist: A review of research-based instructional strategies. *American Journal of Physics*, 59, 891–897
- Van Heuvelen A., Maloney D. (1999). Playing Physics Jeopardy. *American Journal of Physics*, 67, 252-256.
- Zull J. (2002). *The art of changing the brain*. Stylus Publishing.

COOPERATIVE LEARNING E PEER EDUCATION NELLA COMPRENSIONE DEI PRINCIPI DELLA DINAMICA

Roberto Borgognone, Daniela Marocchi, Marina Serio, Marta Rinaudo

Liceo Valdesi di Torre Pellice, Università degli Studi di Torino

roberto.borgognone@gmail.com

Abstract

Peer education e *cooperative learning* sono due metodologie didattiche che dagli anni '60 e '70 rispettivamente stanno guadagnando spazio a fianco della didattica tradizionale. Questo percorso indaga sull'efficacia del loro utilizzo per spiegare i principi della dinamica. Il lavoro è stato svolto tra febbraio e maggio all'interno di un percorso di PCTO (Percorsi per le Competenze Trasversali e l'Orientamento) con 4 studenti tutor di una classe IV Scientifico.

Agli studenti è stato proposto di lavorare sui principi della dinamica.

Dopo un primo periodo di ripasso e approfondimento in *cooperative learning* e supportati dall'insegnante, gli studenti tutor hanno iniziato a strutturare un percorso didattico teorico e laboratoriale della durata di 8 ore i cui destinatari erano 18 studenti di una classe prima. I tutor hanno preparato un questionario da somministrare prima delle lezioni per valutare le conoscenze pregresse necessarie e un test, tratto dal Force Concept Inventory, fatto prima e dopo le lezioni e l'attività, per stimare l'esito delle lezioni; sono stati inoltre preparati da loro tutti i materiali per le lezioni. Il percorso è stato suddiviso in 2 ore di lezioni frontali, 4 di attività laboratoriale e 2 ore dedicate all'analisi dei dati e alla discussione conclusiva. Tutte le decisioni inerenti il percorso sono state prese dai tutor in autonomia, che si sono inoltre suddivisi argomenti e compiti. I test pre e post attività consistevano di 15 domande. Il confronto dei risultati evidenzia un leggero miglioramento medio, quantificabile in 2 risposte corrette in più nel post test. Per 2 studenti il miglioramento è stato invece quantitativamente migliore con 6-8 risposte corrette in più rispetto al pre test.

Sebbene i risultati di apprendimento non siano stati analizzati quantitativamente, i feedback sul percorso svolto da parte degli studenti tutor sono stati molto positivi, arrivando a suggerire di svolgere percorsi analoghi per altri argomenti e per altre materie.

Parole chiave

Cooperative learning, peer education, dinamica, laboratorio.

STRUTTURA DELL'ATTIVITÀ E PROTAGONISTI

L'attività è stata svolta su più livelli. I destinatari finali erano 18 studenti (da ora in poi solo "studenti") di una classe prima articolata in 3 indirizzi: Classico, Linguistico e Scientifico, nella quale nessuno studente aveva affrontato l'argomento proposto. Per loro l'obiettivo principale era sperimentare l'effetto di lezioni con una modalità didattica differente da quella standard, tenute da studenti tutor poco più grandi.

Gli studenti tutor (da ora in poi solo "tutor") erano 4 ragazzi di una classe IV Scientifico. All'interno di un percorso di PCTO, in convenzione con l'Università degli Studi di Torino e della durata di 50 ore, avevano come obiettivo di ripassare e approfondire in *cooperative learning* i principi della dinamica, per poi progettare e strutturare un'unità didattica a riguardo e svolgere le lezioni in *peer education* con una classe di studenti più piccoli. Tutta l'attività era coordinata dall'insegnante di Fisica, che svolgeva una tesi magistrale in Didattica della Fisica. L'obiettivo della tesi era osservare i tutor e gli studenti in tutte le fasi dell'attività, analizzando le differenze tra le lezioni curricolari standard e questa modalità. Il suo ruolo era dunque solo propositivo, senza indicazioni e suggerimenti ai tutor sulle scelte effettuate nella progettazione e senza interventi durante le lezioni con gli studenti.

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
In questo testo verrà descritto principalmente il percorso didattico progettato dai tutor.

OBIETTIVI

Per i tutor:

- saper enucleare i concetti fondamentali di un argomento;
- essere in grado di lavorare con gli altri in maniera costruttiva, sia in modalità collaborativa sia in gruppo;
- saper prendere iniziative e accettare la responsabilità;
- saper comunicare e negoziare efficacemente con gli altri;
- acquisire capacità di pensiero critico;
- sviluppare abilità integrate nella soluzione dei problemi;
- scegliere modalità efficaci di spiegazione e verifica laboratoriale.

Per gli studenti:

- sperimentare una modalità diversa di apprendimento;
- relazionarsi in maniera costruttiva a scuola con figure meno autoritarie;
- lavorare efficacemente da soli e in gruppo.

SCELTA DELL'ARGOMENTO

L'argomento di Fisica scelto come tema del percorso didattico, dopo una discussione con gli studenti tutori, è stato i principi della dinamica. Le motivazioni possono essere riassunte così:

- argomento centrale nella fisica, che viene svolto all'inizio del percorso della scuola secondaria di secondo grado e non prevede moltissime conoscenze pregresse;
- viene ripreso più volte nel corso degli studi della secondaria superiore, poiché i principi della dinamica si applicano a molteplici situazioni fisiche;
- per gli studenti di quarta, occasione di ripasso e approfondimento;
- argomento sfidante, ma non eccessivamente complicato;
- argomento non ancora svolto dagli studenti più piccoli.

STRUTTURA DELL'ATTIVITÀ

Ripasso dei principi della dinamica

Per svolgere un approfondito ripasso dell'argomento i tutor hanno lavorato in gruppo a scuola e individualmente a casa. Hanno usato il loro libro di testo e i loro appunti con l'aiuto del loro insegnante. Per valutare la loro preparazione, prima e dopo, è stato usato il Force Concept Inventory (FCI). In particolare, prima di conoscere le risposte corrette, il gruppo si è confrontato sulle risposte fornite dai singoli ed è stata stilata un'ulteriore serie di risposte condivisa, in modo da confrontarsi e correggersi reciprocamente e valutare la conoscenza complessiva del gruppo.

Cadere nei "tranelli" del test, oltre a correggere le proprie lacune e misconcezioni, ha dato un'idea iniziale di quali potessero essere i punti su cui concentrarsi nella pianificazione delle lezioni.

Definizione e strutturazione del percorso

Il docente ha stabilito che la durata del percorso didattico, comprensiva di lezioni e attività laboratoriali, consisteva di 8 ore, cui aggiungere il tempo dedicato alla somministrazione del test. A questo punto, utilizzando le 5W del giornalismo anglosassone (Who, What, Where, When, Why) è cominciato il lavoro di progettazione e strutturazione.

Per ragioni di completezza e coerenza degli argomenti hanno deciso di parlare di tutti e tre i principi, esponendoli prima tutti e tre teoricamente e successivamente utilizzando degli esperimenti pratici e dimostrativi.

Hanno suddiviso i compiti fra loro, in base a preferenze e capacità.

Durante la progettazione si sono interrogati sul fatto che gli studenti più piccoli comprendessero in modo corretto concetti come velocità, accelerazione, traiettoria, ecc... e hanno stilato un questionario

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
di 10 domande a risposta multipla per indagare quali di questi fosse maggiormente necessario spiegare
all'inizio.

- 1) La forza:

 - a. è qualcosa che sposta gli oggetti
 - b. è lo sforzo che si fa quando si lavora
 - c. è qualcosa che cambia la velocità agli oggetti
 - d. serve per sollevare gli oggetti

2) Che cos'è la massa:

 - a. il peso di un oggetto
 - b. ciò che tiene a terra gli oggetti
 - c. la composizione chimica degli oggetti
 - d. la quantità di materia contenuta in un corpo

3) L'accelerazione è:

 - a. la velocità percorsa in un determinato tempo
 - b. lo spazio percorso da un oggetto in un determinato tempo
 - c. l'aumento di velocità nel tempo
 - d. la variazione di velocità nel tempo

4) La velocità è :

 - a. lo spazio percorso da un oggetto in un determinato tempo
 - b. la posizione di un oggetto nel tempo
 - c. quanto va veloce un oggetto
 - d. il tempo impiegato a percorrere un certo spazio

5) Lo spazio percorso è :

 - a. la distanza fra due punti
 - b. il segmento che determina la distanza fra due punti
 - c. la posizione occupata da un oggetto
 - d. la lunghezza della traiettoria

6) L'attrito:

 - a. è una forza che impedisce lo spostamento di un corpo
 - b. dice quanto un corpo è ruvido
 - c. è una forza che si oppone al moto di un corpo
 - d. è una forza che sposta i corpi

7) La forza di gravità è:

 - a. la forza con la quale la Terra attrae a sé gli oggetti
 - b. una forza che spinge sempre gli oggetti verso la loro posizione naturale
 - c. una forza esercitata esclusivamente dalla Terra
 - d. la Forza

8) L'insieme dei punti dello spazio occupati da un corpo durante un suo movimento è detto:

 - a. traiettoria
 - b. percorso
 - c. direzione
 - d. tragitto

9) I passeggeri di un'automobile che frena bruscamente sono spinti in avanti:

 - a. dalla forza di gravità
 - b. dall'inertza
 - c. dalla forza della frenata
 - d. dalla velocità dell'auto prima della frenata

10) Due grandezze sono proporzionali quando:

 - a. la loro somma è costante
 - b. una è multiplo dell'altra
 - c. al variare di una grandezza l'altra varia nello stesso modo
 - d. il loro rapporto è un numero primo

Cosa significa dire che un corpo è in moto?

Figura 1. Domande del questionario per valutare le conoscenze pregresse.

Come test di verifica dell'apprendimento hanno scelto di utilizzare il FCI, previa riduzione a 15 domande (dalle 29 iniziali).

La scelta è stata fatta dai tutor secondo i seguenti criteri:

- riduzione della durata del test:

- attinenza con gli argomenti svolti;
- eliminazione delle domande che prevedevano concetti troppo avanzati quali energia o

quantità di moto.

Le domande scelte sono state, con riferimento al test FCI originale, le numero: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 26, 27.

È stato deciso che il test sarebbe stato svolto prima e dopo le 8 ore di attività, mantenendo le stesse domande per poter più facilmente stimare l'eventuale miglioramento.

Attività laboratoriale

La seconda lezione, della durata di 4 ore, si è svolta in 3 luoghi: il laboratorio di fisica e chimica, un'aula adibita appositamente e la palestra. Gli studenti sono stati divisi in 4 gruppi per osservare 4 esperimenti a rotazione, coordinati ognuno da un tutor.

I 4 esperimenti svolti a rotazione sono stati:

- misura statica di forze e forza peso
- tubo circolare
- skateboard 1: principio di inerzia
- skateboard 2: terzo principio

Nel primo esperimento è stato mostrato e spiegato il funzionamento di un dinamometro, per rendere evidente il legame tra massa e forza peso e parlare di forza di gravità. Nel secondo esperimento è stato utilizzato un tubo di gomma piegato in forma circolare. L'esperimento era puramente dimostrativo. Un capo del tubo veniva sollevato di qualche decina di centimetri mentre l'altro capo rimaneva appoggiato al banco di lavoro. All'estremità superiore veniva inserita una sfera di metallo. In riferimento al principio di inerzia, si mostrava come la pallina, una volta uscita dall'altra estremità, proseguiva sul banco di lavoro in moto rettilineo. Si spiegava quindi che non continuava il moto curvilineo precedente che era dovuto alle forze presenti all'interno del tubo.

Nel terzo esperimento un oggetto (un rotolo di scotch) veniva appoggiato su uno skateboard che veniva lanciato a velocità abbastanza alta contro un ostacolo. Si osservava che l'oggetto, non vincolato allo skateboard, proseguiva nel moto.

Nel quarto esperimento due persone salivano su altrettanti skateboard. Spingendosi reciprocamente si notava come la persona di massa minore veniva maggiormente accelerata, poiché le forze sono uguali e contrarie.

Nell'ultima lezione i dati raccolti nel quarto esperimento sono stati analizzati in piccoli gruppi di 3-4 persone. Per valutare i risultati è stato utilizzato il software Tracker.

Test di verifica post (FCI) e questionario di feedback

Nella settimana immediatamente successiva alla fine delle lezioni è stato somministrato il test del FCI ridotto per valutare l'apprendimento.

Inoltre sono state preparate delle domande per un test anonimo di feedback per una valutazione dei tutor e dell'esperienza fatta da parte degli studenti.

Alcuni aumenti percentuali sono molto elevati, ma il numero delle risposte corrette nel pre-test era spesso molto esiguo. Solo in pochi casi il miglioramento è stato di 4, 6 e perfino 8 risposte.

Per quanto riguarda le domande, le uniche che hanno avuto un incremento significativo sono state la 4 e la 8 (con 5 e 7 risposte corrette in più rispettivamente) che presentavano situazioni analoghe a quella del secondo esperimento con il tubo e la pallina. Osservare direttamente il fenomeno ha aiutato a capire correttamente la situazione rappresentata. È stato invece difficile per i tutor trasmettere correttamente l'azione della forza di gravità: nella risposta 11 ci sono state 4 risposte corrette in meno, (unica domanda con una diminuzione).

Tabella 1. Risposte corrette (C) e sbagliate (S) nel pre-test e nel post-test dell'FCI. Nelle ultime due colonne la variazione assoluta e percentuale di risposte.

Studente	Pre-test		Post-test		Δ
	C	S	C	S	
1	4	11	4	11	0
2	4	11	3	12	-1
3	6	9	7	8	1
4	6	9	10	5	4
5	5	10	6	9	1
6	3	12	5	10	2
7	6	9	6	9	0
8	2	13	10	5	8
9	2	13	3	12	1
10	8	7	9	6	1
11	0	15	4	11	4
12	4	11	3	12	-1
13	1	14	2	13	1
14	4	11	4	11	0
15	2	13	3	12	1
16	5	11	5	10	0
17	3	12	6	9	3
18	3	12	9	6	6

Il questionario di feedback sull'esperienza didattica sottoposto agli studenti più piccoli era suddiviso in due parti:

- la prima riguardava i tutor con una valutazione relativa rispetto a coinvolgimento, chiarezza, competenza, completezza, disponibilità. Per ogni indicatore lo studente poteva mettere il tutor al primo, al secondo, al terzo o al quarto posto.
- la seconda era la possibilità di scrivere un breve testo libero di commento riguardo ad interesse, comprensione, gradimento con eventuali suggerimenti.

Tabella 2. Risposte al feedback sui tutor: AD, FB, GT, MO. In ogni colonna quanti studenti hanno attribuito primo, secondo terzo o quarto posto ad ognuno dei tutor.

	Coinvolgimento				Chiarezza				Competenza				Completezza				Disponibilità			
	AD	FB	GT	MO	AD	FB	GT	MO	AD	FB	GT	MO	AD	FB	GT	MO	AD	FB	GT	MO
Primo	12	3	2	0	3	3	12	2	1	1	13	2	7	7	7	2	14	2	5	2
Secondo	4	6	4	3	8	5	1	2	8	8	4	1	3	3	8	1	3	9	2	2
Terzo	1	7	5	4	4	8	3	2	6	5	0	4	6	4	1	4	0	3	6	6
Quarto	0	1	6	10	2	1	1	11	2	3	0	10	1	3	1	10	0	3	4	7

Di seguito sono riportati, a titolo di esempio, i testi di alcuni dei commenti degli studenti più piccoli.

- *Mi sono sentito più interessato ma ho trovato che era meno chiaro quello che spiegavano loro.*

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

- *È stato sia più facile, perché alcuni di loro sono in grado di coinvolgerti e farti sentire a tuo agio, ma è stato più difficile perché non sempre c'è magari quella "confidenza" che invece è presente con il professore e poi ovviamente, com'è giusto che sia, i ragazzi non hanno esperienza.*
- *Mi sentivo più sicura perché anche loro sono sul mio stesso piano e possono capire meglio il "disagio" dell'essere studenti*
- *Secondo me un minimo cambia la situazione, proprio perché dei "compagni" hanno un'autorità e una presenza diversa da quella dei professori, però comunque sono riuscita a prendere con serietà quello che spiegavano e quello che ci dicevano di fare, nonostante fossero meno autoritari*

FEEDBACK DEI TUTOR

A differenza dei più piccoli, i feedback dei tutor è stato richiesto mediante la redazione di un testo dopo aver ricevuto degli spunti di riflessione.

I punti seguenti riassumono quanto da loro riportato:

- Il lavoro è stato più impegnativo di quanto preventivato. Preparare lezioni ed ancora più laboratori richiede molto tempo.
- Per spiegare agli altri in modo chiaro è necessario aver capito e selezionare opportunamente i concetti da presentare in ogni lezione.
- E' difficile rendere partecipativi gli studenti durante una lezione frontale.
- Inizialmente è stato difficile diventare consapevoli di dover portare avanti il progetto in prima persona.
- Sono stati utili i feedback degli studenti.

CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI

Feedback e commenti dei tutor

Il feedback chiesto ai tutor ha evidenziato principalmente tre cose: il grande interesse verso un'attività completamente nuova, ovvero mettersi nei panni di chi deve sapere e spiegare a chi non sa nulla; la difficoltà nel preparare e strutturare l'argomento, che ha aumentato la stima verso gli insegnanti che lo fanno regolarmente apparentemente senza sforzo; il piacere e la sorpresa di scoprire che i più piccoli erano attenti, partecipi, interessati, ponendo anche domande.

Il test di feedback anonimo ha permesso loro di ricevere giudizi e impressioni dai più piccoli riuscendo così, insieme all'insegnante, ad autovalutarsi riconoscendo punti di forza e criticità di ognuno e delle scelte fatte nella preparazione del percorso.

In un momento di condivisione i ragazzi hanno espresso unanimemente l'opinione che sia un'esperienza da consigliare ad altri, non solo in fisica ma anche in altre materie.

Commento finale: vantaggi, svantaggi

Un progetto PCTO di questo tipo presenta 3 vantaggi per i tutor:

- miglioramento dell'efficacia "relazionale", in quanto sono costretti a comunicare, mediare posizioni, capire se il discente ascolta e partecipa, gestire domande e obiezioni, ecc...
- aumento della consapevolezza, poiché strutturare in modo autonomo, dall'inizio alla fine, un percorso didattico prevede prendere coscienza dei punti deboli e di forza propri e degli altri, nonché valutare correttamente la propria preparazione, competenza ed efficacia;
- sviluppo della capacità di lavorare in team, cosa peraltro molto richiesta al di fuori dell'ambito scolastico.

Per contro, ci sono anche 3 svantaggi, principalmente da un punto di vista didattico:

- strutturare lavori di questo tipo richiede inevitabilmente tempi più lunghi ai docenti, per la preparazione e per lo svolgimento delle lezioni stesse;

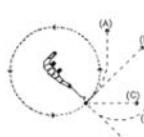
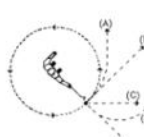
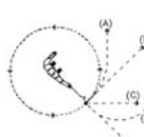
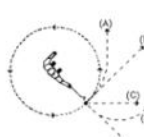
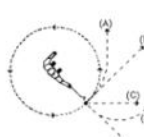
- la selezione degli argomenti, la scelta dei tempi, il livello di approfondimento necessario da parte degli studenti manca dell'esperienza necessaria;
- la conoscenza dell'argomento è meno approfondita e consolidata, soprattutto per i punti chiave e le misconcezioni possibili, per cui l'efficacia risulta diminuita;

Suggerimenti

Alcune criticità riscontrate in questo progetto derivano direttamente dalla "stratificazione" intrinseca del progetto stesso: la necessità data dal percorso di tesi di monitorare l'atteggiamento e le scelte dei tutor ha di fatto eliminato completamente suggerimenti, idee, proposte e correzioni da parte dell'insegnante. Questo ha lasciato i tutor un po' a se stessi ed hanno sopravvalutato quanto potevano svolgere nelle 8 ore a loro disposizione. Si sono inoltre concentrati molto sul loro compito e meno sull'interazione con gli studenti.

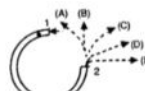
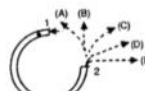
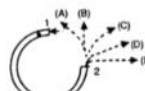
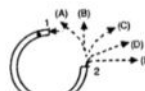
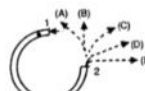
Se si volesse ripetere l'esperienza è quindi importante:

- aiutarli a definire bene i tempi e la quantità argomenti da spiegare;
- indicare chiaramente quali sono i punti fondamentali che non si possono tralasciare;
- mostrare delle strategie per mantenere l'uditorio attento e partecipe;
- insistere sulla correttezza del linguaggio e dei termini appropriati;
- riprendere e ripetere i concetti per aiutare a seguire percorsi e collegamenti.

- Due sfere di metallo hanno la stessa dimensione, ma una pesa il doppio dell'altra. Le sfere sono lasciate cadere dalla cima di un edificio allo stesso istante di tempo. Il tempo necessario alle sfere per raggiungere il terreno sottostante sarà:
A) circa metà per la sfera più pesante
B) circa metà per la sfera più leggera
C) circa lo stesso tempo per entrambe
D) decisamente inferiore per la sfera più pesante, ma non necessariamente la metà
E) decisamente inferiore per la sfera più leggera, ma non necessariamente la metà
- Immagina una collisione frontale tra un grande camion e una piccola auto. Durante la collisione:
A) il camion esercita una maggiore quantità di forza sull'auto rispetto a quanta la macchina ne esercita sul camion
B) la macchina esercita una maggiore quantità di forza sul camion rispetto a quanta il camion ne esercita sulla macchina
C) nessuno esercita una forza sull'altro, la macchina rimane schiacciata semplicemente perché si trova sul percorso del camion
D) il camion esercita una forza sulla macchina, ma la macchina non esercita forza sul camion
E) il camion esercita sulla macchina la stessa quantità di forza che la macchina esercita sul camion
- Due sfere di acciaio, una delle quali pesa il doppio dell'altra, rotolano su un tavolo orizzontale con la stessa velocità e cadono oltre il bordo. In questa situazione:
A) entrambe le sfere cadono sul pavimento approssimativamente alla stessa distanza orizzontale dalla base del tavolo
B) la sfera più pesante cade a circa la metà della distanza orizzontale dalla base del tavolo rispetto alla più leggera
C) la sfera più leggera cade a circa la metà della distanza orizzontale dalla base del tavolo rispetto alla più pesante
D) la sfera più pesante colpisce molto più vicino alla base del tavolo rispetto alla più leggera, ma non necessariamente a metà della distanza orizzontale
E) la sfera più leggera colpisce molto più vicino alla base del tavolo rispetto alla più pesante, ma non necessariamente a metà della distanza orizzontale
- Una sfera pesante è attaccata a un filo e ruota in un percorso circolare in un piano orizzontale come illustrato nel diagramma a destra. Al punto indicato nel diagramma il filo improvvisamente si rompe. Se questi eventi sono osservati dall'alto, indicare il percorso della sfera dopo che il filo si è rotto.
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Usa la frase e il diagramma sottostanti per rispondere alle prossime 4 domande.

Il diagramma raffigura un disco da hockey che scivola, con velocità costante, dal punto "a" al punto "b" lungo una superficie orizzontale senza attrito. Quando il disco raggiunge il punto "b" riceve un "calcio" orizzontale nella direzione della freccia più grande.

- Lungo quale dei percorsi sottostanti si muoverà il disco da hockey dopo aver ricevuto il "calcio"?
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 
- Lungo il percorso senza attrito che hai scelto, come varia la velocità del disco molto dopo aver ricevuto il "calcio"?
A) non cambia
B) cresce continuamente
C) decresce continuamente
D) cresce per un po' e dopo decresce
E) costante per un po' e dopo decresce
- Le forze principali che agiscono sul disco, dopo il "calcio", lungo il percorso che hai scelto sono:
A) la forza verso il basso dovuta alla gravità e l'effetto della pressione dell'aria
B) la forza di gravità verso il basso e la quantità di moto orizzontale nella direzione del moto
C) la forza di gravità verso il basso, la forza verso l'alto esercitata dalla superficie e una forza orizzontale agente sul disco nella direzione del moto
D) la forza di gravità verso il basso e la forza verso l'alto esercitata dalla superficie
E) la gravità non esercita una forza sul disco, cade per l'intrinseca tendenza degli oggetti a ritornare al loro posto
- Il diagramma raffigura un canale semicircolare che è stato fissato, in un piano orizzontale, a un piano d'appoggio. Una sfera entra nel canale dal punto 1 ed esce dal punto 2. Quale dei percorsi rappresentati si avvicina maggiormente al percorso della sfera quando esce dal canale dal punto 2 e rotola lungo il piano d'appoggio.
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Due studenti, studente "A" che ha massa di 95 kg e uno studente "B" che ha una massa di 77 kg, siedono su identiche sedie da ufficio uno di fronte all'altro. Lo studente A mette i piedi nudi sulle ginocchia dello studente B come mostrato sotto. Lo studente A quindi improvvisamente spinge in fuori con i piedi facendo muovere entrambe le sedie.

Figura 2. Domande del test Force Concept Inventory ridotto (15 domande).

9. In questa situazione:

A) nessuno degli studenti esercita una forza sull'altro
 B) lo studente A esercita una forza su B ma B non esercita nessuna forza su A
 C) entrambi gli studenti esercitano una forza sull'altro, ma B esercita la forza più grande
 D) entrambi gli studenti esercitano una forza sull'altro, ma A esercita la forza più grande
 E) entrambi gli studenti esercitano la stessa quantità di forza sull'altro



10. Un libro è fermo su una scrivania. Quali delle seguenti forze agiscono sul libro?

1. una forza verso il basso dovuta alla gravità
 2. la forza verso l'alto dalla scrivania
 3. una forza netta verso il basso dovuta alla pressione dell'aria
 4. una forza netta verso l'alto dovuta alla pressione dell'aria

A) solo 1
 B) 1 e 2
 C) 1, 2 e 3
 D) 1, 2 e 4
 E) nessuna delle precedenti: finché il libro è fermo non ci sono forze che agiscono su di esso

11. Una pietra cade dal tetto di un edificio a un piano fino a terra.

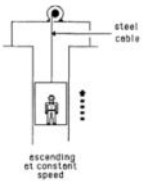
A) raggiunge la sua velocità massima poco dopo la partenza e dopodiché cade a velocità costante
 B) accelera mentre cade principalmente perché più si avvicina alla terra, maggiore è l'attrazione gravitazionale
 C) accelera a causa della forza gravitazionale costante che agisce su di essa
 D) cade per l'intrinseca tendenza di tutti gli oggetti a cadere verso il suolo
 E) cade a causa di una combinazione tra la forza di gravità e la pressione dell'aria che la spingono verso il basso

Mentre si risponde alle seguenti domande assumere che qualsiasi forza di attrito dovuta alla resistenza dell'aria sia così piccola da poter essere ignorata.

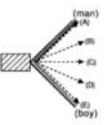
12. Un ascensore, come illustrato, è sollevato da un cavo d'acciaio.

Quando l'ascensore si muove verso l'alto a **velocità costante**:

A) la forza verso l'alto sull'ascensore da parte del cavo è maggiore della forza di gravità verso il basso
 B) la forza verso l'alto sull'ascensore da parte del cavo è uguale alla forza di gravità verso il basso
 C) la forza verso l'alto sull'ascensore da parte del cavo è minore rispetto alla forza di gravità verso il basso
 D) va verso l'alto perché il cavo viene accorciato, non a causa della forza esercitata sull'ascensore dal cavo
 E) la forza verso l'alto sull'ascensore da parte del cavo è maggiore della forza verso il basso dovuta all'effetto combinato della forza dell'aria e della forza di gravità



13. Due persone, un grosso e forte uomo e un ragazzo, stanno tirando più forte che possono due corde attaccate a un peso come illustrato nel diagramma a fianco. Quale dei percorsi indicati (A-E) corrisponde maggiormente al percorso del peso mentre viene tirato?



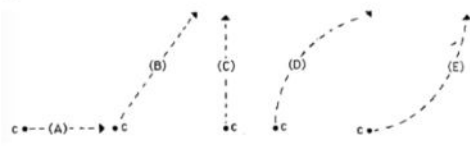
Mentre si risponde alle successive 2 domande, fare riferimento alla seguente dichiarazione e al successivo diagramma.

Un razzo, mentre va alla deriva lateralmente nello spazio esterno dalla posizione "a" alla posizione "b", non è soggetto ad alcuna forza esterna. Al punto "b" il motore del razzo incomincia a produrre una spinta costante ad angolo retto rispetto alla linea "ab".



quando il razzo raggiunge un certo punto "c" dopo aver compiuto il tragitto sottostante.

14. Quale dei percorsi "c"? sottostanti seguirà il razzo dopo



15. Dopo "c" la velocità del razzo è:

A) costante
 B) continuamente crescente
 C) continuamente decrescente
 D) crescente per un poco e costante successivamente
 E) costante per un poco e decrescente successivamente

Figura 2. Domande del test Force Concept Inventory ridotto (15 domande).

BIBLIOGRAFIA

Hestenes, D., Wells, M., Swackhamer, G. (1992). Force Concept Inventory. *The Physics Teacher*, 30, 141–155.

LA FISICA DEL CAMBIAMENTO CLIMATICO

Daniele Cane, Laura Giudici
IIS Blaise Pascal – Giaveno (TO)
daniele.cane@pascalgiaveno.it

Abstract

La cronaca degli ultimi mesi e anni mostra sempre nuovi e più estremi impatti del cambiamento climatico di origine antropogenica, in linea con le simulazioni dei modelli climatici. Le azioni di mitigazione del fenomeno ed adattamento alle sue conseguenze saranno la più grande sfida per l'umanità del XXI secolo, avendo un impatto molto significativo sull'intera vita dei nostri attuali studenti. E' quindi importante fornire loro una formazione approfondita sul tema perché siano in grado di valutare, decidere ed agire, in una fondamentale azione di Educazione Civica.

Tradizionalmente, tuttavia, non vi è un grande spazio per temi come quello del cambiamento climatico nei programmi iper-compresi di Matematica e Fisica. E' però possibile inserire numerosi esercizi ed esempi qua e là, approfittando di concetti e dati delle scienze del clima come "problemi di realtà" da proporre agli studenti nel loro intero percorso di studi.

Viene qui proposto un percorso che può essere inserito nell'ambito dello studio della Termologia e Termodinamica. Con Geogebra è possibile costruire modelli inizialmente semplificati del bilancio energetico del pianeta Terra, che si fanno via via più complessi permettendo l'esplorazione nei dettagli dell'effetto serra di origine naturale e dei contributi antropogenici.

Parole-chiave

Cambiamento climatico, termodinamica, problemi di realtà

INTRODUZIONE

Il cambiamento climatico e la sua origine antropogenica sono stati studiati con crescente accuratezza dalla comunità scientifica a partire dagli anni '70 del XX secolo. I Rapporti dell'Intergovernmental Panel on Climate Change delle Nazioni Unite forniscono un quadro esauriente della questione e apportano un contributo fondamentale al dibattito politico e alla ricerca delle soluzioni per contrastare gli effetti del cambiamento climatico sull'ambiente e gli impatti sugli ecosistemi e sulle popolazioni.

Il rapporto più recente (Masson-Delmotte *et al.*, 2021) raccoglie i più significativi lavori nel campo, rappresentando tutte le opinioni ma mettendo chiaramente in evidenza il *consensus* della stragrande maggioranza degli scienziati del clima su tre punti principali: a) esistono solide prove del cambiamento climatico in atto, b) che è da attribuirsi agli effetti dell'immissione di gas serra fossili nel sistema da parte dell'umanità e c) tale cambiamento è destinato a peggiorare nel corso del XXI secolo, a meno di drastici interventi per ridurre l'impatto della popolazione e delle tecnologie umane sull'ambiente.

Dal punto di vista didattico, si tratta di un tema trasversale che permette numerosi e vari interventi, anche interdisciplinari, per informare e sensibilizzare gli studenti sul tema. Si inserisce poi naturalmente nel programma di Educazione Civica della Scuola Secondaria di Secondo grado. Gli autori del presente contributo hanno raccolto e sperimentato numerose proposte didattiche sull'argomento (Cane, Giudici 2019, 2023).

Viene qui presentato un percorso che descrive nei dettagli i calcoli e le caratteristiche fisiche dell'equilibrio termodinamico del pianeta Terra, l'effetto serra, e i contributi antropogenici al cambiamento climatico. L'attività va proposta nell'ambito dello studio della Termodinamica, come un "caso studio" di applicazione dei fenomeni radiativi e del Primo Principio. I destinatari sono quindi studenti della Scuola Secondaria di Secondo Grado e il periodo didattico è la fine del terzo anno o l'inizio del quarto.

Il contenuto è descritto in un “libro” Geogebra (disponibile all’indirizzo <https://www.geogebra.org/m/jhkpaqaf>) ed in precedenza è stato parzialmente pubblicato in un altro articolo (Cane, Giudici, 2020). L’utilizzo di Geogebra permette una migliore rappresentazione dei fenomeni e dei calcoli, in un’ottica di maggiore interattività con gli studenti. Il libro è costituito da cinque script e da ampie parti testuali, che vengono qui riportate e commentate.

ILLUMINAMENTO DEL PIANETA TERRA

La Terra riceve dal Sole un’irradianza $I=1360,8\pm0,5 \text{ W/m}^2$, non proprio costante nel tempo ma con una variazione trascurabile (circa lo 0,1% sul ciclo undecennale dell’attività solare). Immaginiamo di porre un disco in orbita intorno alla Terra e perpendicolare al flusso della radiazione solare e calcolarne la temperatura di equilibrio con la legge di Stefan Boltzmann $I = \frac{P}{S} = \sigma T^4$, dove I è l’irradianza, cioè la potenza P per unità di superficie S , σ è la costante di Stefan-Boltzmann e T è la temperatura assoluta (si noti che in questo caso l’uso della legge del corpo nero è una forzatura, ma viene qui applicata coerentemente con il resto della trattazione).

La temperatura di equilibrio è quindi $T = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} = 394 \text{ K}$, cioè circa 120°C .

È questa la “temperatura” che un astronauta sperimenta nello spazio? È, effettivamente una stima ragionevole della temperatura delle superfici degli oggetti esposti al Sole, in assenza di atmosfera, nell’orbita terrestre, come le rocce lunari durante il dì.

La temperatura calcolata è tuttavia eccessiva perché presuppone che l’oggetto sia disposto perpendicolarmente al flusso di energia radiante, e quindi sovrastima il bilancio energetico rispetto ad un oggetto sferico quale è il nostro pianeta.

Il primo script (Figura 1) permette di descrivere correttamente la geometria in tre dimensioni dell’illuminamento terrestre.

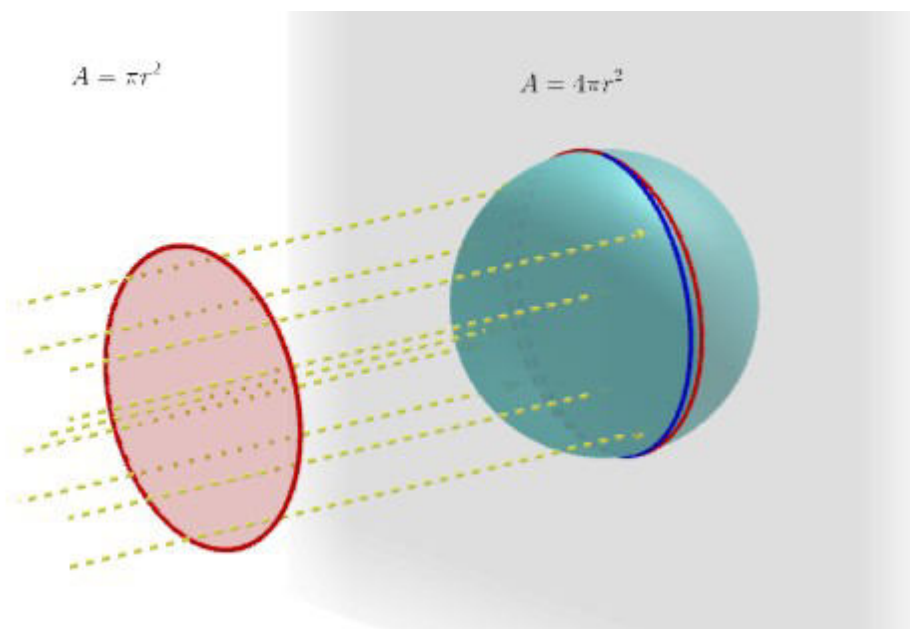


Figura 1. Un fermo-immagine del primo script Geogebra

Se approssimiamo la forma del pianeta ad una sfera di raggio R , i raggi del Sole all’orbita terrestre possono essere considerati paralleli tra di loro e illuminano un’area pari a quella del cerchio massimo,

che corrisponde sul pianeta a metà dell'area della sfera ($2\pi R^2$). Tuttavia la Terra gira intorno al proprio asse e la presenza dell'atmosfera comporta la redistribuzione dell'energia ricevuta dal Sole su tutta la Terra (attraverso la circolazione atmosferica). Su scala climatica (decenni), è possibile considerare l'energia in ingresso mediata su tutta la superficie della sfera ($4\pi R^2$). Anche l'emissione dell'energia, soprattutto sotto forma di radiazione infrarossa, avviene su tutta la superficie della sfera (cioè: sia di giorno che di notte).

Occorre ricordare che una parte dell'energia radiante in ingresso viene riflessa dalle nubi e soprattutto dai ghiacci e non illumina il pianeta. La frazione α di energia riflessa, detta albedo, è al momento attuale pari a circa 0,3.

Il pianeta è in equilibrio termico con lo spazio circostante, per cui l'energia emessa verso lo spazio è esattamente uguale all'energia ricevuta.

Il bilancio energetico (in W) è quindi pari a $(1-\alpha)\pi R^2 I = 4\pi R^2 \sigma T^4$, dove si considera l'energia in ingresso sulla superficie del disco, corretta per l'albedo, mentre l'energia in uscita è emessa dalla superficie dell'intera sfera.

La temperatura di equilibrio è quindi $T = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)I}{4\sigma}} = 255 \text{ K}$, cioè -18°C . In precedenza abbiamo

calcolato una temperatura troppo alta, ora troppo bassa: se prima si correva il rischio di finire arrosto, ora come mai la Terra non è completamente ghiacciata?

L'EFFETTO SERRA

Questa sezione comprende una breve descrizione delle cause microfisiche dell'effetto serra. Si noti che per la fascia d'età cui questo percorso è rivolto, non è stato ancora possibile introdurre in modo dettagliato la struttura degli atomi e l'interazione di questi con la radiazione (che verranno approfonditi in Quinta), per cui è necessario utilizzare delle semplificazioni.

Molecole e fotoni – banda del visibile

La radiazione elettromagnetica proveniente dal Sole illumina la Terra con un flusso più intenso in corrispondenza della componente visibile (lunghezza d'onda 380-780 nm), con un massimo intorno a 500 nm. L'atmosfera non è completamente trasparente alla radiazione entrante, perché alcuni gas ne assorbono una parte, soprattutto nella banda dell'infrarosso, ma ai fini del calcolo del bilancio energetico terrestre è necessario considerare la radiazione entrante prima dell'assorbimento atmosferico.

La radiazione visibile, in particolare, non viene assorbita dai gas presenti nell'atmosfera terrestre, che risulta quindi trasparente a questa banda dello spettro della luce solare. Lo script (Figura 2) mostra che le molecole dei gas maggiormente rappresentativi non interagiscono con la radiazione visibile proveniente dallo spazio.

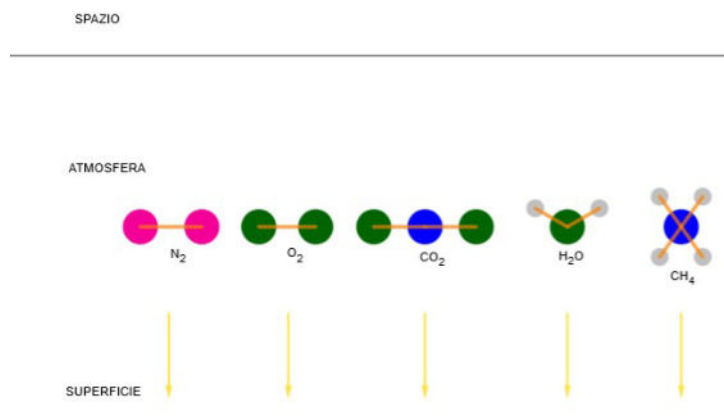


Figura 2. Un fermo-immagine del secondo script Geogebra

Molecole e fotoni – banda dell’infrarosso

Utilizzando la simulazione successiva (Figura 3), è possibile simulare l’interazione di fotoni infrarossi con i gas dell’atmosfera, e vedere che, mentre l’azoto e l’ossigeno sono trasparenti anche in questa banda dello spettro elettromagnetico, tre gas (anidride carbonica, metano e vapore acqueo) ri-emettono il fotone assorbito in tutte le direzioni, quindi anche verso il basso.

Questi gas vengono chiamati gas serra. Nonostante la concentrazione dell’anidride carbonica nell’aria secca sia soltanto 415 ppm e quella del metano addirittura solo 335 ppb, il loro impatto sul bilancio energetico terrestre è piuttosto significativo. Esistono altre molecole che si comportano come gas serra (in particolare alcuni composti dell’azoto e del fluoro), ma il loro impatto complessivo è piccolo perché sono presenti solo in tracce nell’atmosfera.

Tuttavia, il principale gas serra dell’atmosfera terrestre è il vapore acqueo, che rappresenta in media lo 0,33% dell’aria (ma con valori fino al 4% nell’aria molto calda) e contribuisce per circa il 70% dell’effetto serra totale.

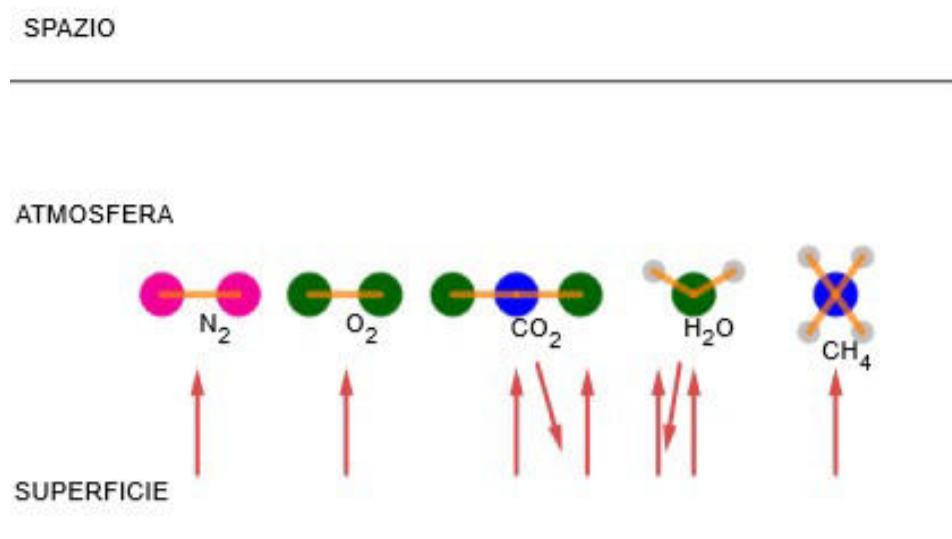


Figura 3. Un fermo-immagine del terzo script Geogebra

BILANCIO ENERGETICO TERRESTRE

Il capitolo successivo del libro presenta una simulazione del bilancio energetico terrestre mediato su tutto il pianeta e su un anno (in W/m^2 , Figura 4). Poiché il Sole illumina una superficie pari a πR^2 ma il calore viene efficientemente distribuito su un corpo sferico di superficie $4\pi R^2$, l’irradianza media $I=1360,8\pm0,5 \text{ W/m}^2$ va divisa per 4 e l’input energetico (in radiazione visibile) è pari a 340 W/m^2 . . Come anticipato l’albedo della Terra vale circa 0,3, per cui circa il 30% (pari a 100 W/m^2) di tale radiazione viene riflessa, mentre il 23% circa (79 W/m^2) viene assorbito dall’atmosfera stessa. Meno della metà della luce solare riesce quindi ad illuminare la superficie del pianeta (161 W/m^2). Guardando invece i flussi di energia in uscita dal pianeta, è interessante notare che una parte consistente (84 W/m^2) viene scambiata come calore latente di vaporizzazione, mentre una piccola parte (20 W/m^2) viene scambiata attraverso il riscaldamento dell’aria e la sua risalita, essenzialmente per convezione. Si sottolinea che il pianeta emette sotto forma di radiazione infrarossa un’enorme quantità di energia (398 W/m^2), non solo superiore all’energia che raggiunge il suolo, ma anche all’energia totale che giunge dal Sole!

Ecco l’effetto serra: i gas serra sono molto efficienti nell’intrappolare la radiazione infrarossa, e ne emettono ben 342 W/m^2 verso il suolo. La radiazione infrarossa effettivamente emessa verso lo spazio

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
 è pari a 239 W/m^2 : questa energia va confrontata con l'energia immessa nel sistema, che come abbiamo visto è pari a $340 - 100 = 240 \text{ W/m}^2$. I due valori si compensano perfettamente (entro gli errori di misura).

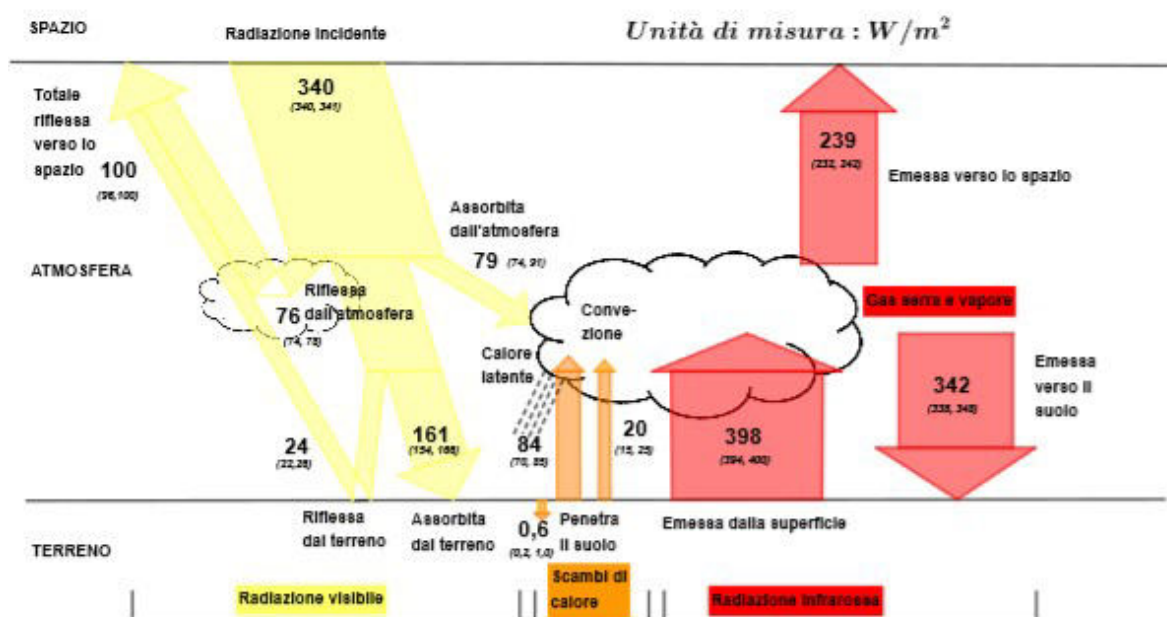


Figura 4 Un fermo-immagine del quarto script Geogebra

CAUSE DEL RISCALDAMENTO GLOBALE

L'ultimo capitolo del libro contiene uno script (Figura 5) che mostra le variazioni della “forzante radiativa” dovuti a diverse cause, umane e naturali. La forzante radiativa è il contributo di queste diverse cause al flusso di energia radiante verso il basso e in sostanza costituisce la variazione all'input energetico rispetto alla situazione di partenza (anno 1750, prima della Rivoluzione Industriale).

I contributi positivi indicano quindi una quantità maggiore di calore disponibile per il sistema, quelli negativi un raffreddamento. I gas serra e l'ozono troposferico hanno contribuito per quasi 4 W/m^2 di riscaldamento, mentre il maggior contributo di raffreddamento viene dagli aerosol (le polveri immesse dall'uomo con le sue attività), che in parte riflettendo la luce solare e in parte oscurandola hanno ridotto la luce entrante di circa $1,3 \text{ W/m}^2$.

La variazione dell'irradianza solare nel periodo considerato è stata positiva, ma assolutamente trascurabile rispetto alle cause antropogeniche, che sommate insieme danno una variazione di circa $2,6 \text{ W/m}^2$.

Si noti l'elevata incertezza di tale stima, dovuta perlopiù alla componente degli aerosol, che però si riduce notevolmente se al posto di sommare le singole forzanti radiative si utilizzano i modelli climatici per tenere conto del riaggiustamento dell'atmosfera in seguito alla forzante. In sintesi, dal 1750 al 2019 l'umanità ha prodotto un aumento dell'energia disponibile al sistema climatico. Ci basta il primo principio della Termodinamica per concludere che in un sistema gassoso sostanzialmente chiuso un aumento del calore disponibile porterà un aumento del lavoro (cioè venti più intensi) e/o un aumento dell'energia interna (e quindi della temperatura media).

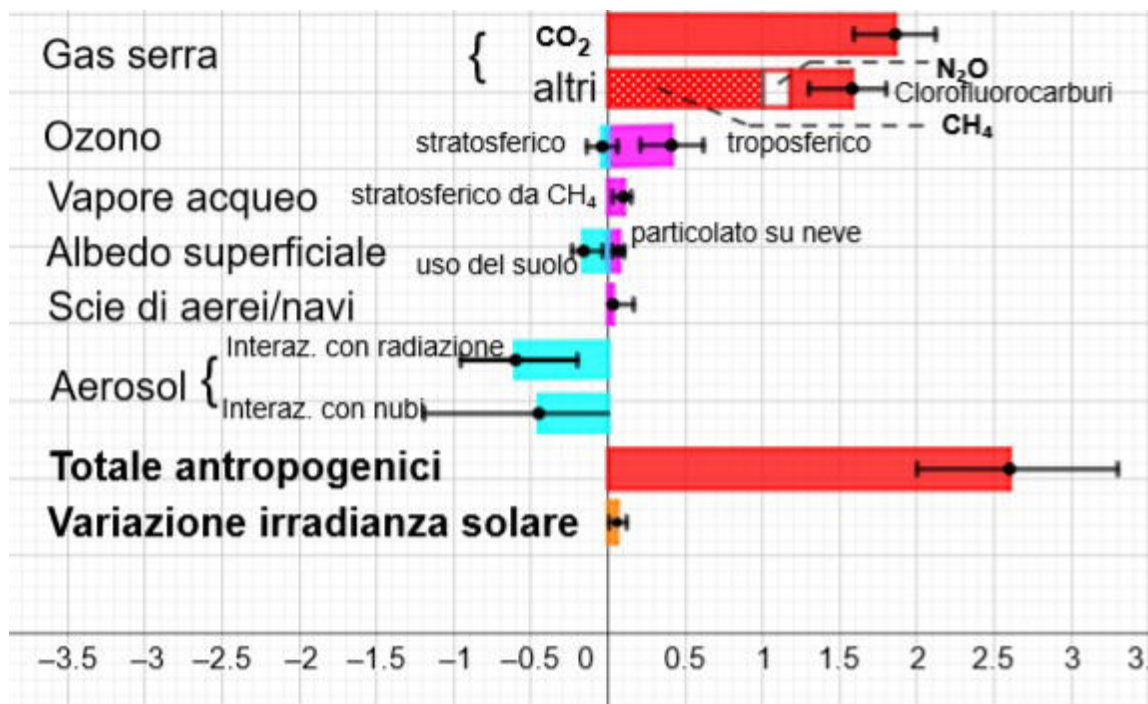


Figura 5 Un fermo-immagine del quinto script Geogebra

Se si effettua un rapido calcolo, tuttavia, ci si accorge che i conti non tornano. Infatti l'aumento di temperatura osservato rispetto all'era pre-industriale è di circa $1,1^\circ\text{C}$, ma un corpo nero con temperatura di $288,5\text{ K}$ emette circa $I = \sigma T^4 = 393\text{ W/m}^2$, da confrontarsi con i 398 W/m^2 del bilancio energetico presente.

Perché allora la forzante radiativa osservata ($2,6\text{ W/m}^2$) è poco più della metà dei 5 W/m^2 necessari per spiegare la variazione di temperatura osservata?

Il fatto è che, concordemente con la prassi della scienza del clima, lo script riporta solo le cause “esterne” al sistema climatico ma l'aumento di temperatura porta con sé delle conseguenze interne al sistema che possono rinforzare l'effetto (feedback positivi).

Le due principali sono la variazione del vapore acqueo in atmosfera (che aumenta di circa il 7% per un aumento di 1°C) che, come detto in precedenza, è un gas serra e cumula i suoi effetti con l'effetto radiativo dei gas serra propriamente detti, e la fusione dei ghiacci, che diminuisce l'albedo planetaria, così aumentando la radiazione incidente.

La forzante totale risultante è di circa 5 W/m^2 , in accordo con la variazione di temperatura osservata. La presenza di feedback è uno degli elementi più importanti del sistema climatico e costituisce anche l'aspetto più preoccupante del cambiamento climatico: un ulteriore aumento di 3°C della temperatura media globale, previsto negli scenari peggiori, porterebbe a una situazione non più arrestabile, a causa della rapida scomparsa dei ghiacci marini e della liberazione di enormi quantità di metano attualmente intrappolate nel permafrost (il metano è il più efficiente tra i gas serra, fortunatamente la sua concentrazione in atmosfera al momento è relativamente bassa).

Si noti infine che il meccanismo appena descritto è una possibile spiegazione del cambiamento climatico, non una prova. Le principali prove sono l'aumento della temperatura della troposfera e degli oceani, la diminuzione della temperatura della stratosfera, la fusione dei ghiacci, la variazione del ciclo idrologico, l'aumento del livello degli oceani.

CONCLUSIONI

Nel presente contributo è stato descritto un “libro” di Geogebra che affronta nei dettagli la descrizione e i calcoli dei fenomeni fisici del cambiamento climatico, con particolare riferimento alla microfisica dell’effetto serra e ai bilanci energetici radiativi del pianeta Terra. L’uso di Geogebra permette animazioni di immediata comprensione e la possibilità di utilizzo interattivo in classe da parte del docente o di approfondimento autonomo a casa da parte dei ragazzi. L’attività è stata provata in alcune classi Terze e Quarte del Liceo Scientifico, con risultati molto soddisfacenti dal punto di vista della partecipazione dei ragazzi e dell’efficacia della comprensione di un argomento piuttosto complesso e sfaccettato.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano gli organizzatori del convegno DIFIMA per la possibilità loro offerta di presentare il loro contributo.

BIBLIOGRAFIA

- Cane D., Giudici L. (2023) Contro l’indifferenza e l’eco-ansia: come comunicare il cambiamento climatico. *Nuova Secondaria*, n. 8, pp. 68–74 <https://riviste.gruppostudium.it/nuova-secondaria/archivio-nuova-secondaria/sommario-dei-fascicoli/ns-n-8-aprile-2023>
- Cane D., Giudici L. (2020) Insegnare il cambiamento climatico si può e si deve fare. *La Fisica nella Scuola*, n.2, p 78 <https://www.aif.it/indice-rivista/anno-liii-n-2-aprile-giugno-2020/>
- Cane D., Giudici L., Brianza I. (2019) Un gioco di ruolo sui cambiamenti climatici. *Nuova Secondaria* n. 3, p 77 <http://riviste.gruppostudium.it/nuova-secondaria/archivio-nuova-secondaria/sommario-dei-fascicoli/ns-n-3-novembre-2019>
- Masson-Delmotte, V., P. Zhai, A. Pirani, S.L. Connors, C. Péan, S. Berger, N. Caud, Y. Chen, L. Goldfarb, M.I. Gomis, M. Huang, K. Leitzell, E. Lonnoy, J.B.R. Matthews, T.K. Maycock, T. Waterfield, O. Yelekçi, R. Yu, and B. Zhou (eds.) (2021) *IPCC, 2021: Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge

PERCORSI SPERIMENTALI ALLA RICERCA DELLA CARICA DELL'ELETTRONE

Lacarbonara M., Marocchi D., Rinaudo M., Serio M.

Dipartimento di Fisica, Università di Torino

daniela.marocchi@unito.it

Abstract

Nella scuola superiore di secondo grado la fisica moderna viene introdotta, in maniera teorica, da alcuni esperimenti che ci hanno permesso di superare le idee della fisica classica. Fra questi esperimenti ricordiamo l'esperienza della goccia d'olio di Millikan, che introduce al concetto di quantizzazione della carica. Nell'approcciarsi alle idee della fisica moderna vi è la necessità di utilizzare idee collegate a conoscenze matematiche complesse. Nel nostro caso invece il procedimento dell'esperienza di Millikan può essere spiegato attraverso conoscenze e leggi fisiche che fanno parte delle conoscenze già acquisite dagli studenti, e permette anche di far riflettere sulle difficoltà sperimentali superate da Millikan. Si vuole parlare in questo articolo dei risultati ottenuti da un'attività di laboratorio, svolta con un gruppo di studenti, grazie all'utilizzo di una strumentazione appositamente acquisita per ripetere l'esperienza di Millikan; ma soprattutto degli utilizzi di questo esperimento a livello scolastico in maniera interdisciplinare, cercando delle soluzioni alle problematiche che si possono avere a scuola con il cimentarsi in un'attività laboratoriale.

Parole-chiave

Laboratorio, storia, fisica classica, fisica moderna

INTRODUZIONE

L'esperimento della goccia d'olio di Millikan può essere utile nella didattica perché l'esperimento, che ha portato alla scoperta della carica dell'elettrone, risulta teoricamente abbastanza semplice: la parte teorica fondamentale si fonda infatti su relazioni fisiche di base, studiate nei primi anni della scuola di secondo grado, anche se, secondo la nostra esperienza, l'attività può essere utilizzata principalmente in quarta e quinta liceo/istituto tecnico. (Eckey, 1996). Fra l'altro, questa esperienza permette di introdurre la fisica moderna con un approccio sperimentale.

Pochi anni dopo la sua scoperta, precisamente nel 1933, era già disponibile per le scuole il primo apparato sul quale era possibile ripetere l'intero esperimento. L'esperienza con l'apparecchiatura a nostra disposizione ci ha dato la possibilità di utilizzare la tecnologia di uno strumento moderno, pur ripercorrendo il lavoro fatto da Millikan più di 100 anni fa. Come tutte le esperienze di laboratorio, ha poi permesso di ripercorrere i passaggi canonici alla base di un esperimento di fisica: capire la procedura, sapere applicare le direttive, lavorare in gruppo, utilizzare e comprendere l'utilizzo dell'apparato, acquisire dati, interpretare ciò che si è ottenuto ragionando sui risultati.

La quantizzazione della carica, risultato finale dell'esperienza, viene compresa in maniera attiva, senza perciò rimanere un concetto del tutto astratto. Altro punto di forza è la possibilità di rendere l'attività interdisciplinare, ad esempio collaborando con il docente di chimica, con quello di storia, con quello di lingua inglese.

Nel presentare la ricchezza dell'esperienza, dobbiamo però porre l'attenzione anche sugli aspetti negativi che un'attività di laboratorio come questa comporta: la possibilità di osservare dentro lo strumento solo per uno studente per volta, l'affaticamento della vista, che richiede di interrompere la presa dati dopo un certo tempo, la difficoltà iniziale di riconoscere quali siano le goccioline adatte alla presa dati... Tutto questo richiede dei lunghi tempi a disposizione, cosa non semplice da ottenere nel percorso didattico di una classe. Per ovviare a questi inconvenienti verranno proposte, al termine di

questo breve intervento, delle modalità alternative, come la proiezione su schermo di quanto osservato dentro il microscopio e l'utilizzo di video e di simulazioni disponibili sul web; esse possono permettere di superare gli inconvenienti indicati.

QUALCOSA SULLA STORIA

Thomson aveva verificato sperimentalmente che i raggi catodici sono cariche elettriche negative e nel 1886 aveva misurato il rapporto fra carica elettrica e massa dell'elettrone. Il passo successivo che attendeva gli scienziati era dunque scoprire un modo per determinare il valore della carica elettrica. Inizialmente venne sfruttata la scoperta fatta da Wilson sulla condensazione dell'acqua: infatti uno ione attira intorno a sé le molecole di vapore portando alla formazione delle goccioline d'acqua. Millikan, con l'aiuto di un suo studente, provò ad eseguire il suo esperimento con l'acqua, che però evaporava facilmente non permettendo prese dati soddisfacenti. A questo punto l'acqua venne sostituita con l'olio e, dopo molte prove, Millikan giunse alla scoperta del valore della carica dell'elettrone. L'esperimento consiste nell'osservazione del moto, all'interno delle piastre di un condensatore, di una gocciolina d'olio elettrizzata per strofinio. Il moto della gocciolina è governato dalle forze che agiscono all'interno del condensatore, che sono quattro: la forza di gravità, la forza elettrica, la spinta di Archimede e la forza di attrito viscoso.

Nel 1913 Millikan utilizzava un'apparecchiatura che occupava più di due tavoloni in una stanza molto grande; grazie alla tecnologia oggi possiamo ripetere l'esperimento su di un dispositivo molto più compatto.

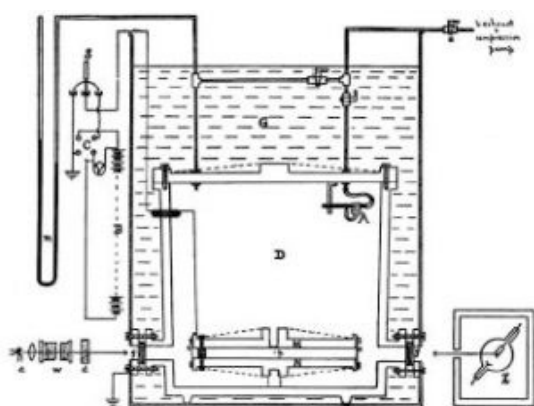


Fig. 1.

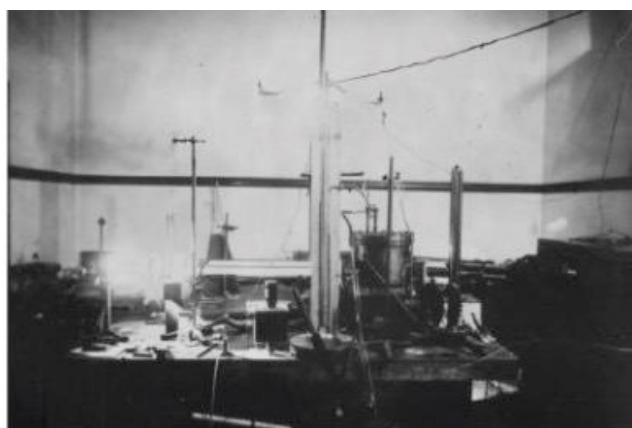


Figura 1. Schema e foto dell'apparecchiatura di Millikan

APPARATO STRUMENTALE E METODO DI MISURA

La strumentazione da noi utilizzata (3B Scientific) dispone degli elementi fondamentali per ripetere l'esperimento in maniera fedele all'originale (si veda figura 2). Ritroviamo:

- Un nebulizzatore, dal quale saranno spruzzate le gocce d'olio;
- Un condensatore posto all'interno di una cameretta nella quale viene spruzzato dell'olio (sulla piastra superiore del condensatore vi è un foro dal quale le goccioline possono entrare);
- Un regolatore di tensione;
- Un microscopio che permette di guardare le goccioline in moto tra le piastre del condensatore;
- Un regolatore di intensità luminosa (per variare l'intensità luminosa della luce led verde posta tra le piastre del condensatore);
- Uno schermo digitale sul quale sarà possibile osservare i dati utili ai fini dell'esperimento;
- Gli interruttori di tensione e tempo.

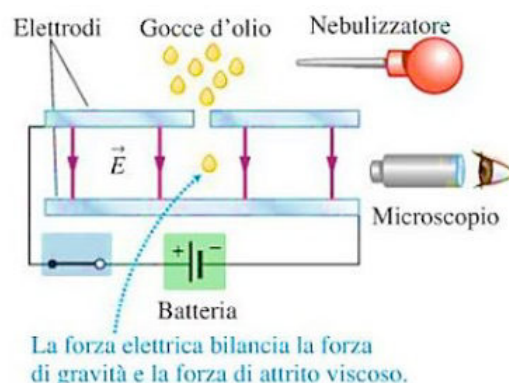


Figura 2. Foto della strumentazione utilizzata e schema del funzionamento dell'esperienza

L'esperienza di Millikan va fatta al buio: infatti ai fini dell'individuazione della gocciolina e, quindi, della buona riuscita dell'esperienza, il buio è la condizione principale! Questa circostanza crea problemi nella presa dati, perché vi è un evidente affaticamento della vista, dovuto principalmente al fatto di dover guardare per lungo tempo nel microscopio al buio. (Brehmer, 1991)

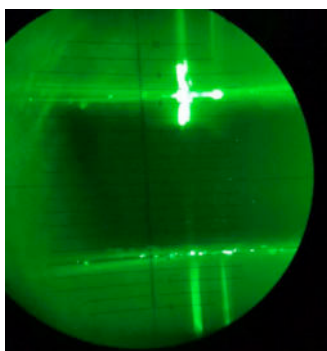


Figura 3. Vista all'interno del microscopio

Il procedimento parte dalla taratura del microscopio, che deve essere fatta in modo che la scala graduata su di esso presente sia perpendicolare alle facce del condensatore, come si vede in figura 3; questa condizione richiede che si vedano le due facce del condensatore parallele.

Ottenuto ciò, si può passare a spruzzare con il nebulizzatore le goccioline nella cameretta. Compariranno delle piccole sferette verdi (le goccioline d'olio) che saranno in moto; purtroppo, la visione immediata di queste non è scontata e potrebbe esserci la necessità di fare diverse prove prima di ottenere un risultato adatto alla presa dati. Una volta presa confidenza con lo strumento e capito bene come individuare una gocciolina adatta, che si muove in modo più lento rispetto alle altre, si può procedere alla presa dati, che consiste nel registrare il tempo impiegato dalla gocciolina durante la discesa e quello impiegato durante la risalita, prendendo come riferimento il passaggio attraverso delle tacche individuate.

Il moto avviene sotto l'effetto concomitante della forza peso e della forza dovuta alla presenza del campo elettrico, a cui si aggiungono, sia pure essendo meno intense, la spinta di Archimede e l'attrito viscoso. La procedura consiste nel seguire il moto della gocciolina fra due tacche prese come riferimento. Si attende che la gocciolina arrivi alla tacca di riferimento inferiore e si attiva la presenza del campo elettrico: la gocciolina salirà fino alla tacca superiore. A questo punto, con l'apposita leva, si deve azzerare la tensione, andando cioè a spegnere il campo elettrico e dando inizio alla presa dati vera e propria. La gocciolina cambierà il verso del moto, muovendosi ora verso il basso sotto l'effetto predominante della forza peso (Figura 4)

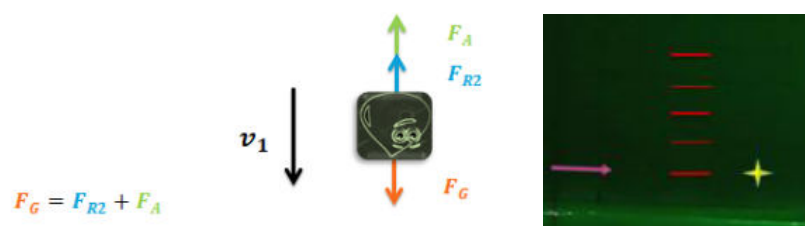


Figura 4. Schema delle forze agenti e vista delle tacche di riferimento

Quando la gocciolina passa per la tacca di riferimento inferiore viene registrato il tempo di discesa, che, nell'apparecchiatura moderna, compare direttamente sullo schermo digitale.

Contemporaneamente si riapplica la tensione, portando la gocciolina a risalire verso l'alto (Figura 5).

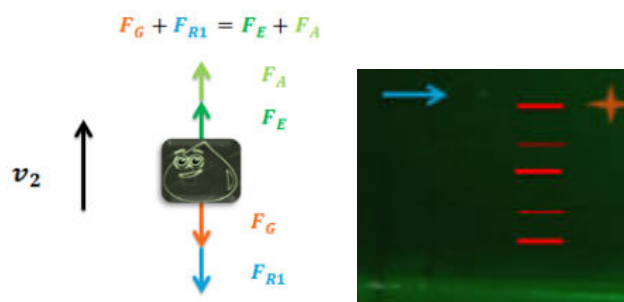


Figura 5. Schema delle forze agenti e vista delle tacche di riferimento

Appena la gocciolina ha raggiunto la tacca superiore viene segnato sul display il tempo di salita. Finisce così la presa dati, anche se in alcuni casi si potrebbe ripetere la procedura più volte con la stessa gocciolina.

Si effettua poi la stessa procedura per altre goccioline: sul nostro dispositivo si potranno fare circa una decina di misure, dopo le quali sarà sempre più complesso vedere le goccioline e dunque avere dei dati quanto più verosimili. Sarà quindi necessario spegnere l'apparecchiatura in modo che la camera si ripulisca e si possa eventualmente condurre una nuova serie di rilevazioni.

LA CARICA DELL'ELETTRONE E LA QUANTIZZAZIONE

L'esperimento di Millikan porta, partendo dall'equilibrio di forze, a determinare la carica dell'elettrone e soprattutto offre la possibilità di avvicinarsi in maniera sperimentale al concetto di quantizzazione della carica.

Per l'analisi dati viene riproposto lo stesso metodo utilizzato da Millikan: si parte dal ricavare, dall'equilibrio delle forze agenti sulla gocciolina, il raggio e la carica della gocciolina. Poiché le goccioline si elettrizzano in maniera diversa, si può assumere che le differenze di carica corrispondano ad una o più cariche elementari che caratterizzano la singola gocciolina. Per ottenere il valore della carica elementare, si parte dalle cariche ottenute per le diverse goccioline analizzate e si pongono i valori in ordine decrescente, dalla carica con valore maggiore a quella con valore minore. Si considerano le differenze fra due valori contigui e si scelgono, tenendo conto degli errori sperimentali, quelle differenze che non sono compatibili con lo zero e che quindi indicano che le due goccioline si sono caricate diversamente a causa dell'azione dello spruzzatore. In generale la differenza sarà indice della presenza di una, o raramente più di una, carica elementare in eccesso. La differenza più piccola viene considerata come indice della carica elementare, mentre differenze maggiori, viste come un multiplo di quella minima, indicheranno un numero maggiore di cariche elementari che si sono attaccate alla gocciolina. Il rapporto fra carica totale e differenza minima sarà indice del numero di cariche elementari che hanno elettrizzato la gocciolina. Tenendo conto del fatto che gli n non risulteranno degli interi, a causa degli errori sperimentali, i valori ottenuti, indice del numero di cariche elementari presenti su ogni gocciolina

analizzata, vengono riportati all'intero più vicino e successivamente posti su di un grafico: in ascissa vengono posti i diversi valori di n ed in ordinata quelli della quantità di carica totale delle diverse goccioline.

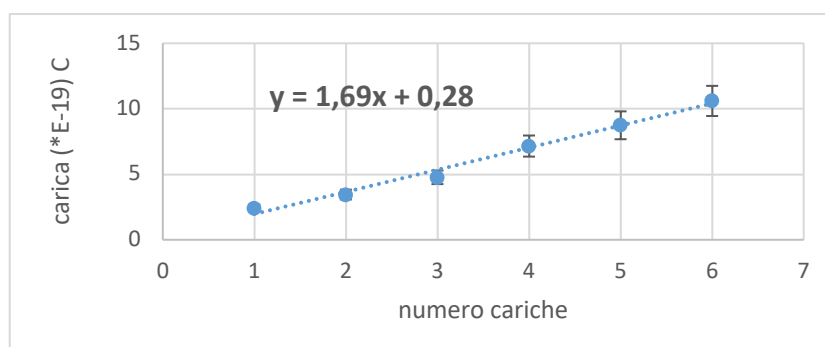


Figura 6. Esempio del grafico dei dati

Il coefficiente angolare della retta ottenuta fornirà il valore della carica elementare cercato. Millikan trovò il valore della carica elementare proprio con questo procedimento ed esso richiede, dal punto di vista del calcolo, solo la conoscenza del piano cartesiano, di una funzione lineare, del coefficiente angolare ed il calcolo degli errori, tutti argomenti trattati nei primi anni della scuola secondaria di secondo grado.

L'ESPERIENZA DI MILLIKAN A SCUOLA

L'esperimento di Millikan è molto utilizzabile nelle scuole e può servire a introdurre gli argomenti della meccanica quantistica, che risultano più complessi e astratti rispetto ad altri. Tra le problematiche segnaliamo che la ripetizione dell'esperienza, per permettere a tutti gli studenti di agire sperimentalmente, richiede un tempo maggiore di quello solitamente disponibile all'interno della programmazione scolastica. Si aggiungono alcune difficoltà oggettive quali la presa dati che deve essere fatta al buio, l'accessibilità al microscopio possibile per un solo studente per volta, il costo considerevole dello strumento.

Si è cercato di trovare delle soluzioni a questi problemi rendendo l'esperienza fruibile a più studenti per volta, usando la tecnologia a nostra disposizione. Per includere il più possibile tutti gli studenti, si può porre il cellulare davanti all'oculare del microscopio permettendo a più ragazzi di vedere dallo schermo del dispositivo cosa accade fra le piastre del condensatore. Con questo accorgimento si stanca meno la vista e l'esperienza diventa più inclusiva, permettendo di fare un'attività di gruppo dove tutti possano vedere cosa accade effettivamente alle goccioline.

Se si decide di non fare direttamente un'attività di laboratorio, si può scegliere di guardare dei video in classe, in modo da far capire cosa effettivamente accade alle goccioline, e utilizzare poi, per l'analisi, dei dati presi in precedenza o i dati stessi pubblicati da Millikan. (Wehrbein, 2022).

Le simulazioni presenti sul web sono molto accurate e permettono in ogni caso di 'vedere' ciò che accade alle goccioline.

A tutto ciò si può aggiungere la visione di video storici, che permettono di entrare nel contesto in cui l'esperimento è stato fatto, facendo anche il confronto tra lo strumento che viene usato ora. Si evidenzia così come la tecnologia possa oggi aiutare senza far perdere l'essenzialità dell'esperimento.

Supponendo che l'argomento venga affrontato in classi quarte e quinte, l'esperienza può essere utilizzata come spunto di ripasso di ciò che è stato fatto negli anni precedenti. La gocciolina, infatti si muove perché è sotto l'azione di quattro forze: la forza peso, la forza di Archimede, la forza elettrica e la forza di attrito. Si può proporre un'attività di gruppo, formando ad esempio quattro gruppi: ogni gruppo si concentrerà su un'unica forza, facendo un approfondimento e proponendo attività o esercizi. Alla fine, ogni gruppo esporrà in classe il lavoro fatto, in modo che ognuno possa ripassare ogni argomento.

Si arriva poi insieme a calcolare la formula per calcolare la carica della gocciolina.

Un ulteriore spunto di ripasso può essere quello della teoria degli errori; infatti, sulle misure sperimentali vi sono degli errori che si possono e devono calcolare utilizzando le formule studiate anch'esse nei primi anni di scuola superiore. Si deve partire dal fatto che ogni misura sperimentale è affetta da un errore, per cause che devono essere individuate. Applicando le regole della propagazione dell'errore studiate nella scuola superiore si arriva alla stima espressa correttamente con la sua incertezza. Considerando gli errori relativi si possono anche fare delle considerazioni sul differente peso delle varie cause: l'errore maggiore, nel caso della presa dati fatta con lo strumento da noi utilizzato, è, ad esempio, quello sullo spazio.

Questo esperimento può poi essere utilizzato anche per attività interdisciplinari, ad esempio con l'inglese, la storia, la chimica. Proponiamo alcuni esempi:

- Millikan ha scritto numerosi articoli per spiegare alla società scientifica la sua scoperta; analizzare i suoi scritti può dunque avvicinare i ragazzi al modo in cui le scoperte scientifiche vengono fatte e poi rese pubbliche. Un utile strumento, contenente anche i dati originali di Millikan, è l'articolo del 1910 (Millikan, 1910). Analizzare il testo dell'articolo traducendolo dall'inglese potrebbe essere un'attività fatta nelle ore di fisica con l'affiancamento del docente di inglese.
- In particolare, in un liceo linguistico potrebbe permettere di dare una visione sperimentale della fisica, sia pur sorvolando parzialmente nella parte più tecnica di laboratorio.
- Una scoperta scientifica, come quella della carica dell'elettrone, deve essere contestualizzata nel suo periodo storico: dunque un altro spunto potrebbe essere quello di studiare il periodo storico in cui la scoperta si colloca, ricercando quali erano le conoscenze di base che si avevano e dalle quali si è potuto partire, come ad esempio l'esperimento di Thomson.
- La chimica risulta quasi una materia di collegamento indispensabile, che quasi si fonde con la fisica: fare dei confronti sul significato fisico e su quello chimico dell'esperimento può essere una proposta interdisciplinare molto interessante, con uno spunto di riflessione più ampio sulle materie STEM, la loro connessione e la loro importanza.

CONCLUSIONI

L'esperimento della goccia d'olio di Millikan è stato proposto ad un gruppo di cinque ragazzi di quarta e quinta liceo durante un percorso di orientamento universitario della durata di tre pomeriggi. L'attività è stata suddivisa in quattro parti:

1. introduzione al periodo storico e all'esperimento con focus sulla parte teorica. Qui hanno potuto visionare dei video storici e di introduzione all'esperimento; in seguito, dopo un breve ripasso sulle forze agenti sulle goccioline, hanno ricavato in maniera autonoma, dall'equilibrio delle forze, la formula per arrivare al valore della carica presente sulla gocciolina;
2. presentazione del funzionamento e utilizzo dello strumento, con spiegazione dei vari passaggi da fare per arrivare all'acquisizione dei dati;
3. attività di laboratorio con suddivisione dei compiti, analisi dei dati, costruzione del grafico e determinazione della carica dell'elettrone;
4. preparazione di una presentazione da esporre poi agli altri gruppi che avevano partecipato alla stessa attività di orientamento.

L'esperienza è risultata interessante nella parte storica e nell'analisi dati, e utile per ripassare la teoria degli errori.

Anche la parte sperimentale è risultata interessante, sia per gli studenti che osservavano direttamente con il microscopio, sia per quelli che seguivano sullo schermo del cellulare; una volta compresa ed applicata la procedura in modo corretto, i ragazzi sono apparsi molto interessati dall'attività e gratificati dai dati ottenuti. Un grosso vantaggio dell'esperienza di orientamento è l'aver avuto a disposizione tutto il tempo necessario alla realizzazione del percorso. Per un utilizzo in classe, probabilmente è necessario seguire alcuni dei suggerimenti che abbiamo cercato di proporre nella sezione precedente.

BIBLIOGRAFIA

- Brehmer, S.,(1991). Millikan without the eyestrain. *The Physics Teacher* **29**, 31. <https://doi.org/10.1119/1.2343325>
- Eckey, D., (1996) .A Millikan Oil Drop Analogy. *Journal of Chemical Education* **73** n3. <https://doi-org.bibliopass.unito.it/10.1021/ed073p237>
- Millikan, R.A., (1910), The Isolation of an Ion, A Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes's Law, *Science* , Sep. 30, 1910, New Series, Vol. 32, No. 822, <https://www.jstor.org/stable/1634813>
- Wehrbein, W. M., (2022), Millikan again

IL PERCORSO DI INGRESSO ALLA SCUOLA DI SCIENZE DELLA NATURA

D.Marocchi, M.Serio, F.Pace
Dipartimento di Fisica, Università di Torino
daniela.marocchi@unito.it

Abstract

Dopo alcuni tentativi di diverso genere (disciplinari/non disciplinari), l'Ateneo di Torino ha riconosciuto l'importanza di proporre alle future matricole un test di accertamento dei requisiti minimi anche per i corsi di laurea ad accesso libero. Il test iniziale viene gestito dal Consorzio CISIA e, per la Scuola di Scienze della Natura, verte su matematica, scienze di base, logica e comprensione del testo (TOLC-S). Gli studenti che ottengono punteggi inferiori alle soglie, indicate nel bando per i singoli corsi di studio, possono iscriversi alla condizione di completare entro il primo anno di università un percorso di obbligo formativo aggiuntivo (OFA), stabilito e organizzato dai diversi corsi di studio.

Il corso di studio in Fisica considera superato il TOLC con un punteggio di almeno 5 punti nella sezione di matematica di base e di almeno 2,5 nella sezione di scienze di base. Per chi non ha raggiunto questa seconda soglia, è stato progettato e messo a disposizione un percorso formativo di riallineamento di Fisica, al termine del quale lo studente sostiene una prova di verifica, costituita da domande di fisica di base.

Questo intervento intende presentare alcuni risultati relativi al test finale del percorso di riallineamento, attraverso i quali evidenziare argomenti che continuano a risultare ostici per gli studenti e che quindi riteniamo utile segnalare ai docenti della scuola superiore di II grado

Parole-chiave

Nodi concettuali, OFA

IL PERCORSO DI ORIENTAMENTO

E' importante che il percorso di orientamento all'Università preveda sia una fase informativa sui contenuti dei singoli corsi di laurea, sia una fase di auto-verifica a largo raggio della preparazione relativamente ai contenuti standard del corso di laurea prescelto.

Le attività di Orientamento proposte dall'Ateneo di Torino (reperibili alla pagina web <https://www.unito.it/didattica/orientamento/strumenti-e-servizi-di-orientamento>) sono di diverso tipo:

- Orient@mente : sistema per la valutazione delle conoscenze di base per i corsi di carattere scientifico
- Passport.Unito : percorso online per riconoscere e sviluppare le soft skill, con attività di autoriflessione, lezioni-letture, esercitazioni on-line, video, etc.
- Start@Unito: insegnamenti gratuiti, sia di carattere scientifico che umanistico, seguibili online, con verifica finale e possibilità di riconoscimento dei crediti all'atto dell'iscrizione
- Mytest: strumento di orientamento in autocompilazione, per aiutare gli studenti a fare il punto sui loro interessi, motivazioni, strategie di studio, capacità rispetto all'italiano e alla matematica.

L'iscrizione ai corsi di studio è regolata dai bandi relativi ai corsi di studio ad accesso programmato e ad accesso libero e prevede per questi ultimi un Test di accertamento dei Requisiti Minimi (TARM). Nel tempo si è passati da test disciplinari, incentrati su materie base per lo specifico percorso, a test non disciplinari, essenzialmente impostati sulla capacità di comprensione del testo. Negli ultimi due anni accademici l'Ateneo di Torino si è attestato su un test disciplinare con contenuti relativi alle conoscenze previste per le discipline di base dei singoli corsi di studio. Per l'ambito scientifico, il test proposto è il TOLC-S, con contenuti prevalentemente di matematica (20 quesiti), scienze di base (10 quesiti su

biologia, chimica, fisica, scienze naturali, geologia), ragionamento e problemi (10 quesiti) e comprensione del testo (10 quesiti).

I dati analizzati per la coorte 2021-22, riportati in Figura 1, mostrano come un risultato positivo al TOLC-S si correli ad una minore probabilità di abbandono.

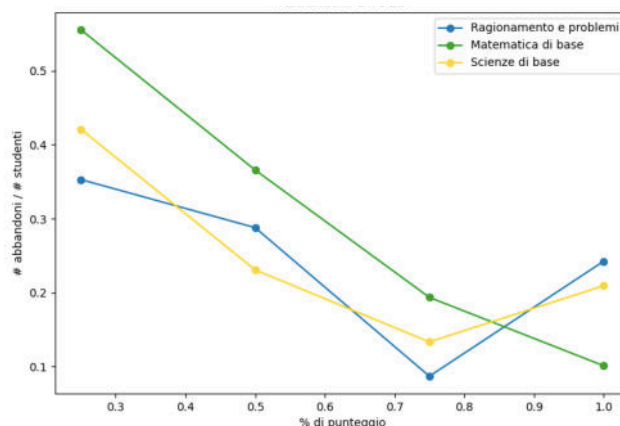


Figura 1. Percentuale di abbandoni nel primo anno di corso universitario in funzione del punteggio ottenuto al test di ingresso (rapportato al valore massimo) per la coorte 2020/2021

IL TEST DISCIPLINARE ED I SUCCESSIVI RISULTATI DELLE MATRICOLE

In anni passati il corso di studi in Fisica aveva evidenziato l'utilità di proporre ai possibili futuri studenti un test, a livello auto-valutativo, incentrato sulle conoscenze di fisica di base. Per questo test erano disponibili 10 serie di 10 domande a risposta multipla su argomenti di fisica svolti durante il percorso della scuola superiore di secondo grado, con associato suggerimento per la risoluzione e feedback con indicazioni di dove trovare presentati gli argomenti risultati critici. Su questo test, proposto ad un gruppo selezionato di circa 500 studenti della scuola superiore di secondo grado, era poi stata svolta una ricerca per evidenziare alcuni temi che risultavano particolarmente ostici a studenti dell'ultimo anno del liceo scientifico. La ricerca era stata presentata nel IX Convegno Nazionale DIFIMA (Morandi et al., 2019) e riconfermava le conclusioni già ottenute da una ricerca svolta presso l'Università Federico II di Napoli (Capasso et al., 2018), presentata anche come invited paper al IX Convegno Nazionale DIFIMA tenutosi a Torino nell'ottobre 2019.

Le 100 domande erano state poi studiate criticamente per un processo di ottimizzazione e riproposte in un test di autovalutazione per gli studenti del primo anno del corso di laurea in Fisica. In questa sezione discutiamo l'analisi comparata fra risultato del test di autovalutazione, l'abbandono nel corso del primo anno di università ed i risultati negli esami del primo anno nel corso di laurea in Fisica. I dati riportati si riferiscono alla coorte 2020/2021.

L'analisi ha evidenziato come il possesso delle conoscenze di base, indagate dal test, sia un buon biglietto di ingresso per il percorso di laurea e come esista una buona correlazione fra punteggio basso al test e abbandono durante il primo anno degli studi universitari (Figura 2, coorte 2020/2021). Si tenga presente che la percentuale di abbandoni nel CdS di Fisica oscilla fra il 25 ed il 40% (dati relativi agli anni accademici dal 2018-19 al 2022-23).

Il risultato di un test disciplinare può quindi diventare indicativo di quali studenti potrebbero trovarsi maggiormente in difficoltà e per i quali sarebbe quindi utile attivare delle misure di rinforzo.

In Figura 3 si può notare come il numero di cfu acquisiti durante il primo anno, indicati con il codice colori, cresca al crescere del voto conseguito nel test di autovalutazione: il 50% degli studenti che hanno ottenuto un punteggio inferiore a 4 ha conseguito, nel primo anno, meno di 8 cfu. Il 70% degli studenti con un punteggio fra 7 e 9 ha conseguito più di 48 cfu e solo meno del 15% ha conseguito fra 0 e 8 cfu. Anche per quanto riguarda la media ottenuta negli esami del primo anno si può notare, in Figura 4, come l'80% degli studenti con un punteggio al test fra 7 e 9 abbia ottenuto una media superiore al 24, valore ottenuto da circa il 25% degli studenti con un punteggio al test di autovalutazione compreso fra 1 e 3.



Figura 2. Percentuale di studenti della coorte 2020/2021, che hanno abbandonato durante il primo anno di corso in funzione del risultato al test disciplinare di autovalutazione

La banda blu relativa ad un voto medio <18 si riferisce a studenti che non hanno superato esami, ossia non hanno ottenuto la votazione minima che permette di registrare il voto. La Figura 4 evidenzia che il numero di studenti che non riescono a superare nessun esame è inversamente proporzionale all'esito del test di autovalutazione, cioè ad un test disciplinare basato su conoscenze di base specifiche della materia caratterizzante il percorso di studi.

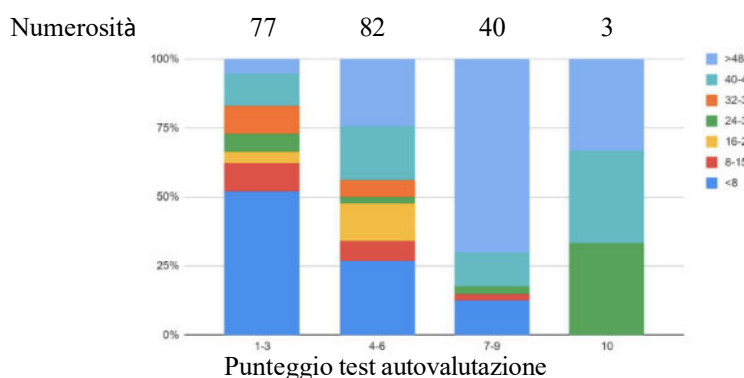


Figura 3. Numero di CFU acquisiti nel primo anno in funzione del punteggio del test di autovalutazione (coorte 2020/2021) : il colore della banda corrisponde al numero di CFU, l'altezza alla percentuale di studenti

Successivamente alla scelta di utilizzare il test TOLC-S anche per i corsi ad accesso libero, l'Ateneo ha invitato i corsi di laurea a progettare e realizzare percorsi di riallineamento, ai fini di recupero degli OFA (Obblighi Formativi Aggiuntivi) per gli studenti che non superano nel TOLC-S la soglia definita dal corso di studio stesso. Per il corso di laurea in Fisica, le soglie da superare riguardano le sezioni di matematica e di scienze di base e sono rispettivamente di 5 e di 2,5 punti.

Per il riallineamento relativo alle scienze di base, si è scelto di impostare un percorso di ripasso sulle conoscenze di base di Fisica, arricchito anche da test di verifica sugli argomenti via via affrontati. Gli studenti risultati 'sotto soglia' per la parte di scienze al TOLC-S devono quindi affrontare una prova di verifica relativa solo alla Fisica di base.

In questa prova di verifica, le domande sono molto simili, come impostazione, a quelle proposte nel test di autovalutazione e riprendono gli argomenti affrontati nel corso di riallineamento, che riflettono gli argomenti affrontati dagli studenti durante il percorso della scuola secondaria di secondo grado.

Nelle prossime sezioni si prende in esame, a partire dai risultati del test per il superamento degli OFA, i contenuti e la costruzione del test con lo scopo di evidenziarne le problematiche, ritenendo queste informazioni utili per gli insegnanti nel percorso di formazione degli studenti.

Il contributo affronta quindi sia la modalità con cui sono stati costruiti i test, sia l'analisi di alcuni dei risultati ritenuti più interessanti per un insegnante

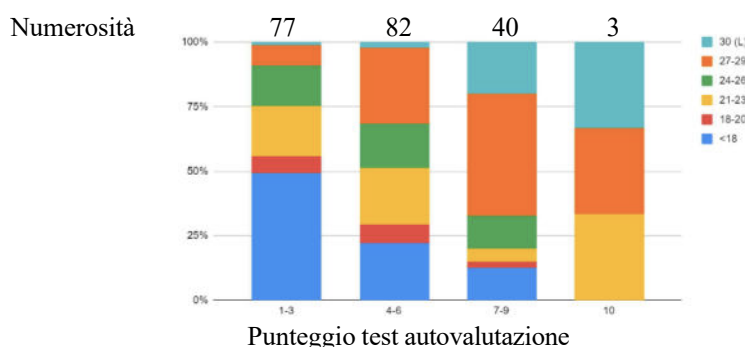


Figura 4. Voto medio degli esami sostenuti nel primo anno in funzione del punteggio del test di autovalutazione (coorte 2020/2021): il colore della banda corrisponde ad un range di voto medio degli esami, l'altezza alla percentuale di studenti.

LA PROGETTAZIONE DEL TEST PER IL SUPERAMENTO DEGLI OFA

Il test è stato costruito scegliendo argomenti di base di fisica classica, proponendo in generale delle scelte concettuali piuttosto che numeriche ed associando, secondo la sensibilità del gruppo di autori del test, un punteggio da 1 a 3 alle diverse domande. Le domande da 1 punto sono essenzialmente delle definizioni, relativamente alle quali si ha principalmente un problema di conoscenza/non conoscenza dell'argomento. Le domande da 2 punti richiedono una parziale applicazione della legge considerata, mentre le domande da 3 punti richiedono anche una certa serie di calcoli. Nelle 10 domande proposte al singolo studente venivano inserite 1 domanda da 3 punti, 3 domande da 2 punti e 6 domande da 1 punto. La soglia prevista era di 6 punti per l'anno accademico 2022-23, alzata a 7 per l'anno accademico 2023-24. Il livello di soglia era stato fissato pensando che dovesse almeno esserci la conoscenza dei fenomeni e delle relative relazioni, con la risposta corretta alle 6 domande da 1 punto.

La difficoltà del quesito, come indicato dalla teoria classica dei test, viene definita in base ai risultati ottenuti, calcolando il rapporto fra il numero di risposte esatte rispetto al numero di studenti (Tabella 1).

Tabella 1. Indice di difficoltà in base alla teoria classica dei test

Valori dell'indice di difficoltà dell'item	Grado di difficoltà dell'item
0 – 0,25	difficile
0,26 – 0,5	medio – difficile
0,51 – 0,75	medio – facile
0,76 - 1	facile

In realtà si è poi evidenziato che le assegnazioni di punteggio, e quindi di annessa difficoltà, fatte a priori non sempre corrispondevano poi all'effettiva difficoltà incontrata dagli studenti.

Questa evidenza ci sembra importante da sottolineare, là dove i test vengono usati dai docenti per la valutazione degli studenti, soprattutto quando si tratti di una valutazione sommativa: davanti ai risultati di un test è opportuno riconsiderare i punteggi assegnati in fase preventiva alle singole domande perché non sempre il livello di difficoltà risulta essere, per gli studenti, quello pensato dall'insegnante. Vale poi sempre l'avvertenza, sull'utilizzo di test per la valutazione, della eventuale non chiarezza del testo o delle risposte proposte, cosa che può essere valutata solo dopo aver considerato come gli studenti hanno risposto. Si ribadisce quindi come il test a risposta multipla sia utile per una valutazione formativa se seguita da un'opportuna analisi e discussione dei risultati.

Trattandosi di un test che blocca il percorso di studi, si è pensato che fosse opportuno proporre, per ogni sessione, a tutti gli studenti lo stesso set di domande, che comparivano però in ordine casuale. Il set veniva poi sostituito nella sessione di esame successiva con altre 10 domande nuove, scelte con la stessa

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia tecnica (1 domanda da 3 punti, 3 domande da 2 punti, 6 domande da 1 punto). Questo ha permesso di testare domande di tipo differente, ma ha purtroppo abbassato il numero di risposte relative alla stessa domanda, rendendo così il risultato solo indicativo, senza peso statistico. Per aumentare un po' la consistenza numerica delle risposte, sono stati utilizzati anche i risultati degli studenti del CTF (Corso di laurea in Chimica e Tecnologia Farmaceutiche), là dove fosse stata proposta la stessa domanda.

ANALISI DI ALCUNI QUESITI

In questa sezione vogliamo analizzare le indicazioni che nascono dai risultati di alcune delle domande proposte. Per ogni domanda viene riportato il testo, il numero di risposte ottenuto, il numero di punti assegnati in base all'ipotesi fatta sulla difficoltà della domanda, la difficoltà 'a posteriori', come risulta dalla teoria classica dei test. Le crocette riportate di fianco alla possibile risposta indica come si sono distribuite le scelte sbagliate fatte dagli studenti e permette, almeno in alcuni casi, di individuare il tipo di errore commesso

1) Il peso specifico dell'acqua è:	
<i>12 risposte, difficoltà 0,25 (ipotizzati 2 punti)</i>	
a. 1000 N/m ³	xxx
b. 9,8 N/m ³	
c. 1 N/m ³	xxxxxx
d. 9800 N/m ³	

Mentre le domande che riguardano direttamente la differenza fra massa e peso sono risultate di bassa difficoltà, in questo caso gli studenti hanno trascurato l'effetto dell'accelerazione di gravità

2) 1 Ampère vale:	
<i>11 risposte, difficoltà 0,36 (ipotizzato 1 punto)</i>	
a. 1 coulomb/secondo	
b. 1 metro/secondo	
c. 1 Faraday/secondo	
d. 1 Volt/secondo	xxxx
e. Nessuna risposta	xxx

Si può notare che, delle risposte proposte, solo due consideravano grandezze caratteristiche dell'elettricità; infatti non ci sono state risposte sbagliate che abbiano preso in considerazione il metro o il faraday. Nonostante ciò, c'è stata una pari suddivisione fra coulomb (le 4 risposte corrette) e volt, con una certa indecisione sulla scelta (le 3 non risposte), forse legata anche al fatto che per gli studenti del CTF la risposta sbagliata era penalizzante, mentre non lo era la risposta non data

3) Se in un conduttore passa una corrente di 2 mA quando ai suoi estremi è applicata una differenza di potenziale di 12 V, quanto vale la resistenza del conduttore?	
<i>17 risposte, difficoltà 0,29 (ipotizzati 2 punti)</i>	
a. 6 kΩ	
b. 6 Ω	xxxxx
c. 24 mΩ	xxxx
d. 24 Ω	xxx

In queste risposte si notano due tipi di errore. Uno è relativo alla non conoscenza della relazione fisica: viene utilizzato il prodotto $V \cdot I$ invece del rapporto (risposte c e d). L'altro è relativo al fatto che si è trascurato il fattore 10^{-3} (risposte b e d)

4) Detta F la forza con cui il corpo A agisce sul corpo B il terzo principio della dinamica afferma che:	
7 risposte, difficoltà 0,43 (ipotizzato 1 punto)	
a. il corpo B reagisce su A con una forza in modulo pari a F nella stessa direzione e verso	
b. il corpo B reagisce su A con una forza di modulo pari a $-F$	xx
c. dipende dal rapporto tra le masse dei due corpi	x
d. il corpo B reagisce su A con una forza in modulo pari a F nella stessa direzione e verso opposto	
e. nessuna risposta	x

In questo caso, sembra evidente una insufficiente attenzione alla terminologia fisica che definisce come sempre positivo il modulo del vettore, completandone la descrizione attraverso direzione e verso

5) Quale delle seguenti espressioni è dimensionalmente corretta? (m = massa, t = tempo, s = spostamento, v = velocità, a = accelerazione, F = forza)	
22 risposte complessive, difficoltà 0,41 (ipotizzati 2 punti)	
a. $F = m v^2 s$	xx
b. $F = mv/s$	xxxxx
c. $a = v^2 t$	xxx
d. $a = v^2 /s$	
e. nessuna risposta	xxx

Le risposte sbagliate si sono distribuite sui diversi distrattori, indicando come l'analisi dimensionale resti una difficoltà per gli studenti.

6) Il vettore pressione è definito come:	
8 risposte complessive, difficoltà 0,25 (ipotizzato 1 punto)	
a. la pressione non è un vettore	
b. la forza media diviso la superficie	
c. la forza per la superficie	
d. forza diviso superficie	xxxx
e. nessuna risposta	xx

Questa domanda ha dato difficoltà essenzialmente agli studenti del CTF (i dati sono riferiti a loro), mentre gli studenti di Fisica l'hanno trovata facile. In una domanda successiva sulla pressione, in cui non è presente l'inganno del termine 'vettore', non è stato riscontrato lo stesso livello di difficoltà anche per gli studenti del CTF, dove 4 studenti su 7 hanno risposto correttamente. Quindi il problema sollevato da questo quesito non è relativo ad una ignoranza sulla relazione fra forza, superficie e pressione, quanto ad una non sufficientemente attenta lettura del testo.

Altre volte la difficoltà risulta essere di tipo matematico, come nella successiva domanda in cui vengono fatti errori vari nella trasformazione dei mm^2 in m^2

7) La membrana di un timpano è un dischetto avente l'area di circa 60 mm^2 . La forza esercitata su di essa dalla pressione atmosferica ($1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) è circa	
11 risposte, difficoltà 0,27 (ipotizzati 3 punti)	
a. 60 N	xxxx
b. 6000 N	xx
c. 6 N	
d. 600 N	xx

8) Durante una transizione di fase liquido/solido (liquido/vapore) di una sostanza, la temperatura	
<i>36 risposte, difficoltà 0,22 (ipotizzato 1 punto)</i>	
Liquido/solido	
a. aumenta	
b. rimane costante fino alla totale evaporazione	
c. rimane costante fino alla totale solidificazione	
d. diminuisce	x x x x x x x x x x
Liquido/vapore	
a. aumenta	x x x x x x x x x x x x x x
b. diminuisce	
c. rimane costante fino alla totale condensazione	x
d. rimane costante fino alla totale evaporazione	

La domanda sul comportamento della temperatura durante la transizione di stato ha mostrato di essere di evidente difficoltà per gli studenti. Sono state proposte due diverse versioni (transizione liquido/solido o transizione liquido/vapore), ma il tipo di difficoltà si è dimostrato essere lo stesso

9) I raggi infrarossi differiscono da quelli ultravioletti perché	
<i>29 risposte, difficoltà 0,34 (ipotizzato 2 punti)</i>	
a. non sono radiazioni elettromagnetiche	xxx
b. hanno una frequenza maggiore	x
c. hanno una lunghezza d'onda maggiore	
d. hanno una lunghezza d'onda minore	xxxxxxxxxxxx
e. Nessuna risposta	xxx
I raggi X differiscono dalle onde radio perché	
<i>6 risposte, difficoltà 0,5 (ipotizzati 2 punti)</i>	
a. non sono radiazioni elettromagnetiche	
b. hanno una frequenza maggiore	
c. hanno una lunghezza d'onda maggiore	
d. hanno una lunghezza d'onda minore	x
e. Nessuna risposta	xx

Il confronto fra raggi IR e UV risulta difficile (difficoltà 0,34), mentre risulta decisamente più facile una domanda concettualmente analoga, in cui la distanza in lunghezza d'onda fra i due tipi di radiazione è decisamente più grande (difficoltà 0,5)

10) È possibile utilizzare una lamina di vetro a facce piane e parallele per correggere un difetto rifrattivo della vista?	
<i>7 risposte, difficoltà 0,14 (ipotizzati 2 punti)</i>	
a. No, perché la lamina non potrebbe deviare i raggi incidenti	x
b. Sì, quando è richiesto l'uso di una lente convergente	
c. Sì, quando è richiesto l'uso di una lente divergente	
d. No, perché la lamina disperderebbe angolarmente la luce incidente	
e. Nessuna risposta	xxxxx

Risulta quindi molto difficile una domanda applicativa nel campo dell'ottica, a riprova di quanto risulti complicato per gli studenti passare dal semplice studio delle relazioni alla loro applicazione nella realtà. Erano presenti alcune domande che facevano riferimento alla legge dei gas perfetti. Quando non veniva riportata la relazione in modo esplicito si sono notate criticità, soprattutto nel caso di trasformazione a temperatura costante. Nella domanda 11, proposta a 7 studenti del CTF, solo 1 ha risposto correttamente. Invece, in una domanda concettualmente simile, ma in cui veniva riportata esplicitamente la relazione dei gas e il tipo di legame fra le variabili, la situazione è risultata molto diversa e la domanda è risultata estremamente facile.

11) Supponiamo che un gas perfetto occupi inizialmente un volume di 3 L alla pressione di 6 atm e che a temperatura costante la pressione venga ridotta al valore di 2 atm. Alla fine del processo il volume del gas risulta pari a	
<i>7 risposte, difficoltà 0,14 (ipotizzato 1 punto)</i>	
a. 1 litro	XXXXX
b. 3 litri	
c. 9 litri	
d. 9 m ³	
e. Nessuna risposta	X

Dall'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nkT$ si deduce che se il gas mantiene costante la sua temperatura T, la pressione p del gas è inversamente proporzionale al volume V, quindi:	
<i>11 risposte, difficoltà 1 (ipotizzato 1 punto)</i>	
se il volume raddoppia, la pressione rimane la stessa	
se il volume raddoppia, la pressione raddoppia	
se il volume si dimezza, la pressione raddoppia	
non c'è relazione tra le variazioni di p e V	
Nessuna risposta	

Si può quindi pensare che la difficoltà stia principalmente nel ricordare e maneggiare opportunamente la relazione. Ricordiamo che anche nella ricerca di Capasso et al. l'utilizzo della relazione dei gas perfetti risultava in cima alla graduatoria di difficoltà

CONCLUSIONI

Da quanto visto possiamo trarre alcune conclusioni e suggerimenti:

- gli studenti trovano difficoltà quando si tratta di applicare le formule, tanto più se in casi di vita reale (esempio: domanda 10)
- dal punto di vista matematico ci sono difficoltà con le trasformazioni delle unità di misura (esempio: domanda 7) e dal punto di vista fisico con l'analisi dimensionale (domanda 5)
- spesso l'idea a priori della difficoltà di un testo non coincide con la difficoltà rilevata a posteriori dal risultato del test stesso: è utile l'uso dei test a risposta multipla come un supporto alla valutazione formativa, mentre può essere fuorviante utilizzarli per la valutazione sommativa (esempio: domanda 11)
- quando si propongono test differenziati, ma considerati equivalenti come difficoltà, bisogna fare molta attenzione perché testi simili possono invece risultare per gli studenti con grado di difficoltà molto diverso (esempio: domanda 9)
- è importante avere chiaro qual è l'obiettivo che ci si propone utilizzando un determinato test: se si vuole, ad esempio, valutare la conoscenza della relazione fisica o la capacità di leggere con attenzione un testo (esempio: domanda 6)

BIBLIOGRAFIA

Capasso, G., Colantonio, A., Coppeta, J., Galano, S., Scotti, U., Serroni, G., Testa, I. (2018). Conoscenze di fisica di base degli studenti al termine della scuola Secondaria. *Giornale di fisica vol. LIX N.4*. DOI 10.1393/gdf/i2018-10315-1

Morandi, E., Porcu, F., Marocchi, D., Serio, M., Bonino, R., (2020) Test a risposta multipla: cosa possono dirci sulle difficoltà di apprendimento della Fisica? *Atti IX Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica (DI.FI.MA) "Matematica e Fisica nella cultura e nella società"*, ISBN 978-88-75901-52-3

Testa, I., (2020). Conoscenze di fisica di base degli studenti al termine della scuola Secondaria. *Atti IX Convegno Nazionale DIFIMA "Matematica e Fisica nella cultura e nella società"*. ISBN 978-88-75901-52-3

“RICERCATORI ALL’OPERA”: UN PERCORSO PCTO PER SPERIMENTARE E IMPARARE A REALIZZARE ESPERIENZE DI LABORATORIO

Marocco Federica, Gentile Elisa, Viterbo Michelangelo
I.I.S. “Majorana” Moncalieri (TO)
elisa.gentile@iismajoranamoncalieri.edu.it

Abstract

La comunicazione si riferisce a un progetto di PCTO realizzato nell’a.s. 2022/2023 presso l’IIS Majorana di Moncalieri, ideato dai prof. Marocco e Viterbo e già sperimentato nei precedenti anni scolastici. Gli obiettivi del progetto erano avvicinare gli studenti al mondo della ricerca, anche con finalità orientative, e preparare esperienze di laboratorio di fisica finalizzate alla didattica da parte di studenti del terzo anno che potessero poi essere riutilizzate all’interno dell’Istituto. I ragazzi hanno vissuto un’esperienza immersiva per un’intera settimana (30 ore) alternando attività in Laboratorio di Fisica, in aule appositamente adibite, nell’Auditorium e negli spazi esterni dell’Istituto, sempre accompagnati dai loro docenti di fisica. Gli studenti, divisi a gruppi, hanno realizzato quattro esperienze che li hanno visti impegnati sul piano concreto nella costruzione degli esperimenti, utilizzando materiali poveri, sul piano teorico nella comprensione dei fenomeni fisici sottostanti e sul piano comunicativo nella produzione di un video esplicativo per ogni esperienza effettuata.

Parole-chiave

PCTO, Laboratorio, Peer to Peer

INTRODUZIONE

Nell’anno scolastico 2022-2023, l’esperienza ha coinvolto cinque classi terze del Liceo Scientifico (ordinamento e OSA) per un totale di 96 allievi, 5 docenti di matematica e fisica e un assistente tecnico. I ragazzi sono stati impegnati per un’intera settimana (30 ore) alternando attività in Laboratorio di Fisica, in aule appositamente adibite, nell’Auditorium e negli spazi esterni dell’Istituto. Le attività sono state svolte nelle prime due settimane del mese di marzo e sono state riconosciute ai fini dei Percorsi Trasversali per le Competenze e l’Orientamento (PCTO).

Le quattro esperienze che hanno visto gli allievi impegnati in prima persona come ricercatori sono state:

- battello a vapore
- fontana di Erone
- razzo ad acqua
- esperimento de “La scimmia e il cacciatore” o pistola e bersaglio (per la realizzazione è stato fondamentale il contributo del Prof. Lorenzo Galante, Politecnico di Torino)

La scelta delle attività da parte del team di docenti ha cercato di spaziare tra macro argomenti differenti, trattati nel corso di studi di un Liceo Scientifico, anticipando alcuni contenuti e rivisitandone altri.

ORGANIZZAZIONE DEL LAVORO

L’attività è stata organizzata come un gioco di ruolo: i docenti si sono trasformati in committenti e i ragazzi nei ricercatori che, mettendosi “all’opera”, hanno avuto il compito di realizzare un prototipo per ciascuna esperienza proposta, analizzare la fisica sottostante, cercare di spiegare il funzionamento (o il non funzionamento) del prototipo costruito e documentare attraverso un video l’intera esperienza (realizzazione e spiegazione teorica).

Le varie esperienze sono state proposte ai ragazzi dai committenti attraverso delle schede con le istruzioni di montaggio e costruzione, ma prive di spiegazioni dettagliate dei fenomeni fisici coinvolti.

Le cinque classi coinvolte sono state così impegnate:

- due classi hanno lavorato in parallelo in una prima settimana;
- le restanti tre classi hanno lavorato nella settimana successiva.

I ragazzi di ogni classe sono stati divisi in gruppi di lavoro composti da tre o quattro allievi.

Le attività sono state organizzate nelle sei ore di lezione mattutine, prevedendo di far lavorare tutti i gruppi della stessa classe in parallelo sulla medesima esperienza.

Le varie classi si sono poi alternate tra esperienze e spazi di lavoro diversi, secondo un calendario stabilito a monte, organizzato in modo che in ogni mattina fossero previsti due “blocchi” di attività (laboratoriali o di rielaborazione dei contenuti) e un momento conclusivo, svolto in plenaria in Auditorium per il confronto e la discussione sulle attività svolte nella mattinata.

Tabella 1. Esempio di scansione delle attività per tre classi in parallelo.

	LUNEDI'			
	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Aule utilizzate
8.00	Accoglienza: Auditorium			Auditorium
9.00	Costruzione Battello	Costruzione Battello	Costruzione Battello	Aula 1+ Laboratorio + Aula 2
12.00	Prova battello (in esterna)			Area esterna + Auditorium
	MARTEDI'			
	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Aule utilizzate
8.00	Preparazione video Battello	La scimmia e il cacciatore	Preparazione video Battello	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
10.30	La scimmia e il cacciatore	Preparazione video Battello	Fontana Erone	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
13.00	Visione video battello e discussione			Auditorium
	MERCOLEDI'			
	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Aule utilizzate
8.00	Preparazione video La scimmia e il cacciatore	Fontana Erone	La scimmia e il cacciatore	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
10.30	Fontana Erone	Preparazione video La scimmia e il cacciatore	Preparazione video La scimmia e il cacciatore	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
13.00	Visione video La scimmia e il cacciatore e discussione			Auditorium
	GIOVEDI'			
	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Aule utilizzate
8.00	Costruzione Razzo	Costruzione Razzo	Costruzione Razzo	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
10.30	Prova Razzo (in esterna)			<u>Campo calcio</u>
12.00	Preparazione video fontana di Erone	Preparazione video fontana di Erone	Preparazione video fontana di Erone	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
13.00	Visione video Fontana di Erone e discussione			Auditorium

	VENERDI'			
	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Aule utilizzate
8.00	Preparazione video Razzo	Preparazione video Razzo	Preparazione video Razzo	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
9.00	Visione video Razzo e discussione			Auditorium
10.30	Peer review	Peer review	Peer review	Aula 1 + Laboratorio + Aula 2
11.30	Premiazione + Conclusione e ringraziamenti			Auditorium

ATTIVITA' SVOLTE

Ogni giorno si apriva con la consegna ai gruppi di lavoro di una cartellina contenente le indicazioni tecniche relative all'attività da svolgere nell'arco della giornata. I gruppi trovavano postazioni di lavoro opportunamente allestite con i materiali e strumenti sufficienti per la realizzazione del prototipo. I docenti e l'assistente tecnico erano a disposizione per tutto il tempo dello svolgimento delle attività per fornire, su richiesta degli allievi, eventuali materiali aggiuntivi.

Nella maggior parte dei casi, i materiali utilizzati nelle esperienze erano materiali di recupero (in modo da essere facilmente reperibili dagli allievi nelle settimane antecedenti l'attività) o a basso costo.

Attività 1: Battello a vapore

Materiali:

- vassoi polistirolo/vaschette gelato
- lattine di alluminio (bibite)
- cannucce di plastica*
- colla "acciaio rapido" *
- candeline tea light*
- filo di ferro (da orto)
- pistola per colla a caldo*
- ricariche per colla a caldo*
- siringhe da 5 ml (2 o 3 per classe)*
- vasche di plastica per prove galleggiamento in aula*
- piscinetta gonfiabile per bambini per prove all'aperto dei battelli*
- tubo giardino per riempire la piscinetta

* Materiale fornito dalla scuola



Figura 1. Costruzione del Battello a vapore

La fisica dell'esperienza:

- Macchina termica
- Principio di azione e reazione

Attività 2: Fontana di Erone

Materiali:

- pistole per colla caldo*
- ricariche per colla a caldo*
- cannuccie di plastica*
- bottiglie di plastica da 1/2 litro

* Materiale fornito dalla scuola



Figura 2. Costruzione della Fontana

La fisica dell'esperienza:

- Pressione Idrostatica

Attività 3: Razzo ad acqua

Materiali:

- bottiglie plastica 1,5 litri
- fogli A3 di cartoncino bianco e/o colorato per costruire gli alettoni
- pennarelli indelebili
- scatole da scarpe
- pompa bici
- valvole per ruote da bicicletta o da auto*
- nastro isolante
- rampa di legno inclinata (DA COSTRUIRE utilizzando un pallet che permetta di attaccare la pompa da bicicletta alla valvola, dimensioni indicative 60 cm x 80 cm)*

* Materiale fornito dalla scuola



Figura 3. Lancio del Razzo ad acqua

La fisica dell'esperienza:

- Principio di azione e reazione
- Moto parabolico
- Conservazione dell'Energia Meccanica

Attività 4: La scimmia e il cacciatore (pistola e bersaglio)

Materiali:

- carta stagnola
- coperchi di latta di varie dimensioni (adibite a bersaglio e quindi di materiale ferromagnetico)
- pistole tipo NERF*
- cavo elettrico (6 m circa per ogni gruppo) + banane per cavo elettrico*
- bobine*
- nucleo ferroso*
- generatore di tensione per alimentare le elettrocalamite*
- amperometro*
- voltmetro*
- treppiede e asta per sostenere l'elettrocalamita*
- scatole rigide o piani ad altezza regolabile per posizionare le pistole
- nastro adesivo ed elastici

* Materiale fornito dalla scuola



Figura 4. Montaggio del materiale per La scimmia e il cacciatore (pistola e bersaglio)

La fisica dell'esperienza:

- Moto parabolico
- Circuiti
- Elettrocalamita

PEER REVIEW E GIURIA DEI COMMITTENTI

Ogni giorno era previsto un momento di confronto, in plenaria, sulle attività svolte nella mattinata, per identificare i punti di forza e gli spunti di miglioramento sul materiale video prodotto dagli allievi.

La riflessione e la condivisione di idee e informazioni tra i gruppi erano finalizzate a fornire un aiuto concreto per la realizzazione di un prodotto video completo.

Tale scambio ha permesso ad ogni classe di individuare i criteri comuni per la valutazione dei lavori delle altre classi.

I video definitivi prodotti dai vari gruppi sono stati analizzati, durante l'ultima giornata di lavoro, e valutati da due giurie:

- giuria dei pari (ogni classe ha valutato i video delle altre classi);
- giuria dei committenti (il team di docenti ha valutato i lavori di tutti i gruppi).

Entrambe le giurie hanno votato i primi due classificati per ciascuna esperienza, con il fine di individuare materiali che potessero poi essere riutilizzati nelle lezioni di laboratorio per altri allievi dell'Istituto.

CONCLUSIONI E BILANCIO DELL'ATTIVITA'

I docenti hanno rilevato impegno, entusiasmo e partecipazione attiva degli allievi, i quali si dicono soddisfatti dell'esperienza vissuta che li ha visti protagonisti dell'azione didattica. Lavorare una intera settimana in laboratorio con i ragazzi ha consentito ai docenti di osservarli "sotto una luce diversa" e apprezzare caratteristiche e peculiarità che spesso non emergono nella didattica tradizionale.

Simulare il lavoro in team, ricercare strategie risolutive mediante il confronto tra pari e con i committenti, nonché dover comunicare i risultati ottenuti e convincere gli ascoltatori dell'efficacia del proprio lavoro, si sono rivelate strategie efficaci per riflettere su come comunicare il sapere scientifico. Nell'ambito dell'insegnamento dell'Educazione Civica (Tema A3) è stato possibile riflettere sull'importanza di una comunicazione scientifica efficace e corretta.

Tra le competenze sviluppate dagli allievi si evidenziano non solo quelle prettamente scientifiche, ma anche competenze di tipo relazionale e competenze nella sfera delle discipline umanistiche soprattutto nel momento della restituzione dei contenuti. Inoltre l'elaborazione dei video ha consentito agli studenti di mettere in campo competenze di tipo informatico, non necessariamente acquisite a scuola.

Nonostante il bilancio positivo dell'attività, non si nascondono alcune criticità nel proporre esperienze immersive ad una generazione di studenti sempre più abituata a risposte e risultati immediati, talvolta insofferente di fronte all'attesa.

Tra le esperienze proposte, quella che è stata meno apprezzata, è stata infatti la Fontana di Erone, perché di difficile realizzazione. Alcuni tentativi non riusciti e la meticolosità dei passaggi esecutivi hanno reso meno entusiasmante il lavoro di costruzione del prototipo. Inoltre è risultato l'esperimento meno "spettacolare" e riguardante parti teoriche meno padroneggiate dagli allievi.

Purtroppo per fattori indipendenti dalla volontà dei docenti, non è stato possibile riconoscere nel monte ore PCTO il lavoro svolto a casa dagli allievi, ma nelle edizioni future auspichiamo di poter inserire una quota parte che valorizzi questo aspetto.

Alla fine dell'attività è stato proposto ai ragazzi un questionario di gradimento, da cui è emerso un bilancio positivo dell'esperienza vissuta.

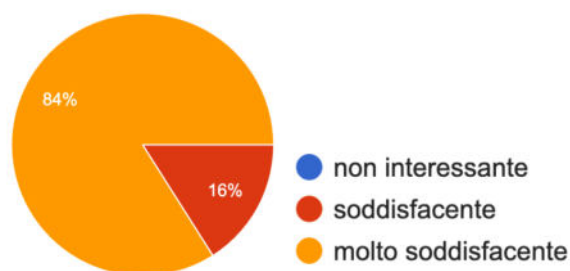


Figura 5. Risultati del questionario di gradimento somministrato agli allievi



Figura 6. Parole chiave emerse dal questionario di gradimento somministrato agli allievi

All'attività è stato dedicato un piccolo articolo sul giornale locale, che ha sicuramente contribuito a lasciare un ricordo positivo nella maggior parte degli alunni che hanno partecipato.



Figura 7. Articolo apparso sul "Corriere di Moncalieri" in data 22/03/2023

INTELLIGENZA ARTIFICIALE E LEGGI FISICHE

Andrea Piccione

Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte
Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte
piccione.eft@istruzioneemonte.it

Abstract

Nel mondo della ricerca l'intelligenza Artificiale (AI) è utilizzata in un numero crescente di ambiti e situazioni per individuare regolarità in grandi basi di dati multidimensionali. In ambito scolastico la maggior parte delle pratiche di insegnamento delle STEM si concentra invece su esperimenti e analisi dei dati in cui sono coinvolte due sole variabili, limitando quindi le occasioni per analizzare fenomeni complessi. In questo contributo vedremo come l'utilizzo dei metodi dell'AI per individuare categorie e correlazioni, somiglianze e anomalie, può offrire opportunità didattiche interessanti per l'analisi di dati in cui sono coinvolte più variabili. Saranno mostrati alcuni esempi in cui l'AI viene utilizzata per la ricerca di leggi fisiche unitamente a spunti su come l'impostazione data-driven stia cambiando in modo radicale l'approccio metodologico ed epistemologico della ricerca scientifica. Quindi, saranno presentate alcune proposte didattiche applicabili a scuole di diverso ordine e grado per l'analisi di dati complessi.

Parole-chiave

Intelligenza Artificiale, clustering, leggi fisiche, Chernoff faces

INTELLIGENZA ARTIFICIALE PER INDIVIDUARE REGOLARITÀ NEI DATI

I sistemi di Intelligenza Artificiale (AI) sono caratterizzati da un numero estremamente elevato di parametri, che vengono determinati attraverso un processo di addestramento su dati di esempio. Durante tale processo, in modo ripetuto si presentano come input i dati (tabelle, immagini, suoni o filmati), si calcola la risposta del sistema e la si confronta con quella attesa; sulla base di questa valutazione i parametri vengono aggiornati a ogni iterazione, in modo da migliorare continuamente l'output e renderlo sempre più vicino al valore reale. Un processo di questo tipo presenta delle somiglianze con le modalità di apprendimento degli esseri umani, ed è per questo che si parla di *apprendimento automatico* o Machine Learning (ML). L'insieme dei valori finali dei parametri, sebbene sia tecnicamente definito come un *modello*, si discosta concettualmente dalla tradizionale idea che ne abbiamo: dipende fortemente dalle regolarità presenti nei dati di esempio utilizzati, e non può essere facilmente rappresentabile con formule matematiche.

Nel contesto attuale esperimenti e fenomeni sono associati a set di dati sempre più grandi e strutturati, pertanto poter individuare in tali dati andamenti e correlazioni senza avere un modello di riferimento a priori si traduce in una potenzialità nel gestire la complessità; infatti, permette di individuare eventuali regolarità non facilmente osservabili in altro modo. Per contro in questa nuova modalità di analisi dei dati si perde il controllo diretto sul modello, perché non è più presente una forma matematica o in generale un quadro di riferimento teorico supportato da ipotesi: "quello che conta è solo la correlazione tra due quantità di dati e non più una teoria coerente che spieghi tale correlazione" (Benanti, 2020). Questa impostazione tende quindi a minare uno dei presupposti sui quali si è costruita la scienza, che si è evoluta attraverso dispute e confronti sui diversi modelli di descrizione dei fenomeni; la *datificazione* della scienza rende il metodo scientifico obsoleto (Anderson, 2008).

Fisica e Intelligenza Artificiale

Già dall'inizio degli anni '90 nella fisica delle alte energie gli algoritmi di Intelligenza Artificiale sono utilizzati in ambito sperimentale per la ricostruzione della massa e delle tracce delle particelle, per il trigger e l'individuazione dei fasci nei detector, per le simulazioni e per la riduzione del rumore (Peterson & Rönqvist, 1991). Oltre alle applicazioni sperimentali, questi strumenti possono essere utilizzati in campo teorico. Come abbiamo visto la caratteristica peculiare degli algoritmi di AI è che possono fornire un'interpolazione dai dati di partenza senza richiedere alcun presupposto sulla forma funzionale della legge sottostante; se in alcuni casi questa caratteristica è un limite, in altri può diventare una risorsa. Infatti, tali algoritmi possono rivelarsi utili per la descrizione efficace di alcuni fenomeni, anche in assenza di una modellizzazione teorica o della sua inapplicabilità in certe condizioni (Forte, 2002): in questi casi l'assenza di un modello consente di eliminare possibili bias teorici, che potrebbero influenzare l'analisi in modo difficilmente quantificabile. A un secondo livello di applicazione l'Intelligenza Artificiale può essere invece utilizzata per la scoperta di nuove leggi fisiche: ad esempio, gli algoritmi di AI possono imparare come descrivere il movimento dei pianeti a partire dai dati di Tycho Brahe senza conoscere le leggi di Keplero e Newton (Qin, 2020), oppure, partendo da sequenze video del movimento di un corpo, possono scoprire le formule che regolano il suo movimento senza alcun input teorico sulle forze in gioco (Udrescu & Tegmark, 2021). In questo contributo vedremo alcuni strumenti per comprendere il funzionamento degli algoritmi di AI, che sono alla base di queste applicazioni.

APPRENDIMENTO AUTOMATICO E VISUALIZZAZIONE DEI DATI

Le tecniche di Machine Learning possono essere classificate a seconda della modalità con cui si esegue la procedura di apprendimento. Nel caso *supervisionato* i dati di partenza sono etichettati e i parametri del modello vengono ottimizzati durante l'apprendimento, in modo che l'etichetta prevista dal modello corrisponda con accuratezza crescente a quella reale. Nel caso *non supervisionato* i dati non hanno etichette di riferimento e vengono accorpati in classi sulla base di caratteristiche comuni individuate all'interno del campione; queste tecniche di apprendimento sono utilizzate per individuare regolarità nei dati riducendo al minimo la necessità di intervento umano. A livello didattico o per verificare le prestazioni degli algoritmi anche in quest'ultimo caso vengono però utilizzati set di dati di riferimento, in cui è già nota a priori la classe di appartenenza dei singoli elementi; nelle sezioni seguenti saranno mostrati alcuni esempi di questa tipologia.

Tecniche di clustering

Il clustering è una delle tipologie più diffuse di apprendimento non supervisionato, e consente alcune implementazioni didattiche che non richiedono conoscenze tecniche e possono essere utilizzate anche nei primi ordini di scuola. Il clustering è una tecnica di analisi dati che permette di classificare dati sulla base di somiglianze o differenze. Tra questi citiamo l'algoritmo K-means che identifica un numero K di baricentri all'interno del set di dati, e assegna gli elementi dell'insieme di partenza a una classe sulla base delle loro distanze dal baricentro.

Le tecniche di clustering sono applicabili in ambito didattico non solo per avvicinare gli studenti all'AI, ma anche per introdurre in modo semplice l'analisi multivariata (Tang *et al.*, 2023). Quest'ultimo aspetto si rivela particolarmente interessante perché, se da una parte i dati che rappresentano i fenomeni naturali e sociali sono sempre più articolati e complessi, dall'altra nel curriculum scolastico difficilmente si affrontano problemi in cui sono coinvolte più di due variabili.

Tecniche di rappresentazione grafica

Nel contesto della visualizzazione dei dati, un *glifo* è la rappresentazione visiva di un dato in cui gli attributi di un'entità grafica sono in corrispondenza con uno o più attributi di un record di dati; per realizzare la visualizzazione i singoli valori dei dati vengono mappati su una rappresentazione grafica con una forma familiare come una stella o una figura stilizzata di oggetti, piante o animali (Chen, Härdle, Unwin & Ward, 2008). Le Chernoff faces (Chernoff, 1973; Flury & Riedwyl, 1981) sono un tipo

particolare di glifi, che sfrutta l'elevata sensibilità delle persone ai volti umani e la conseguente capacità di elaborarne le caratteristiche significative. In questa tipologia di visualizzazione ogni valore di un record di dati è legato a un elemento di un viso più o meno stilizzato come la posizione degli occhi, l'inclinazione delle sopracciglia, la forma della bocca, etc.

Nel seguito saranno mostrati esempi didattici di complessità crescente, in cui utilizzare le rappresentazioni di dati multidimensionali come punto di partenza per realizzare processi di clustering; tali attività possono essere utili sia per introdurre l'AI sia per lo studio dei fenomeni in più dimensioni.

APPLICAZIONI DIDATTICHE

Dai glifi al clustering

La proposta didattica prevede di partire da un set di dati semplice per la generazione di immagini con la tecnica dei glifi, e la loro successiva classificazione tramite somiglianze e differenze facilmente riconoscibili attraverso la rappresentazione grafica. In pratica, si genera un insieme di immagini con le diverse classi disponibili, si mescolano le immagini, e, quindi, vengono fatte raggruppare dagli studenti sulla base delle similitudini tra gli elementi grafici come ad esempio la forma. Una volta terminato il raggruppamento è poi possibile valutare alcune caratteristiche complessive; ad esempio, il valore medio e la varianza di ogni classe possono essere ottenuti individuando le parti di maggiore sovrapposizione delle immagini e stimando la sfocatura della sovrapposizione risultante (Wan *et al.*, 2020). Il risultato della classificazione e dell'analisi può essere poi confrontato con quello ottenuto da algoritmi di clustering implementati attraverso linguaggi di programmazione²⁴. L'attività può essere svolta anche in modalità unplugged facendo realizzare i disegni agli studenti e utilizzando fogli traslucidi, come ad esempio la carta da forno, per realizzare le sovrapposizioni. Di seguito vedremo alcuni strumenti digitali per la realizzazione delle immagini.

Dataset di riferimento

In questa sezione utilizzeremo un set di dati standard come l'IRIS database (Fischer, 1936). Questo set di dati si presta bene per introdurre il clustering perché, pur fornendo un esempio di problema multidimensionale in cui sono presenti correlazioni tra diverse dimensioni, contiene un numero limitato di variabili e di record. Nel dettaglio il dataset è costituito da 150 righe di dati suddivise in 3 categorie ugualmente popolate, e ogni elemento è classificato da 4 caratteristiche (larghezza e lunghezza del sepal, larghezza e lunghezza del petalo). Dal momento che questo set di dati costituisce uno standard, sono presenti molteplici implementazioni in letteratura e in rete con cui confrontarsi.

Foglio di calcolo

Come attività iniziale si possono rappresentare i singoli elementi del set di dati attraverso i diagrammi di Kiviat o grafici radar, disponibili nella maggior parte dei fogli di calcolo. Tali grafici sono costituiti da una successione di raggi che partono dal centro del grafico e che formano angoli uniformi tra di loro. Ciascun raggio rappresenta una variabile specifica, mentre la distanza dal centro su ciascun raggio è proporzionale al valore della variabile rispetto al suo massimo. I punti così definiti sui raggi vengono poi connessi da una linea chiusa. Nel caso in esame le quattro caratteristiche significative (larghezza e lunghezza del sepal, larghezza e lunghezza del petalo) vengono rappresentate su quattro raggi perpendicolari. Con questa modalità a ogni classe di fiore corrisponderà una forma particolare, che consente di distinguerla dalle altre. In figura 1 sono riportati i risultati per tre esempi provenienti ognuno da una diversa classe di fiore realizzati con due diversi fogli di calcolo.

²⁴ <https://www.kaggle.com/code/profpiccione/iris-clustering>

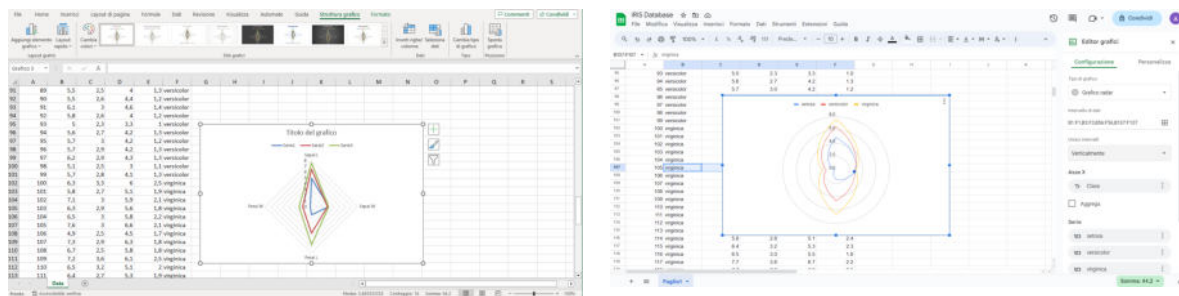


Figura 1. Esempio di diagramma a radar realizzato con due diversi fogli di calcolo; in ogni grafico è rappresentato un elemento per ciascuna delle tre classi presenti nel dataset.

Strumenti visuali

Per realizzare immagini più articolate sono disponibili strumenti di analisi e visualizzazione dati, che vengono utilizzati in ambito professionale anche da quotidiani e riviste online²⁵. Il principio di funzionamento base è lo stesso di un foglio di calcolo, ma viene offerta una maggiore varietà di opzioni per personalizzare la rappresentazione. Tali strumenti consentono di realizzare in modo semplice la visualizzazione di un insieme dei dati o di una loro parte. Nelle figure 2 e 3 sono riportati alcuni elementi dell'IRIS database prima e dopo la loro classificazione; il numero in alto rappresenta l'identificativo del record utilizzato. Questa modalità di visualizzazione è funzionale quando i parametri sono distribuiti in modo disuguale sulle diverse classi, in modo da generare forme marcate e facilmente distinguibili; non è invece appropriata nei casi di un numero elevato di valori distribuiti equamente.

Chernoff faces

Attraverso i diagrammi a radar è possibile in modo semplice associare una forma a ogni elemento di un insieme di dati sulla base dei valori associati a tale elemento. Abbiamo poi visto come passare da rappresentazioni essenziali con i fogli di calcolo a rappresentazioni graficamente più strutturate con strumenti dedicati alla visualizzazione dei dati. Il passo successivo è quello di associare i parametri della base di dati a forme di uso quotidiano, come ad esempio le emoticon attraverso lo strumento delle Chernoff faces. In figura 4 gli stessi elementi utilizzati nell'esempio precedente sono rappresentati attraverso la stilizzazione di volti, in cui le dimensioni relative a occhi, sopracciglia e bocca sono messe in relazione con i valori del set di dati, con lo stesso principio utilizzato nel caso precedente per realizzare il diagramma a radar.

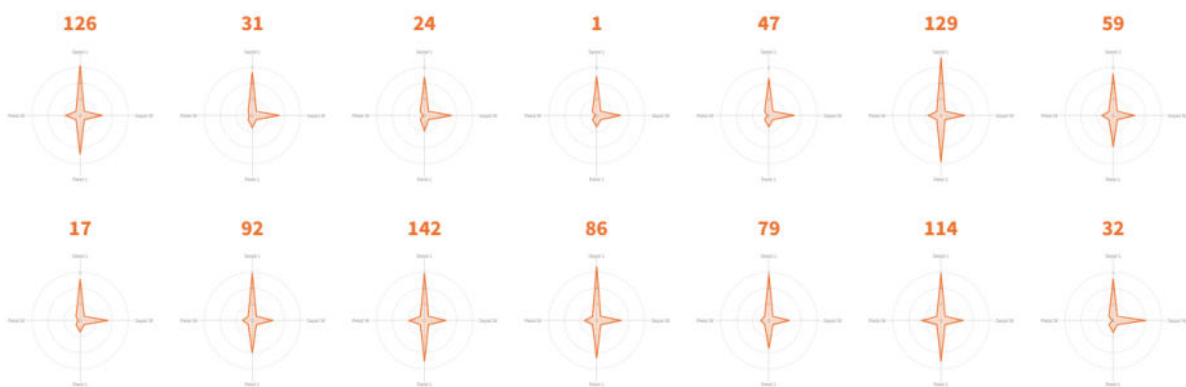


Figura 2. Elementi estratti dall'IRIS dataset e rappresentati attraverso i diagrammi a radar con Flourish. Si nota come alcuni elementi abbiano forme simili.

²⁵ <https://flourish.studio>, <https://www.tableau.com>

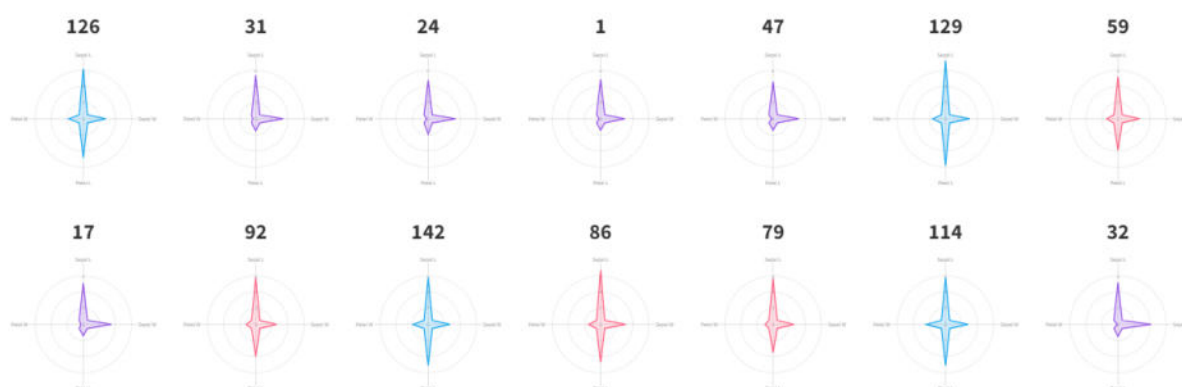


Figura 3. Gli stessi elementi rappresentati in figura 2, dopo essere stati classificati sulla base della forma e aver associato un colore a ogni classe.

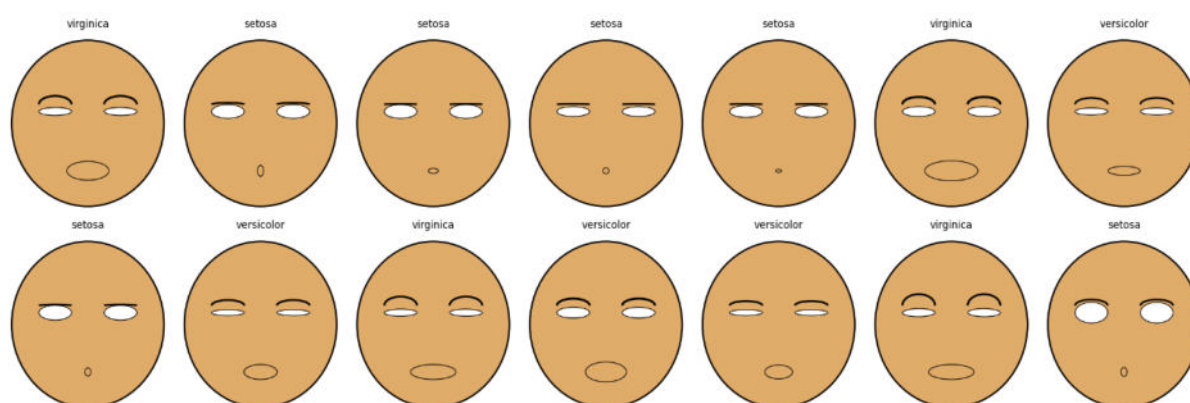


Figura 4. Gli stessi elementi utilizzati nelle figure 2 e 3, rappresentanti con le Chernoff faces.

Chernoff fishes

Come ulteriore esempio in un caso complesso riportiamo l'applicazione ai dati finanziari (Rodrigues & Kaczmarek, 2016). In questo caso la forma utilizzata è quella di un pesce e sono rappresentate 15 diverse variabili, ognuna delle quali è messa in corrispondenza con alcune caratteristiche: ad esempio, ogni pinna dorsale corrisponde a un'area geografica di investimento, e la sua lunghezza alla percentuale del capitale investito (figura 5). L'applicazione è disponibile gratuitamente attraverso una libreria²⁶, e può essere utilizzata per generare le forme da classificare; inoltre, tale applicazione può essere facilmente incorporata in un sito web personale o di istituto²⁷, o in alternativa può essere utilizzata anche localmente tramite un normale browser senza bisogno di alcuna installazione o connessione di rete.

CONCLUSIONI

L'utilizzo dei meccanismi sottesi al funzionamento dell'AI per individuare categorie e correlazioni, somiglianze e anomalie, può offrire opportunità didattiche interessanti per l'analisi di dati in cui sono coinvolte più variabili; in questa prospettiva abbiamo mostrato proposte applicabili a scuole di diverso ordine e grado basate sulla generazione di grafici e il riconoscimento di forme. Gli esempi mostrati possono essere facilmente esportati in altri contesti standard come ad esempio il dataset dei vini piemontesi (Aeberhard & Forina, 1991) o set di dati astronomici²⁸, e a set di dati generati

²⁶ <https://github.com/awkweb/chernoff-fish>

²⁷ <https://www.andreapiccione.it/Chernoff-Fishes/>

²⁸ <https://sdss.org/>

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia autonomamente all'interno di progetti di classe o istituto, come ad esempio dati atmosferici registrati tramite centraline a basso costo (Baldi & Piccione, 2024). Una volta compresi alcuni meccanismi di funzionamento degli algoritmi di AI, sarà poi possibile discutere con gli studenti potenzialità e limiti delle loro applicazioni nell'ambito della ricerca scientifica.

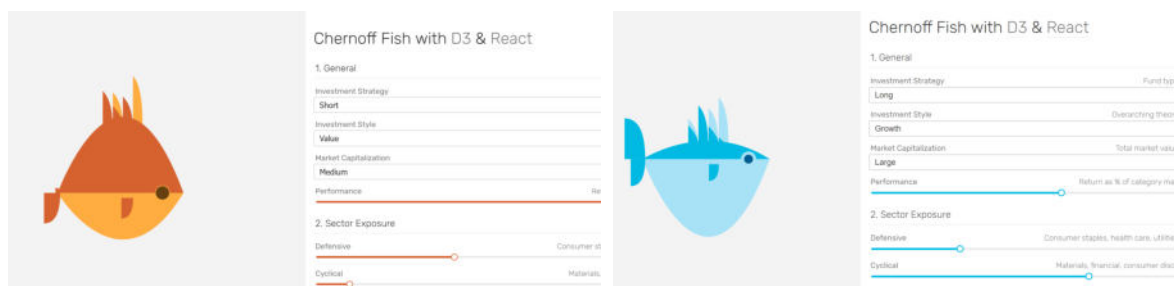


Figura 5. Esempi di applicazione dei Chernoff fishes con diverse impostazioni dei parametri.

BIBLIOGRAFIA

- Aeberhard, S. & Forina, M. (1991). Wine. UCI Machine Learning Repository. <https://doi.org/10.24432/C5PC7J>.
- Baldi, B. & Piccione, A. (2024). Meteo Open Data @ Santarosa. In questi atti.
- Benanti, P. (2019). Le macchine sapienti: intelligenze artificiali e decisioni umane. Marietti 1820.
- Chen, C. H., Härdle, W., Unwin, A., & Ward, M. O. (2008). Multivariate data glyphs: Principles and practice. *Handbook of data visualization*, 179-198.
- Chernoff, H. (1973). The use of faces to represent points in k-dimensional space graphically. *Journal of the American statistical Association*, 68(342), 361-368.
- Forte, S., Garrido, L., Latorre, J. I., & Piccione, A. (2002). Neural network parametrization of deep-inelastic structure functions. *Journal of High Energy Physics*, 2002(05), 062.
- Fisher, R. A. (1936). The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of eugenics*, 7(2), 179-188.
- Fluke, C. J., & Jacobs, C. (2020). Surveying the reach and maturity of machine learning and artificial intelligence in astronomy. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 10(2), e1349.
- Flury, B., & Riedwyl, H. (1981). Graphical representation of multivariate data by means of asymmetrical faces. *Journal of the American Statistical Association*, 76(376), 757-765.
- Peterson, C., & Rögnvaldsson, T. S. (1991). *An introduction to artificial neural networks* (No. LU-TP-91-23). CERN.
- Qin, H. (2020). Machine learning and serving of discrete field theories. *Sci Rep* 10, 19329 <https://doi.org/10.1038/s41598-020-76301-0>
- Rodriguez, J., & Kaczmarek, P. (2016). *Visualizing financial data*. John Wiley & Sons.
- Tang, J., Zhou, X., Wan, X., Daley, M., & Bai, Z. (2023). ML4STEM Professional Development Program: Enriching K-12 STEM Teaching with Machine Learning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 33(1), 185-224.
- Udrescu, S. M., & Tegmark, M. (2021). Symbolic pregression: Discovering physical laws from distorted video. *Physical Review E*, 103(4), 043307.
- Wan, X., Zhou, X., Ye, Z., Mortensen, C. K., & Bai, Z. (2020, June). SmileyCluster: supporting accessible machine learning in K-12 scientific discovery. In *proceedings of the Interaction Design and Children Conference* (pp. 23-35).

ROSALIND FRANKLIN E IL DNA UN PERCORSO PER ORIENTARE ALLE STEM SUPERANDO GLI STEREOTIPI DI GENERE

**Barbara Baldi, Antonella Nardacchione
I.C. Santorre di Santarosa - Savigliano (CN)**

baldi.barbara@icsantarosasavigliano.edu.it,
nardacchione.antonella@icsantarosasavigliano.edu.it

Abstract

Questo percorso laboratoriale sul DNA è stato proposto in una classe terza di scuola secondaria di primo grado durante le ore curricolari di Scienze. L'attività è stata introdotta chiedendo alle studentesse e agli studenti di creare un avatar di una persona che si occupa di Scienza. La presentazione degli avatar realizzati e la condivisione di alcuni dati statistici sui divari di genere sono serviti da spunto per far riflettere la classe sugli stereotipi di genere tipici delle professioni in ambito scientifico. Sono stati presentati i momenti salienti della vita della scienziata Rosalind Franklin, utilizzando alcuni artefatti analogici creati per l'occasione. La classe suddivisa in piccoli gruppi ha realizzato il modello della struttura a doppia elica del DNA con le caramelle. Successivamente, come momento di riflessione individuale, è stato richiesto di scrivere e inviare idealmente un messaggio alla scienziata. Si è proceduto con l'attività sperimentale di estrazione della molecola di DNA da cellule di kiwi e, infine, con la ricostruzione della mappa cromosomica umana.

Parole-chiave

#RosalindFranklin #DNA #mappacromosomica #stereotipidigenere #STEM

INTRODUZIONE ALLA TEMATICA

Questa unità di apprendimento ha preso spunto da alcune attività presentate nel percorso formativo InnovaMenti_STEM curato dalle Équipe Formative Territoriali su Scuola Futura ed è stato integrato con l'adattamento di due esperienze di laboratorio (l'estrazione della molecola di DNA dal kiwi e la ricostruzione della mappa cromosomica umana) proposte nel progetto LS-OSA LAB.

Le attività didattiche hanno coinvolto una classe terza di scuola secondaria di primo grado durante le lezioni di Scienze nel secondo quadrimestre dell'A.S. 2022/2023 per un totale di circa 8 ore.

Il percorso didattico ha permesso di affrontare argomenti STEM con un approccio laboratoriale centrato sull'imparare facendo e sulla collaborazione tra pari, ma anche di promuovere le carriere STEM delle studentesse e di orientare alla STEM superando gli stereotipi di genere.

L'attività è stata introdotta chiedendo alle studentesse e agli studenti di generare un avatar di una persona che si occupa di scienza. Ciascuno di loro ha realizzato una rappresentazione digitale sul proprio dispositivo tramite applicativi gratuiti trovati in rete e suggeriti dall'insegnante. Gli avatar sono stati raccolti in una bacheca virtuale e presentati al gruppo classe tramite il monitor interattivo.

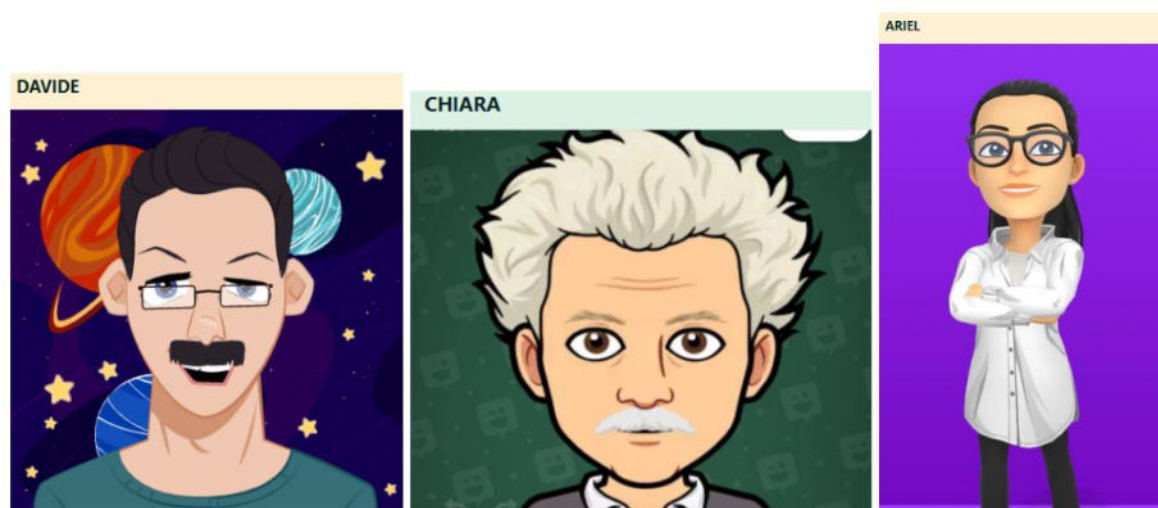


Figura 1. Esempi di avatar di una persona che si occupa di scienza realizzati dalle studentesse e dagli studenti.

L'analisi delle rappresentazioni e delle caratteristiche che nell'immaginario collettivo identificano una persona che si occupa di scienza ha permesso alle studentesse e agli studenti, guidati dall'insegnante, di confrontarsi sugli stereotipi di genere tipici delle professioni in ambito scientifico. Tale tematica è stata affrontata e approfondita anche prendendo in analisi alcuni dati statistici tratti dal Global Gender Gap Report del 2022, dal sito dell'ISTAT e dai canali social della Commissione europea.

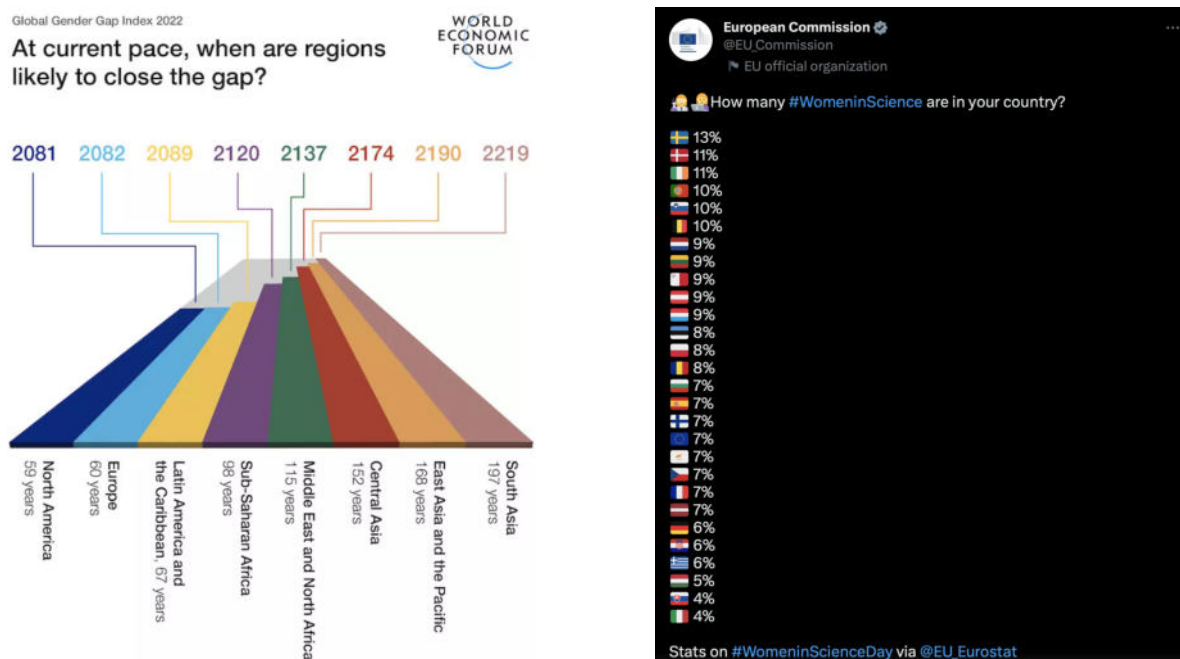


Figura 2. Alcuni dati statistici presentati alla classe: a sinistra il grafico rappresenta quando verrà colmato il divario di genere in diverse parti del mondo; a destra sono riportate le percentuali delle donne impegnate in ambito scientifico nei diversi stati europei.

ROSALIND E IL DNA

Questa fase dell'unità di apprendimento rappresenta la parte centrale, il cuore di tutto il percorso, ed è stata organizzata in quattro momenti distinti ma interdipendenti:

- Presentazione degli aspetti salienti della vita di Rosalind Franklin

- Attività di conoscenza dei contenuti disciplinari
- Attività laboratoriale
- Riflessione metacognitiva.

Presentazione degli aspetti salienti della vita di Rosalind Franklin

La docente propone alle studentesse e agli studenti la narrazione della vita di Rosalind Franklin utilizzando “la valigia della scienziata”, da cui estrae una serie di oggetti (un modellino di DNA, una stella di David, una scatolina a forma di bus inglese, una foto della Tour Eiffel, la foto 51, ...). Questi elementi richiamano alcuni tra i momenti più significativi per la scienziata, scelta non solo per veicolare i contenuti disciplinari (conoscenza di cosa è, come è fatto, a cosa serve il DNA), ma soprattutto per riflettere sulle difficoltà che Rosalind Franklin ha dovuto affrontare durante i suoi studi sulla diffrazione a raggi X del DNA. Si è ritrovata, infatti, a condurre le sue ricerche in un ambiente misogino e maschilista, poco propenso a riconoscere i suoi meriti e le sue scoperte in quanto donna.

È, infatti, ricordata come la scienziata che ha scoperto la struttura a doppia elica del DNA grazie alla foto 51, ma che non vinse il premio Nobel nel 1962. Inoltre, rappresenta uno dei casi più eclatanti di “effetto Matilda”.



Figura 3. Alcuni oggetti contenuti nella “valigia della scienziata” utili per narrare gli aspetti più significativi della sua vita e i risultati delle sue ricerche in campo scientifico.

Attività di conoscenza dei contenuti disciplinari

La docente si dedica alla spiegazione della funzione e della struttura della molecola del DNA utilizzando le informazioni contenute nel libro di testo di Scienze in adozione, integrandole con video didattici presenti in rete e somministrati alle studentesse e agli studenti anche con le modalità della classe capovolta.

Attività laboratoriale

Il percorso didattico prosegue con la proposta laboratoriale di costruzione della molecola di DNA.

La docente fornisce tutto il materiale e le indicazioni operative per costruire il modellino a doppia elica del DNA con le caramelle. Le studentesse e gli studenti lavorano suddivisi in piccoli gruppi.

Le foto, che documentano la realizzazione dei modellini, sono state raccolte nella bacheca virtuale.

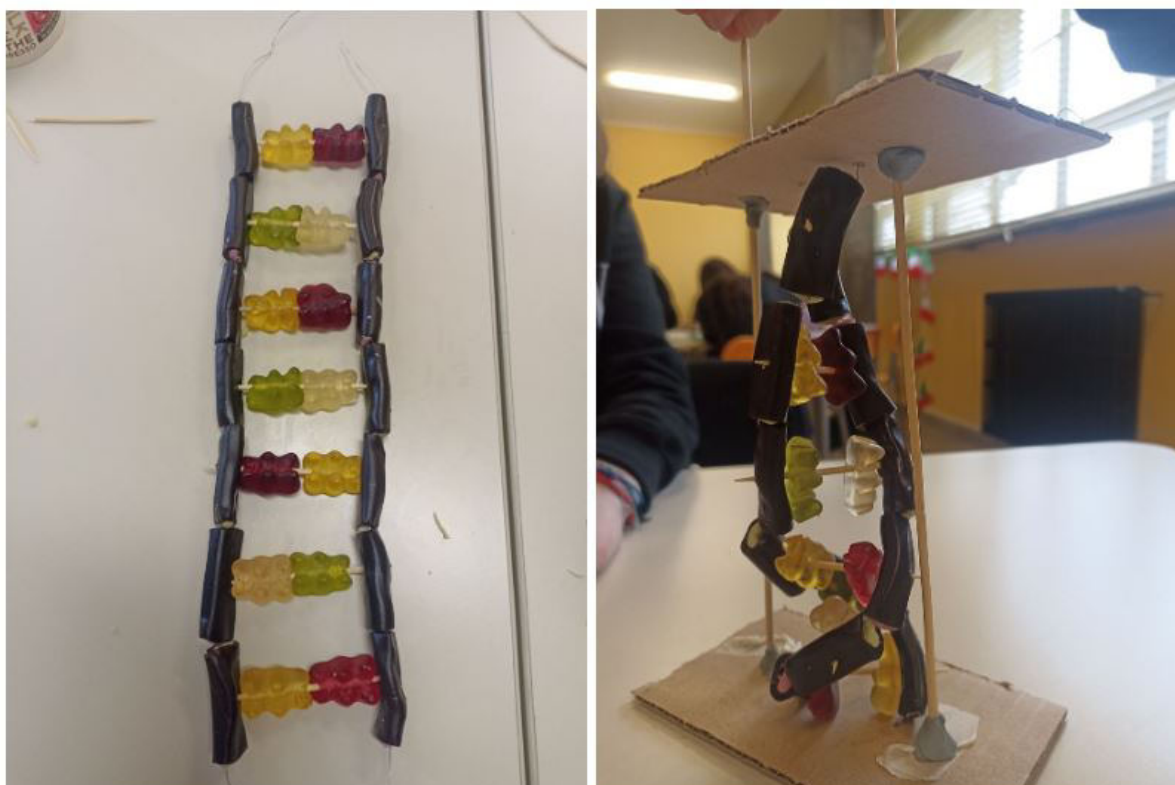


Figura 4. Alcune foto dei modellini di DNA realizzati dalle studentesse e dagli studenti.

Componenti del gruppo:	Attività STEM - Materiale occorrente per costruire un modellino di DNA (Acido DesossiriboNucleico) con le caramelle			
	Basi azotate: <u>purine</u>		Basi azotate: <u>pirimidine</u>	
Come procedere 1. infilare negli stuzzicadenti le basi azotate seguendo il seguente schema: A-T C-G 2. infilare in ciascun filo di ferro 5 tubetti di liquirizia, dopo averli bucati sul lato lungo, alternandoli alla caramella rotonda, dopo averla bucata; 3. piantare ogni stuzzicadenti con le coppie di basi azotate nei tubetti di liquirizia; 4. piantare i due steconi nei due basamenti di polistirolo per formare la struttura che sostiene i due filamenti di DNA; 5. arrotolare i due filamenti di caramelle e fissare alle due basi di polistirolo; 6. fare una foto del modellino di DNA ottenuto.	3 orsetti <u>rossi</u> Adenina	2 orsetti <u>gialli</u> Guanina	2 orsetti <u>verdi</u> Citosina	3 orsetti <u>bianchi</u> Timina
	5 stuzzicadenti			
	10 tubetti di liquirizia (Desossiribosio)		10 caramelle gommose rotonde (Gruppo fosfato)	
	2 fili di ferro sottili		2 basi di polistirolo/cartoncino	
	2 steconi per spiedini			

Figura 5. Scheda con i materiali e le indicazioni operative per costruire il modellino di DNA.

Riflessione metacognitiva

La docente termina questa parte dell'unità didattica proponendo alcune attività di riflessione sul lavoro fin qui svolto e, in particolare, ha chiesto alle studentesse e agli studenti di scrivere su un post.it un messaggio da inviare idealmente alla scienziata Rosalind Franklin.

I messaggi, scritti individualmente e in forma anonima, sono stati raccolti all'interno della bacheca virtuale e sono stati letti al gruppo classe dall'insegnante.

Tabella 1. Alcuni messaggi indirizzati alla scienziata postati dalle studentesse e dagli studenti.

Cara scienziata, ti scrivo per dirti di non mollare mai e di continuare a sperimentare sempre.	Mi spiace che il tuo merito non ti sia stato riconosciuto, però la tua è stata una scoperta essenziale.	Cara scienziata, ti scrivo per dirti di non mollare e di continuare.
Cara scienziata, anche se la tua scoperta non è stata riconosciuta, ti scrivo per dirti che, anche se sei nata in un'epoca cupa per le donne, ti ringrazio perchè la tua scoperta ha cambiato il mondo.	Cara scienziata, ti scrivo che, se anche la tua foto non è stata considerata tua per colpa di un'ingiustizia, il tuo aiuto è stato fondamentale per questa scoperta.	Cara scienziata, ti scrivo per ringraziarti della tua scoperta, ti ammiro molto perchè non ti sei arresa ma hai continuato a credere nel tuo più grande sogno (essere scienziata) e ci sei riuscita a realizzarlo.
Cara scienziata, ti scrivo che spero che il tuo lavoro venga riconosciuto da tutti e che ti venga attribuito il merito per le tue scoperte.	Cara scienziata, ti ringrazio di avere fatto capire agli uomini che le donne sono "degne" di intraprendere una carriera scientifica. Ti ammiro molto per la tua forza di volontà.	Cara scienziata, ti dico che quello che hai scoperto è eccezionale. Se potessi ancora essere qui, avresti scoperto ancora tantissime cose. Buona giornata Rosalind.

ESTRAZIONE DEL DNA DAL KIWI

Il percorso didattico principale è stato ampliato aggiungendo l'attività sperimentale di estrazione della molecola di DNA dal kiwi. Entrambe le docenti si sono trovate in laboratorio con la classe ed hanno fornito il materiale e il protocollo di estrazione a ciascun gruppo di lavoro.

PROTOCOLLO estrazione DNA da cellule vegetali (kiwi)

Materiale occorrente:

- mezzo kiwi
- 1 cucchiaino
- 2 bicchieri/becker
- ¼ cucchiaino di sale/1 cucchiaino
- 3/4 siringhe da almeno 10 ml
- 10 ml detersivo per i piatti
- 1 cilindro graduato
- 50 ml di acqua
- 3 garze sterili quadrate
- 3 ml di succo d'ananas puro senza zuccheri
- 6 ml di alcool etilico assoluto (96%) gelato (da freezer)
- 1 provetta
- 1 pipetta graduata

Procedimento:

1. schiacciare mezzo kiwi in un bicchiere fino ad ottenere una poltiglia il più possibile liquida;
2. aggiungere mezzo cucchiaino di sale
3. aggiungere 10 ml di detersivo per piatti con una siringa molto lentamente, evitando di fare schiuma;
4. aggiungere 50 ml di acqua, misurata con il cilindro graduato, versando molto lentamente sempre evitando di fare schiuma;
5. filtrare la soluzione ottenuta con una garza in un secondo bicchiere;
6. inserire in una provetta 5 ml di soluzione filtrata utilizzando una siringa;
7. aggiungere 3 ml di succo d'ananas con la siringa;
8. aggiungere 6 ml di alcool etilico assoluto gelato con la siringa.

Commento:

Per estrarre il DNA occorre in primo luogo rompere le cellule e le membrane, manualmente schiacciando il kiwi e chimicamente utilizzando i tensioattivi (contenuti nel detersivo per i piatti) per rompere i fosfolipidi delle membrane cellulari. Una volta filtrata la soluzione, vi rimarranno solo le proteine e il DNA. Le proteine vengono degradate con il succo d'ananas che contiene enzimi proteolitici e il DNA si libera ed entra in soluzione. Aggiungendo l'alcool etilico assoluto e gelato, il DNA si stacca e finisce in soluzione nella parte alta della provetta. Nella provetta si potrà osservare la soluzione suddivisa in due fasi:

- nella parte inferiore sono presenti le proteine degradate in soluzione acquosa;
- nella parte superiore è presente il DNA visibile come una matassina bianca in soluzione alcolica.

Componenti del gruppo:

Titolo:

Materiale occorrente:

- mezzo kiwi
- 2 bicchieri/becker
- ¼ cucchiaino di sale/1 cucchiaino
- 3/4 siringhe da almeno 10 ml
- detersivo per i piatti
- 1 cilindro graduato
- 50 ml di acqua
- 3 garze sterili quadrate
- 3 ml di succo d'ananas puro senza zuccheri
- 6 ml di alcool etilico assoluto (96%) gelato (da freezer)

Procedimento:

1. schiacciare
2. aggiungere
3. aggiungere 10 ml di, evitando di fare schiuma;
4. aggiungere 50 ml di, misurata con il, versando molto lentamente sempre evitando di fare schiuma;
5. filtrare la soluzione ottenuta con in un secondo
6. inserire in una provetta 5 ml di utilizzando una siringa;
7. aggiungere 3 ml di con la siringa;
8. aggiungere 6 ml di con la siringa.

Commento:

Per estrarre il DNA occorre in primo luogo rompere le cellule e le membrane, ...

Conclusioni:

Figura 6. A sinistra: protocollo di estrazione di DNA dal kiwi; a destra: traccia della relazione di laboratorio condivisa con gli studenti nella classe virtuale.

Alle studentesse e agli studenti è stato, infine, chiesto di documentare l'attività attraverso una relazione di laboratorio, di cui è stata fornita una traccia. Tale relazione è stata assegnata come compito sulla piattaforma didattica.

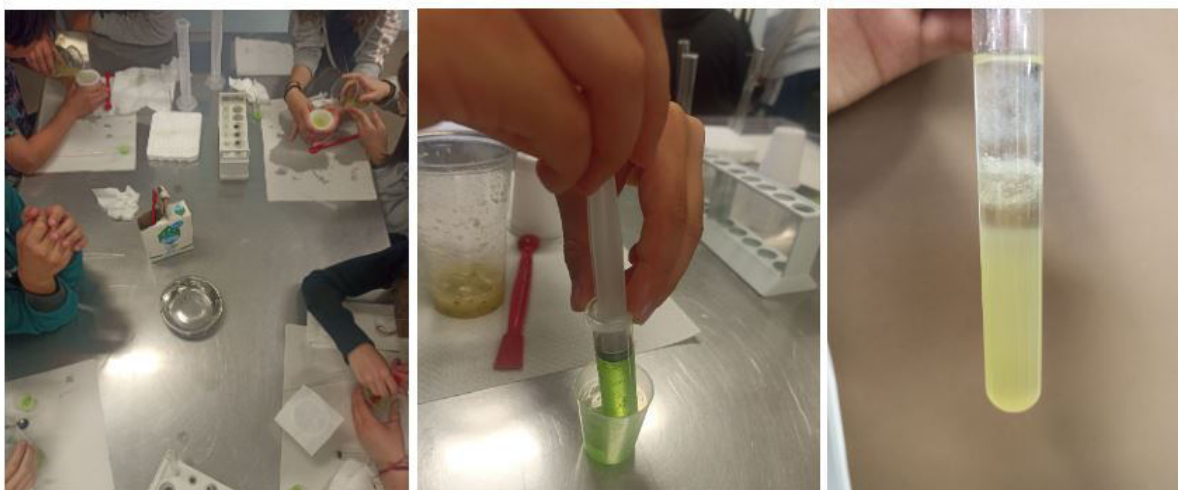


Figura 7. Alcune foto scattate in laboratorio durante la fase di estrazione di DNA dal kiwi.

RICOSTRUZIONE DELLA MAPPA CROMOSOMICA UMANA

Un ulteriore ampliamento rispetto alla proposta originale è rappresentato dall'attività di ricostruzione di un cariotipo umano, maschile o femminile, partendo dalla fotografia al microscopio ottico di una metafase mitotica ottenuta da sangue periferico, fotografata a 100X in immersione. Alle studentesse e agli studenti, oltre alla fotografia dei cromosomi, è stata fornita una mappa cromosomica umana completa, da tenere come esempio per il riconoscimento dei cromosomi e per la ricostruzione del cariotipo. Questo tipo di attività permette non solo di conoscere la struttura e la varietà cromosomica, ma fornisce anche lo spunto per descrivere alcune patologie dovute alle alterazioni della morfologia e del numero dei cromosomi.

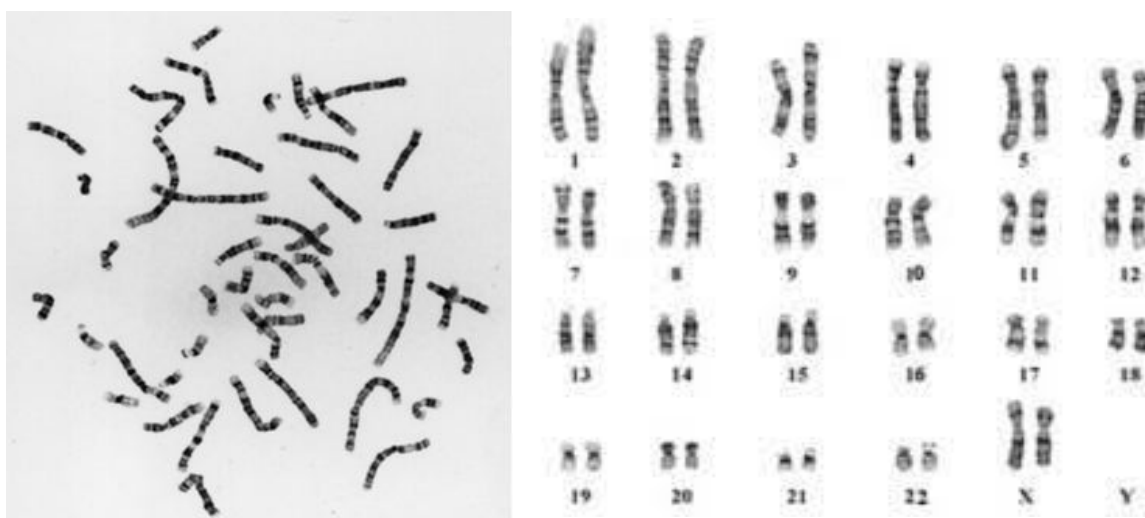


Figura 8. A sinistra: immagine di cromosomi in metafase mitotica fotografati al microscopio; a destra: esempio di mappa cromosomica umana.

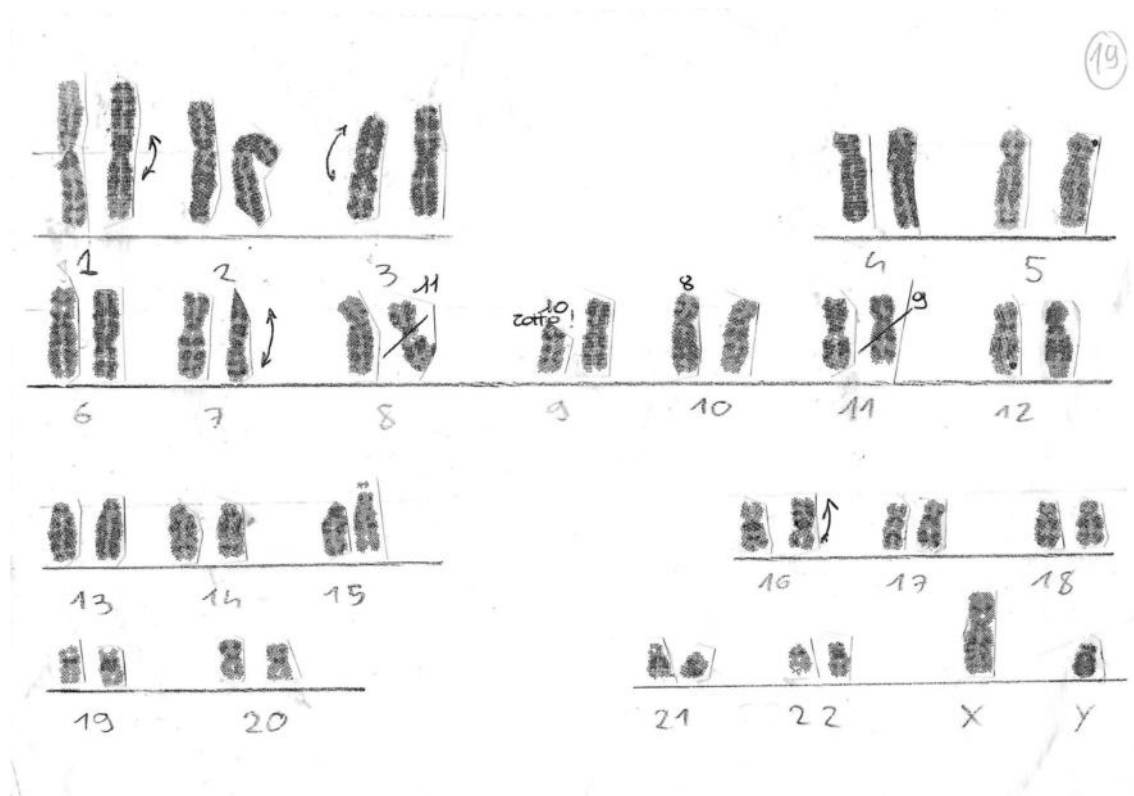


Figura 9. Esempio di mappa cromosomica ricostruita da uno studente e corretta dall'insegnante.

STRUMENTI UTILIZZATI

La classe ha utilizzato il metodo BYOD (Bring Your Own Device) e, per chi ne era sprovvisto, il notebook è stato fornito dalla scuola. Tutto il materiale utile per gli studenti è stato caricato e condiviso tramite la classe virtuale creata sulla piattaforma educativa utilizzata dall'intero istituto scolastico, mentre la documentazione delle attività in classe è stata raccolta su una bacheca virtuale (<https://digipad.app/p/405673/262b49393f671>).

In fase di progettazione del percorso di apprendimento sono stati utilizzati, adattati e integrati i materiali presenti su:

- [MOOC InnovaMenti STEM](#)
- [FARE LABORATORIO-Accademie delle Scienze Torino](#)

Per le attività pratiche sono stati utilizzati materiali poveri (caramelle, stuzzicadenti, fil di ferro, kiwi, alcool etilico, liquido per i piatti, ...), materiale da laboratorio (provette, cilindri graduati, ...), la stampante 3D (per realizzare il modellino di DNA e il numero 51), la laser cutter (per realizzare la stella di David) e alcuni applicativi gratuiti online per creare gli avatar.

La relazione di laboratorio per l'estrazione del DNA e la ricostruzione della mappa cromosomica sono state valutate, mentre in itinere è stato osservato come le studentesse e gli studenti hanno collaborato all'interno dei singoli gruppi di lavoro.

CONCLUSIONI

Lo scopo di questo percorso non è stato solo quello di affrontare argomenti STEM con un approccio laboratoriale centrato sull'imparare facendo e sulla collaborazione tra pari, ma soprattutto quello di orientare le ragazze alle carriere STEM superando gli stereotipi di genere. L'utilizzo della didattica laboratoriale ha favorito la cooperazione, l'inclusione e la partecipazione di tutti i componenti della classe.

Tra i punti di forza si evidenziano un buon utilizzo del digitale per documentare le attività e condividere materiali e risorse utili; inoltre, le attività digitali si sono alternate e integrate a quelle analogiche in modo equilibrato durante tutto il percorso didattico.

Tra le criticità segnalo la difficoltà nella gestione del gruppo classe quando impegnato nell'estrazione del DNA dalle cellule di kiwi poiché le studentesse e gli studenti hanno spesso bisogno dell'intervento del docente. Sarebbe auspicabile poter essere in compresenza almeno con un altro docente oppure si potrebbe pensare di organizzare l'attività in modalità peer-to-peer coinvolgendo un'altra classe.

Per la valutazione, in particolare quella in itinere, si sarebbero potute predisporre griglie di osservazione per la valutazione delle competenze trasversali (come la capacità di lavorare in gruppo, la capacità comunicativa, il problem solving, ...); inoltre, sarebbe stato utile e interessante proporre alla classe una o più attività di autovalutazione.

Il risultato finale è stato superiore alle aspettative perché il percorso di apprendimento è stato arricchito di contenuti disciplinari e completato con ulteriori attività laboratoriali rispetto alla progettazione iniziale.

Complessivamente la risposta delle studentesse e degli studenti è stata buona, come anche la loro partecipazione e attenzione. Hanno dimostrato maggior interesse e soddisfazione quando sono stati coinvolti attivamente nelle attività didattiche perché maggiormente valorizzati e ascoltati.

RINGRAZIAMENTI

Un ringraziamento particolare alla dirigente Emanuela Bussi dell'I.C. Santorre di Santarosa di Savigliano per il sostegno e il supporto a questo come ad altri progetti didattici.

BIBLIOGRAFIA

- Maddox, B. (2004). *Rosalind Franklin. La donna che scoprì la struttura del DNA*. Mondadori.
- Watson, J.D. (2004). *La doppia elica*. Garzanti.
- Pietra, A., Bottinelli, E., Davit, P. (2018). In SuperNova, Volume C, Unità 10, *Il codice della vita* (pp. 222–234). Lattes.
- Global Gender Gap Report (2022) https://www3.weforum.org/docs/WEF_GGGR_2022.pdf
- ISTAT (2022) https://www.istat.it/it/files//2022/05/ItaliaInfografica_4.pdf
- Storica National Geographic (2022) https://www.storicang.it/a/rosalind-franklin-e-struttura-dna_15270
- Società Italiana di Fisica (SIF), Prima pagina, N.55 (2018) <https://www.primapagina.sif.it/article/815/rosalind-elsie-franklin-25-luglio-1920-16-aprile-1958#.ZARc8nbMJPY>
- National Library of Medicine (NIH), Profiles in Science <https://profiles.nlm.nih.gov/spotlight/kr/feature/biographical>

METEO OPEN DATA @SANTAROSA

Barbara Baldi ¹, Andrea Piccione ^{2,3}

¹I.C. Santorre di Santarosa - Savigliano (CN), ²Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte, ³Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte

baldi.barbara@icsantarosasavigliano.edu.it, piccione.eft@istruzioneepiemonte.it

Abstract

Le attività di misura dei parametri di tipo ambientale con strumentazione a basso costo rivestono un interesse crescente in ambito scolastico perché consentono agli studenti di sperimentare in prima persona come tali dati vengano raccolti e analizzati, perché costituiscono un punto di partenza per affrontare le tematiche del cambiamento climatico e perché sono sostenibili da parte delle scuole. In questo contributo viene mostrato come tale tipologia di misure sia stata proposta in un contesto di scuola secondaria di primo grado. Inoltre, viene presentato il percorso svolto per rendere gli allievi autonomi nella programmazione e poi come questo ha permesso di iniziare una prima serie di misure. Sono stati discussi alcuni risultati del lavoro degli studenti, unitamente a potenzialità e proposte di miglioramento per sviluppi futuri. L'attività si inserisce all'interno del progetto Meteo Open Data @School già in atto in alcune scuole del territorio.

Parole-chiave

#STEM #MeteoOpenData #cambiamentoclimatico #programmazione #misura

CONTESTO DI RIFERIMENTO

Motivazioni

Le tematiche di interesse ambientale sono uno degli aspetti centrali dell'Agenda 2030²⁹: promuovere azioni, a tutti i livelli, per combattere il cambiamento climatico (obiettivo 13); conservare e utilizzare in modo durevole gli oceani, i mari e le risorse marine per uno sviluppo sostenibile (obiettivo 14); proteggere, ripristinare e favorire un uso sostenibile dell'ecosistema terrestre (obiettivo 15). Per affrontare in modo consapevole tali tematiche è necessario promuovere la *data literacy*, che è una delle competenze chiave per poter esercitare la propria cittadinanza digitale. Troviamo indicazioni a supporto della data literacy nel DigComp³⁰ (dimensione 1 - alfabetizzazione su informazioni e dati), nelle indicazioni per l'Educazione civica³¹ ("analizzare, confrontare e valutare criticamente la credibilità e l'affidabilità delle fonti di dati, informazioni e contenuti digitali"), nelle linee guida per le STEM³² ("scomposizione e ricomposizione dei dati [...] la raccolta, l'interpretazione e la valutazione dei dati, nonché la capacità di formulare argomentazioni basate su prove scientifiche [...] la possibilità di raccogliere dati e di discutere la fattibilità delle ipotesi proposte [...] osservare la realtà, raccogliere dati, confrontare quantità e situazioni, seriare, raggruppare, ordinare, stabilire corrispondenze biunivoche, quantificare e misurare, aggiungere e togliere, numerare, formulare ipotesi, elaborare idee personali da confrontare"). Coniugare l'attività di raccogliere, analizzare e interpretare dati con le problematiche ambientali è trasversale a diverse discipline, e si presta bene per proporre attività di orientamento alle STEM, anche in ottica del superamento del divario di genere³³. Infine, i continui sviluppi tecnologici hanno consentito la diffusione di elettronica a basso costo e, quindi, la possibilità di realizzare strumenti

²⁹ <https://unric.org/it/agenda-2030/>

³⁰ https://digcompedu.cnr.it/DigCompEdu_ITA_FINAL_CNR-ITD.pdf

³¹ https://www.istruzione.it/educazione_civica/

³² <https://www.miur.gov.it/web/guest/-/nota-prot-4588-del-24-ottobre-2023>

³³ <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:52021IP0296&from=EN>

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia di misura di elevato livello anche in contesti scolastici, che permettono di lavorare su dati direttamente raccolti dagli studenti.

L'idea in breve

A seguito dei diversi finanziamenti per acquistare nuove tecnologie e aggiornare i laboratori scolastici, molte scuole hanno acquistato schede programmabili e sensori, e stanno realizzando attività di misura di parametri ambientali. L'obiettivo del progetto è supportare tali scuole fornendo ulteriori stimoli provenienti dal mondo della ricerca, e metterle in contatto tra di loro in modo che possano creare una comunità di pratica. In particolare, il progetto si propone di fornire idee e supporto per iniziative di orientamento, per riconfigurare gli spazi nelle classi e nei laboratori, per realizzare attività modulari verticali su più ordini di scuola, organizzare incontri tra gli studenti coinvolti, e creare un portale unico per la distribuzione dei dati.

L'idea in pratica

Il progetto è nato dalla collaborazione tra Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino e Ufficio Scolastico Regionale con l'Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte con l'obiettivo di: rinforzare la relazione tra scuola e mondo della ricerca, fornire formazione ai docenti sulle tecnologie utilizzate, offrire occasioni di sperimentazione in classe con gli studenti, promuovere il confronto tra studenti di diverse scuole. Alcune attività relative al progetto sono state presentate nella precedente edizione del convegno (Robotti, 2022), e ai congressi della Società Italiana di Fisica 2021³⁴ e 2022³⁵; tra le diverse attività realizzate segnaliamo quella dell'Istituto Bonfantini di Novara e del Liceo Cocito di Alba, che hanno realizzato un sistema di misurazione in cui i risultati delle loro stazioni venivano pubblicati in tempo reale su una pagina web pubblica. Nelle attività realizzate in precedenza sono state sempre coinvolte scuole del secondo ciclo, in questo contributo presentiamo una attività svolta in una scuola del primo ciclo.

ESPERIENZA DIDATTICA

Il progetto in dettaglio

Il progetto ha coinvolto studentesse e studenti di una classe durante il secondo e il terzo anno della scuola secondaria di primo grado. Le attività sono state proposte secondo le modalità della didattica digitale integrata (DDI), alternando, quindi, momenti di insegnamento/apprendimento a distanza alle attività svolte in presenza in orario curricolare. Il percorso è stato inserito tra le attività di Educazione Civica. Durante la prima annualità (A.S. 2021/2022) alla classe sono state proposte alcune attività di Coding presenti sulla piattaforma Hour of Code³⁶ ed, inoltre, è stato utilizzato il software gratuito Scratch³⁷ per imparare la programmazione visuale a blocchi. Successivamente, le studentesse e gli studenti sono stati coinvolti in 4 lezioni da 2 ore in cui hanno utilizzato la scheda micro:bit (Austin et al., 2020) per realizzare badge, contapassi, il gioco della morra cinese, e per misurare l'intensità luminosa (Falabino, 2022) e la temperatura dell'ambiente (Piccione *et al.*, 2021).

Nell'anno scolastico 2022/2023 sono state proposte alcune attività in preparazione dell'intervento in classe dell'esperto, quali: realizzare un semplice videogioco simile a "Space Invaders" e la trasmissione radio di un messaggio crittografato. Quest'ultima proposta didattica ha contemplato l'utilizzo di esercizi di crittografia tratte da Olimpiadi del problem solving³⁸ e la realizzazione di alcuni progetti con micro:bit collegati alla trasmissione radio.

³⁴ https://static.sif.it/SIF/resources/public/files/congr21/Atti_Congresso_107_2021.pdf

³⁵ https://static.sif.it/SIF/resources/public/files/congr22/atti_congresso_108.pdf

³⁶ <https://hourofcode.com/it>

³⁷ <https://scratch.mit.edu/>

³⁸ <https://www.olimpiadiproblemsolving.it/>

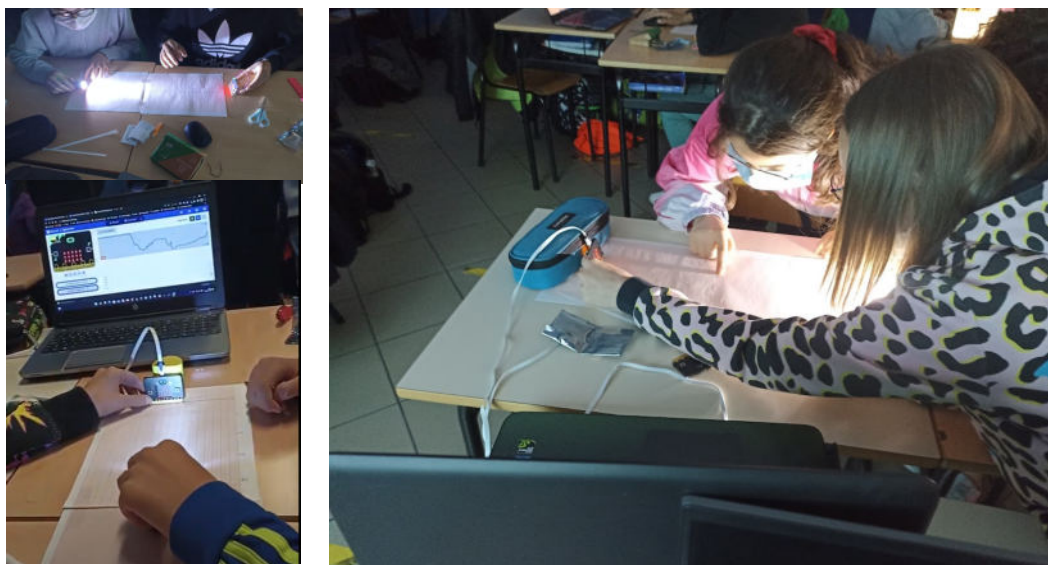


Figura 1. Alcune fasi di misurazione dell'intensità luminosa, della distanza della sorgente luminosa e di registrazione del numero di led accesi.

L'intervento in classe con l'esperto ha avuto la durata di 2 ore. Durante la prima ora sono state proposte a tutta la classe attività relative alla misura della temperatura dell'ambiente interno con il sensore della scheda. Nella seconda ora sono state attribuite a gruppi differenti attività di difficoltà crescente, come la registrazione delle misure di intensità luminosa, di temperatura, di pressione e di umidità relativa sia con utilizzo di micro:bit che di weather:bit. Le attività proposte sono disponibili in rete³⁹. Al termine dell'intervento con l'esperto è stato somministrato un test finale ed è stata richiesta la compilazione di un questionario di gradimento.

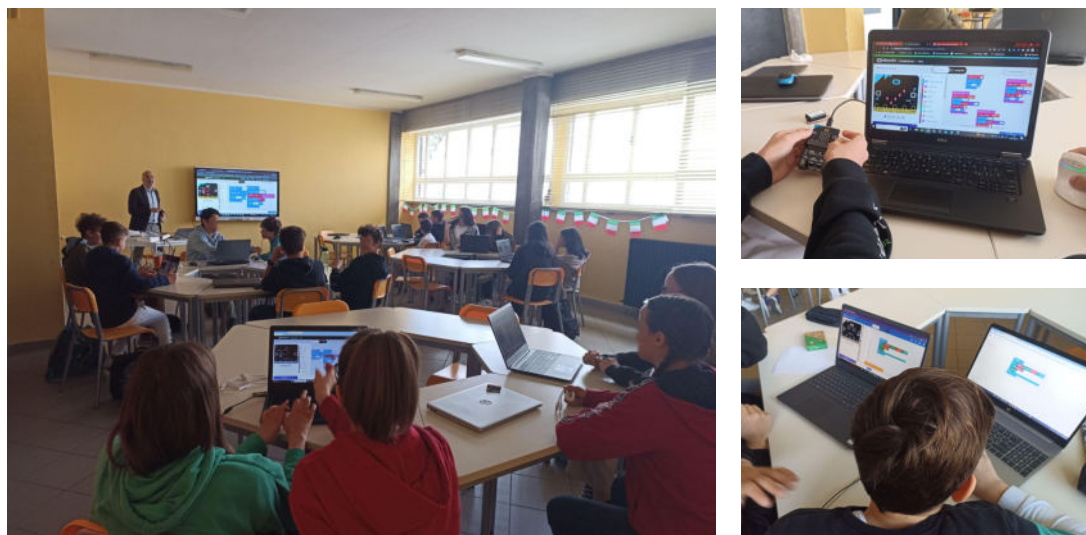


Figura 2. Intervento in classe dell'esperto: spiegazione in plenaria e attività in piccoli gruppi.

Strumenti e metodi

La maggior parte delle attività sono state svolte nell'aula curricolare con l'ausilio del monitor interattivo. Durante l'incontro con l'esperto e in alcune altre occasioni la classe si è spostata nel laboratorio creativo, uno spazio modulare e flessibile che bene si presta ad alternare spiegazioni frontali con le attività in piccolo gruppo.

³⁹ <https://tinyurl.com/20230516-santarosa>

Le studentesse e gli studenti hanno utilizzato i notebook della scuola e quelli personali (metodo BYOD), le schede micro:bit e weather:bit⁴⁰ avendo come supporto gli ambienti di apprendimento digitali online quali makecode⁴¹ per la programmazione a blocchi della scheda programmabile e un ambiente di classi virtuali dedicate⁴², per la condivisione del codice con gli allievi e il successivo monitoraggio dei progressi.

Le attività sono state svolte principalmente a coppie o suddivisi in piccoli gruppi (figura 3). Si è fatto principalmente uso della didattica laboratoriale integrata con il digitale, pertanto è stata utilizzata la classe virtuale e la piattaforma didattica di istituto per caricare e condividere le attività, i materiali e i prodotti digitali realizzati dalle studentesse e dagli studenti.

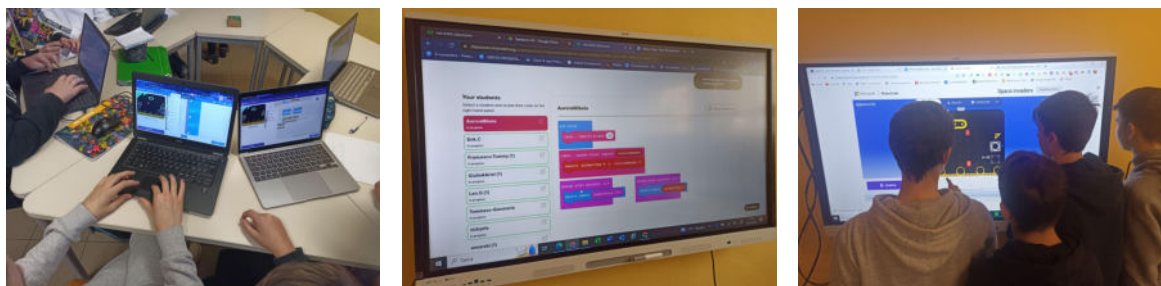


Figura 3. Studentesse e studenti al lavoro suddivisi in piccoli gruppi con ausilio di notebook e monitor interattivi.

Esempi di attività

Durante la prima parte dell'attività dedicata alle misure ambientali, a tutta la classe sono state proposte le stesse attività. Tra queste un esercizio prevedeva la consegna per un lavoro individuale o a coppie (figura 4).

Esercizio sulla misura della temperatura interna con il sensore della scheda

ES1. Utilizzare il codice inviato dal docente ed eseguire nell'ordine indicato le seguenti modifiche:

- *inserire una pausa di 5 secondi tra una misura e la successiva*
- *fare visualizzare una stringa di testo (ad esempio, $T(^{\circ}C)$) prima di visualizzare il valore della misura*
- *assegnare la misura a una variabile (ad esempio, $temp$), e invece della temperatura visualizzare il valore della variabile insieme a un testo (come al punto precedente)*
- *all'avvio mostrare un simbolo (ad esempio, V) e dopo 5 secondi iniziare la misura.*

Durante la seconda parte dell'attività sono state proposte attività per diversi livelli; di seguito l'esercizio sulla trasmissione della misura da una scheda all'altra (figura 5).

⁴⁰ <https://makecode.microbit.org/pkg/sparkfun/pxt-weather-bit>

⁴¹ <https://makecode.microbit.org/>

⁴² <https://classroom.microbit.org>

ES3. Utilizzare due schede: una scheda misura la temperatura esterna e la trasmette via radio all'altra che misura la temperatura interna e visualizza temperatura esterna/interna a seconda che venga premuto il tasto A o il tasto B; potete prendere come esempio questo codice <https://microbit.org/projects/make-it-code-it/indoor-outdoor-thermometer/>.



Figura 4. Esercizio sulla misura della temperatura interna con il sensore della scheda. Sulla sinistra il codice fornito dal docente, sulla destra il risultato dell'esercizio svolto.

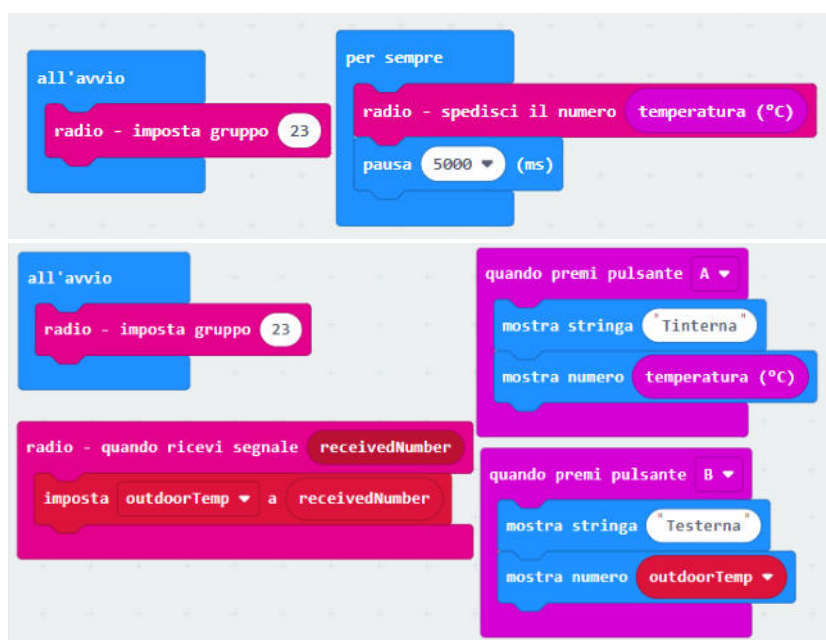


Figura 5. Esercizio sulla misura della temperatura interna ed esterna con due schede. Nella parte alta il codice per la scheda che trasmette, nella parte bassa quello per la scheda che riceve e visualizza.

Feedback degli studenti

I risultati del questionario di gradimento hanno evidenziato che le attività proposte sono state percepite come abbastanza difficili ma, comunque, sono state decisamente gradite da oltre 80% della classe (figura 6). È stato somministrato anche un test finale che è servito per valutare la conoscenza dei contenuti; tale voto è stato inserito tra le valutazioni di Educazione Civica. La classe si è attestata per il 58% su un livello di conoscenza buona e più che buona, per il 30% su una sufficiente conoscenza dei contenuti, mentre il 12% delle studentesse e degli studenti non l'ha raggiunta. La percentuale di chi non è riuscito a raggiungere la sufficienza è leggermente inferiore al dato medio ottenuto in matematica, probabilmente perché le attività proposte hanno coinvolto maggiormente la classe, in particolar modo le studentesse.

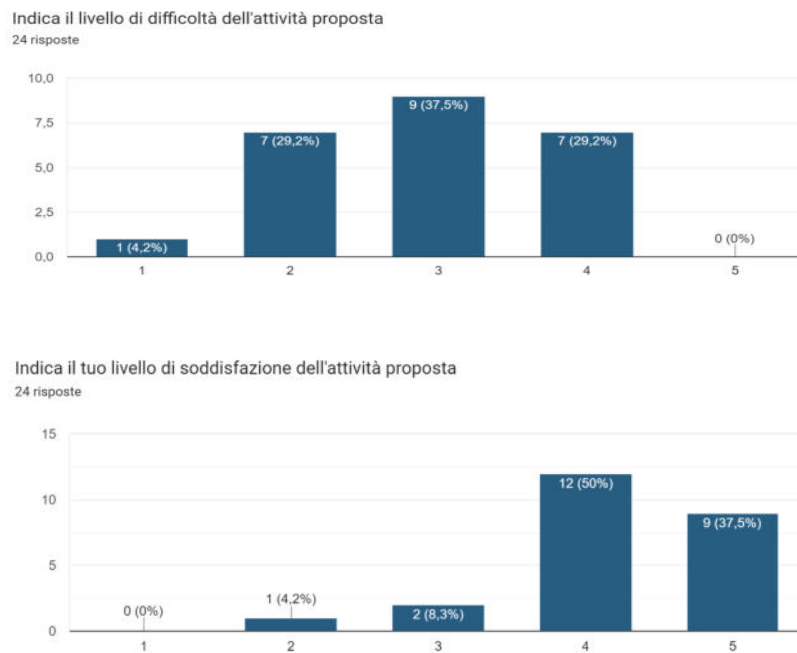


Figura 6. Risultati del questionario di gradimento compilato dalle studentesse e dagli studenti con una scala da 1 (minimo) a 5 (massimo).

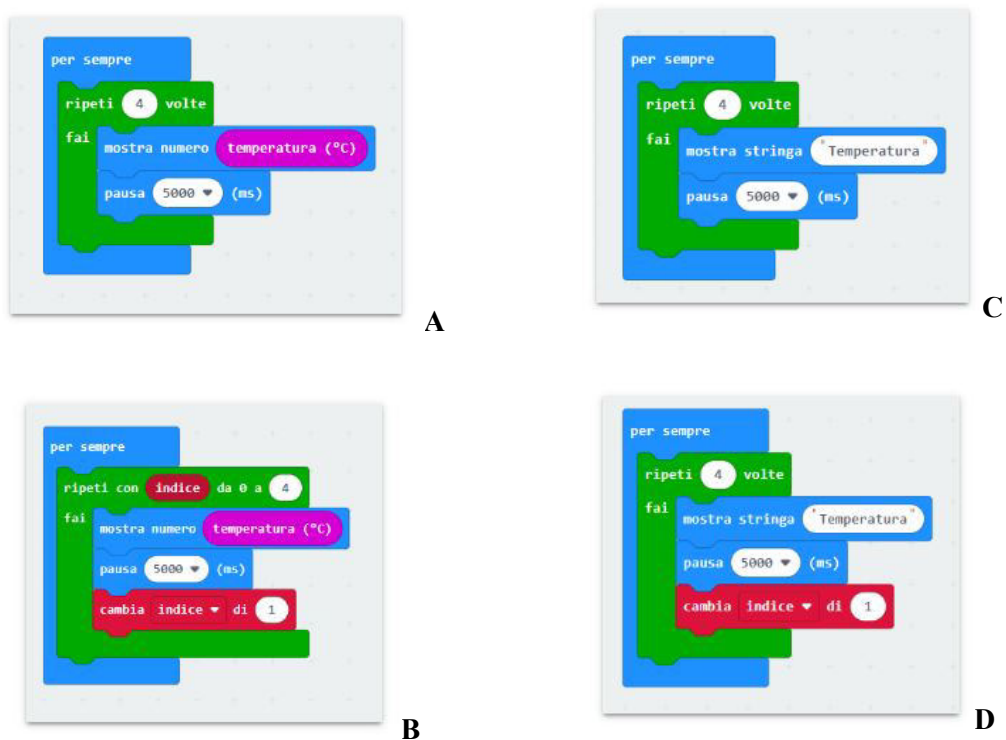


Figura 7. Esempio di domanda inserita nel test finale: indica quale dei seguenti blocchi è equivalente.

Il 17% degli studenti ha indicato correttamente A e B. Il risultato può essere ritenuto soddisfacente poiché la risposta a questa domanda richiede un alto livello di competenza e un esempio esplicito di questo tipo non è stato visto durante le poche ore del percorso.

CONCLUSIONI E POSSIBILI SVILUPPI

A seguito dei feedback strutturati, attraverso il questionario, e informali, attraverso il confronto con la classe, sono emersi i seguenti punti di forza dell'attività nel suo complesso: è stato stimolante il supporto di una persona proveniente da un contesto esterno alla scuola, le attività proposte hanno suscitato l'interesse da parte degli studenti, anche grazie all'utilizzo di metodi innovativi, e hanno posto le basi per lo sviluppo di competenze digitali. Sono state evidenziate alcune criticità come la difficoltà di gestire i tempi e le risorse in attività che prevedono una diversa impostazione dello spazio classe e nuovi strumenti; sarebbe stato necessario dedicare più tempo alla raccolta e all'analisi dei dati, così come un maggiore approfondimento sugli aspetti ambientali.

Il progetto si presta a possibili sviluppi tra i quali attività di peer-tutoring non solo tra studenti di classi diverse della scuola secondaria, ma anche con il coinvolgimento della scuola primaria; progetti di questa tipologia si prestano per promuovere la continuità tra scuole di diverso ordine e grado. Nell'ottica di sperimentare percorsi di *service learning*⁴³, affinché gli allievi possano accrescere le proprie conoscenze e competenze attraverso un servizio alla comunità, si possono attivare collaborazioni con gli enti locali e il territorio in generale per sensibilizzare alle problematiche ambientali.

BIBLIOGRAFIA

- Austin, J., Baker, H., Ball, T., Devine, J., Finney, J., De Halleux, P., ... & Stockdale, G. (2020). The BBC micro: bit: from the UK to the world. *Communications of the ACM*, 63(3), 62–69.
- Falabino S. (2022). Un'esperienza di laboratorio di fisica in dad: misura dell'intensità luminosa con micro:bit, in *Atti del X Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica*, a cura di Bonino R, Marocchi D., Rinaudo M., Serio M., pp. 267–272
- Piccione, A., Saglietto, G., Serio, M., Marocchi, D., Bonino, R. and Rinaudo, M. (2021). Esperienze laboratoriali a distanza con le schede programmabili, *IUL Research* 2, 3, 237-250
- Robotti G. (2022). Clima: misura, studio e analisi dati, in *Atti del X Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica*, a cura di Bonino R, Marocchi D., Rinaudo M., Serio M., pp. 286–293

⁴³ <https://www.miur.gov.it/service-learning>

PROGETTO STEAM: “UNA TAVOLA FANTA-SCIENTIFICA”

Katiuscia Ciaschini

katiuscia.ciaschini@icgobettirivoli.edu.it

Abstract

Con l'aiuto di un esperto esterno di teatro, Alessandro Tessitore (biotesi@gmail.com), a seguito della lettura estiva da parte dei ragazzi (3F dell'Istituto Comprensivo Piero Gobetti di Rivoli) di testi relativi alla vita di alcuni dei più famosi scienziati del 1800/1900, e a seguito della lettura del noto testo “L'Incredibile cena dei fisici quantistici”, abbiamo creato un copione e realizzato uno spettacolo teatrale, in cui è stata rappresentata, sotto la falsa linea del testo, una cena tra donne e uomini scienziati attuali (con le uniche due eccezioni della padrona di casa Marie Curie e di Einstein, suo fedele amico). Il tutto condito con esperimenti di fisica durante lo spettacolo e sketch comici.

L'obiettivo del progetto rientra tra quelli citati nell'Agenda 2030, ed è quello di sviluppare competenze e passione scientifiche anche nelle alunne e di parlare di parità di genere.

Parole-chiave

Steam, Parità di genere, Teatro scienza, Fisica sul palcoscenico

Una tavola fanta-scientifica

Il progetto lega il teatro alla scienza, e non solo, sottolineando il cambiamento che ha subito quest'ultima negli ultimi 100 anni.

Si è partiti dal mettere in scena “una cena”, come quella descritta nel testo della Greyson, ma con al centro alcuni scienziati contemporanei, che sono stati intervistati tramite alcune domande ideate insieme al gruppo classe e che ci ha permesso di parlare della scienza nel 2022, di passioni scientifiche e di parità di genere.

Gli scienziati intervistati sono stati:

- un **biologo canadese, Eric Milot.**, che si occupa di studiare i meccanismi che sono alla base dello sviluppo delle malattie ematologiche (es: leucemie, setticemia);
- sua moglie e collega, la **dottoressa Stefania Bottardi**, che nello specifico si occupa della regolazione dell'espressione dei geni in cellule normali e cellule tumorali;
- una **geologa, Simonetta Nicolussi**, che nella tesi di laurea ha svolto un'indagine geologico-tecnica sull'Anfiteatro Morenico di Rivoli-Avigliana, e che attualmente è un'insegnante dell'Istituto Comprensivo Piero Gobetti;
- un **fisico, Chiara Oppedisano**, che studia le particelle all'esperimento ALICE del CERN, oltre a far parte dell'esperimento IXPE;
- un **architetto, Michele Cornetto**, che tra le altre cose si occupa di web3 e metaverso;
- il primo **laureato del metaverso**, in comunicazione, ICT e Media, **Edoardo di Pietro**.

A loro è stato chiesto nello specifico del loro lavoro, dei sacrifici fatti per arrivare dove sono, dell'importanza del lavoro in team e delle disparità esistenti ancora oggi nel campo scientifico e non solo tra donne e uomini, soprattutto in altre parti del Mondo.

Le loro risposte sono state rielaborate ed adattate per permettere ai ragazzi di discutere durante una “fantastica cena” a casa di Marie Curie, con la presenza di Albert Einstein.

La cena è stata pensata tutta a base di “piatti scientifico-matematici”, come l'antipasto fatto di geometrie salate (un mix di patatine di forme triangolari, sferiche e cilindriche), seguita da un brodo primordiale

(zuppa), e conclusa con il gelato spaziale, quello mangiato dagli astronauti durante il loro permanere nella stazione spaziale ISS (l'originale).

Durante il servizio, oltre a discutere di scienza e di come si sia evoluta, ci sono stati momenti divertenti generati da camerieri sbadati e buffi, guidati da un cuoco di origine francese, il che ha permesso ai ragazzi anche di mostrare alcune abilità linguistiche acquisite nei tre anni di studi. Il sottofondo musicale "Moonlight Serenade" è stato suonato con il flauto da un altro gruppo di alunni. Inoltre, per intrattenere gli ospiti sono intervenuti "I bosoni di X", due alunni, che hanno effettuato, sempre in modo spiritoso, due semplici esperimenti, che hanno coinvolto il pubblico in sala, "L'elettricità scorre tra i capelli" con il palloncino strofinato nella lana e il movimento che questo ha generato nei capelli della persona presa dal pubblico e l'esibizione riguardante il liquido non newtoniano.

Prima della conclusione della cena è stato compito di Einstein riassumere ciò di cui si è discusso a cena, ovvero dei cambiamenti scientifici degli ultimi 100 anni, sottolineare come le cose debbano e possano ancora cambiare, come unire le arti alla scienza permetterà di rendere quest'ultima più accessibile e comprensibile. Lo spettacolo si è concluso con il rientro in scena di tutti gli alunni sistemati come nella foto del testo originale della Greyson, ma rappresentanti i sei scienziati invitati a tavola, Marie Curie ed Einstein ovviamente, ma ancora Rita Levi Montalcini, Steve Jobs, Margherita Hack, Nicola Tesla, Piero Angela, Ipazia, Samantha Cristoforetti, Laura Bassi, Alessandro Cruto, in modo da riunire passato e presente e da comporre una foto con un numero simile di uomini e di donne.

Alle loro spalle è stata proiettata la foto originale della cena tenutasi a Bruxelles il 29 ottobre del 1927.

CONCLUSIONI

Questo lavoro ci ha permesso di:

- realizzare un percorso interdisciplinare STEAM;
- riflettere su temi della fisica giocando;
- conoscere scienziati attuali e poter parlare con loro;
- evidenziare il contributo delle donne nella scienza pur riflettendo sull'ancora attuale disparità di genere, soprattutto in alcune parti del Mondo;
- divertirci insieme.
-

RINGRAZIAMENTI

Un ringraziamento particolare va ad Alessandro Tessitore, che è stato in grado di rendere divertente ed originale uno spettacolo fatto con i ragazzi e per i ragazzi che parlasse di scienza e di temi importanti. Un ringraziamento grande va ai ragazzi della 3F del 2022 dell'Istituto Comprensivo Piero Gobetti di Rivoli, che hanno lavorato scrupolosamente leggendo i testi, che hanno collaborato alla stesura del copione e hanno reso possibile la messa in scena.

Un altro ringraziamento significativo va a tutto il Consiglio di classe della 3F che ha sopportato pazientemente tutte le prove e contribuito significativamente ognuno per la sua parte alla stesura del copione.

Ancora grazie alla Dirigente Sara Campagnaro, che ci ha supportati in questo progetto.

BIBLIOGRAFIA

"L'incredibile cena dei fisici quantistici" di Gabriella Greyson;

Dalla serie i "Grandissimi", edizione El.: "Rita Levi Montalcini", "Margherita Hack", "Marie Curie", "Albert Einstein", "Nikola Tesla";

GAMIFICATION E INQUIRY NELLA DIDATTICA DELLE SCIENZE NATURALI: ESEMPI DI ATTIVITA'

Giulio Alluto

Liceo Scientifico "O. Grassi" Savona - eTeacher Educator EPICT

giulio.alluto@liceograssi.it - giulio.alluto@assoepict.it

Abstract

Gamification e Inquiry sono metodologie didattiche innovative utili a potenziare la motivazione e l'interesse verso le STEAM: la gamification trasforma l'apprendimento in gioco e l'inquiry permette di imparare utilizzando il metodo scientifico. Questa comunicazione ha l'obiettivo di raccontare brevemente alcuni percorsi didattici di scienze svolti presso il biennio di un istituto professionale: dallo studio della tavola periodica degli elementi alla combustione del magnesio, dal game sulla cellula all'esplorazione virtuale di alcuni vulcani italiani.

Parole-chiave

Gamification, STEAM, Inquiry, apprendere giocando.

L'APPRENDIMENTO ATTIVO CON L'INQUIRY E LA GAMIFICATION

Il processo di insegnamento - apprendimento deve essere calibrato in funzione dell'età degli studenti e della loro motivazione: passando dalla docenza di matematica e scienze presso la secondaria di primo grado a insegnante di scienze naturali presso la secondaria di secondo grado, la mia esperienza si potrebbe riassumere in "scuola che vai, didattica che fai". Mi spiego meglio: in funzione dell'età degli studenti, delle dinamiche di classe e della motivazione dei singoli alunni ho sempre cercato di cambiare il mio stile di insegnamento gestendo e modulando diversamente le diverse metodologie e strategie didattiche utilizzate con l'obiettivo finale di trasmettere conoscenze e competenze riguardanti le diverse discipline insegnate. Attualmente sono docente presso il Liceo Scientifico e quindi ho riadattato il mio modo di insegnare in funzione di studenti generalmente attenti, motivati e studiosi. Invece, l'esperienza vissuta per quattro anni scolastici e terminata lo scorso anno presso un istituto professionale di Savona mi ha permesso di entrare in contatto con alunni per nulla motivati, con pochissima voglia di studiare, molti dei quali con esperienze scolastiche vissute precedentemente in maniera negativa o fallimentare e quindi in preda allo sconforto totale. Inoltre la mia disciplina, scienze integrate, risultava essere "non di indirizzo" e quindi considerata inutile per la maggior parte degli studenti. In uno scenario di questo tipo occorre organizzarsi bene perché, a mio parere, esiste sempre un modo per creare interesse e motivazione, entusiasmo e partecipazione: progettare e realizzare percorsi didattici in cui gli studenti sono coinvolti in modalità diverse dal semplice guardare, ascoltare e prendere appunti. Passare quindi da un apprendimento "passivo" ad un apprendimento "attivo" nel quale il docente diventa organizzatore e facilitatore del processo che porta ogni singolo studente all'acquisizione di nuove conoscenze e competenze in funzione dei personali ritmi di apprendimento: si può "imparare come gli scienziati" con l'Inquiry oppure "giocare ad apprendere" con la gamification. Di seguito saranno illustrate brevemente le metodologie utilizzate e i QR code che troverete nelle figure permetteranno di ripercorrere nel dettaglio le esperienze didattiche svolte in classe.

L'INQUIRY: IMPARARE COME GLI SCIENZIATI

L'Inquiry è l'apprendimento basato sull'indagine e l'investigazione. Il docente grazie all'elaborazione di una "domanda investigabile" sfida lo studente a cercare la risposta migliore attraverso un lavoro sia individuale che di gruppo. Gli studenti elaborano ipotesi in merito al fenomeno studiato, cercano

informazioni selezionando le fonti cartacee o digitali, interpretano e discutono tra loro per giungere alla formulazione di una risposta condivisa prima all'interno dei gruppi di lavoro e poi in classe.

Si può definire Inquiry solo se esiste almeno una *domanda investigabile* ovvero una domanda in grado di innescare la curiosità utile a osservare il fenomeno reale o simulato e permetta di raccogliere evidenze del fenomeno stesso all'interno dello spazio (aula, laboratorio, ambiente outdoor) e del tempo (numero di ore o di fasi di lavoro) programmato dal docente.

La domanda investigabile deve, inoltre, essere formulata in funzione degli strumenti di ricerca messi a disposizione dal docente nell'ambiente in cui si opera (strumenti reali presenti nel laboratorio, chiavi dicotomiche per classificare in ambienti outdoor o simulazioni digitali) in modo tale da permettere, tramite l'utilizzo del metodo scientifico, di trovare la risposta.

Ad esempio la domanda investigabile potrebbe iniziare con:

- cosa succede se ...?;
- elabora un'ipotesi per spiegare il fenomeno e progetta un esperimento che ...;
- come faccio a sapere che ...?;
- in che modo ...?;
- immagina di essere un (chimico, biologo, matematico, geologo) e ...;
- perché ... motiva la risposta;
- è vero che ... prova a dimostrarlo ...;

La domanda investigabile non deve essere troppo semplice ma neppure troppo difficile: occorre conoscere bene i propri alunni e cercare di capire le difficoltà che potrebbero incontrare nel rispondere al quesito proposto. Inoltre occorre trovare una domanda investigabile la cui risposta non sia facilmente accessibile tramite l'utilizzo dei libri di testo o della rete internet.

Esistono diversi livelli di Inquiry:

- *confermativo* quando gli studenti confermano un principio attraverso un'attività in cui i risultati sono già noti in anticipo;
- *strutturato* se gli studenti investigano una domanda progettata dal docente attraverso una procedura assegnata;
- *guidato* quando gli studenti progettano e selezionano procedure utili a investigare la domanda presentata dal docente;
- *aperto* quando gli studenti, ormai diventati esperti, investigano domande formulate da loro stessi attraverso procedure che progettano e selezionano.

Occorre però allenare gli alunni con gradualità e quindi conviene partire sempre dall'Inquiry confermativo. Due percorsi didattici che prendono spunto da questa metodologia sono “Cosa succede se?” e “Esploriamo alcuni vulcani italiani”: le attività sono descritte nel mio blog e sono accessibili tramite i QR code della figura 1.



Figure 1. QR Code di “Cosa succede se” a sinistra e QR Code di “Esploriamo alcuni vulcani italiani” a destra.

“Cosa succede se” è un percorso di chimica caratterizzato da tre fasi di lavoro in classe: la tavola periodica interattiva online, la reattività dei metalli e gli esperimenti in classe con il magnesio. Trovate i dettagli di tutte le fasi descritti all'interno di una pagina del mio blog: segue la descrizione della terza fase.

Il docente porta in classe il magnesio e tutto il necessario per svolgere gli esperimenti in aula non avendo uno spazio adibito a laboratorio di chimica: nastro di magnesio, occhiali scuri, accendino, semplice circuito elettrico con lampadina e batteria da 4, 5 volt, fili elettrici.

La prima esperienza ha l'obiettivo di descrivere le caratteristiche del magnesio percepibili agli organi di senso soprattutto tatto e vista: occorre far girare tra i banchi pezzi di nastro di magnesio e poi chiedere agli studenti di scrivere un post con le loro osservazioni da pubblicare sulla bacheca virtuale. Segue la condivisione dei post tramite smart board, discussione di classe e sintesi delle caratteristiche evidenziate. La seconda esperienza prevede di inserire in un circuito formato da batteria e lampadina un pezzo di magnesio con l'obiettivo di dimostrare che conduce elettricità. Anche per questo secondo esperimento gli studenti commentano tramite post in bacheca virtuale le proprie osservazioni.

La terza esperienza è la combustione del magnesio svolta solo dal docente dopo aver messo in sicurezza gli studenti: gli alunni devono indossare gli occhiali da sole e stare ad una certa distanza dall'insegnante ma possono usare il proprio cellulare per filmare l'esperimento. Questa semplice reazione chimica che porta alla formazione dell'ossido di magnesio permette agli studenti di fare molte osservazioni, se stimolati bene dal docente, tramite domande opportune come "quale ruolo ha l'accendino nella reazione?", "con quale sostanza reagisce il magnesio?", "cosa produce questa reazione?". Inoltre è possibile far toccare e osservare il prodotto della reazione, facendolo girare tra i banchi. L'insegnante invita gli alunni a scrivere brevi post per conservare le risposte di tutti nella bacheca virtuale; segue discussione di classe e sintesi delle scoperte fatte.

Alla fine con l'aiuto del docente si prova a scrivere, su smart board, la reazione con il "linguaggio del chimico" e in questo modo si introduce il concetto di reazione chimica, la differenza tra reazione chimica e trasformazione fisica, il concetto di bilanciamento di una reazione: tutto questo sarà conservato e messo a disposizione degli studenti poiché condiviso nel "diario di bordo dell'esperienza" all'interno del canale di scienze del Team di classe della piattaforma e - learning. Tale file sarà utile agli studenti per rivedere e ripassare le "scoperte" fatte e per prepararsi al test di verifica.

Il percorso didattico "Esploriamo alcuni vulcani italiani" è un'attività di scienze naturali creata mediante l'utilizzo di un itinerario virtuale su Google Earth costruito dal sottoscritto inserendo adeguati prodotti multimediali: video, immagini, testi, link a siti internet di approfondimento. Gli studenti lavorano in piccoli gruppi e ogni gruppo di lavoro utilizzando almeno un dispositivo (tablet, pc portatili, cellulari) inizia il percorso virtuale, studia i materiali multimediali e risponde alle domande presenti in tutte le tappe del percorso. Crea un file con tutte le risposte da caricare in piattaforma e - learning nel canale di scienze della propria classe.

GAMIFICATION: APPRENDERE GIOCANDO

Il gioco rappresenta un fattore pre - culturale: i nostri animali da compagnia (cani o gatti) giocano tra loro e con noi umani, i bambini giocano e molte volte simulano le attività svolte dagli adulti. Perché non trasmettere nuove conoscenze e nuove competenze anche a scuola tramite il gioco? Il gioco offre occasioni di apprendimento motivanti e immersive: inoltre favorisce l'inclusione e la collaborazione tra pari. Le conoscenze e le competenze da acquisire vengono trasformate in badge, in punti e in livelli: l'ansia da prestazione, tipicamente scolastica, diminuisce e la motivazione aumenta.

Esistono tre grandi tipologie di giochi:

- *serious game* o *learning game* creati per insegnare;
- *mainstream game* utilizzati per la didattica ma non creati per insegnare;
- *gamestorm* o *game jam* quando i giochi sono creati dagli stessi studenti

All'inizio è il docente l'organizzatore e il facilitatore del gioco: potrà utilizzare giochi creati per insegnare o game non creati per motivi didattici ma che possono essere utili per trasmettere conoscenze, abilità e competenze. Infine saranno gli stessi studenti a chiedere di costruire un gioco per altri studenti lavorando a piccoli gruppi su tematiche scelte dal docente o da loro stessi. Anche in questo caso occorre partire con gradualità.

L'attività didattica proposta agli alunni dal sottoscritto è "Che vita da cellula!" ed è descritta all'interno del mio blog accessibile con il QR Code della figura 2.



Figure 2. QR Code di "Che vita da cellula!"

Il fulcro del progetto è l'utilizzo di "Life on the Edge", gioco didattico tipo "Tower Defence" sviluppato da docenti e studenti della Macewan University. Gli alunni sono organizzati dal docente in piccoli gruppi eterogenei e inclusivi: ad ogni gruppo viene fornito un pc portatile dalla scuola. Gli studenti attraversando i diversi livelli di gioco, gestiscono l'equilibrio cellulare (omeostasi) e contemporaneamente si difendono da agenti patogeni esterni alla cellula inserendo nella membrana a doppio strato lipidico le strutture cellulari necessarie per la sopravvivenza (necessità di avere una giusta concentrazione di sostanze nutrienti e acqua) e utili alla difesa. Batteri e virus attaccano la cellula "a ondate" durante i diversi livelli del gioco: occorre gestire bene energia, proteine canale e strutture cellulari di difesa per superare i vari livelli. Ogni livello introduce batteri nuovi e più forti dei precedenti. Gli alunni lavorano a piccoli gruppi con l'obiettivo di realizzare un prodotto finale multimediale in grado di descrivere le strutture cellulari e biologiche protagoniste del gioco e le strategie che servono per completare tutti i livelli. L'utilizzo di una rubrica creata dal sottoscritto viene utilizzata per valutare i prodotti finali elaborati dai diversi gruppi di lavoro e un test online viene somministrato ai singoli alunni per la verifica individuale dell'apprendimento riguardante le strutture e le funzioni della cellula.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio tutte le mie alunne e i miei alunni che ho avuto presso l'istituto secondario superiore "Mazzini Da Vinci" di Savona perché mi hanno permesso di comprendere che si può trovare sempre un modo per coinvolgere e motivare gli studenti, vivere esperienze positive di apprendimento rendendo le attività didattiche inclusive e partecipate!

BIBLIOGRAFIA

Scapellato, B. (2020). *Inquiry - Based Science Education. Dalla Teoria alla pratica: l'approccio IBSE per una comprensione profonda delle scienze naturali*. Pearson Academy
"Life on the Edge" by Life on The Edge Team, MacEwan University (01/04/2024), from <https://lifeontheedgegame.com/>

LA NATURA FA SCUOLA. UN PROPOSTA PER LA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO.

Marino T.¹ Pecchio P.²

¹ IIS CURIE LEVI (Torino), National Coordinator World Space Week Italia

² I.C. 66 Martiri Grugliasco, Torino, Italia

paolapecchiophd@gmail.com

Abstract

L'attività didattica è stata pensata per introdurre a studenti della secondaria di primo grado il concetto di relazione tra grandezze e per studenti del secondo biennio della secondaria di secondo grado la funzione esponenziale. Seguendo il suggerimento delle Indicazioni Nazionali per il Curricolo e gli obiettivi dell'Agenda 2030.

Partendo dalla costruzione di un semenzaio con materiale di riciclo, è stata studiata la crescita e lo sviluppo di piante di pisello. Monitorando le varie fasi con l'aiuto di un foglio di calcolo condiviso, sono stati raccolti i dati del sistema biologico studiato, incoraggiando gli studenti all'apprendimento per scoperta. L'analisi dei dati raccolti ha permesso di introdurre sperimentalmente il concetto di serie storica e di relazione tra grandezze per gli studenti della secondaria di primo grado e la funzione esponenziale e a tratti per la secondaria di secondo grado. Tale attività ha permesso anche di introdurre spunti di riflessione sui goal dell'Agenda 2030 e in particolare conoscenze e abilità atte a "garantire una gestione sostenibile delle risorse naturali, contrastando la perdita di biodiversità e tutelando i beni ambientali e culturali". Il tema della crescita esponenziale trova poi una occasione di approfondimento nel ciclo della scuola secondaria di secondo grado, ove, anche con l'onda emotiva dovuta alla recente pandemia, si studiano i fenomeni di crescita/decrecita.

Parole-chiave

Sistema biologico, ciclo vitale, funzione esponenziale.

INTRODUZIONE

L'obiettivo dell'Unità di Apprendimento (UDA) è di osservare diversi aspetti di un sistema biologico, seguendo il metodo scientifico e utilizzando la matematica come strumento per la lettura razionale della realtà. Il progetto si propone come un compito di realtà legato al mondo della botanica e nasce dalla volontà di proporre un'esperienza collegata a un progetto di inclusione e outdoor education proposto dal dipartimento di sostegno dell'I.C. 66 Martiri di Collegno, coinvolgendo l'intero gruppo classe. La progettazione del percorso ha come obiettivo quello di portare gli studenti a mettere in campo diverse strategie e svariate competenze e offre loro un'esperienza didattica che richiede un lungo tempo di lavoro e lega più della metà dell'anno scolastico. Lo studio proposto chiede agli studenti di usare categorie mentali del pensiero razionale e scientifico e offre un terreno di esercizio di procedure caratteristiche delle STEAM.

FASI DIDATTICHE

Nella prima fase del progetto gli studenti di una classe prima della secondaria di primo grado hanno raccolto materiali di riciclo quali vasetti di plastica, fondi in cartone dei rotoli di carta igienica o della carta casa, cannucce e stuzzicadenti per l'assemblaggio di un semenzaio.

Nella seconda fase lo studente ha quindi costruito la sede dove allocare un seme di pisello e un rudimentale sistema di sostegno e misura per le piante in crescita. Contestualmente è stato preparato il foglio di calcolo condiviso sul quale annotare tutti i passaggi dell'esperimento che ha coperto un arco

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia temporale di circa sei mesi. Alcuni semi di controllo sono stati seminati in una sede fissa in campo aperto. Il semenzaio degli studenti invece è stato settimanalmente spostato dalla casa del docente a scuola, per garantire luce e acqua anche nei giorni del fine settimana. Ogni studente ha potuto pertanto monitorare la crescita del proprio seme settimanalmente e riportare i dati dell'indagine sperimentale, confrontando i risultati con quelli dei propri compagni e con i campioni di controllo. Inoltre si è rivelato necessario prevedere più rinvasi utilizzando contenitori di riciclo di dimensioni crescenti passando quindi dal rotolo di carta igienica alla bottiglia di plastica (Fig. 1).



Figura 1 (a) Particolare del Semenzaio prima del rinvaso nella prima fase e (b) dopo il rinvaso in bottiglie di plastica

Alcuni semi sono stati osservati anche nei giorni successivi alla semina per studiare le fasi della germinazione e quantificare variabili del processo biologico in funzione del tempo (giorni) la crescita settimanale e il numero di foglie (Fig. 2).



Figura 2 Primo germoglio

Nella terza fase del progetto gli studenti hanno analizzato i dati raccolti conclusioni e osservato sperimentalmente il significato di ciclo vitale in biologia, passando dalla fase del fiore (Fig. 3) e del frutto nel quale trovare il seme da cui ha avuto origine lo studio (Fig. 4).



Figura 3 Il fiore



Figura 4 Il frutto e il seme

RISULTATI

I dati raccolti nel foglio di calcolo (Fig. 5) hanno permesso di ragionare in diversi ambiti e cercare modelli matematici che permettessero di leggere il fenomeno studiato.

Alunni/ Date osservazione	28/10/2022	04/11/2022	11/11/2022	18/11/2022	25/11/2022	02/12/2022	16/12/2022	23/12/2022	PIANTE FIORITURA marzo 2023	BACELLO aprile-maggio 2023
#	Semina	0	0	1,8	2,1	2,5	3	seccata		
#	Semina	0	4,2	8,4	11	13,1	14,4	15	*	*
#	Semina	0	0	0	0	*	0	11,5	*	*
#	Semina	0	0	0,6	3	4,2	8	10	*	*
#	Semina	0	0	non germinata/ nuova semina	0	non germinata/ nuova semina	0	2,4		
#	Semina	0	0	non germinata/ nuova semina	0	non germinata/ nuova semina	0	0		
#	Semina	0	1	3,5	3,8	5,2	7	7		

Figura 5 Dati raccolti su foglio elettronico condiviso dal gruppo classe

Il primo strumento utilizzato è la dispersione XY sul piano cartesiano come strumento per rappresentare la serie storica delle altezze in funzione delle settimane. La relazione matematica è apparsa da subito facilmente leggibile. Mentre per gli studenti della scuola secondaria di primo grado ci si è fermati all'introduzione del concetto di funzione graficamente, i medesimi dati hanno offerto una fonte di riflessione sulla funzione esponenziale in natura agli studenti della secondaria di secondo grado (Fig. 6).

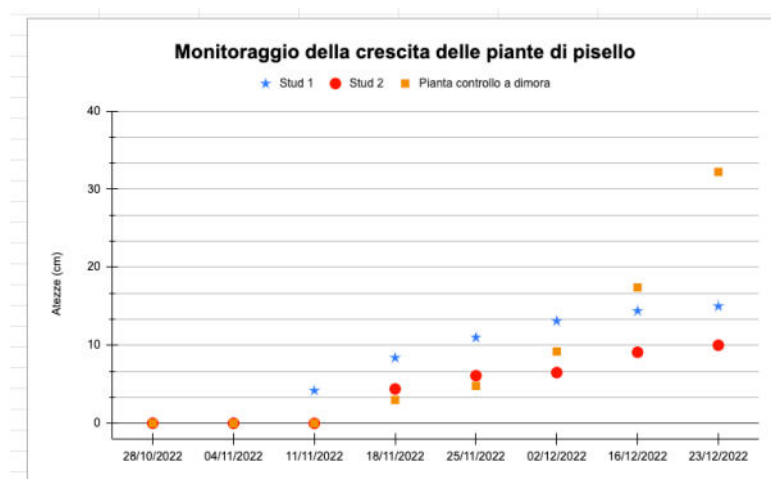


Figura 6 Rappresentazione grafica di serie storiche

Il primo strumento utilizzato è la dispersione xy sul piano cartesiano come strumento per rappresentare la serie storica delle altezze in funzione delle settimane. La relazione matematica è apparsa da subito facilmente leggibile. Gli studenti hanno potuto inoltre quantificare il numero di piante che sono arrivate alla fioritura attraverso il modello della frazione come strumento di analisi statistica giungendo a capire il significato di frequenza assoluta e relativa. Questi ultimi risultati hanno richiesto una notevole ricerca per capire se i numeri ottenuti erano confrontabili con quanto osservato in agricoltura alla nostra latitudine e cercare le eventuali cause di divergenza.

Ultima considerazione è stata svolta sulla ricerca del rapporto tra produzione ottenuta e fabbisogno per individuo dell'alimento oggetto di studio per offrire agli studenti una considerazione esperienziale sulle dimensioni dei terreni coltivabili, le tempistiche di produzione alimentare e le necessità della popolazione.

CONCLUSIONI

Il lavoro proposto ha sicuramente richiesto una lunga fase di studio e applicazione sia al docente e sia alla classe ma offre una ricchezza e una complessità di spunti, tipica dei compiti di realtà, che richiedono allo studente l'attivazione di competenze cognitive diverse e per tempi prolungati. La valutazione di tale lavoro è stata condotta con l'ausilio una scheda valutativa recante gli indicatori di competenze, unitamente a verifiche di conoscenze e abilità specifiche disciplinari di scienze e matematica sui contenuti specifici menzionati nell'articolo.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano gli studenti della classe 1D a.s. 2022-2023 dell'I.C. 66 Martiri di Grugliasco per l'entusiasmo e la serietà con cui hanno partecipato a ogni fase dello studio.

BIBLIOGRAFIA

Avanguardie educative". Linee guida per l'implementazione dell'Idea "Outdoor education" versione 2.0 [2023] - 979-12-80706-54-6.

De Piano Angela, *Apprendimento cooperativo e didattica inclusiva. Dall'integrazione all'inclusione*, Libreria Universitaria (2018).

Myint Swe Khine • Shaljan Areepattamannil, *Steam Education. Theory and practice*. Ed. Springer (2019).

Paola, D.: 2003, Il laboratorio di matematica, Atti XXIII Convegno UMI – CIIM, *L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionali*, pag. 150 -152.

INTELLIGENZA ARTIFICIALE E PROBLEMI DI FISICA E MATEMATICA

Dino Galante¹, Tommaso Marino², Andrea Piccione³, Luca Caffaratti⁴, Francesca Galeno Mellucci⁵

¹IIS Pascal – Giaveno e AIF sez. di Torino, ²IIS Curie-Levi – Collegno e AIF sez. di Torino, ³EFT-USR Piemonte, ⁴IIS Curie-Levi – Collegno, ⁵IIS Curie-Levi – Collegno

dino.gal@gmail.com tommaso.marino@iiscurielevi.it

Abstract: In questo lavoro sono stati sottoposti a una nota Intelligenza Artificiale (in seguito AI) una serie di problemi di fisica e di matematica tradizionalmente assegnati agli studenti della scuola superiore. La scelta dei problemi è stata effettuata seguendo due indirizzi: da un lato essi coprono sia il biennio sia il triennio di un normale corso di fisica (con qualche elemento di matematica del quinto anno), inoltre sono stati pensati in modo da coinvolgere competenze diverse. Per ogni problema presentato saranno indicati: un'introduzione, il testo integrale sottoposto a ChatGPT⁴⁴ e un estratto delle risposte dei relativi prompt di interazione con l'utente (testi in *corsivo*), un commento delle risposte più significative, un'analisi dei punti di forza e di debolezza delle risposte.

Parole-chiave: Intelligenza Artificiale, ChatGPT, Problemi di Fisica, machine learning

INTRODUZIONE

La tecnologia che utilizza dispositivi di assistenza artificiale sta entrando prepotentemente anche nella scuola e nell'insegnamento coinvolgendo docenti e studenti in termini di utilizzatori finali: gli studenti li utilizzano prevalentemente per scopi di ripasso e/o approfondimento ma anche come supporto per svolgere i lavori assegnati dai docenti; i docenti possono trovare un supporto nella loro attività di produzione di mediatori didattici efficaci ed individualizzati.

Diviene quindi fondamentale proseguire una riflessione sulle potenzialità e sui limiti dei diversi dispositivi di assistenza artificiale applicati alla didattica, nella prospettiva di supportare tutti coloro che ne possono trarre vantaggio.

Verranno presentate alcune esperienze di uso di dispositivi di assistenza artificiale in classe, con esercitazioni di machine learning e piattaforme che prevedono l'utilizzo di assistenti artificiali in diverse discipline (Matematica, Fisica, Inglese, Filosofia).

Un'analisi del loro utilizzo e dei principi che stanno alla base di un sistema di AI orientato all'apprendimento costituiscono un'attività fondamentale affinché l'uso di questi dispositivi affianchi e favorisca le potenzialità di apprendere degli studenti. Allo stesso tempo, tali analisi possono contribuire al dibattito educativo e concorrere alla costruzione dell'identità professionale degli insegnanti in termini di educatori, tutor e facilitatori.

In particolare verrà presentato un sistema di AI (basato su scheda Raspberri PI e sw Mycroft che è stato fornito da Agenzia Spaziale Italiana – Progetto Ipazia nell'ambito di una attività che ha voluto presentare agli studenti un sistema di addestramento astronauti.

Verrà anche presentato un sistema di apprendimento che fa riferimento a un dataset di immagini di galassie per esercitazioni di machine learning

⁴⁴Tranne che per l'ultimo problema, essendo il testo eccessivamente lungo.

La zattera galleggia? (ChatGPT 3.5)

In questo semplice esercizio (prima liceo scientifico) l'intelligenza artificiale è alle prese con una zattera di materiale leggero posta in mare. La risoluzione proposta da ChatGPT3.5 risponde bene⁴⁵ alla prima domanda "la zattera galleggia?". Tuttavia nel tentativo di risoluzione della seconda parte vengono commessi più errori, di portata tale da entrare in contraddizione con la prima risposta (corretta) relativa al galleggiamento della zattera. Quando l'utente tenta di indirizzare ChatGPT su una strada corretta vengono comunque commessi altri errori che portano a una mancanza di coerenza con la soluzione proposta nella prima parte del problema. In ultima analisi per uscire dall'impasse ChatGPT dichiara che il problema di calcolare l'entità della parte emersa resta senza soluzione.

User: *Una zattera a forma di parallelepipedo rettangolo avente le dimensioni di base pari a 220 cm e 320 cm alta $h=50$ cm e una massa di 350 kg si trova in mare. Sulla zattera sono sedute tre persona di massa pari a 80 kg(ciascuna). La zattera galleggia? In caso negativo spiega perché, altrimenti calcola di quanti cm emerge dall'acqua.*

ChatGPT: *Per determinare se la zattera galleggia o meno, dobbiamo calcolare il suo volume totale e confrontarlo con la massa totale della zattera e delle persone. Se il volume totale è sufficiente a sostenere la massa totale, allora la zattera galleggia; altrimenti, affonderà. Il volume di un parallelepipedo rettangolo si calcola moltiplicando le dimensioni dei tre lati: base $\times$ altezza $\times$ profondità. Nel nostro caso, la base è di 220 cm, l'altezza è di 50 cm e la profondità (corrispondente alla larghezza) è di 320 cm. Pertanto, il volume della zattera è: $\text{Volume zattera} = 220 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 320 \text{ cm} = 3,520,000 \text{ cm}^3$*

Ora dobbiamo convertire il volume in litri, poiché il sistema metrico solitamente utilizza il litro per misurare il volume degli oggetti: $\text{Volume zattera} = 3,520,000 \text{ cm}^3 = 3,520$ litri

La massa totale della zattera è di 350 kg, e le persone a bordo hanno una massa totale di $3 \times 80 \text{ kg} = 240 \text{ kg}$. Quindi, la massa totale della zattera e delle persone è di $350 \text{ kg} + 240 \text{ kg} = 590 \text{ kg}$. Per determinare se la zattera galleggia, dobbiamo confrontare il volume della zattera con la massa totale. L'acqua ha una densità di 1 g/cm^3 o 1 kg/litro . Quindi, se il volume della zattera è maggiore della massa totale, la zattera galleggerà. In questo caso, il volume della zattera è di 3,520 litri e la massa totale è di 590 kg. Poiché il volume è maggiore della massa, la zattera galleggia. Per calcolare di quanti centimetri la zattera emerge dall'acqua, dobbiamo considerare il principio di Archimede. Secondo questo principio, l'oggetto immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto uguale al peso del fluido spostato. La spinta verso l'alto dipende dal volume dell'oggetto immerso. Dal momento che la zattera galleggia, sappiamo che la spinta verso l'alto è uguale al peso della zattera e delle persone. Possiamo calcolare il peso utilizzando la massa e l'accelerazione di gravità ($9,8 \text{ m/s}^2$):

$\text{Peso totale} = \text{massa totale} \times \text{accelerazione di gravità} = 590 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 5772 \text{ N}$

Poiché il peso è uguale alla spinta verso l'alto, possiamo calcolare il volume dell'oggetto immerso moltiplicando la spinta verso l'alto per la densità dell'acqua (1 kg/litro o 1000 kg/m^3):

$\text{Volume oggetto immerso} = \text{Peso totale} / \text{Densità dell'acqua} = 5772 \text{ N} / 1000 \text{ kg/m}^3 = 5,772 \text{ m}^3$

Ora possiamo calcolare l'altezza dell'oggetto immerso, dividendo il volume per l'area della base:

$\text{Altezza oggetto immerso} = \text{Volume oggetto immerso} / \text{Area della base} = 5,772 \text{ m}^3 / (220 \text{ cm} \times 320 \text{ cm}) = 5,772 \text{ m}^3 / 70400 \text{ cm}^2 = 0,0008208 \text{ m} \approx 0,082 \text{ cm}$

Quindi, la zattera emerge dall'acqua di circa 0,082 cm.

⁴⁵ Nella risoluzione proposta da GPT3.5 non viene presa in considerazione l'acqua di mare in quanto la densità viene posta pari a 1000 kg/m^3

User: sei sicuro dell'ultimo passaggio? stai dividendo metri cubi per centimetri quadrati.

ChatGPT: Mi scuso per l'errore commesso nell'ultimo passaggio. Hai ragione, non posso dividere metri cubi per centimetri quadrati direttamente. Eseguirò nuovamente il calcolo utilizzando le unità di misura corrette. Il volume oggetto immerso è di $5,772 \text{ m}^3$. Dato che stiamo lavorando con centimetri, convertiamo il volume in cm^3 moltiplicando per 1,000,000:

$$\text{Volume oggetto immerso} = 5,772 \text{ m}^3 \times 1,000,000 \text{ cm}^3/\text{m}^3 = 5,772,000 \text{ cm}^3$$

Ora possiamo calcolare l'altezza dell'oggetto immerso, dividendo il volume per l'area della base: $\text{Altezza oggetto immerso} = \text{Volume oggetto immerso} / \text{Area della base} = 5,772,000 \text{ cm}^3 / (220 \text{ cm} \times 320 \text{ cm}) = 5,772,000 \text{ cm}^3 / 70,400 \text{ cm}^2 = 81.9 \text{ cm}$

Quindi, la zattera emerge dall'acqua di circa 81.9 cm.

User: la zattera emerge per 81.9 cm mentre la sua altezza complessiva è di 50 cm. Sei sicuro della tua risposta?

ChatGPT: Mi scuso per l'errore nel calcolo precedente. Effettivamente, se la zattera emerge dall'acqua, significa che il volume dell'oggetto immerso deve essere maggiore del volume della zattera stessa. Pertanto, la mia affermazione precedente era errata. Per calcolare correttamente di quanto la zattera emerge dall'acqua, dobbiamo considerare la differenza tra il volume dell'oggetto immerso e il volume della zattera.

$$\text{Il volume della zattera è: } \text{Volume} = \text{base} \times \text{altezza} \times \text{profondità} = 220 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 320 \text{ cm} = 3,520,000 \text{ cm}^3$$

Supponiamo che la zattera emerga dall'acqua di un'altezza h cm. Quindi, il volume dell'oggetto immerso sarà: $\text{Volume oggetto immerso} = \text{base} \times h \times \text{profondità} = 220 \text{ cm} \times h \times 320 \text{ cm} = 70,400h \text{ cm}^3$ Perché la zattera galleggi, il volume dell'oggetto immerso deve essere maggiore del volume della zattera: $70,400h \text{ cm}^3 > 3,520,000 \text{ cm}^3$

$$\text{Risolvendo l'inequazione, otteniamo: } h > 3,520,000 \text{ cm}^3 / 70,400 \text{ cm}^3 ; h > 50 \text{ cm}$$

Quindi, per garantire che la zattera galleggi, l'altezza di immersione dell'oggetto deve essere superiore a 50 cm. Tuttavia, non è possibile determinare con precisione di quanto la zattera emergerà dall'acqua senza conoscere l'altezza di immersione specifica.

Osservazioni: In base alle risposte fornite da ChatGPT3.5 possiamo osservare che:

- Viene utilizzata la notazione tipicamente anglosassone per il separatore di migliaia, il che potrebbe confondere un po';
- L'idea di fondo, ovvero stabilire il volume della zattera al fine di calcolare la spinta di Archimede, è fondamentalmente corretta ma applicata in maniera concettualmente errata: vengono confrontati litri con kg, tuttavia assumendo che si tratta di acqua il confronto puramente numerico "regge".
- Nel calcolo della parte emersa l'idea è anche in questo caso fondamentalmente corretta: viene calcolato il volume di zattera che "affonda" in base al peso complessivo e alla densità dell'acqua (fluido spostato). Tuttavia vengono commessi due errori fondamentali: 1) sulle unità di misura in quanto vengono confrontati m^3 con cm^2 ; 2) C'è un errore palese nella trasformazione da metri a centimetri;
- Se indirizzata sulla strada giusta gli errori vengono in parte corretti ma ne vengono poi commessi altri di varia natura, fino a portare a risultati palesemente assurdi.

La zattera galleggia? (ChatGPT4.0)

ChatGPT: Per determinare se la zattera galleggia e, in caso affermativo, di quanti cm emerge dall'acqua, possiamo utilizzare il principio di Archimede. Secondo questo principio, un corpo immerso in un fluido sperimenta una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato dal corpo.

1. Calcoliamo prima il volume totale della zattera:

$$V_{zattera} = l \times w \times h \quad V_{zattera} = 220 \text{ cm} \times 320 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \quad V_{zattera} = 3.520.000 \text{ cm}^3 = 3,52 \text{ m}^3$$

2. La massa totale (zattera + persone) è:

$$M_{totale} = M_{zattera} + 3 \times M_{persona} \quad M_{totale} = 350 \text{ kg} + 3 \times 80 \text{ kg} \quad M_{totale} = 350 \text{ kg} + 240 \text{ kg} = 590 \text{ kg}$$

3. Il peso totale è dato dalla formula:

$$P_{totale} = M_{totale} \times g = 590 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 5787,9 \text{ N}$$

4. Ora, calcoliamo il peso dell'acqua spostata (quando la zattera galleggia) usando il principio di Archimede. Il peso dell'acqua spostata sarà uguale al peso totale (zattera + persone).

L'acqua marina ha una densità media di circa: $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$.

$$P_{acqua} = \rho \times g \times V_{immerso} \quad V_{immerso} = \frac{P_{acqua}}{\rho \times g}$$

Poiché $P_{acqua} = P_{totale}$:

$$V_{immerso} = \frac{5787,9 \text{ N}}{1025 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2} \quad V_{immerso} \approx 0,576 \text{ m}^3 \quad V_{immerso} \approx 576.000 \text{ cm}^3$$

5. Ora, per calcolare di quanti cm la zattera emerge dall'acqua, determiniamo l'altezza immersa. Sapendo che l'area di base della zattera è: $220 \text{ cm} \times 320 \text{ cm} = 70.400 \text{ cm}^2$, possiamo determinare l'altezza immersa come:

$$h_{immerso} = \frac{V_{immerso}}{Area_{base}} \quad h_{immerso} = \frac{576.000 \text{ cm}^3}{70.400 \text{ cm}^2} \quad h_{immerso} \approx 8,18 \text{ cm}$$

6. Dato che l'altezza totale della zattera è 50 cm, la parte della zattera che emerge dall'acqua è:

$$h_{emergente} = 50 \text{ cm} - 8,18 \text{ cm} \quad h_{emergente} \approx 41,82 \text{ cm}$$

Pertanto, la zattera galleggia e circa 41,82 cm della sua altezza emergono dall'acqua.

Osservazioni:

- Utilizzo corretto delle formule, prodotte in LaTeX
- Utilizzo del valore “corretto” per la densità dell’acqua del mare (ChatGPT3.5 considerava acqua dolce)
- Risposte sostanzialmente corrette e ben argomentate per entrambi i quesiti contenuti nel problema

Caccia all'errore(ChatGPT 3.5)

In questo tipo di richiesta viene fornito il testo di un problema e viene proposta contestualmente una risoluzione contenente diversi errori: viene richiesto a ChatGPT di individuare gli eventuali errori e proporre una soluzione corretta.

User: Due atleti, Marco e Paolo, fanno una gara su una pista lunga 100 metri. Paolo corre alla velocità media di 18 km/h mentre Marco corre a una velocità media di 22 km/h. Paolo parte con un vantaggio di 20 metri. (A) Chi vince la gara? (B) Con quale distacco sul secondo?

Risoluzione errata(proposta dall'user): *Marco corre alla velocità di 22km/h, ovvero 6.11 m/s, mentre Paolo corre alla velocità di 18 km/h, ovvero 5 m/s. Dalla velocità possiamo ricavare il tempo impiegato da Marco e da Paolo per effettuare la gara: Marco deve percorrere tutti i 100 metri quindi impiega $100/6.11=13.36$ s mentre Paolo, che percorre 20 metri impiega $20/5=4$ s. Quindi Paolo impiega meno tempo, quindi vince la gara. Il suo distacco, come detto nel testo, sarà di 20 metri.*

ChatGPT3.5: *Nella risoluzione del problema sono presenti alcuni errori. Ecco una correzione della risoluzione: Marco corre alla velocità media di 22 km/h, che corrisponde a 6,11 m/s, mentre Paolo corre alla velocità media di 18 km/h, che corrisponde a 5 m/s. Il tempo impiegato da Marco per percorrere la distanza di 100 metri può essere calcolato come $100/6,11 = 16,33$ secondi, arrotondato al centesimo più vicino. Il tempo impiegato da Paolo per percorrere la distanza di 100 metri può essere calcolato come $100/5 = 20$ secondi. Quindi, Marco impiega meno tempo per percorrere la distanza di 100 metri e quindi vince la gara. Il suo distacco dal secondo classificato, Paolo, sarà di $100 - 20 = 80$ metri.*

Osservazioni:

- Non vengono individuati gli errori principali
- C'è un certo grado di “fiducia” in tutto ciò che è dichiarato nel testo del problema
- La soluzione proposta da ChatGPT è sostanzialmente errata

Successivamente, la soluzione (errata) proposta da ChatGPT3.5 viene riproposta alla A.I. stessa per sondare l'eventualità nella ricerca di eventuali errori: l'A.I. mantiene un certo grado di coerenza interna in quanto la soluzione “errata” viene riconosciuta come corretta, come riportato dal prompt di risposta:

ChatGPT 3.5: *Nella risoluzione del problema non sono presenti errori evidenti. La velocità di Paolo viene correttamente convertita da km/h a m/s dividendo per 3,6, e i tempi impiegati da entrambi gli atleti vengono calcolati correttamente. Marco vince la gara perché impiega meno tempo, e il suo distacco dal secondo classificato, Paolo, viene calcolato correttamente come la differenza tra la distanza totale di 100 metri e il vantaggio iniziale di 20 metri di Paolo, quindi $100 - 20 = 80$ metri. La risoluzione del problema sembra essere corretta.*

Caccia all'errore(ChatGPT 4.0)

In questo caso la risposta di ChatGPT è qualitativamente superiore e gli errori presenti nella risoluzione errata proposta vengono individuati, come si vede da alcuni stralci di risposta qui riportati:

ChatGPT4.0: *Calcolo del tempo impiegato da ciascun atleta: Questa è la parte in cui l'errore è evidente. Paolo non deve percorrere solo 20 metri ma 80 metri. [...] Paolo finisce la gara in 16 secondi e Marco in 16.37 secondi. Quindi, Paolo vince effettivamente la gara, ma non con un distacco di 20 metri come detto nella soluzione errata.*

In questo caso il livello di analisi del testo proposto è nettamente più approfondito e non si rilevano errori. Si evidenzia una certa “disinvoltura” nell'individuazione dell'errore macroscopico più grande contenuto nel testo e il resto della risoluzione appare formalmente corretto ed è esposto correttamente con il linguaggio appropriato.

Quattro corpi carichi (ChatGPT 3.5)

Questo problema va risolto in maniera qualitativa, una volta compresa la legge elementare sulla repulsione dei corpi con cariche omonime e sulla loro repulsione nel caso di cariche eteronome.

User: *Prendi in considerazione quattro corpi carichi (1), (2), (3), (4). Essi sono caricati in maniera tale che (4) e (1) si respingono, (2) e (3) si respingono, (3) e (1) si attraggono. Stabilisci e che cosa accade fra i corpi carichi (2) e (1) e fra i corpi carichi (4) e (2).*

Dopo una lunga dissertazione sulla possibile carica dei quattro corpi, ChatGPT3.5 giunge alla seguente conclusione:

ChatGPT3.5: *Per quanto riguarda i corpi (4) e (2), non possiamo stabilire con certezza come interagiscano senza ulteriori informazioni sulla loro carica. È possibile che si attraggano o si respingano a seconda delle cariche dei corpi. In conclusione: I corpi (2) e (1) si respingono. Non possiamo determinare l'interazione tra i corpi (4) e (2) senza informazioni aggiuntive sulla loro carica.*

Quando l'utente segnala a ChatGPT l'errore di valutazione appena commesso: la risposta ottenuta - comunque ancora errata - è la seguente:

User: *sei sicuro che non sia possibile stabilire con certezza se (4) e (2) abbiano la stessa carica o che abbiano carica opposta?*

ChatGPT3.5: *Mi scuso per l'errore nella mia risposta precedente. Hai ragione, possiamo dedurre l'interazione tra i corpi (4) e (2) sulla base delle informazioni fornite. Dato che (4) e (1) si respingono e (2) e (3) si respingono, possiamo concludere che (2) ha la stessa carica di (4). In altre parole, i corpi (2) e (4) hanno la stessa polarità di carica e si respingono a causa delle forze di repulsione elettrostatica. Grazie per avermelo fatto notare, e mi scuso ancora per l'errore nella mia risposta.*

Quattro corpi carichi (ChatGPT 4.0)

Anche in questo caso la risposta ottenuta è sostanzialmente corretta e ben argomentata. Viene riportata per intero:

ChatGPT 4.0: *Cominciamo col determinare la carica dei corpi dati: (4) e (1) si respingono: ciò significa che entrambi hanno cariche dello stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi). (2) e (3) si respingono: anche questi devono avere cariche dello stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi). (3) e (1) si attraggono: ciò significa che hanno cariche opposte. Dalle prime due informazioni, non sappiamo ancora se (1) e (4) sono positivi o negativi e lo stesso vale per (2) e (3). Tuttavia, dalla terza informazione, sappiamo che se (1) è positivo, allora (3) è negativo e viceversa. Senza perdita di generalità, supponiamo che (1) sia positivo. Allora: (1) è positivo; (3) è negativo (perché si attraggono con (1)); (2) è negativo (perché si respinge da (3)); (4) è positivo (perché si respinge da (1)). Riassumendo, avremmo: (1) positivo, (2) negativo, (3) negativo, e (4) positivo. Ora, determiniamo l'interazione tra (2) e (1) e tra (4) e (2): (2) e (1): (2) è negativo e (1) è positivo, quindi si attraggono. (4) e (2): (4) è positivo e (2) è negativo, quindi si attraggono. In conclusione, (2) e (1) si attraggono, e (4) e (2) si attraggono.*

Laboratorio molle (ChatGPT 3.5)

In questa sezione è stato chiesto a ChatGPT di inventare una relazione di laboratorio in base ad alcune informazioni descrittive fornite alla rinfusa da uno studente e ai dati raccolti, anch'essi forniti in maniera "grezza". In questo caso la risposta è stata soddisfacente per entrambe le versioni di ChatGPT.

User: *Riesci a preparare una relazione di laboratorio riferita a un'esperienza di fisica sulla legge di Hooke? L'esperienza è stata questa: Abbiamo avuto a disposizione 2 molle diverse, alcuni pesetti da 10g, altri da 50g, altri da 100g che sono stati via via appesi a una delle molle e tramite un righello graduato abbiamo misurato l'allungamento della molla. Abbiamo ripetuto la stessa procedura per la seconda molla. Per la prima molla abbiamo ottenuto i seguenti dati: abbiamo appeso 20g, misurando un allungamento di 9 mm, poi abbiamo appeso 50g misurando un allungamento di 22mm, poi abbiamo appeso 100g misurando un allungamento di 48 mm, infine abbiamo appeso 150g misurando un allungamento di 76 mm. Per la seconda molla abbiamo ottenuto i seguenti dati: abbiamo appeso 10g, misurando un allungamento di 7 mm, poi abbiamo appeso 30g misurando un allungamento di 22mm, poi abbiamo appeso 100g misurando un allungamento di 81 mm, infine abbiamo appeso 150g misurando un allungamento di 126 mm. Abbiamo poi preparato un grafico in grado di visualizzare la relazione esistente fra forza peso e allungamento della molla. Come prepareresti la relazione di laboratorio?*

La risposta, che qui non riportiamo, rispecchia il classico standard di preparazione di una relazione di laboratorio. In particolare nell'output sono correttamente riportati un titolo dell'esperienza, il suo

obiettivo, l'elenco dei materiali e degli strumenti utilizzati, la procedura e le conclusioni. Non potendo preparare delle immagini, alla data della preparazione di questo lavoro, non è stato riportato un grafico. Tuttavia, se richiesto esplicitamente viene fornita una guida passo passo per la predisposizione di un grafico, comprendendo nella descrizione della procedura la scelta di una scala e di quanto necessario alla produzione corretta di un grafico. Si riporta uno stralcio della discussione:

User: *Ho un foglio di carta formato A4. Quale scala per l'asse x e per l'asse y suggerisci per rappresentare correttamente i punti ?*

ChatGPT: *Per scegliere la scala del grafico in modo efficace, è importante che tutti i punti dati possano essere chiaramente visualizzati sul grafico. Ecco come potresti procedere: Asse delle X (Allungamento in mm): Valore Massimo: 156 mm (il massimo allungamento registrato). Scala: Considerando la lunghezza di un foglio A4 (297 mm), potresti lasciare un po' di spazio per le etichette e usare una scala di 2 mm per ogni quadretto se usi carta millimetrata, o una divisione ogni 20 mm se disegni le divisioni a mano. Asse delle Y (Forza in g): Valore Massimo: 150 g (il massimo peso utilizzato) Scala: L'altezza di un foglio A4 è 210 mm. Lasciando spazio per le etichette, potresti usare una scala di 1 g per ogni quadretto se usi carta millimetrata, o una divisione ogni 10 g o 15 g se disegni le divisioni a mano. Esempio di Scala: Asse X: 2 mm/quadretto o 20 mm/divisione; Asse Y: 1 g/quadretto o 15 g/divisione Questo garantirà che tutti i dati siano rappresentati chiaramente e che vi sia spazio sufficiente per le etichette, i titoli e la legenda. Ricordati di etichettare chiaramente ciascun asse con la variabile rappresentata e la relativa unità di misura.*

Un problema di ottimizzazione (ChatGPT3.5 e 4.0)

In questo problema c'è la classica ricerca di un punto minimo, in questo caso per la funzione “costo” per produrre una scatola. Il comportamento delle due versioni di ChatGPT è simile, per cui le conclusioni sono riportate una sola volta.

User: *Si deve costruire una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata, senza coperchio. Il materiale della base costa 20 centesimi di euro al centimetro quadrato, il materiale con il quale è costruita la superficie laterale costa 40 centesimi al centimetro quadrato. Il volume della scatola è fissato pari a 1000 centimetri cubi. Calcolare le dimensioni della base del parallelepipedo e quanto vale la sua altezza affinché il costo del materiale sia minimo.*

ChatGPT: *Per minimizzare il costo del materiale necessario per costruire la scatola per gioielli, dobbiamo trovare le dimensioni della base del parallelepipedo rettangolo e l'altezza che soddisfano il vincolo del volume fisso di 1000 centimetri cubi e minimizzano il costo totale del materiale.*

Successivamente sono sviluppati i vari passaggi analitici per giungere alla soluzione. In particolare:

- La funzione “Costo” viene parametrizzata correttamente, individuando una sola variabile;
- Viene correttamente impostata la derivata prima e sono individuati gli zeri al fine di trovare eventuali massimi e minimi;
- Tuttavia, non viene posto in discussione il fatto che potremmo trovarci di fronte a un punto di massimo ma viene dato per scontato che si tratti di un punto di minimo.

In definitiva è sostanzialmente svolto in maniera corretta con tutti i passaggi ben commentati e non ci sono differenze sostanziali fra lo svolgimento proposto dalla versione 3.5 e quello dalla versione 4.0.

Un problema d'esame (ChatGPT3.5 e 4.0)

Come ultimo lavoro è stato sottoposto l'intero testo del problema 1 della Prova d'esempio per l'esame del dicembre 2018⁴⁶, il cui testo noi riportiamo per la sua lunghezza eccessiva. L'AI in quest'ultimo caso, forse per l'eccessiva verbosità del testo presentatogli, ha mostrato più punti di debolezza che qui evidenziamo:

⁴⁶Reperibile ad esempio su <https://www.aif.it/p1mf/>

- Alcune parti sono affrontate con una certa disinvoltura e l'abilità dialettica di ChatGPT prende il sopravvento fornendo argomentazioni tutto sommato convincenti ma non rigorosamente corrette;
- Si evidenziano alcuni errori, a volte si tratta di quegli errori che non esiteremmo a descrivere come "errori di distrazione" quando commessi da studenti in carne e ossa!(come evidenziato nella slide precedente sulla distanza da percorrere e sul tipo di moto)
- Alcuni calcoli forniscono, inaspettatamente, risultati diversi dal valore corretto. Se si insiste in qualche modo, richiedendo ad esempio esplicitamente una maggior attenzione all'aspetto che riguarda il calcolo, si ottengono dei miglioramenti sotto questo punto di vista.

CONCLUSIONI

Come evidenziato in questo lavoro, il primo impatto con una rete neurale generativa crea un certo stupore di fronte alle modalità con le quali interagisce con l'utente, correggendo, talvolta, il proprio responso. In questo si differenzia rispetto a una rete neurale "standard": per fare un esempio[1], mentre nel vecchio paradigma la rete neurale avrebbe potuto senz'altro *riconoscere* un volto umano, una rete generativa può *creare* l'immagine di un volto che sembra umano. Sebbene le potenzialità siano notevoli, non solo nella didattica, occorre tuttavia notare che, come evidenziato ad esempio in questo lavoro nel problema della zattera, l'AI può generare soluzioni – ed eventualmente fare nuove scoperte – ma non può *riflettere* sul risultato prodotto. Del resto, come già osservato da Searle [2] una quarantina di anni fa, in rifacendosi alla definizione di *Intelligenza Artificiale forte* da lui proposta, in riferimento alla possibilità di una macchina di superare il test di Turing, egli concluse che anche se una macchina fosse in grado di superare il test non necessariamente potremmo definirla intelligente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Daniel Huttenlocher, Eric Schmidt e Henry Kissinger. *L'era dell'intelligenza artificiale*, Mondadori 2023
- [2] John Searle, *Menti, cervelli e programmi, un dibattito sull'intelligenza artificiale*, CLUP 1984

NUMERI, LEGIONI E SQUADRETTE. LABORATORIO DIDATTICO PER *MISURARE LA REALTÀ*

Monaco Carmine, Zamblera Ferdinando, Giraudi Cristina, Cucchi Osano Maura
Liceo Scientifico “Francesco Vercelli” ASTI
monaco.carmine@scientifico.asti.it

Abstract

L'attività svolta in due classi seconde superiore che qui si presenta costituisce un percorso interdisciplinare trasversale per gli insegnamenti di matematica, storia e arte progettata e realizzata da quattro docenti delle diverse materie presso il Liceo Scientifico “F. Vercelli” di Asti. Una indispensabile introduzione storica sull'organizzazione militare romana consente agli studenti di focalizzarsi sul problema: costruire un accampamento di forma quadrata, a partire dalla relazione con il numero di legioni. Un interrogativo: è possibile realizzarlo di forma quadrata con qualunque numero di legioni? L'attività è principalmente un lavoro di gruppo in cui si cerca di sviluppare l'interdipendenza positiva. La ricerca variata suggerita dalle richieste, inizialmente esplorative e man mano sempre più precise, viene utilizzata come metodo esplorativo e ausilio alla formalizzazione. La fase successiva consiste nella realizzazione in scala su foglio da disegno, con le relative problematiche progettuali che man mano iniziano a sorgere. Infine, con l'ausilio degli insegnanti, presso gli ambienti esterni della scuola è stata realizzata sul campo parte della pianta dell'accampamento, attraverso misurazioni e tracciati reali. Lo scopo della presentazione è duplice: da un lato mostrare come a partire da un *problem posing* matematico sia possibile sviluppare un percorso interdisciplinare e transdisciplinare, dove a fare la differenza sono le competenze degli studenti, come suggerito dalle *Indicazioni Nazionali*. Il secondo obiettivo è mostrare come sia possibile parlare di *tinkering* in secondaria di secondo grado e di utilizzo pratico degli strumenti rilevando le difficoltà della c.d. *Generazione Z*. A conclusione della comunicazione, si propongono i risultati di un questionario di qualità, con feedback, da parte degli studenti.

Parole chiave

Transdisciplinarietà, laboratorio di realtà, ricerca variata, storia sperimentale, disegno tecnico

Progettazione, didattica e azione laboratoriale

Questa realtà laboratoriale precede di un anno scolastico la firma di convenzione come Liceo Matematico del Liceo Scientifico “F. Vercelli” di Asti e prende spunto dall'attività proposta in Ocse-Pisa dal titolo ‘Meli e Pini’⁴⁷, rielaborato e aggiornato per un progetto didattico sperimentale con l'obiettivo di fondere la matematica alla prassi in un contesto transdisciplinare STEAM, coinvolgendo discipline tecniche (quali matematica e disegno tecnico) e umanistiche (come storia e storia dell'arte)

⁴⁷ La genesi del design di queste schede di lavoro è presentata in: Cusi, A., Boasso, I., Gallipoli, S., Robutti, O., Trincherò, G., Mattei, M., Avandero, S. (2018). Matematica inclusiva in classe: il ruolo chiave dei processi di interazione. In C. Catani, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, F. Ricci, A. M. Veste (Eds.), *Atti del XXI Seminario Nazionale Grimed "Fare matematica in relazione"* (pp. 82–91). Quaderni Grimed (4).

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia per favorire negli studenti tanto lo sviluppo di abilità pratiche quanto la «competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare»⁴⁸.

La stessa classe di concorso A-17 (disegno e storia dell'arte) negli istituti di secondo grado mostra bene l'interdipendenza tra aspetti umanistici e scientifici quale solido e strategico punto di forza per la formazione liceale.

Gli studenti coinvolti provengono da tre classi del primo biennio scientifico, la 2A, 2SA e 2SD, per un totale di 74 alunni.

Dopo una prima fase di indispensabile contestualizzazione storica (della durata di circa un'ora) condotta dal professor Zamblera, focalizzata sull'organizzazione e razionalizzazione delle legioni romane, gli studenti hanno affrontato un problema matematico (per la durata di due ore) in cui sono stati calati nella situazione pratica di un *consul* romano a capo di un esercito legionario, il quale - messo di fronte a determinate condizioni - deve realizzare un accampamento tipo atto ad ospitare un numero prestabilito di legioni.

La fase successiva consiste nella realizzazione grafica della geometria di un *castrum* durante le ore di disegno e storia dell'arte della professoressa Cucchi Osano, in cui i ragazzi lavorano (in 4 incontri da due ore circa) alla riproduzione grafica in scala dell'accampamento.

L'ultimo step, con l'impegno di tutti gli studenti e i docenti del progetto in tre ore pomeridiane, consiste nella realizzazione sul campo della pianta perimetrale del *vallum* e delle tende seguendo insieme le fonti storiche e i dati di calcolo affrontati negli incontri precedenti.



Figura 1. Porzione di *castrum* realizzato a scuola: la pista di atletica (sulla sinistra) esposta lungo l'asse est-ovest corrisponde al *decumano*.

⁴⁸ Si tratta della *quinta* tra le otto competenze chiave per l'apprendimento permanente suggerite nella *Raccomandazione europea* del 22 maggio 2018. Cfr. pure il recentissimo Da Re, F. (2024). La quinta delle otto raccomandate dall'Europa: Competenza personale, sociale e capacità a imparare. *Tuttoscuola*, 693 (febbraio), 48–50.

Matematica, inquiry e varying inquiry

La matematica svolge un ruolo centrale nelle attività di tipo STEAM, sicuramente a causa della strutturazione stessa di tali attività, le quali richiedono generalmente un problema di partenza da risolvere e al contempo che gli studenti acquisiscano costruttivamente le competenze necessarie (in un orizzonte di ricerca che guarda oltre la singola disciplina) alla risoluzione del problema stesso.

La ricerca dimostra come l'insegnante stesso di matematica, per l'abitudine a progettare attività centrate sull'indagine (anche grazie ai programmi di formazione SSPM organizzati dall'Università di Torino), svolge un ruolo cardine, di interconnessione, nella progettazione di attività di tipo STEAM, tenendo conto della peculiarità epistemologica della disciplina e del suo ruolo di modellizzazione⁴⁹.

Nello specifico della matematica l'attività didattica è stata svolta dal professor Carmine Monaco nelle classi 2A e 2SA, mentre dalla professoressa Cristina Giraudi in 2SD. Il setting metodologico impiegato con queste classi di indirizzo scientifico consiste in una divisione in gruppi composti da 5 o 6 studenti. La scheda è consegnata ai singoli studenti ed è richiesta una riflessione all'interno del gruppo di lavoro seguita da un confronto intergruppo sulle risposte date e i vari ragionamenti; in questa fase il ruolo dell'insegnante è inizialmente quello di osservatore, per poi fungere da mediatore e moderatore.

Un consul romano decide di costruire un accampamento e si trova a dover calcolare l'area necessaria da dedicarci.

I suoi ingegneri, dopo aver realizzato il cardo e il decumano (larghi circa 3 m), considerano che mediamente in una tenda possono stare 8 soldati.

Ogni tenda, vista dall'alto, è assimilabile ad un quadrato di 3 m per 3.

Tra una tenda e l'altra c'è 1 m di distanza.

Le tende si trovano in 4 complessi simmetrici come in figura, che distano tutti 3 m dal cardo, dal decumano e dal recinto del castrum.

Supponiamo le tende siano un quadrato perfetto e disposte quindi in modo da formare un quadrato.

- 1) Consideriamo un esercito di 20000 soldati. Quante tende saranno necessarie per ospitarli?
Quale sarà l'area occupata da ognuno dei 4 gruppi di tende (considerando anche gli spazi vuoti tra le tende)?
Quale sarà l'area di ogni quadrante?
Quale sarà l'area complessiva dell'accampamento?
Spiegate con parole vostre tutti i procedimenti e ragionamenti necessari per arrivare alla soluzione.
- 2) Sappiamo che ogni legione contiene al suo interno all'incirca 5000 soldati. Sotto le ipotesi che il numero delle tende sia un quadrato perfetto in modo da poterle disporre secondo tale figura geometrica, è possibile determinare l'area dell'accampamento a partire dal numero di soldati?
È possibile farlo a partire dal numero di legioni?
Secondo quali condizioni?
Esprimete anche tutte le possibili riflessioni in merito
- 3) Trova nuovamente, in funzione del numero di legioni N che ospita (secondo le ipotesi considerate precedentemente):
 - a) l'area occupata da ognuno dei 4 gruppi di tende
 - b) l'area di ogni quadrante.
 - c) l'area complessiva dell'accampamento.Trova le stesse aree per un accampamento che ospiti rispettivamente 16, 25 e 36 legioni.

Figura 2. Scheda attività matematica somministrata agli studenti partecipanti

⁴⁹ Vedi di recente Pocalana, G., Bini, G., Robutti, O. (2024), The role of teachers' experiences and beliefs in the conceptualization of mathematics within the design of STEAM activities. Conference: CERME 13 - 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

<https://www.researchgate.net/publication/377555273> The role of teachers' experiences and beliefs in the concept

Le schede somministrate con risposte progressive e l'impostazione laboratoriale seguono la filosofia del metodo *inquiry*, in particolare *varying inquiry*⁵⁰: esso consiste nel proporre una problematica, un quesito, che va progressivamente variato in modo che lo studente rifletta non tanto sulla risposta quanto sul processo e la costruzione di significato, realizzando un ciclo virtuoso di apprendimento a partire da una situazione per giungere a un sistema formale, ad una classe di sistemi formali o una famiglia di situazioni.

Il problema ha richiesto ai ragazzi il passaggio da un sistema formale all'altro, in modo da generalizzare per un numero n di legioni specifico, richiedendo l'uso dei radicali come strumento necessario per il modello.

I radicali non sono più introdotti come platonicamente esistenti in un iperuranio matematico, bensì come un bisogno, uno strumento necessario alla formalizzazione empirica del problema.

a) $\frac{X \cdot 5000}{32} = \text{costo per compressore}$

$\sqrt{\frac{X \cdot 5000}{32}} = \text{costo per tubo}$

$\left(\sqrt{\frac{X \cdot 5000}{32} \cdot 3} + \left(\sqrt{\frac{X \cdot 5000}{32}} - 1 \right) \right) = \text{costo del bene}$

$\left[\sqrt{\frac{X \cdot 5000}{32} \cdot 3} + \left(\sqrt{\frac{X \cdot 5000}{32}} - 1 \right) \right]^2 = A_{\text{compressore}}$

b) $\left[3 \cdot \sqrt{\frac{625X}{4}} + \sqrt{\frac{625X}{4}} - 1 \right]^2 = //$

$\left[4 \sqrt{\frac{625X}{4}} - 1 \right]^2 = //$

$\frac{2500}{4} X - 8 \sqrt{\frac{625X}{4}} + 1 = //$

$\frac{2500X}{4} - 8 \sqrt{\frac{625X}{4}} + 1$

$\frac{2500X}{4} - 4 \cdot 25 \sqrt{X} + 1$

$\left| \frac{2500X}{4} - 100\sqrt{X} + 1 \right| = //$

$X = 10 \text{ Legioni}$

Figura 3. Esempio di produzione scritta da parte degli studenti.

⁵⁰ Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O., Arzarello F. (2023), The Method of Varying Inquiry for Stimulating Learning. In *For the learning of mathematics*, 43(1), 14–18.

Disegno e storia dell'arte: dal progetto su carta alla realizzazione sul campo.

Il contributo di Disegno tecnico e Storia dell'Arte permette di passare, attraverso fasi propedeutiche le une alle altre, da concetti, dati, calcoli e misurazioni astratte, a elementi concreti. In quest'ottica, l'attività ha previsto la realizzazione della planimetria dell'accampamento romano traducendo i calcoli numerici elaborati in matematica su carta. In questa esperienza laboratoriale gli studenti organizzati in coppie hanno rappresentato con diversi livelli di dettaglio e scale l'intero *castrum* e la singola tenda, utilizzando i metodi delle proiezioni ortogonali e assonometria isometrica. Il passo successivo è stato l'utilizzo dei disegni per ricostruire – letteralmente – in campo aperto e in scala 1:1 il tracciato di una porzione dell'accampamento storico, delimitando le aree con l'ausilio di oggetti e materiali di realtà quali picchetti da cantiere, corda e strumenti di misurazione come l'analogico metro a rotella e il più moderno misuratore laser⁵¹. Sfruttando le pavimentazioni della pista di atletica e del marciapiede, tra loro ortogonali, attribuendo loro la funzione rispettivamente del cardo e del decumano, si è avviato il compito di realtà, lasciando gli studenti liberi di sperimentare soluzioni e approcci, di sbagliare e trovare nuove soluzioni. Sono quindi emerse tanto le potenzialità e le attitudini degli studenti, quanto le difficoltà di ordine pratico dettate dall'abitudine in ambiente scolastico di affrontare le argomenti e conoscenze a livello meramente teorico senza toccare con mano la ricaduta di queste nelle situazioni reali. Tra le difficoltà che meritano di essere segnalate in questa sede si rileva la mancanza di capacità di pianificare le fasi del lavoro e di visione d'insieme, la qual cosa ha portato inevitabilmente ad errori di allineamento su lunga distanza (circa 40 metri) sia su linee parallele che perpendicolari.

Risultati del questionario di qualità

I ragazzi sono stati sottoposti ad un questionario relativo alla qualità dell'attività proposta, alle competenze e alle conoscenze acquisite.

I risultati significativi sono stati:

- il 71.9% degli studenti ha reputato utile per l'apprendimento della matematica il percorso interdisciplinare proposto;
- il 96.9% ha trovato un effettivo supporto nel tradurre quanto precedentemente affrontato attraverso la teoria, in storia e matematica, poi nel disegno tecnico e infine realizzato concretamente sul campo.
- il 59.4% reputa complessivamente molto positiva l'esperienza svolta durante l'attività interdisciplinare, il restante 40.6% esprime valutazione positiva.
- l'84.4% si è sentito incuriosito/stimolato durante il progredire delle attività.
- il 96.9% reputa un approccio di questo tipo utile per l'apprendimento anche nelle altre discipline.

Le competenze e abilità che gli allievi sentono di aver acquisito maggiormente sono a) flessibilità/adattabilità; b) capacità di pianificare ed organizzare; c) precisione/attenzione ai dettagli; d) manualità; e) gestire le informazioni; f) capacità di problem solving e team work.

I suggerimenti più interessanti da parte degli studenti sono quelli di inserire queste tipologie di attività laboratoriali anche in orario mattutino; aumentare la durata dei laboratori e il numero degli incontri, e soprattutto coinvolgere più discipline migliorando il coordinamento organizzativo tra i docenti coinvolti.

Metodologia e sapere storico come *misura del mondo*

⁵¹ La Ricerca e l'esperienza indicano come il tipo di attività e l'ambiente di apprendimento influiscono direttamente su processo e livello di attenzione. Proprio l'esperienza sul campo ha permesso agli insegnanti di rilevare nei ragazzi coinvolti una migliore capacità di attenzione, tanto quella selettiva quanto quella sostenuta. Su tali aspetti valga il rimando a Stabulum, F. (2002), *L'Attenzione*, Roma: Carocci, *passim*.

L'intervento di uno storico a questo XI Convegno Nazionale DI.FI.MA. può sembrare a prima vista insolito; ma chi scrive è ben consapevole di come il fondamento per una scuola di qualità passi in modo chiaro attraverso il dialogo costante tra discipline diverse. Questa sede offre l'occasione per un breve richiamo ad un aspetto cruciale ma spesso trascurato in didattica, ovvero la collaborazione attiva tra storici e matematici.

Storia e Matematica possono, ad un occhio superficiale, risultare discipline distanti tra loro. Eppure esse accompagnano i nostri ragazzi lungo tutto il percorso scolastico: dalla primaria di primo grado fino alla secondaria di secondo grado e ciò vale per tutti gli indirizzi liceali, tecnici, professionali⁵². Paradossale dunque che il dialogo tra queste discipline avvenga spesso a fatica, tanto in ambiente accademico quanto nelle aule scolastiche: ciò è dovuto, in prima istanza, alla separazione fatale tra sapere umanistico e sapere scientifico, separazione già problematizzata, tra gli altri, da Ilya Prigogine (premio Nobel per la chimica 1977) il quale affrontando la dicotomia tra le due «culture» ha messo bene in evidenza quanto spesso «gli *scienziati* non leggono Shakespeare e gli *umanisti* restano insensibili alla bellezza della matematica»⁵³. In seconda istanza il dialogo tra questi saperi è reso difficoltoso anche da particolarità e differenza di metodi e obiettivi attraverso i quali Storia e Matematica si avvicinano ai *problemi*. Volendo semplificare al massimo – una semplificazione di comodo e non di valore – diremo che la Matematica, in ossequio al proprio statuto epistemologico, davanti a un problema muove dal presupposto di risolverlo autonomamente, *quantitativamente* e *a-temporalmente*, scartando e confinando la storicità tra le cosiddette “qualità secondarie”. Lo storico posto davanti al problema (quando è disposto a riconoscere la *complessità* del problema stesso) cerca di interpretarlo seguendo inesorabilmente la «freccia del tempo», rintracciando cause, ponendo mente a ricostruire e analizzare le azioni degli uomini, sforzandosi anche di indovinare quali emozioni/aspettative abbiano guidato, in quel determinato contesto, l'agire umano⁵⁴. In tutto questo processo dunque, lo storico *misura* soprattutto *qualitativamente* il problema oggetto della propria ricerca attraverso discipline per lui ausiliarie, affidandosi anche a strumenti di indagine e risultati suggeriti di volta in volta dalle Scienze Sociali ed Umane, dalle Scienze Naturali e dalle Scienze Matematiche.

In proposito lo storico Fernand Braudel scrive:

⁵² Certamente è stata avvertita da tempo l'esigenza di suggerire agli insegnanti della Scuola alcuni possibili percorsi mirati a integrare la Storia agli insegnamenti matematici: un buon esempio in tale direzione è rappresentato dal recentissimo convegno organizzato dal Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Ferrara dal titolo *Matematica e Storia negli insegnamenti matematici* (28 aprile 2023). Eppure, per quanto questi incontri propongano spunti di lavoro stimolanti per i docenti si tratta spesso di appuntamenti “occasionalisti”, ancora avvertiti come “distanti” da troppi insegnanti i quali, imperturbabilmente, persistono nel privilegiare lezioni tradizionali trasmissive, centrate sulla singola materia. Ad alimentare questa tendenza concorrono in parte i percorsi abilitanti (ex SISSE e TFA), ove non contemplino metodologie e laboratori specifici mirati ad allenare la mente dei futuri insegnanti verso una *didattica interdisciplinare*, e a un tempo concorre indirettamente l'editoria specializzata attraverso la proposta dei testi scolastici. Qui in particolare penso ai manuali di matematica, i quali pur offrendo generosi contenuti inerenti la specificità della materia, spesso trascurano fatalmente aspetti interdisciplinari che possono invece stimolare il docente a uscire dal proprio *monadismo didattico* e progettare la lezione arricchendola ad esempio con spunti efficaci di «Storia della Matematica».

⁵³ Prigogine, I. (2003), *Le leggi del caos*. Roma-Bari: Laterza, p. 5. Per approfondire il pensiero filosofico di Prigogine è opportuno il rimando a Giordano, G. (2005), *La filosofia di Ilya Prigogine*. Messina: Armando Siciliano Editore.

⁵⁴ Puntuali coordinate sul problema del “tempo” in chiave scientifica e storica in Giordano, G. (2014), *Freccia del tempo: il battesimo di un nome*. In *Bollettino della Società Filosofica Italiana*, 213, 15–26.

«Lo storico ha voluto prestare attenzione a *tutte* le scienze dell'uomo: ecco quel che conferisce al nostro mestiere strane frontiere e strane curiosità. Così pure non immaginiamo più tra lo storico e lo studioso di scienze sociali le barriere e le differenze di ieri: *tutte* le scienze, ivi compresa la storia, si contaminano tra loro, parlano o possono parlare lo stesso linguaggio»⁵⁵.

Questo perché - insiste Braudel - la Storia non si riduce al mero racconto *quantitativo* di fatti; è semmai spiegazione reale e profonda di avvenimenti e di «strutture sociali» osservate nei loro tempi di vita, studiate nella validità delle loro durate, nella dimensione appunto di *lunga durata*⁵⁶.

È proprio attraverso questa *lunga durata* che la Storia «misura». Intorno alla metà del secolo scorso, Braudel scrisse un libretto metodologico dal titolo *Storia misura del Mondo*. In questa lezione di metodo, la cui fortuna rimane sempre attualissima tra gli addetti ai lavori, l'evento storico viene analizzato quale istante nella «condizione umana» misurabile appunto dalla sua durata nel tempo. Per dirla ancora con le parole di Braudel:

«la Storia non è narrazione di avvenimenti puri e semplici, non è solo una misura dell'uomo, dell'individuo, bensì di *tutti* gli uomini e della realtà della loro vita collettiva»⁵⁷.

Ciò vale per tutte le sfere del Sapere, da quella filosofica a quella scientifica dove gli universi storici della conoscenza raggiungono regolarmente secoli di durata:

«L'universo aristotelico resta incontestato o quasi sino a Galileo, Cartesio e Newton; allora viene meno di fronte ad un universo profondamente geometrizzato che a sua volta crollerà, ma molto più tardi, di fronte alla rivoluzione di Einstein»⁵⁸.

Oggetto della Storia quindi è l'*umanità* intesa nel più ampio significato di ἄνθρωπος, quel genere umano che l'enunciato filosofico di Protagora fa coincidere al «*mètron*», alla *misura* di tutte le cose⁵⁹.

Mettere al centro la *condizione umana* nella sua interezza è proprio uno dei fondamenti del Liceo Matematico, attraverso la costruzione di attività sperimentali interdisciplinari dedicate ad approfondire e a consolidare le conoscenze della matematica anch'essa intesa quale collante culturale tra saperi e discipline diverse. In Filosofia scrive Edgar Morin:

⁵⁵ Questo è l'insegnamento proposto alla metà del secolo scorso dalla scuola storiografica francese delle *Annales*. Cfr. Braudel, F. (1982), *La Storia e le altre scienze sociali*. Roma-Bari: Laterza, p. 166.

⁵⁶ Con il termine «struttura» si intende in Storia “modello”, “organizzazione” e dunque si parlerà di strutture degli Stati, delle economie, delle società, delle religioni, delle civiltà. Mutuando questo termine da un'opera di Roupnel, G. (1943), *Histoire et destin*, Braudel ne ha raffinato e perfezionato il significato storiografico definendo «struttura» un modello che il tempo stenta a logorare: es. la struttura feudale, quella capitalista, o religiosa come ad es. il Cristianesimo. Si veda diffusamente Burke, P. (2019), *Una rivoluzione storiografica. La scuola delle «Annales» (1929-1989)*. Roma-Bari: Laterza.

⁵⁷ Braudel F. (2002), *Storia Misura del Mondo*. Bologna: il Mulino, p. 34. In riferimento ai grandi personaggi della storia scrive: «quei grandi uomini hanno davvero in mano il destino del mondo e il *loro stesso* destino? Sì e no. Molto spesso no, poiché, nel migliore dei casi, la loro funzione si limita a deviare il destino dal suo corso normale per un solo istante, un breve istante se misurato con il metro della storia»; altrove aggiunge «il grande vantaggio di cui gode lo storico rispetto agli altri studiosi è la distanza, un privilegio che gli permette di raggiungere l'essenziale con un margine di errore assai più ridotto», ivi pp. 32 e 48.

⁵⁸ Braudel, *La Storia e altre scienze*, cit., pp. 163–164.

⁵⁹ «πάντων χρημάτων μέτρον ἐστὶν ἄνθρωπος», Protagora, fr. 80 B 1 Diels-Kranz; vedi anche Platone, *Cratilo*, 385.

«l'essere umano è nel contempo fisico, biologico, psichico, culturale, sociale, storico»⁶⁰.

Diventa quindi obiettivo irrinunciabile per una scuola di qualità recuperare e *ri-organizzare* quei saperi dispersi nelle scienze matematiche, nella storia e nell'arte e orientare queste in direzione della globalità e complessità di conoscenze e competenze ponendo strategica attenzione anche agli ambienti deputati all'apprendimento.

Per tornare alla presentazione di oggi, la «struttura» sociale dell'Impero romano è, nel senso braudeliano, fenomeno di lunghissima durata. E così vale per il *castrum* romano che di quella struttura è prodotto: a partire da una soluzione geometrica dei genieri antichi per alloggiare in modo pragmatico le legioni, il *castrum* si evolve presto in razionale proposta urbanistica, funzionale ad una ordinata convivenza civile nelle città, sopravvissuta ben oltre la caduta dell'impero e ancora oggi attualissima, dopo oltre duemila anni. Infatti questo antico schema viene applicato nella organizzazione urbanistica contemporanea. La geometria del *castrum* è ancora oggi simbolo dell'identità latina italica come ben documenta la planimetria realizzata per Expo Milano 2015, dichiaratamente ispirata agli antichi assi viari romani *cardo* e *decumano*.

Indubbiamente i più scettici non mancheranno di notare quanto la Storia abbia un contenuto intrinseco altamente linguistico più che numerico, fortemente centrato alla ricostruzione *verosimile* del passato più che a ciò che è universalmente *vero*⁶¹, ma qui preme sottolineare che le competenze intellettuali umane possono essere mobilitate in vari modi anche nella didattica interdisciplinare includendo il processo linguistico/verosimile (il fatto storico), quello corporeo (la prova sul campo) e il processo matematico/universale (la dimostrazione). Così nella dimensione interdisciplinare la Storia si presta tanto a premessa irrinunciabile quanto a «oggetto matematico»⁶². È questo il senso che il nostro team di ricerca e sviluppo didattico vuole suggerire attraverso questo laboratorio sperimentale e offrire agli studenti ulteriori possibilità di confrontarsi nella complessità della vita reale e della cultura, mettendo insieme teoria e prassi⁶³.

Due occorrenze conclusive:

La prima è rivolta alla Ricerca, la quale ha il potenziale per offrire un contributo decisivo investendo nuove energie nell'orizzonte di senso della *complessità* dei Saperi: si auspica una più stretta collaborazione tra la Scuola e l'Università attraverso progetti concreti per sviluppare Centri Interdipartimentali di Ricerca e Didattica Interdisciplinare (e l'Ateneo torinese ha tutto il potenziale per realizzarli), al fine di supportare percorsi originali di formazione dei nuovi docenti e orientare gli insegnanti già in servizio verso una maggiore partecipazione e apertura ai Saperi. Una proposta in questa direzione potrebbe essere l'istituzione di borse dottorali, post dottorato e assegni di ricerca

⁶⁰ Morin, E. (2023), *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*. Milano: Raffaello Cortina Editore, p. 12 (tit. or. *Les sept savoirs nécessaires à l'éducation du futur*. (1999) Publié par l'Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture (UNESCO). Paris: ©Unesco).

⁶¹ Intorno alla descrizione della «realtà» Braudel in aperta polemica con Immanuel Wallerstein, pensando implicitamente proprio alle *scienze matematiche*, dichiara «Se si potesse ricominciare daccapo la storia, rimettere le cose al punto di partenza e vedere che cosa è realmente successo, la storia diventerebbe una scienza; ma la storia non è una scienza!» in Id. (1988), *Una lezione di Storia*. Torino: Einaudi, cit. p. 127.

⁶² Presentare Numeri, Spazio e Figure, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni anche a partire dagli oggetti è tema cardine in Drivet, A. (2021), *Oggetti matematici. Un diverso approccio alla matematica*. Genzano di Roma: Aracne.

⁶³ Per i più recenti approdi sul rapporto in pedagogia tra teoria e prassi urge il rinvio a Baldacci, M., Colicchi, E. (Eds.), (2016) *Teoria e prassi in Pedagogia. Questioni epistemologiche*. Roma: Carocci, vedi in part. Contesti del rapporto teoria/prassi, pp. 201 ss.

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia *interdipartimentali* dedicati agli «insegnanti-ricercatori» della scuola, attori autentici insieme agli studenti di efficaci azioni pedagogiche innovative⁶⁴.
L'ultima vuole essere un invito rivolto ai matematici, al fine di coinvolgere sempre più i colleghi per gli insegnamenti della Storia e della Filosofia verso una progettazione didattica trasversale e condivisa rammentando a questi colleghi, con entusiasmo, che anche le loro discipline, la Storia e la Filosofia, sono perfettamente in grado di *dare i numeri*.

BIBLIOGRAFIA

- Baldacci, M., Colicchi, E. (Eds.), (2016), *Teoria e prassi in Pedagogia. Questioni epistemologiche*. Carocci.
- Braudel, F. (1982), *La Storia e le altre scienze sociali*. Laterza.
- Id. (1988), *Una lezione di Storia*. Einaudi.
- Id. (2002), *Storia Misura del Mondo*. Il Mulino.
- Burke, P. (2019), *Una rivoluzione storiografica. La scuola delle «Annales» (1929-1989)*. Laterza.
- Cusi, A., Boasso, I., Gallipoli, S., Robutti, O., Trincherò, G., Mattei, M., Avandero, S. (2018). Matematica inclusiva in classe: il ruolo chiave dei processi di interazione. In Cateni C., Fattori C., Imperiale R., Piochi B., Ricci F., Veste, A. M. (Eds.), *Atti del XXI Seminario Nazionale Grimed "Fare matematica in relazione"* (pp. 82—91). Quaderni Grimed (4).
- Coggi, C., Ricchiardi, P. (2005), *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Carocci.
- Da Re, F. (2024): La quinta delle otto raccomandate dall'Europa: Competenza personale, sociale e capacità a imparare. *Tuttoscuola*, 693 (febbraio), 48-50
- Drivet, A. (2021), *Oggetti matematici. Un diverso approccio alla matematica*. Aracne.
- Dutto, M. (2000), La ricerca degli insegnanti: una questione rimossa e una strada da riaprire. In *Quale ricerca per gli IRRE*, IRRSAE.
- Giordano, G. (2005), *La filosofia di Ilya Prigogine*. Armando Siciliano Editore.
- Id. (2014), Freccia del tempo: il battesimo di un nome. In *Bollettino della Società Filosofica Italiana*, 213 (pp. 15—26).
- Giunti, A. (2012), *La scuola come centro di ricerca (Introduzione di Bertagna, G.)*. La Scuola.
- Morin, E. (2023), *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*. Raffaello Cortina Editore.
- Pocalana, G., Bini, G., Robutti, O. (2024), The role of teachers' experiences and beliefs in the conceptualization of mathematics within the design of STEAM activities. Conference: CERME 13 - 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.
- Prigogine, I. (2003), *Le leggi del caos*. Laterza.
- Stablum, F. (2002), *L'Attenzione*. Roma.
- Stenhouse, L. (1977), *Dalla scuola del programma alla scuola del curriculum*. Armando Editore.
- Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O., Arzarello F. (2023). The Method of Varying Inquiry for Stimulating Learning. In *For the learning of mathematics*, 43(1), 14—18.
- Trincherò, R. (2019), Ricerca. In Bertagna, G., Triani, P. (Eds.), *Dizionario di didattica. Concetti e dimensioni operative* (pp. 367—380). Morcelliana.

⁶⁴ Il ruolo strategico dell'«insegnante-ricercatore» nei contesti educativi è stato ben definito da Stenhouse, L. (1977), *Dalla scuola del programma alla scuola del curriculum*. Roma: Armando Editore; più recenti spunti, tra gli altri, in Dutto, M. (2000), La ricerca degli insegnanti: una questione rimossa e una strada da riaprire. In *Quale ricerca per gli IRRE*, IRRSAE Sardegna, Cagliari; Coggi, C., Ricchiardi, P. (2005), *Progettare la ricerca empirica in educazione*. Roma: Carocci; Giunti, A. (2012), *La scuola come centro di ricerca* (Introduzione di Bertagna, G.). Brescia: La Scuola; Trincherò, R. (2019), Ricerca. In Bertagna, G., Triani, P. (Eds.), *Dizionario di didattica. Concetti e dimensioni operative*. Brescia: Morcelliana, Scholé (pp. 367—380).

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO E VELOCITÀ DI REAZIONE. LA VALIDAZIONE DI UN MODELLO SCIENTIFICO.

Enrico Paschetta
ITIS G. Natta, Rivoli (TO)

Abstract

Si propone un classico esperimento di chimica: la valutazione della velocità di reazione. Si usa questo esperimento per ragionare sulle modalità secondo cui si può validare un modello scientifico che si serve di equazioni matematiche. Si propone un semplice metodo per capire se l'equazione scelta rappresenta effettivamente la realtà dei fatti e quali sono i limiti e le condizioni entro cui il modello è valido.

Parole chiave

equazioni di secondo grado, modello matematico, velocità di reazione.

INTRODUZIONE

Nella scuola superiore, specialmente nel primo biennio, vengono spiegate numerose materie, al fine di fornire agli studenti una cultura generale. Questa particolare scelta, certamente utile, porta con sé lo svantaggio di parcellizzare la conoscenza, portando a volte gli insegnanti a sviluppare un programma eccessivamente schematico che non privilegia il ragionamento complesso.

Per quanto riguarda lo studio della chimica, spesso si arriva a spiegare una serie di formule, insegnando agli studenti ad applicare la formula giusta per risolvere ogni problema. Questo approccio però trascurava la cosa più importante: da dove arriva una formula? Qual è il suo campo di applicazione? Perché può essere applicata in un punto e non in un altro?

Spesso infatti gli studenti sono convinti che il mondo e la natura debbano seguire le formule, o in generale che la matematica “comandi” sulla natura, che deve quindi adeguarsi. In realtà, la matematica permette di calcolare, quindi prevedere, i fenomeni naturali, però è utile soltanto quando viene elaborato un modello scientifico e viene stabilito il suo campo di applicazione. Diversamente, si rischia di svolgere calcoli completamente avulsi dalla realtà, sostenendo poi che la natura “non rispetta la formula”. In questo articolo si vuole mostrare come un piccolo esperimento, presente su tutti i libri di testo di chimica, possa essere utilizzato per mostrare il metodo scientifico che c'è dietro alla creazione di un modello. Questo piccolo esperimento lascia poi una domanda aperta, mettendo in evidenza che nulla è mai scontato e automatico se si sanno osservare bene i fenomeni e porre le giuste domande.

PRINCIPI TEORICI

L'esperimento proposto consiste nella misura della velocità di reazione. Data una reazione generica:
 $A+B \rightarrow C+D$

A e B sono i reagenti, C e D sono i prodotti.

Per valutare la velocità di reazione, si deve valutare la velocità secondo cui un reagente scompare oppure quella secondo cui un prodotto compare. Il concetto è lo stesso, la scelta è di tipo tecnico. Se un composto è colorato, sarà facile valutare il suo cambiamento.

Nel caso specifico, si osserva la scomparsa di un reagente, dato che è l'unico composto viola scuro, quindi facilmente visibile, di tutta la reazione considerata.

In questo contesto, la formula che esprime la velocità di reazione è:

$$V = d[A]/dt$$

La velocità è quindi la derivata prima della concentrazione in funzione del tempo. Scrivere [A] con le parentesi quadre indica in chimica la concentrazione.

La velocità dipende da tanti fattori:

1. 1) temperatura,
2. 2) concentrazione dei reagenti,
3. 3) grado di suddivisione,
4. 4) catalizzatori,
5. 5) natura dei reagenti.

In questa trattazione considereremo soltanto la concentrazione, lasciando quindi invariati gli altri parametri.

Dalla letteratura scientifica, si apprende che la velocità di reazione dipende da una formula come quella che segue:

$$V = k[A][B]$$

In questa formula, k è una costante tabulata che riassume tutti i punti a parte il punto 2, si definisce costante specifica di velocità. $[A]$ e $[B]$ sono le concentrazioni dei due reagenti. Risulta evidente che se si cambiano simultaneamente e nello stesso modo le due concentrazioni, la formula diventa un'equazione di secondo grado. Se invece si cambia un parametro alla volta, l'equazione è di primo grado.

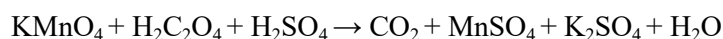
Tenendo presente questo concetto, siamo in grado di capire il ruolo di ogni reagente nello sviluppo complessivo della reazione. Vedendo la formula infatti siamo portati a pensare che ogni reagente abbia lo stesso ruolo nell'influenzare la velocità di reazione. Da un punto di vista matematico, A e B sono semplicemente due incognite, senza caratteristiche particolari che le distinguono. Questa considerazione però può trarre in inganno. Alcune reazioni dipendono dalla concentrazione di un solo reagente. Ad esempio, un elettrodo che reagisce in acqua lo fa più o meno velocemente soltanto in base alla concentrazione del reagente sciolto in acqua, non dipende da quanto materiale è presente nell'elettrodo. In altri casi, se ci sono meccanismi di reazione che coinvolgono più stadi, la concentrazione di un singolo reagente può agire come un parametro di secondo grado, o terzo o superiore.

Per questi motivi, per stabilire se la formula riportata descrive effettivamente il fenomeno, bisogna svolgere delle prove mirate, tabulare i dati e verificare se la teoria rispecchia veramente il fenomeno preso in esame.

SVOLGIMENTO DELL'ESPERIENZA

L'esperienza consiste nel mescolare due soluzioni contenenti ognuna un reagente e nel misurare il tempo in cui scompare il colore viola, lasciando una soluzione trasparente. In questo modo, si misura la velocità media della reazione, non è possibile misurare con questo modo la velocità istantanea.

La reazione considerata è la seguente:



Il colore viola è dovuto al primo reagente: KMnO_4 . I reagenti considerati sono il primo e il secondo.

Prima prova:

Con questa prova, si vuole capire se la variazione simultanea del primo e del secondo reagente porta ad ottenere una parabola, quindi ad avere un'equazione di secondo grado.

La procedura è la seguente:

In un primo becher si mettono 5 ml di soluzione di KMnO_4 con una concentrazione di 0,2 moli/litro. In un secondo becher si mettono 5 ml di soluzione di $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$, acido ossalico, con una concentrazione di 0,5 moli/l

Nello stesso becher, si aggiunge 1 ml di acido solforico concentrato. Queste concentrazioni sono calcolate in modo che i reagenti siano in rapporto stechiometrico, quindi reagiscano completamente tra loro, senza lasciare residui di uno o dell'altro reagente. Si creano 4 coppie di becher come quella appena descritta. Nella prima coppia non si aggiunge niente, nella seconda coppia si aggiungono 5 ml di acqua, nella terza 10 ml, nella quarta 15 ml. In questo modo, si otterranno soluzioni a concentrazione decrescente. Quando tutti gli 8 becher sono pronti, si procede a mescolare ogni coppia di becher, cronometrando il tempo necessario per far scolorire le soluzioni. Le concentrazioni riportate fanno sì che i tempi non siano eccessivamente lunghi, permettendo di svolgere e ripetere l'esperienza in un'ora di lezione. D'altra parte, i tempi non devono essere neanche troppo brevi. Il momento in cui il colore scompare non è facilissimo da individuare, quindi si commette un minimo errore nel valutare quando la soluzione è effettivamente trasparente. Questo errore, se il tempo fosse troppo breve, porterebbe a misure eccessivamente influenzate dal caso o dalla sensibilità dell'operatore.

Seconda prova

Con questa prova si vuole capire se la variazione di un solo reagente porta alla formazione di una retta, dimostrando che effettivamente l'equazione diventa di primo grado.

Si sceglie di variare soltanto la concentrazione del primo reagente. Per farlo, invece di inserire sempre 5 ml di soluzione nel primo becher di ogni coppia, si inseriscono nell'ordine 4 ml di reagente nel primo becher, 3 nel secondo, 2 nel terzo, 1 nel quarto, aggiungendo in ognuno abbastanza acqua per ottenere sempre una soluzione da 5 ml in totale.

Nel secondo becher di ogni coppia, si mettono solo l'acido ossalico e l'acido solforico, senza aggiungere ulteriore acqua.

Anche in questo caso, alla fine si mescolano le soluzioni di ogni coppia di becher e si cronometra fino alla scomparsa del colore.

Problemi operativi.

Per entrambe le prove, vengono evidenziati alcuni problemi operativi che possono condizionare i risultati e confondere l'elaborazione dei dati. Per prima cosa, ci si pone il problema della modalità migliore per mescolare le soluzioni. Banalmente: bisogna rovesciare il primo becher nel secondo o viceversa? La domanda sembra inutile, però osservando attentamente si nota che il becher che contiene l'acido ossalico e l'acido solforico contiene più soluzione rispetto all'altro. Per forza di cose, quando una soluzione viene travasata lascia nel becher alcune gocce. Per questo motivo, travasare il becher con più soluzione in quello con meno soluzione crea un minor errore nelle misure, dato che le gocce 'lasciate indietro' rappresentano una percentuale minore se la quantità di soluzione trasferita è maggiore.

In secondo luogo, bisogna stabilire se conviene mescolare attivamente le soluzioni, con una bacchetta o un cucchiaino, oppure no. Non c'è una regola precisa, però bisogna considerare che è necessario lavorare in modo strettamente ripetibile, quindi inserire nell'esperimento un'altra variabile legata all'azione di mescolamento può portare a complicare la prova.

Un terzo problema operativo è rappresentato dal fatto che l'acido solforico, quando si mescola con l'acqua, scalda la soluzione. Per questo motivo, bisogna attendere che tutte le soluzioni tornino a temperatura ambiente prima di procedere, altrimenti si introduce un'altra variabile, la temperatura, che non viene controllata dal protocollo sperimentale.

ELABORAZIONE DEI DATI

Per la prima prova, i risultati sono quelli mostrati in tabella 1.

Tabella 1

concentrazione (mol/l)	tempo (s)
0,45	45
0,31	65
0,23	90
0,19	116

Si vede chiaramente che allo scendere della concentrazione corrisponde un tempo crescente. Nell'elaborazione dei dati, bisogna però considerare che le soluzioni partono tutte da concentrazioni diverse, per questo confrontare soltanto i tempi di decolorazione non è indicativo. Si sceglie quindi di confrontare i rapporti tra concentrazione e tempo, usando questo come indicatore della velocità di reazione.

Il risultato è quello riportato nella tabella 2.

Con i dati della tabella, è possibile ottenere il grafico. Come si vede dalla figura 1, il grafico rappresenta una parabola, dimostrando quindi che la velocità di reazione dipende dalla variazione dei reagenti seguendo un'equazione di secondo grado.

Tabella 2

Concentrazione	C/t
0,45	0,0101
0,31	0,0048
0,23	0,0026
0,19	0,0016

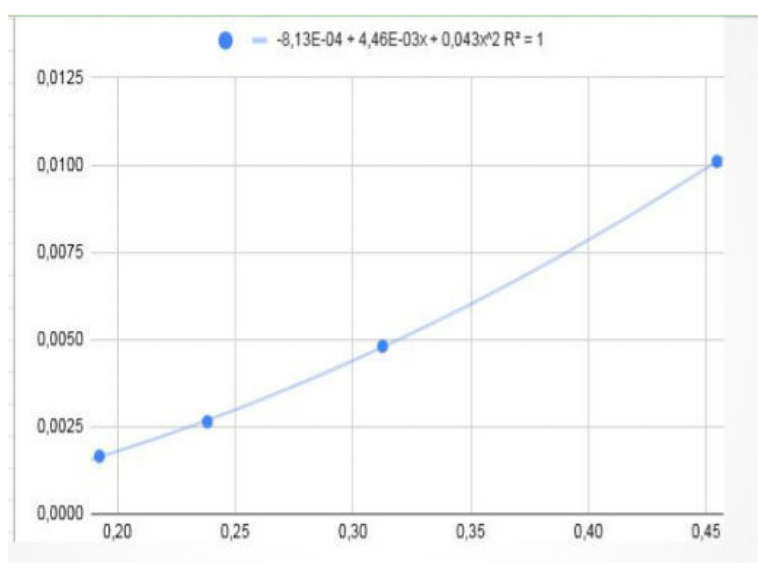


Figura 1

L'elaborazione del grafico porta con sé alcune osservazioni importanti.

Per prima cosa, è noto che la parabola è una figura simmetrica. Per questo motivo, se si seguisse l'equazione in ogni suo punto si dovrebbe dedurre che a concentrazioni molto basse la velocità di reazione dovrebbe risalire, una volta superato il vertice della parabola. Dal punto di vista chimico, questo è ovviamente impossibile.

Per seconda cosa, matematicamente una parabola può occupare anche l'area del piano cartesiano in cui sono presenti i valori delle ascisse negativi. Questa cosa non è possibile se si parla di concentrazioni, chiaramente non esistono concentrazioni negative.

Queste due considerazioni portano a capire che il modello matematico adottato è utilizzabile solo in un intervallo di dati. Dentro quell'intervallo è affidabile e porta a prevedere e calcolare i risultati corretti, però se viene applicato fuori da quell'intervallo porta a conclusioni assurde.

Per la seconda prova, i risultati ottenuti sono mostrati nella figura 2.

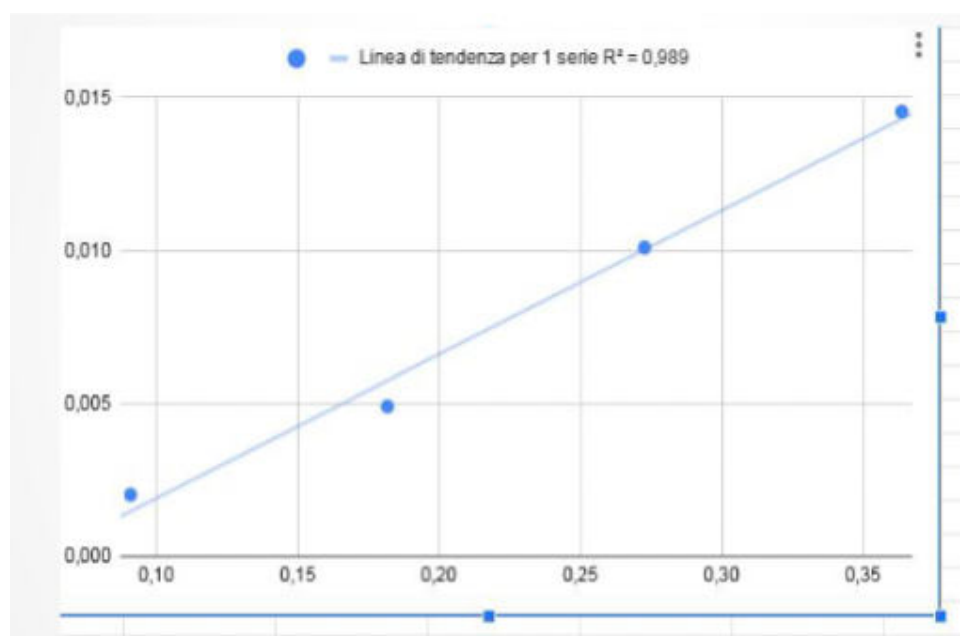


Figura 2

Dal grafico si nota una certa linearità, quindi si dimostra che il cambiamento di una sola delle due concentrazioni agisce secondo un'equazione di primo grado, del tipo:

$$V = K'[B]$$

Dove K' rappresenta la costante specifica di velocità moltiplicata per la concentrazione di A, che in questo caso è anch'essa una costante. Dato che la prima prova ha dimostrato che la variazione di entrambe le concentrazioni porta ad un'equazione di secondo grado e la seconda prova ha dimostrato che cambiare una sola equazione porta ad un'equazione di primo grado, si può dedurre che la formula scelta inizialmente per rappresentare il modello della velocità di reazione sia effettivamente quella giusta.

CONCLUSIONI

Da questo esperimento possiamo ottenere le seguenti conclusioni. Per prima cosa, si è mostrato che un modello matematico può rappresentare un fenomeno scientifico solo se sono ben definite tutte le condizioni. Non è quindi logico semplicemente utilizzare una formula

in modo acritico, senza considerare se è applicabile in una situazione specifica, in quanto si rischia di ottenere un risultato matematicamente corretto ma non corrispondente alla realtà dei fatti. In secondo luogo, l'esperimento ha dimostrato che il cambiamento simultaneo delle due concentrazioni fa sì che la velocità di reazione vari secondo un'equazione di secondo grado. Il cambiamento di una sola concentrazione fa variare invece la velocità di reazione secondo un'equazione di primo grado, dimostrando che l'equazione scelta inizialmente per rappresentare il fenomeno è corretta.

In ultima istanza, si può notare che per condurre un esperimento scientifico in maniera appropriata bisogna saper porsi le giuste domande e saper osservare in modo adeguato per avere delle risposte corrette.

GALILEO CON ARDUINO: APPROCCIO STEM A UN'ESPERIMENTO SCIENTIFICO STORICO

Matteo Torre, Alessandro Davico
Liceo Scientifico “G. Peano”, Tortona (AL), Italy
matteo.torre1984@gmail.com

Abstract

Gli esperimenti di Galileo sono ancora oggi esempi affascinanti di come funziona il metodo scientifico. Nonostante ciò ci sono stati (e forse ci sono ancora?) scienziati e storici che sostengono che Galileo non abbia fatto esperimenti. Durante l'a.s. 2022-23 in una classe 3 Liceo Scientifico, affrontando il tema della fisica classica e lo studio delle varie opere di Galileo Galilei è stato proposto l'analisi di un fondamentale esperimento di Galileo sul moto parabolico e la sua rielaborazione in chiave moderna attraverso l'uso di Arduino. Nel 1607 Galileo ritorna ai problemi del moto con un manoscritto (Folio 116v) in cui riporta i risultati sperimentali la cui interpretazione è del massimo interesse: Galileo suppone che la velocità è una quantità variabile con continuità e proporzionale al tempo e asserisce che le velocità dei corpi che cadono da una certa altezza sono nello stesso rapporto che le radici quadrate delle distanze percorse. Questo risultato sarà uno dei fondamenti della fisica classica. Il dispositivo sperimentale utilizzato da Galileo, e ricostruito in maniera automatizzata con Arduino da un gruppo di alunni, era probabilmente il seguente: un piano inclinato di circa 30° posto ad un'altezza di 828 punti (77,7 cm) rispetto al piano di riferimento. Tale altezza consente di avere, per una caduta sul piano inclinato da un'altezza di 300 punti, una gittata di 800 punti. I tentativi di alcuni lanci e i loro risultati sono contrassegnati sul manoscritto sia da un valore calcolato (“*doveria*”) sia da un valore misurato, sintomo inequivocabile che l'esperimento è stato svolto dallo stesso Galileo. L'analisi e lo studio di questa fonte originale ha consentito agli alunni di rivivere uno momenti chiave della storia della scienza e della nascita del metodo sperimentale attraverso le opere di una figura chiave della scienza, impossibile da ignorare ed estromettere da qualsiasi percorso liceale degno di tale nome.

Parole-chiave

Galileo Galilei, Storia della scienza, Laboratorio STEM, Arduino

INTRODUZIONE

L'insegnamento della fisica tramite esclusivamente i libri di testo o esperimenti “tradizionali” si riduce spesso alla sola trasmissione dei risultati trovati e accettati dalla comunità scientifica. Con questo modo di procedere, l'aspetto più importante della scienza, la ricerca, viene completamente ignorato. La storia della scienza può costituire un utile correttivo: la lettura degli articoli originali e la ricostruzione di esperienze così come sono state storicamente effettuate ci mostra concretamente come sono stati affrontati e risolti complessi problemi, talvolta seguendo linee di ricerca contrapposte. Il conoscere i contesti storico-culturali e le motivazioni dei dibattiti scientifici stimola inoltre, a mio giudizio, l'entusiasmo negli studenti verso l'apprendimento della scienza. La presentazione di questo percorso didattico su un “caso storico” delle opere di Galileo, che utilizza la lettura e il commento puntuale di memorie originali sia teoriche che sperimentali, non ha la presunzione di offrire nuove interpretazioni ma vuole far comprendere come l'analisi dei testi originali unita ai recenti risultati della ricerca in didattica della fisica possa costituire una valida alternativa alle “tradizionali” pratiche di classe, ancora troppo utilizzate nella scuola secondaria di secondo grado. Molte difficoltà incontrate dagli studenti nell'apprendimento della meccanica sono, infatti, dovute perlopiù a preconcezioni di senso comune che compaiono anche nelle opere dei filosofi della natura pregalileiani. Affrontare il dibattito scientifico che

ha caratterizzato il periodo di transizione tra la fisica aristotelica e quella newtoniana potrebbe, quindi, aiutare a far emergere negli studenti tali preconcezioni e a confutarli efficacemente tramite l'uso del laboratorio e della riproduzione sperimentale di "casi storici". Per provare a lavorare in questa direzione, durante l'anno scolastico 2022-23 in una III Liceo Scientifico (composta da 25 studenti, 9 femmine e 16 maschi), ho affrontato il tema del moto parabolico e di un proiettile lanciato orizzontalmente esaminando alcuni scritti originali di Galileo Galilei che non solo testimoniano come lo stesso Galileo abbia davvero svolto esperimenti, ma fanno emergere questioni logiche ed epistemologiche importanti perché la soluzione proposta da Galileo rappresenta uno dei primissimi esempi di uso cosciente del principio di sovrapposizione. Il progetto didattico ha avuto una durata complessiva di 7 ore curriculari durante le quali si sono alternati momenti di spiegazione e riflessione collettiva e momenti laboratoriali in cui alcuni studenti hanno ricostruito un apparato sperimentale sul moto parabolico con materiali poveri, mentre un altro gruppo ha rielaborato l'esperimento descritto nel Folio 116v arricchendolo di un'interpretazione moderna tramite l'utilizzo di Arduino. Nel seguito descriverò il percorso didattico e le fasi laboratoriali, riportando alcuni dettagli delle fasi costruttive così da rendere riproducibile l'esperienza da parte del lettore interessato.

IL PERCORSO DIDATTICO

Successivamente alla parte storica, il percorso didattico è proseguito in classe con la seguente scansione oraria: presentazione teorica del moto parabolico e del lancio orizzontale di un proiettile (2 ore curriculari); discussione dei contributi di Stillman Drake su Galileo, risultato fondamentale della ricerca storiografica contemporanea, e analisi di alcuni scritti originali di Galileo (2 ore curriculari); costruzione di alcuni esperimenti sul moto parabolico e sul lancio orizzontale di un proiettile con materiali poveri e con l'uso di Arduino (svolta in orario pomeridiano); presentazione alla classe da parte dei vari gruppi degli esperimenti con commento critico sul processo costruttivo (1 ora curriculare).

Le ore dedicate alla costruzione dei vari esperimenti, seppur siano state svolte in orario pomeridiano, sono state supervisionate tramite videochiamata: in alcuni momenti della fase costruttiva i vari gruppi hanno approntato un Meet in cui mi illustravano i loro progressi e io davo loro eventuali consigli per migliorare o implementare i loro esperimenti. Questa prassi, oltre che per responsabilizzare i vari gruppi, è risultata decisiva per capire il grado di comprensione dell'argomento da parte dei vari studenti.

Nel seguito descriverò le varie fasi del percorso didattico, omettendo la descrizione teorica del moto parabolico e del lancio orizzontale di un proiettile poiché il lettore può facilmente reperirle in un qualsiasi libro di testo per la scuola secondaria di secondo grado e nel testo citato in bibliografia.

La discussione in classe sui contributi di Drake relativi agli esperimenti di Galileo è stata molto apprezzata dagli studenti perché è servita loro per capire meglio sia gli aspetti teorici, sia la profondità degli esperimenti di Galileo che hanno poi sfruttato quando sono diventati loro stessi dei "moderni Galilei". Prima di Galileo, infatti, sono stati scritti molti volumi sul moto da studiosi che non avevano mai misurato realmente nessun movimento di corpi in caduta. Dopo Galileo, eseguire misurazioni con grande cura e assoggettare i risultati all'analisi matematica divennero l'attività principale degli scienziati. Fino agli anni '70 del XX secolo, in assenza di documenti su ciò che egli aveva fatto, gli storici della scienza che scrivevano su Galileo potevano unicamente speculare su ciò che aveva detto nei suoi ben noti scritti. Il più influente di questi storici, Alexandre Koyré, concluse che Galileo non aveva fatto nulla, se non con il cannocchiale; per il resto, inclusa tutta la sua fisica, aveva soltanto pensato. Koyré non biasimava Galileo per questo, anzi considerava ciò come il massimo contributo di Galileo alla scienza. Pensare matematicamente intorno ai fenomeni fisici andava contro il carattere aristotelico e Koyré attribuiva a Galileo il merito di aver posto la fisica sulla "giusta strada", segnata a suo tempo da Platone. Allo stesso tempo, Koyré credeva di aver dimostrato che Galileo non poteva aver misurato i movimenti concreti così accuratamente da poter arrivare alla legge della caduta dei gravi. Drake dimostra, tramite un'accurata analisi linguistica e scientifica degli appunti di Galileo, che egli giunse alla legge dei quadrati dei tempi agli inizi del 1604 scoprendo dapprima la legge del pendolo, mettendola in relazione con la caduta dei gravi e alla proporzionalità tra la velocità e la radice quadrata

delle verticali dall'origine. Tutti questi principi furono messi alla prova congiuntamente da nuovi esperimenti, come mostrato dal Folio 116v, documento chiave per il nostro percorso didattico.

Dopo una parentesi dedicata a problemi di astronomia, nel 1607 Galileo ritorna ai problemi del moto. È di questo periodo un manoscritto (Fig. 1) che presenta dei risultati sperimentali la cui interpretazione è del massimo interesse: Galileo suppone che la velocità è una quantità proporzionale al tempo e asserisce che le velocità dei corpi che cadono da una certa altezza sono nello stesso rapporto che le radici quadrate delle distanze percorse.

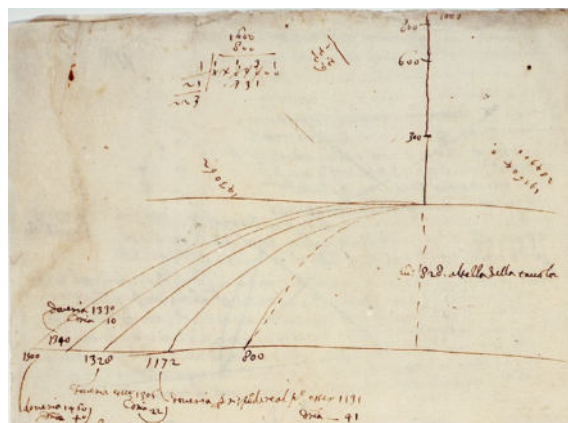


Figura 1. Folio 116v, vol. 72, mss galileiani, Biblioteca Nazionale Firenze

Giunti a questo risultato, fondamentale per la fisica classica, si è scelto di analizzare il manoscritto, suggerendo agli studenti un primo possibile sviluppo pratico-laboratoriale. Il Folio 116v si può interpretare nel modo seguente: una pallina viene fatta rotolare su un piano inclinato a partire da altezze H differenti. L'estremità inferiore del piano è curvata "a trampolino" per trasmettere alla pallina lungo una direzione orizzontale la velocità acquisita nel moto di caduta lungo il piano inclinato. La pallina inizia quindi un moto di caduta libera da un'altezza prefissata con velocità iniziale orizzontale. Si ottiene così la composizione di un moto verticale e di un moto orizzontale e si può misurare la distanza D (gittata) percorsa in direzione orizzontale tra l'istante di stacco e l'istante di impatto della pallina con il piano di riferimento. Come prima suggestione è stato chiesto a un gruppo di studenti di verificare che la gittata è proporzionale al valore della velocità orizzontale iniziale, verificando anche così che la velocità di caduta di una biglia lungo il piano inclinato è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza del piano inclinato. Per verificare quanto detto, è stata suggerita la costruzione di un trampolino di lancio agganciato a un sostegno che permette di variare l'altezza h rispetto al piano d'appoggio (Fig. 2). La successiva presentazione in classe di questo esperimento e la discussione sui risultati ottenuti è stata di importanza chiave per fissare ancora una volta quanto già detto nella lezione teorica sul moto parabolico sul principio di composizione dei moti. Infatti, se lasciamo cadere una biglia dal punto più alto del piano inclinato (si veda Fig. 2), essa acquista a fine corsa la stessa velocità orizzontale v_0 in ogni lancio e quindi la gittata ($x = v_0 \cdot t$) può essere utilizzata per misurare il tempo di caduta verticale dall'altezza h . Dall'analisi dei risultati ottenuti dagli studenti si vede, con discreta precisione, che la gittata x è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza h del trampolino. Un secondo esperimento, svolto da un altro gruppo di studenti, che utilizza sempre il trampolino descritto in precedenza (Fig. 2) per valutare il legame tra la posizione di partenza della pallina e la velocità al termine del piano inclinato. Al gruppo è stato chiesto di fissare il trampolino a un'altezza H dal piano d'appoggio e di lasciare cadere la biglia da diverse posizioni lungo il trampolino. Tenendo fissa l'altezza del trampolino il tempo di caduta verticale sarà sempre lo stesso. Agli studenti è stato quindi chiesto di verificare la proporzionalità tra la gittata e la velocità raggiunta dalla biglia al termine della discesa lungo il trampolino e di confermare tale predizione al variare dell'altezza H del trampolino e al variare del punto di partenza della biglia. Gli studenti hanno inoltre determinato, con la notazione moderna, la velocità di uscita della biglia dal

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
trampolino e verificato con un altro trampolino di diversa inclinazione che essa, a parità di altezza di caduta, non dipende dall'inclinazione.

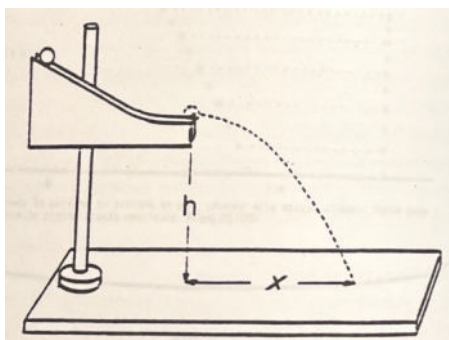


Figura 2. Trampolino mobile per esperienza di laboratorio

L'attenzione del gruppo classe è poi stata posta sull'analisi delle parabole di caduta riportate sul manoscritto di Galileo (Fig. 1) ed è stata proposta loro la duplice interpretazione che Drake suggerisce in merito ai dati riportati sul Folio 116v: i dati riportati potevano servire a Galileo per verificare l'ipotesi di un moto rettilineo uniforme in assenza di attriti, cioè di un moto inerziale; oppure l'esperimento poteva essere stato un tentativo di verificare il principio di composizione dei moti, grande novità concettuale rispetto alla fisica aristotelica. È stato chiesto a un gruppo di studenti di usare i dati del manoscritto per ripercorrere le tappe storiche dell'esperimento di Galileo, usando lo stesso trampolino (Fig. 2) e la trascrizione del Folio 116v ad opera di S. Drake (Fig. 3). In particolare, secondo le ricerche storiografiche di Drake, il dispositivo sperimentale utilizzato da Galileo era probabilmente simile al nostro (Fig. 2) e avente un piano inclinato di circa 30° posto ad un'altezza di 828 punti (77,7 cm) rispetto al piano di appoggio. Sul Folio 116v Galileo aveva tracciato due rette orizzontali che rappresentavano il suolo e la superficie di una tavola. Sopra la tavola, lungo una linea verticale, segnò le altezze di 300, 600, 800 e 1000 punti. Dall'estremità della tavola al suolo disegnò delle curve rappresentanti le traiettorie di una biglia, indicando il valore sia calcolato che misurato della gittata per ciascuna altezza. Ad eccezione del lancio dall'altezza di 300 punti (di gittata 800 punti), gli altri dati sono contrassegnati sul manoscritto dall'annotazione "doveria" (avrebbe dovuto essere), che per Drake è sinonimo inequivocabile che Galileo abbia dapprima calcolato e poi misurato, ovvero che Galileo abbia realmente svolto l'esperimento rappresentato nel Folio 116v. Gli studenti hanno provato a realizzare l'esperimento assegnando il valore di 9,38 cm al punto di Galileo, così come sostenuto da Drake.

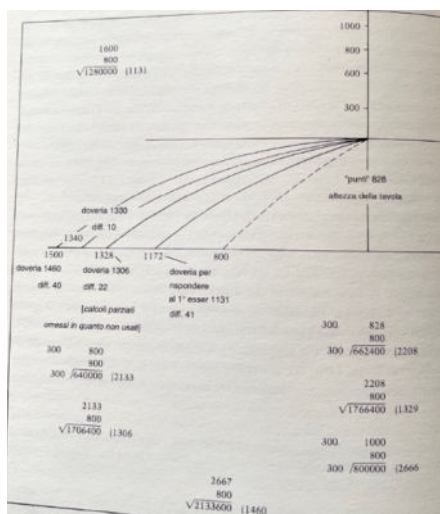


Figura 3. Trampolino mobile per esperienza di laboratorio

Al quarto ed ultimo gruppo è stata assegnata lo studio della composizione dei moti e la loro verifica laboratoriale tramite la costruzione di altri trampolini che permettono di mostrare l'indipendenza del moto di caduta libera dal moto orizzontale e viceversa, nonché il moto parabolico come la composizione di questi due moti (Fig. 4). Per mostrare che la componente orizzontale è indipendente da quella verticale si usa il dispositivo di destra in Fig. 4: si lasciano cadere due biglie nello stesso istante dal punto più alto di due guide inclinate identiche; dopo un tratto orizzontale, una biglia inizia la caduta mentre l'altra prosegue il suo moto lungo un prolungamento orizzontale della guida. Entrambe le biglie hanno la possibilità di urtare contro un piano verticale che può essere spostato a distanze diverse dal punto in cui una delle biglie abbandona la guida. Nei vari tentativi realizzati dagli studenti per differenti posizioni del piano verticale, si è percepito un unico colpo per l'arrivo delle biglie contro la parete verticale. Gli studenti hanno quindi potuto dedurre che le biglie, pur percorrendo traiettorie differenti impiegano lo stesso tempo e si spostano in direzione orizzontale con la stessa velocità, fatto che è stato poi anche ribadito dal gruppo durante la presentazione in classe dell'esperimento e che personalmente considero didatticamente centrale per la piena comprensione del moto parabolico.

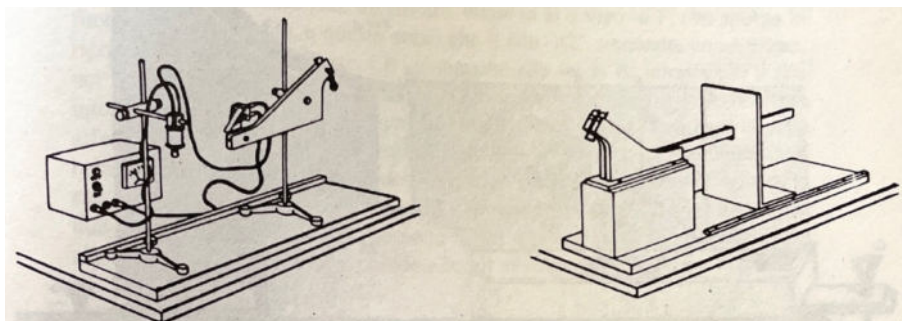


Figura 4. Apparato per lo studio del principio di composizione dei moti

Analogamente, per mostrare che la componente verticale del moto è indipendente da quella orizzontale il gruppo ha utilizzato il dispositivo di sinistra in Figura 4: la biglia di cui si studia il moto mentre esce dal tratto orizzontale disattiva un'elettrocalamita che tiene sospesa una seconda biglia alla stessa altezza cosicché entrambe inizino la loro caduta nello stesso istante. Nei vari tentativi realizzati dagli studenti essi hanno percepito un unico colpo per l'arrivo delle biglie sul piano orizzontale. Questo gruppo di studenti, unendo le forze con altri compagni di classe, ha fatto un passo in più e ha realizzato un dispositivo che combinava i due disegnati in Fig. 4 in un unico solo aggiungendo ad esso l'automazione tramite Arduino. Di questa evoluzione tecnico-pratica parlerò nel prossimo paragrafo. Concludo riportando le fonti storiche lette e discusse in classe a proposito della composizione dei moti. Siamo partiti dai *Discorsi*:

Immagino di avere un mobile lanciato su un piano orizzontale, rimosso ogni impedimento: già sappiamo, per quello che abbiamo detto più diffusamente altrove, che il suo moto si svolgerà equabile e perpetuo sul medesimo piano, qualora questo si estenda all'infinito; se invece intendiamo [questo piano] limitato e posto in alto, il mobile, che immagino dotato di gravità, giunto all'estremo del piano e continuando la sua corsa, aggiungerà al precedente movimento equabile e indelebile quella propensione all'ingiù dovuta alla propria gravità: ne nasce un moto composto di un moto orizzontale equabile [uniforme] e di un moto deorsum [verso il basso] naturalmente accelerato, il quale [... moto composto] descrive una linea semiparabolica.

L'indipendenza del moto uniformemente accelerato di caduta libera dal moto orizzontale uniforme viene illustrato da Galileo nel *Dialogo* con un'esperienza successivamente realizzata con successo dai membri dell'Accademia del Cimento dalla torre del porto di Livorno:

[...] quando in cima di una torre fusse una colubrina livellata, e con essa si tirassero tiri di punto bianco, cioè paralleli all'orizzonte, per poca o molta carica che si desse al pezzo, si che la palla andasse a cedere ora lontana mille braccia, or quattro mila, or sei mila, or dieci mila, etc., tutti questi tiri si spenderebbero in tempi eguali tra di loro, e ciascheduno eguale al tempo che la palla consumerebbe a venir dalla bocca del pezzo sino a terra, lasciata, senz'altro impulso, cadere semplicemente giù a perpendicolo. Or par meravigliosa cosa che nell'istesso breve tempo della caduta a piombo sino in terra dall'altezza, verbigrazia, di cento braccia, possa la medesima palla, cacciata dal fuoco, passare or quattrocento, or mille, or quattromila, ed or diecimila braccia, si che la palla in tutti i tiri di punto bianco [cioè orizzontali] si trattenga sempre in aria per tempi eguali. SALV. La considerazione per la sua novità è bellissima, e quando l'effetto sia vero, è meraviglioso: e della sua verità io non ne dubito; e quando si lasciassero cadere un'altra dalla medesima altezza giù a piombo, ambedue arriverebbero in terra nel medesimo istante, ancorché quella avesse camminato diecimila braccia di distanza, e questa cento solamente intendendo che il piano della Terra fusse eguale, che per sicurezza si potrebbe tirare sopra qualche lago.

ARDUINO: UN NUOVO APPROCCIO LABORATORIALE

Come detto nel precedente paragrafo, il quarto gruppo ha implementato i due dispositivi sperimentali (Fig. 4) unificandoli in un unico dispositivo e inserendo un'automazione con l'uso di Arduino (Fig. 5). Arduino è una piattaforma hardware composta da una scheda elettronica dotata di un microcontrollore e di una serie di connessioni per poter comunicare con l'esterno, ideata e sviluppata nel 2003 da alcuni membri del Interaction Design Institute di Ivrea. Proprio grazie ai microcontrollori si può realizzare con Arduino una vasta gamma di progetti, come ad esempio raccogliere dati provenienti da dispositivi (sensori di temperatura, di movimento, di luce), pilotare motori elettrici o trasduttori di altro tipo, il tutto attraverso un ambiente di sviluppo integrato (IDE) che utilizza un linguaggio di programmazione semplificato (molto simile al C++) appositamente creato per Arduino.



Figura 5. Apparato per lo studio della composizione dei moti con Arduino

Il gruppo di studenti ha voluto sfruttare le numerose potenzialità e individualità presenti nella classe per realizzare un dispositivo in grado di unire in un unico artefatto tutti gli esperimenti del progetto in maniera automatica usando Arduino (Fig. 6), scrivendo un programma in grado di calcolare teoricamente le gittate (per poi confrontarle con i risultati sperimentali) e riprodurre la situazione descritta da Galileo

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia nel Folio 116v. Posso ritenermi indubbiamente molto soddisfatto di avere il piacere di lavorare in una classe così didatticamente stimolante e, quando ho appreso della volontà di tale gruppo di realizzare un qualcosa di nuovo, ho incentivato e supportato i ragazzi nella realizzazione del dispositivo perché esso è in grado di coniugare la storia della scienza con le nuove tecnologie, binomio che reputo fecondo e didatticamente molto efficace.

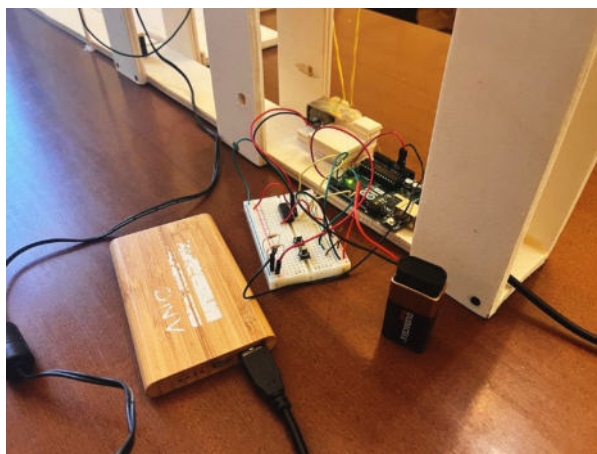


Figura 6. Scheda Arduino per il controllo automatico dell'inclinazione e dell'altezza di caduta

Infatti, l'utilizzo di dispositivi elettronici interattivi come Arduino, permette agli studenti di vivere in prima persona un'esperienza attraverso cui mettere in pratica quanto studiato e averne al tempo stesso un riscontro pratico, verificando le leggi matematiche che regolano i fenomeni fisici. In questo modo gli studenti vengono resi partecipanti attivi del processo di apprendimento, costruendo la conoscenza e dandole un significato più profondo e, al tempo stesso, stimolando il potenziale creativo dei ragazzi. Valore aggiunto del progetto è, a mio giudizio, l'uso consapevole di una nuova tecnologia ai fini di una pratica pedagogica ancora troppo poco utilizzata nella scuola secondaria italiana: l'integrazione della storia della scienza nella didattica della fisica. Se a ciò si aggiunge che, grazie anche ad Arduino che costituisce una nuova frontiera nel concepire il laboratorio di fisica, gli studenti hanno potuto approcciarsi agli esperimenti da protagonisti e non da spettatori, possiamo senza dubbio affermare che il progetto ha avuto una buona ricaduta didattica.

CONCLUSIONI E PROSPETTIVE FUTURE

L'esigenza di un approccio storico nella didattica della fisica nasce dalla consapevolezza, sempre più avvertita, che i metodi tradizionali di insegnamento si sono rivelati spesso insufficienti e inadeguati. Le riflessioni epistemologiche, a partire quanto meno da quelle di Thomas Kuhn, hanno messo in evidenza che nemmeno la scienza, pur presentando caratteristiche proprie (replicabilità degli esperimenti, ricerca di leggi e costanti atemporali), risulta pienamente comprensibile ove la si astragga dalla sua dimensione storica. Soltanto in questo modo infatti è possibile afferrare la dinamica che caratterizza la pratica scientifica, ossia l'intersoggettività dei risultati del dibattito scientifico e la natura complessa dei modelli in campo, piuttosto che la ricerca linearmente cumulativa di una "verità" finale.

L'aver affiancato alla storia della scienza l'uso di tecnologie informatiche come Arduino non ha portato però a un sovraccarico cognitivo, cioè non ha compromesso la corretta e completa acquisizione delle conoscenze obiettivo dell'attività, perché la sua introduzione è arrivata spontaneamente dagli studenti e quindi essi non hanno dovuto imparare a utilizzare Arduino, aspetto che probabilmente avrebbe compromesso la buona riuscita del progetto. Sono, infatti, concorde con Antonio Calvani quando

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia sostiene che le nuove tecnologie siano da inserire come supporto didattico, purché utilizzate in maniera consapevole e con un preciso intento didattico.

Al tempo stesso penso come sostiene John Hattie che la lezione più efficace è quella interattiva e a feedback immediato: esperimenti laboratoriali con Arduino rientrano esattamente in questa categoria di lezione, in quanto lo studente ha la possibilità di interagire con l'oggetto di studio e sia lui sia l'insegnante possono avere immediatamente un ritorno di ciò che è stato fatto e in caso di errori o inesattezze l'allievo è messo in condizione di poter rivalutare le sue scelte e di correggersi attivando percorsi mentali duraturi.

Nel prossimo anno scolastico la mia intenzione è quella di continuare sulla strada tracciata proponendo nella stessa classe un altro percorso didattico che sfrutti il proficuo connubio tra storia della scienza e Arduino anche al fine di offrire lezioni di fisica sempre più efficaci e didatticamente rilevanti

BIBLIOGRAFIA

- Amaldi U. (2020). L'Amaldi per i licei scientifici.blu, Vol. 1, Bologna: Zanichelli.
- Bonera G. (1995). Galileo oggi, Pavia: Goliardica pavese.
- Calvani A. (2013). Qual è il senso delle tecnologie nella scuola? Una "road map" per decisori ed educatori, *Italian Journal of Educational Technology*, vol. 21, n. 1. pp. 52–57, 2013
- Drake, S. (1981). Galileo at work – His Scientific Biography, Chicago: Chicago Press.
- Drake S. (1992). Galileo Galilei pioniere della scienza, Padova: Franco Muzzio Editore.
- Geymonat L. (1969). Galileo Galilei, Torino: Einaudi.
- Koyré A. (1976). Studi galileiani, Torino: Einaudi.
- Kuhn T. (2000). Dogma contro critica. Mondi possibili nella storia della scienza, a cura di S. Gattei, Milano: Raffaello Cortina Editore.
- Russo L. (2021). La Rivoluzione dimenticata, Milano: Feltrinelli

VETTORI CON LA REALTÀ AUMENTATA

Eugeni Daniele, Grosso Paolo

paolo88grosso@gmail.com, danieleeugeni1@gmail.com

Abstract

Il percorso formativo delle scuole secondarie di secondo grado prevede, nell'ambito delle materie STEM, molti argomenti caratterizzati da elementi astratti al cui insegnamento non è sempre associata ad una immediata comprensione.

Di conseguenza, tali trattazioni solitamente generano negli studenti difficoltà di comprensione e visualizzazione, soprattutto durante il primo approccio, causando un calo di attenzione o un disinteresse nei confronti dell'argomento. Un esempio caratteristico, presente in (quasi) tutti i programmi ministeriali, è lo studio dei vettori nello spazio e le sue applicazioni nell'ambito della fisica; in particolare, l'utilizzo del prodotto vettoriale risulta essere il più ostico e l'elemento che crea maggiore difficoltà negli studenti.

In riferimento alla teoria per cui è raccomandata la combinazione di differenti metodi per l'insegnamento di argomenti astratti, comprovata da molti studi degli ultimi anni, è stato implementato l'attuale metodo didattico, previsto per l'insegnamento di tali argomenti, con un nuovo strumento di supporto che permetta di superare l'ostacolo visivo della terza dimensione e che contemporaneamente garantisca al docente un alto grado di personalizzazione dell'esperienza fornita. Lo strumento individuato come supporto è il visore di Realtà Virtuale (VR).

Il progetto, grazie alla collaborazione di alcune classi delle scuole secondarie di secondo grado, ha lo scopo principale di avvalorare l'utilità di tale visore, indagando quanto un tale dispositivo possa essere un elemento a supporto della didattica, per la trattazione di argomenti di carattere astratto e nello specifico dei vettori nello spazio.

Parole-chiave

Vettori, realtà aumentata, visori

CONSIDERAZIONI SULL' ANALISI DATI

Si osserva che, suddividendo gli studenti in due fasce di livello in base ai punteggi ottenuti, il test del χ^2 sostiene la dipendenza tra l'utilizzo del visore e il numero di sufficienze ottenute nel post-test; nell'analisi dei risultati relativi ai soli esercizi grafici, invece, questa dipendenza non emerge. Tuttavia, il fatto che tale corrispondenza sia rilevabile soltanto nella valutazione totale dei test potrebbe portare a due considerazioni: l'impatto del visore influisce sia nelle nozioni grafiche che in quelle analitiche e teoriche oppure che la lezione segmentata con attività interattive permette maggior coinvolgimento da parte degli alunni e di conseguenza maggiore assimilazione dei concetti.

Le differenze di risultati nei due gruppi, come osservabile dagli esiti del p-value nel test del χ^2 e dal test delle varianze ANOVA ad una via, restituiscono un ottimo punto di partenza per sviluppare ulteriormente questa metodologia, sia nel settore delle materie STEM, sia negli altri dove un supporto visivo e la possibilità di interazione con uno scenario costruito ad hoc

possa invogliare lo studente nel cimentarsi in un metodo di studio innovativo e più vicino alle esigenze digitali delle nuove generazioni. A conferma di quanto affermato, viene riportato di seguito un commento sul percorso didattico ricevuto dal docente presente in classe e che ha seguito l'esecuzione dell'esercitazione: *Nel complesso, l'esperienza con i visori Oculus applicati allo studio dei vettori ha suscitato particolare interesse negli studenti. Solitamente per gli allievi lo studio dei vettori risulta*

essere un argomento noioso in quanto per loro molto astratto e con poche immediate applicazioni pratiche. Grazie ai visori è stato possibile ovviare a questo problema in quanto gli studenti hanno potuto prendere una coscienza visiva più profonda dei vettori e delle operazioni ad essi legate (scomposizione lungo gli assi, prodotto per uno scalare, somma tra vettori, prodotto vettoriale ecc..)

Ciò rende molto più fruibile ed empirico l'argomento, aiutandoli maggiormente nella comprensione. Inoltre, l'aspetto ludico, tipico di queste tecnologie, riesce a catturare l'attenzione anche di chi solitamente è poco partecipe alle lezioni. Infatti durante le lezioni svolte in classe è stato possibile constatare come alcuni allievi, che presentavano diffuse insufficienze in fisica dovute alla loro scarsa attenzione, abbiano partecipato in modo propositivo all'attività con i visori, riuscendo ad ottenere una sufficienza nella verifica finale. Sarebbe interessante proporre l'applicazione di questo progetto nelle classi quarte e quinte di un liceo scientifico o di un istituto tecnico industriale, classi in cui, in accordo con i loro programmi ministeriali, dovrebbe già essere stata trattata la geometria nello spazio, così da osservare se l'andamento sia analogo a quanto ottenuto in questa tesi".

Un'ulteriore aspetto a cui prestare una particolare attenzione, rimanendo in accordo con il principio dell'apprendimento multimediale, risiede nella possibilità di ridurre il carico cognitivo dello studente durante l'esercitazione con i visori o tecnologie innovative, affinché durante il primo approccio non si concentri l'attenzione dello studente eccessivamente su come utilizzare l'hardware, ma piuttosto sull'informazione riportata dall'applicazione in esecuzione; questo perché, nonostante gli studenti possano essere definiti come nativi digitali, i fenomeni di split-attention e il sovraccarico cognitivo sono ancora prevalenti.

Un'adeguata formazione o guida all'uso delle nuove attrezzature potrebbe preparare l'apprendimento cognitivo degli studenti e consentire loro di acquisire un livello più elevato di comprensione concettuale e prevenire i problemi di apprendimento. Infatti, alcuni educatori scientifici e ricercatori in ambito didattico sostengono che, per il successo dell'istruzione scientifica, la stesura di una metodologia per rendere più efficiente l'apprendimento durante le simulazioni al computer rimane la variabile più cruciale.

Tuttavia un aspetto determinante è la modalità con cui viene proposto il progetto: nonostante l'approccio innovativo e l'ausilio di una tecnologia che difficilmente si discosta da una dimensione ludica abbiano favorito la partecipazione delle classi, l'informazione che non ci sarebbe stata una valutazione che facesse media con l'andamento scolastico degli alunni ha generato un clima di rilassamento eccessivo che talvolta può nuocere alla serietà necessaria per affrontare progetti simili a questo.

CONCLUSIONI

Con lo scopo di effettuare una breve sintesi delle considerazioni derivanti dal progetto si riporta una breve lista degli elementi positivi e negativi che sono emersi durante l'utilizzo del visore Vr nella scuola:

PRO:

- Rende molto più fruibile ed empirico l'argomento, favorendo la comprensione;
- L'aspetto ludico, tipico di queste tecnologie, riesce a catturare l'attenzione anche di chi solitamente è poco partecipe alle lezioni;
- Si sperimenta partecipazione attiva, coinvolgimento e buoni risultati da studenti meno partecipativi.

CONTRO:

- Nelle scuole, anche in quelle più attrezzate, è molto difficile reperire i visori e pc con requisiti tecnici tali da permetterne il funzionamento;
- Burocrazia (norme igieniche e di tutela dell'hardware), tempi e risorse economiche delle scuole;

- Criticità correlata alla quantità di tempo per la predisposizione dei dispositivi e al settaggio dell'hardware sullo studente.

Altre tipologie di intervento per ampliare il progetto potrebbero consistere nell'aumentare le ore di lezioni frontali e di esercitazione con visore; oppure sarebbe interessante eseguire uno studio sulla visualizzazione dei campi vettoriali, affiancando la didattica tradizionale in argomenti come il campo elettrico e il campo magnetico.

In conclusione, ritengo possibile affermare che il visore garantisce un'ampia possibilità di utilizzo, oltre alla possibilità di personalizzare l'esperienza che si vuole proporre, garantendo la possibilità sia al docente che allo studente di cimentarsi e sviluppare assieme nuove metodologie didattiche.

WORKSHOP

INTELLIGENZA ARTIFICIALE E ANALISI DI DATI ASTRONOMICI

Raffaella Bonino¹, Andrea Piccione^{2,3}

¹Dipartimento di Fisica, Università di Torino, ²Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte, ³Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte
raffaella.bonino@unito.it, piccione.eft@istruzioneepiemonte.it

Abstract

L'Intelligenza Artificiale (AI) è utilizzata in ambito astrofisico a diversi livelli: per la selezione degli eventi, per la ricostruzione di segnali, per l'individuazione di detriti spaziali, per la ricerca di nuove galassie ed esopianeti. In questo contributo ci occuperemo di classificazione delle galassie, una delle prime applicazioni della AI all'astronomia.

Nella parte iniziale saranno introdotti elementi base di AI, quindi saranno mostrate possibili banche dati utilizzabili a scopi didattici. Infine, saranno sperimentate piattaforme di facile e rapido utilizzo per lo sviluppo di modelli di classificazione. Le attività proposte sono applicabili nei diversi contesti della scuola secondaria, e adattabili anche ad ambiti diversi da quello astronomico.

Parole-chiave

Intelligenza Artificiale, Machine Learning, astronomia, modelli, analisi dati

INTELLIGENZA ARTIFICIALE E MODELLI ASTRONOMICI

La raccolta e l'analisi dei dati ha una lunga tradizione in astronomia; questa evoluzione storica ha visto da una parte uno sviluppo tecnologico, dalla costruzione delle antiche torri di osservazione ai moderni telescopi, dall'altra uno sviluppo dei modelli di descrizione, tra cui quello del sistema solare, che ha profondamente segnato la nostra storia.

I sistemi di Intelligenza Artificiale (AI) stanno diventando sempre più diffusi perché consentono l'analisi di grandi set di dati, anche relativi a situazioni complesse in cui sono coinvolte molte variabili. Attraverso l'iterazione di algoritmi detti di Machine Learning (ML) su set di dati di esempio, è possibile individuare le caratteristiche contenute nei dati iniziali e sulla base di queste ottenere previsioni per nuove situazioni. Il funzionamento di tali algoritmi è basato su un sistema che a un dato input (tabelle di dati, immagini, suoni, o filmati) associa un output (un valore numerico o una etichetta per la classificazione) combinando un numero estremamente elevato di parametri; attraverso un processo di addestramento (*training*), in cui si propongono alcuni dati come input e si valuta la qualità dell'output proposto, si modificano i valori dei parametri in modo che la qualità dell'output sia sempre migliore e più aderente al valore atteso. Il risultato, sebbene tecnicamente venga chiamato *modello*, è concettualmente differente da quello a cui siamo abituati: infatti, non solo dipende fortemente dai dati e dalle impostazioni utilizzati durante l'addestramento, ma non è facilmente visualizzabile come una formula matematica; inoltre, lo stesso algoritmo addestrato a classificare galassie, con un diverso set di dati iniziali, potrebbe essere utilizzato per classificare oggetti del tutto diversi, come pesci o nuvole.

L'utilizzo dell'Intelligenza Artificiale cambia quindi in modo profondo il ruolo del modello di riferimento. Con questo tipo di tecnologie, infatti, è possibile individuare regolarità e correlazioni presenti nei dati, ma senza definire un vero e proprio modello per la loro descrizione: l'AI sa descrivere le cose, ma non sa perché, la sua risposta dipende unicamente dal valore assunto dai parametri dell'algoritmo. Estremizzando l'esempio della disputa tra il modello tolemaico e quello copernicano, l'AI può prevedere la posizione dei pianeti, ma non sa chi ci sia al centro del sistema solare. Questa particolarità ci pone di fronte a un cambiamento radicale del paradigma e richiede un nuovo approccio epistemologico.

Le attività proposte nascono da uno degli incontri del percorso formativo realizzato in collaborazione da Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino, Ufficio Scolastico Regionale ed Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte, e Associazione per l'Insegnamento della Fisica (Piccione *et al.*, 2024). Forniremo alcuni strumenti per capire le basi del nuovo approccio all'analisi dei dati, e si affronteranno alcune caratteristiche dell'AI a partire da semplici esempi di classificazione di dati astrofisici. Inizieremo con una breve panoramica delle applicazioni di Intelligenza Artificiale all'astronomia, per poi presentare gli strumenti per introdurre il Machine Learning e le banche dati, che saranno poi utilizzate nelle attività didattiche.

INTELLIGENZA ARTIFICIALE E ASTRONOMIA OGGI

Come accade in molte discipline, anche in ambito astronomico i dati disponibili sono sempre più caratterizzati da dataset molto estesi e complessi. Per questa ragione l'analisi di tali dati è di tipo computazionale e in questo contesto gli algoritmi di Intelligenza Artificiale sono una risorsa sempre più diffusa. Riportiamo di seguito una breve rassegna di applicazioni dell'AI, che può essere utilizzata in ambito scientifico in generale, ma che è particolarmente significativa in quello astronomico (Fluke & Jacobs, 2020).

Una tipologia di applicazioni consiste nell'individuare caratteristiche e regolarità all'interno di un dataset per poi determinare se un nuovo oggetto o una nuova funzionalità è parte di un gruppo o di una categoria, anche in uno spazio multidimensionale; tali applicazioni possono essere associate a diverse tipologie di dati provenienti da immagini, spettroscopia, fotometria, curve di luce, serie temporali, cataloghi e simulazioni. Rientrano in questa tipologia gli algoritmi di regressione, che assegnano come output un valore numerico sulla base delle caratteristiche dei dati iniziali, quelli di classificazione vera e propria, che prevedono tanti valori di output quante sono le etichette da assegnare, gli algoritmi di clustering, che individuano in autonomia le diverse categorie disponibili per poi assegnare etichette a nuove istanze. Queste applicazioni sono particolarmente interessanti in fase di scoperta, perché consentono l'identificazione di nuovi oggetti celesti sulla base di caratteristiche o relazioni determinate dal modello di ML, come ad esempio la ricerca di esopianeti. Ulteriori tipologie prevedono algoritmi di previsione temporale, in cui si apprende dagli eventi passati per predire o prevedere eventi simili in futuro, e la generazione/ricostruzione, ovvero la creazione di informazioni mancanti in modo coerente con quelle disponibili, come ad esempio la ricostruzione di tracce di fasci di particelle o di segnali. In questo contesto, riportiamo di seguito due esempi di applicazioni dell'AI che possono essere funzionali a successivi approfondimenti a livello di scuola secondaria.

Dal 1957 a oggi, sono state realizzate migliaia di lanci nello spazio che hanno prodotto un gran numero di detriti, che oggi sono un rischio per le nuove missioni e i satelliti in orbita. La NASA è attiva dal 1979 su questo fronte con l'Orbital Debris Program Office⁶⁵, che prevede diversi progetti dalle misure alla modellazione, dalla bonifica al recupero. Anche le altre agenzie spaziali si stanno attivando in diversi modi per la risoluzione di questo problema; ad esempio, l'agenzia giapponese JAXA, ha sviluppato un progetto per la rimozione di rifiuti di grandi dimensioni⁶⁶. Al fine di automatizzare le procedure di identificazione dei possibili ostacoli e ridurre gli impatti l'ESA ha invece sviluppato un progetto in cui sono utilizzati algoritmi di AI⁶⁷. In questo ambito sono utilizzati prevalentemente algoritmi per la classificazione dei detriti e per la previsione delle loro traiettorie.

La classificazione delle galassie sulla base della loro morfologia è una attività che viene svolta da molto tempo (Hubble, 1936; Sandage, 1961; van den Bergh, 1998), ed è utilizzata, ad esempio, per studiare la correlazione tra diversi parametri, quali forma e densità, luminosità e temperatura. Per questa ragione è stata una delle prime implementazioni degli algoritmi di Machine Learning (Lahav, 1996), attraverso applicazioni per la classificazione, il clustering e la scoperta. Partiremo da questa tipologia di attività per la proposta di attività didattiche.

⁶⁵ <https://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/>

⁶⁶ <https://www.kenkai.jaxa.jp/eng/crd2/>

⁶⁷ https://www.esa.int/Enabling_Support/Preparing_for_the_Future/Discovery_and_Preparation/

INTELLIGENZA ARTIFICIALE E APPLICAZIONI DIDATTICHE PER L'ANALISI DATI**Strumenti per la classificazione delle immagini**

La classificazione delle immagini è un'applicazione diffusa dell'Intelligenza Artificiale, e sono disponibili strumenti per realizzare attività didattiche con un diverso livello di complessità. Un prima possibilità prevede esercitazioni attraverso applicativi di utilizzo immediato tra cui ad esempio Teachable Machine (Carney *et al.*, 2020), MachineLearningForKids (Lane, 2021), appInventor (Tang, 2019), learningML (Rodríguez-García, 2021), vittascience⁶⁸. Tali strumenti sono online, possono essere utilizzati tramite browser e senza la necessità di un account. La procedura prevede una serie di passaggi elementari per la creazione di un modello di ML: definire due o più classi di riferimento, caricare un certo numero di immagini per ogni classe, addestrare il modello (in alcuni casi è possibile variare alcuni parametri del processo di addestramento o del modello stesso), verificare la predizione del modello su immagini di test non utilizzate durante l'addestramento. Il risultato non è un vero e proprio modello di ML, che richiederebbe grandi set di dati, elevata potenza di calcolo e tempi lunghi, ma può essere creato rapidamente perché è basato su reti pre-addestrate⁶⁹. L'applicazione del modello ha, quindi, una valenza più didattica che scientifica; tuttavia, già a questo livello è possibile discutere alcuni aspetti significativi del ML come la dipendenza del modello dai dati forniti per l'addestramento, e il fatto che la risposta del sistema sulle immagini di test fornisca sempre l'intervallo di confidenza per ogni possibile classe. I classificatori online possono essere utilizzati con qualunque tipo di immagine: ad esempio, riproducendo set classici di test come il MNIST (Deng, 2012) e il CIFAR-10 (Krizhevsky & Hinton, 2009), o in alternativa anche su altri possibili set di dati in ambito ambientale standardizzati o personalizzati.

A un secondo livello di complessità si possono utilizzare linguaggi di programmazione e librerie specifiche per il Machine Learning, quali TensorFlow⁷⁰, scikit-learn⁷¹, Keras⁷²; per la loro implementazione sono molto diffusi i *computational notebook*, documenti interattivi che combinano parti di codice con i relativi risultati, unitamente a elementi di grafica e testo (Piccione & Massa, 2022). Tali strumenti hanno avuto una crescente diffusione in ambito scientifico, perché consentono un uso flessibile della programmazione, grazie al quale si possono rapidamente analizzare e visualizzare gli effetti di una variazione del codice. La struttura di un notebook è composta da celle di tre tipologie principali:

- celle di markdown, che vengono utilizzate per creare parti di testo ben formattate e dove è possibile inserire immagini, video e anche formule matematiche;
- celle di codice, dove sono inserite le istruzioni nel linguaggio programmazione;
- celle di output che possono contenere un semplice valore numerico, un vettore o qualcosa di più complesso come una tabella, un grafico o una finestra interattiva.

In questo caso la difficoltà di utilizzo è maggiore non solo perché è necessario conoscere un linguaggio di programmazione, ma anche perché gli applicativi per l'esecuzione dei notebook possono rivelarsi più complessi. Per contro il vantaggio di questi strumenti è che sono simili a quelli utilizzati in ambito di ricerca, e quindi consentono agli studenti di sperimentare più da vicino questa realtà; in aggiunta, permettono la totale personalizzazione dell'analisi e dei parametri. Negli esempi seguenti saranno utilizzati sia classificatori online sia notebook nel linguaggio Python.

⁶⁸ <https://it.vittascience.com/>

⁶⁹ Viene utilizzata in questi casi la tecnica del *Transfer Learning*, che prevede di riaddestrare con nuovi dati modelli per svolgere compiti simili, ad esempio, il riconoscimento di forme in una immagine.

⁷⁰ <https://www.tensorflow.org/>

⁷¹ <https://scikit-learn.org/>

⁷² <https://keras.io/>

Banche dati

La maggior parte dei dati relativi a esperimenti scientifici di astronomia sono disponibili in rete come, ad esempio, quelli della NASA⁷³. In alcuni casi è tuttavia necessario un applicativo dedicato per la loro decodifica e la loro lettura. Per scopi didattici, possono essere utilizzati alcuni set di dati di più facile utilizzo, come quelli indicati nel seguito.

Lo Sloan Digital Sky Survey (SDSS)⁷⁴ è gestito da una collaborazione internazionale di centinaia di scienziati presso numerose istituzioni in tutto il mondo. Il progetto è iniziato nel 2000 e ha seguito diverse fasi operative; la fase attualmente attiva del progetto è SDSS-V, che ha iniziato a raccogliere dati nell'ottobre 2020 e che dovrebbe durare fino al 2025. SDSS-V opera presso l'Osservatorio Apache Point negli Stati Uniti e presso l'Osservatorio Las Campanas in Cile. Il progetto rende disponibili i propri dati su Internet tramite il portale SkyServer⁷⁵. Sono disponibili sia dati spettrali sia immagini, e possono essere facilmente ottenuti fornendo le coordinate della regione di cielo di interesse. I dati sono disponibili solo per uso non commerciale, e sono disponibili anche una serie di tutorial rivolti a tutti, dagli studenti agli astronomi professionisti.

I DESI Legacy Imaging Surveys⁷⁶ sono una combinazione di tre progetti pubblici (il Dark Energy Camera Legacy Survey, il Beijing-Arizona Sky Survey e il Mayall z-band Legacy Survey); i dati provengono da due aree contigue dal piano galattico (Osservatorio nazionale di Kitt Peak e dell'Osservatorio interamericano di Cerro Tololo), e coprono una parte consistente del cielo extragalattico. Oltre alle immagini, il progetto fornisce anche dati fotometrici nelle bande ottiche *grz* e da quattro bande del medio infrarosso. In figura 1 è mostrato lo stesso gruppo di galassie, in due diverse banche dati.

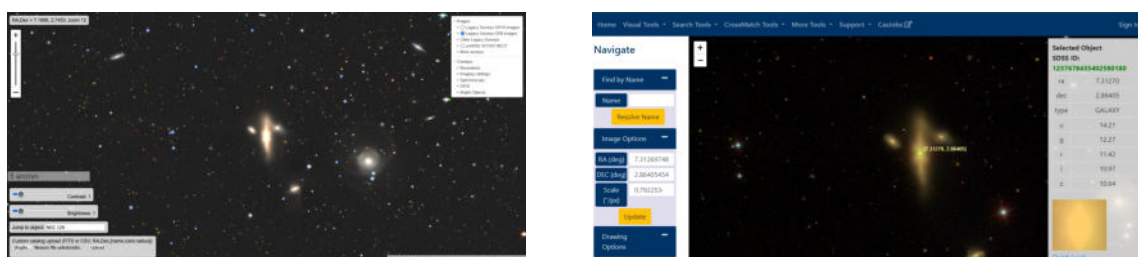


Figura 1. Le galassie NGC 125, 126, 127, 128 e 130 visualizzata in due diversi set di dati: DESI a sinistra e SDSS a destra.

Concludiamo la rassegna con il Galaxy Zoo⁷⁷, un progetto astronomico internazionale nel quale i membri sono chiamati a classificare milioni di galassie; questo è un esempio di citizen science, in cui i partecipanti contribuiscono, su base volontaria, ad un progetto scientifico di ricerca. Il progetto originale è stato lanciato nel 2007 e prevede la classificazione delle galassie da parte dei partecipanti. Il set Galaxy10⁷⁸ contiene immagini dei dataset SDSS e DESI classificate secondo le 10 tipologie del progetto Galaxy Zoo. Le immagini originali sono 424 x 424, ma sono state ritagliate, centrate sulle immagini e quindi ridotte per renderle gestibili sulla maggior parte delle memorie di computer e schede grafiche. È importante evidenziare come non vi sia alcuna garanzia sull'accuratezza delle etichette (la classificazione di ciascuna immagine dipende dalla votazione dei partecipanti al progetto e viene assegnata a una classe quando ha avuto appena più del 55% dei voti concordi su quella classe) e che il set di dati non è equilibrato; pertanto il Galaxy10 deve essere utilizzato solo per scopi didattici o

⁷³ <https://data.nasa.gov/>

⁷⁴ <https://www.sdss.org/>

⁷⁵ <https://www.skyserver.sdss.org/dr18/>

⁷⁶ <http://legacysurvey.org/>

⁷⁷ <https://www.zooniverse.org/projects/zookeeper/galaxy-zoo/>

⁷⁸ <https://astronn.readthedocs.io/en/latest/galaxy10.html>

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia sperimentali, allo stesso livello di come vengono utilizzati i set di riferimento standard come MNIST o CIFAR-10.

INTELLIGENZA ARTIFICIALE ED ESEMPI DI APPLICAZIONI DIDATTICHE

Differenza tra stelle e galassie

Un primo esempio facilmente realizzabile si basa sull'utilizzo dei classificatori di immagini, applicati al riconoscimento di stelle e galassie. Il dataset può essere costruito, anche manualmente, dal portale SkyServer, selezionando alcune immagini per ognuna delle due classi di interesse. Per un uso didattico ed esplicativo possono essere sufficienti 10 immagini per classe, e i dataset di riferimento possono inizialmente essere forniti dal docente, unitamente alle immagini da utilizzare come test del modello; successivamente, i dataset possono essere costruiti dagli studenti attraverso una consultazione delle banche dati online. In figura 2 è mostrato il risultato di questa attività di primo livello utilizzando Teachable Machine: dal punto di vista didattico è interessante notare come il nome di una classe sia del tutto arbitrario e non è associato ad alcun significato (se ad esempio i nomi fossero scambiati, l'algoritmo confonderebbe le due tipologie di oggetti).

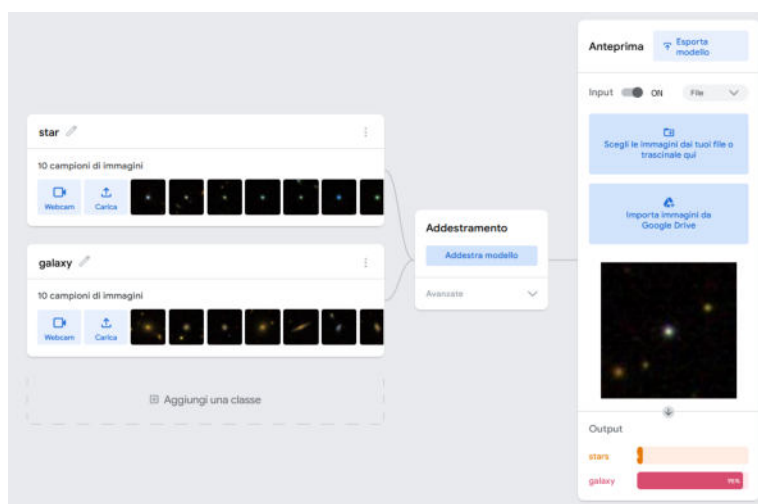


Figura 2. Creazione di un modello per il riconoscimento di stelle e galassie. Nel risultato in basso a destra con un'immagine di test sono visualizzati i livelli di confidenza della risposta.

Differenze tra galassie

Una volta imparato l'utilizzo di un classificatore in caso semplice, si può utilizzare un set di dati più strutturato e ampio, come quello con le diverse tipologie di galassie. La procedura da seguire è la stessa dell'esempio precedente, ma data la maggiore numerosità dei dati, il tempo di addestramento sarà superiore. In questo caso è stato utilizzato il set Galaxy10 SDSS, in cui per una classe è presente un numero estremamente ridotto di immagini; questo limite qualitativo, si traduce in una risorsa didattica per fare osservare la dipendenza dei risultati dai dataset utilizzati. Per avere un'idea più realistica di come avvenga un processo di addestramento di un modello, è possibile utilizzare computational notebook in linguaggio Python. Attraverso tali strumenti e l'uso di librerie specifiche è possibile introdurre ulteriori dettagli sugli algoritmi di Machine Learning: reti neurali e dipendenza del numero di parametri dalla dimensione e dall'architettura della rete, relazioni tra i parametri e funzioni di attivazione, percentuale di dati utilizzati in fase di training, algoritmi di minimizzazione, metriche per misurare la qualità del training e definirne la durata; in questa modalità tutti i diversi stadi dell'addestramento possono essere visualizzati e personalizzati a partire da esempi di riferimento. In figura 3 è visualizzata la previsione iniziale del modello con tutti i parametri inizializzati casualmente.

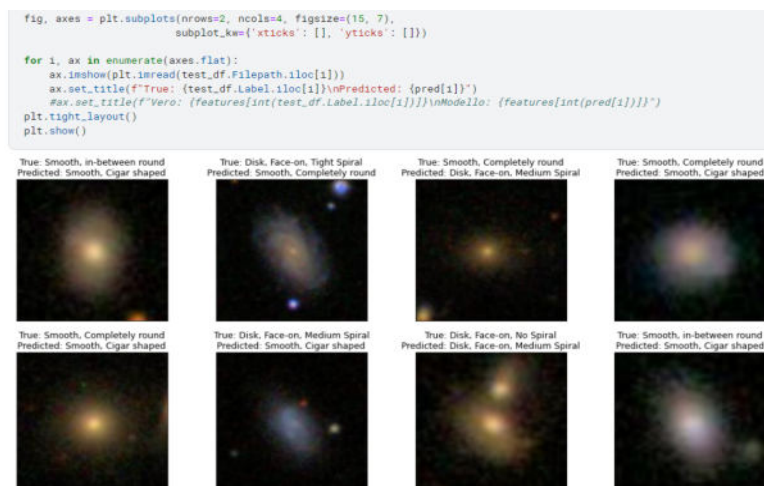


Figura 3. Confronto tra valore reale e previsione del modello a inizio addestramento per la classificazione delle diverse tipologie di galassie: in questa fase tutti i parametri sono inizializzati casualmente e casuale è la risposta del sistema. Per ulteriori dettagli è disponibile un esempio online⁷⁹.

Dalla classificazione alla narrazione

La classificazione dei corpi celesti può essere applicata non solo al contesto scientifico, ma anche in un contesto narrativo. Una delle attività didattiche del modulo sull'AI del progetto formativo InnovaMenti_Tech⁸⁰ proponeva di scrivere il proseguimento o il finale di una storia a seconda dell'esito di una classificazione, con l'obiettivo di mettere in risalto alcuni aspetti del ML, tra cui i possibili effetti di un addestramento non adeguato. Nel contesto astronomico si può prendere spunto dal libro di Lucy e Stephen Hawking *La chiave segreta per l'universo*, in cui un super computer è in grado di aprire varchi attraverso cui accedere a porzioni di universo: "Cosmo ha appena aperto per noi una porta nell'universo. Guarda ...". La proposta didattica è di fornire agli studenti una consegna come quella che segue: "scrivi 5 righe su come possa proseguire la storia a seconda che arrivate in prossimità di una stella o una galassia, nel caso in cui Cosmo sia stato addestrato con le immagini da voi fornite ...".

CONCLUSIONI

L'astronomia presenta molti spunti per le attività didattiche non solo per le discipline di ambito scientifico, ma anche per quelle umanistiche, oltre a essere una tematica sempre più attuale. Per queste ragioni offre un contesto privilegiato per sperimentare gli algoritmi di AI e per comprendere alcuni elementi base del loro funzionamento. Le attività proposte in questo contributo possono essere implementate in diversi contesti scolastici e in diverse discipline, come ad esempio viene proposto in alcune delle schede didattiche del progetto InnovaMenti Intelligenza Artificiale⁸¹.

BIBLIOGRAFIA

Banerji, M., Lahav, O., Lintott, C. J., Abdalla, F. B., Schawinski, K., Bamford, S. P., ... & Vandenberg, J. (2010). Galaxy Zoo: reproducing galaxy morphologies via machine learning. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406(1), 342–353.

⁷⁹ <https://www.kaggle.com/code/profpiccone/classificazione-delle-galassie>

⁸⁰ https://scuolafutura.pubblica.istruzione.it/innovamenti_tech

⁸¹ https://scuolafutura.pubblica.istruzione.it/innovamenti_intelligenza-artificiale

- Carney, M., Webster, B., Alvarado, I., Phillips, K., Howell, N., Griffith, J., ... & Chen, A. (2020, April). Teachable machine: Approachable Web-based tool for exploring machine learning classification. In *Extended abstracts of the 2020 CHI conference on human factors in computing systems* (pp. 1-8).
- Deng, L. (2012). The mnist database of handwritten digit images for machine learning research [best of the web]. *IEEE signal processing magazine*, 29(6), 141-142.
- Fluke, C. J., & Jacobs, C. (2020). Surveying the reach and maturity of machine learning and artificial intelligence in astronomy. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 10(2), e1349.
- Hubble, E. P. (1936). *The Realm of the Nebulae*. New Haven: Yale Univ. Press
- Krizhevsky, A., & Hinton, G. (2009). Learning multiple layers of features from tiny images.
- Lane, D. (2021). *Machine learning for kids: A project-based introduction to artificial intelligence*. No Starch Press.
- Leung, H. W., & Bovy, J. (2019). Deep learning of multi-element abundances from high-resolution spectroscopic data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483(3), 3255–3277.
- Piccione, A., Massa, A. A., Ruggiero, M. L., Serio, M., Rinaudo, M., Marocchi, D., & Marino, T. (2024). Training teachers on new topics and new tools in Physics education. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2693, No. 1, p. 012010). IOP Publishing.
- Piccione A., Massa A. A. (2022). Computational Notebook e Open Big Data, in *Atti del X Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica*, a cura di Bonino R, Marocchi D., Rinaudo M., Serio M., pp. 520–526
- Rodríguez-García, J. D., Moreno-León, J., Román-González, M., & Robles, G. (2021). Evaluation of an online intervention to teach artificial intelligence with learningml to 10-16-year-old students. In *Proceedings of the 52nd ACM technical symposium on computer science education* (pp. 177-183).
- Sandage, A. (1961). *The Hubble atlas of galaxies* (Vol. 618, No. 2). Washington, DC: Carnegie Institution of Washington.
- Tang, D. (2019). Empowering novices to understand and use machine learning with personalized image classification models, intuitive analysis tools, and MIT App Inventor (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).

LA SONIFICAZIONE DEI GRAFICI DI FUNZIONE CON AUDIOFUNCTIONS 2.0

Carola Manolino^{1,2}, Margherita Piroi², Tiziana Armano², Erika Brunetto², Mattia Ducci², Silvia Funghi³, Cristian Bernareggi²

¹ Dipartimento di Scienze Umane e Sociali - Università della Valle d'Aosta

² Laboratorio "S. Polin", Dipartimento di Matematica "G. Peano" - Università di Torino

³ Dipartimento di Matematica - Università di Genova

c.manolino@univda.it

Abstract

Audiofunctions è un progetto del Laboratorio "S. Polin" del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università degli Studi di Torino. Si tratta di un'applicazione web che, attraverso tecniche di *sonificazione*, permette di ottenere grafici di funzione a una variabile reale, esplorabili anche tramite suono; è una soluzione inclusiva per l'accessibilità dei grafici di funzione. Durante il workshop è stato possibile testare la nuova versione, Audiofunctions 2.0, che comprende nuove funzionalità e l'aggiornamento delle precedenti, ed esplorare insieme ai docenti il potenziale didattico del software nell'insegnamento delle discipline STEM.

Parole-chiave

Audiofunctions, sonificazione, inclusione, grafici di funzione, accessibilità

INTRODUZIONE

Contesto

L'educazione inclusiva ha assunto un ruolo di primaria importanza sin dalla Conferenza Mondiale dell'UNESCO del 1994 a Salamanca. In Italia, questa prospettiva è stata promossa attraverso la Legge 104 (Legge quadro per l'assistenza, 1992) e successive normative, contribuendo a sviluppare un sistema educativo più inclusivo, che a livello europeo si è affermato come modello di riferimento per le politiche inclusive, basate sull'accettazione e sull'apprezzamento della diversità come fonte di valore. Inoltre, l'Italia ha aderito alla Convenzione ONU sui Diritti delle Persone con Disabilità, che sancisce l'importanza cruciale di garantire alle persone con disabilità un accesso senza ostacoli a un'istruzione inclusiva e di qualità, a tutti i livelli, compreso quello universitario. Tuttavia, emergono delle sfide nell'applicare questi principi, specialmente per contenuti complessi delle discipline STEM. Grafici e formule, per esempio, sono mezzi di rappresentazione delle informazioni che possono non risultare accessibili per tutti, in quanto – diversamente dai contenuti testuali – richiedono un sistema predeterminato di regole per essere esplorati tramite le tecnologie assistive (Borsoero et al., 2014; Howell et al., 2022). Questa complessità rende difficile la progettazione di software accessibili e le soluzioni, laddove disponibili, sono costose e presentano limitazioni significative o limitano l'esplorazione dei contenuti: un aspetto che non è ancora stato pienamente esplorato dal punto di vista della ricerca in ambito didattico (Piroi et al., 2024). Queste sfide agiscono da deterrente per le persone con disabilità e con disturbi specifici dell'apprendimento, ostacolando il loro percorso di formazione scientifica e limitando l'accesso alle professioni STEM (Moon et al., 2012). Inoltre, l'accessibilità impatta profondamente sulle pratiche didattiche quotidiane, costringendo gli insegnanti a fornire materiali didattici differenziati, adottando una "doppia modalità di insegnamento" (quanto preparato per tutta la classe e quanto preparato per lo/gli studente/i con disabilità – magari dal docente di sostegno in totale autonomia) e operando esclusivamente a livello di accessibilità tecnica per rispondere a esigenze immediate (in assenza di metodologie didattiche inclusive per la classe). Tuttavia, rendere un contenuto

accessibile non garantisce necessariamente che lo studente *apprenda* il concetto matematico voluto: il problema del rapporto tra accessibilità all'informazione contenuta in una certa rappresentazione e l'apprendimento del concetto matematico alla base di tale rappresentazione, infatti, suscita interessanti riflessioni su aspetti di natura didattica rivolti a percorsi di apprendimento inclusivi a tutti i livelli di istruzione.

Il tema è complesso e ancora da esplorare, ma si tratta di un punto di partenza importante, a maggior ragione se si guarda a una particolare rappresentazione: il grafico di funzione. Il concetto di funzione è uno tra i più importanti della storia della matematica, ma anche uno dei più complessi, dove gli studenti (con o senza disabilità) incontrano molte difficoltà nel processo di apprendimento (Niss, 2020). L'insegnamento-apprendimento delle funzioni è profondamente intrecciato con la competenza di interpretare le informazioni contenute nei grafici o, viceversa, di utilizzare le informazioni disponibili rispetto a una funzione data per tracciarne il grafico. La letteratura sottolinea le difficoltà incontrate dagli studenti riguardo ai grafici delle funzioni e alla loro interpretazione, enfatizzando che il processo di costruzione di significato di questa rappresentazione è tutt'altro che banale per tutti gli studenti (e.g., Thompson & Carlson, 2017; Baccaglini-Frank et al., 2023).

Il Laboratorio Polin

Il Laboratorio per la Ricerca e la Sperimentazione di Nuove Tecnologie Assistive per le STEM "S. Polin" (www.integr-abile.unito.it) fa parte del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e opera nell'ambito della ricerca, sviluppo e sperimentazione di nuove metodologie didattiche e tecnologie assistive per lo studio delle discipline STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) e relativa divulgazione (e.g., Ahmetovic et al., 2020; Armano et al., 2022b; Armano et al., 2022c). L'obiettivo principale del Laboratorio è quello di trovare soluzioni inclusive alle problematiche sopra descritte.

Audiofunctions e altri strumenti

Nell'ambito dell'accessibilità dei grafici di funzione, in collaborazione con l'Università degli Studi di Milano, il Laboratorio ha avviato il progetto Audiofunctions.web (Ahmetovic et al., 2019). L'idea è di utilizzare tecniche di *sonificazione* (Hermann et al., 2011) per permettere l'esplorazione di grafici anche a persone che non possono utilizzare efficacemente il medium visivo, siano esse persone non vedenti, ipovedenti o persone con DSA (disturbi specifici dell'apprendimento).

La sonificazione è una tecnica sinestetica che consente di trasformare e veicolare informazioni che per loro natura non sono sonore, sotto forma di stimoli uditivi; consente di percepire informazioni facendo leva sulle capacità che l'udito umano ha di distinguere le variazioni dei parametri del suono come l'ampiezza, la frequenza, la durata, il timbro e la direzione. La possibilità di sonificare grafici, che rappresentano dati complessi, aiuta coloro i quali devono leggerli ad interpretarli con maggiore successo e apre una nuova modalità esplorativa alle persone con disabilità visiva (per un approfondimento si veda Armano et al., 2022a). Oltre a Audiofunctions ci sono altri software che utilizzano tecniche di sonificazione per la rappresentazione di grafici, ad esempio SAS Graphics Accelerator (<https://support.sas.com/software/products/graphics-accelerator>) e Desmos (<https://www.desmos.com>). Audiofunctions.web (nella versione 1.0, attualmente disponibile gratuitamente online al link: <http://www.integr-abile.unito.it/audiofunctions.web/>) è un'applicazione web basata su sonificazione, icone sonore e sintesi vocale per l'esplorazione multimodale di grafici di funzioni. Le principali caratteristiche dell'applicazione sono:

- utilizzo tramite differenti interfacce quali tastiera, mouse e touchpad;
- utilizzo tramite tablet e dispositivi desktop tradizionali;
- indipendenza dal sistema operativo;
- uso simultaneo di presentazione visiva ed uditiva;

- accesso diretto ai grafici accessibili da documenti digitali e da pagine web tramite collegamento ipertestuale.

L'applicazione è stata ripetutamente oggetto di accurate fasi di test di computer science con l'ausilio di sperimentatori con disabilità visive (e.g., Bernareggi et al., 2016; Taibbi et al., 2014; Ahmetovic et al., 2019). Nel 2022, dopo un'altra fase di test più incentrata sulle ricadute didattiche, il Laboratorio Polin ha avviato lo sviluppo di una nuova versione del software per rivedere alcuni requisiti e la progettazione di parti del software, risolvere alcuni problemi tecnici e implementare nuove funzionalità. Le revisioni sono andate nella direzione di meglio integrare le esigenze didattiche con quelle informatiche, lavorando soprattutto sull'esperienza utente, sia dalla parte dello studente, sia da quella del docente. L'intenzione è quella di ottenere un software che possa essere il più possibile affine alle esigenze didattiche dell'insegnante e della classe.

Alla luce di questo è stata ripensata l'interfaccia utente, offrendo un'interfaccia completamente accessibile, con la possibilità di modificare e agire sui vari parametri della funzione. La nuova interfaccia permette l'interazione da una stessa pagina, contrariamente al funzionamento della prima versione in cui era necessario cambiare pagina per modificare la funzione o i parametri. Inoltre, la sonificazione è stata arricchita con l'implementazione di due modalità (discreta tramite chitarra e continua tramite clarinetto) e con suoni aggiuntivi (earcons – icone sonore) riprodotti durante l'esplorazione di alcuni elementi chiave della rappresentazione, quali l'uscita dall'area del grafico, che comprende anche momenti in cui la funzione è non visibile o non definita, l'intersezione con l'asse delle y , e quando $f(x)$ assume valori negativi. Diversamente, nella versione 1.0, in tali punti vi era assenza di un riscontro sonoro, ma venivano verbalizzati le intersezioni con entrambi gli assi (il software dice “ x ” al momento di un'intersezione con l'asse x), il passaggio per l'origine (dice “origin”) e in presenza di punti di massimo e minimo (dice “max” e “min” rispettivamente). Anche per risolvere alcuni problemi tecnici di sincronizzazione tra velocità del parlato e velocità di esplorazione della funzione, è stato rivisto l'impiego di tali messaggi verbali, che nella versione 1.0 venivano riprodotti automaticamente. Tali verbalizzazioni, nella nuova versione, si possono attivare solamente se l'utente li richiede “on demand” (tramite specifici comandi da tastiera o dal pannello “Opzioni” – Figura 1).

La nuova versione del software Audiofunctions è stata sviluppata proprio per poter implementare l'uso del software anche dal punto di vista didattico, adottando tecnologie software più moderne in cui l'interazione ha un ruolo cruciale. L'obiettivo di questo articolo è, a partire da una basica presentazione della versione 2.0 del software Audiofunctions, proporre alla comunità una riflessione sui possibili utilizzi didattici. Più nello specifico verrà posta particolare attenzione alle due modalità di sonificazione discreta e continua, attualmente implementate in Audiofunctions 2.0, che permettono di veicolare un'esplorazione innovativa e multimodale del concetto di rapporto incrementale della funzione.



Figura 1a. Schermata principale di Audiofunctions 2.0 e bottone “Opzioni” (in rosso).

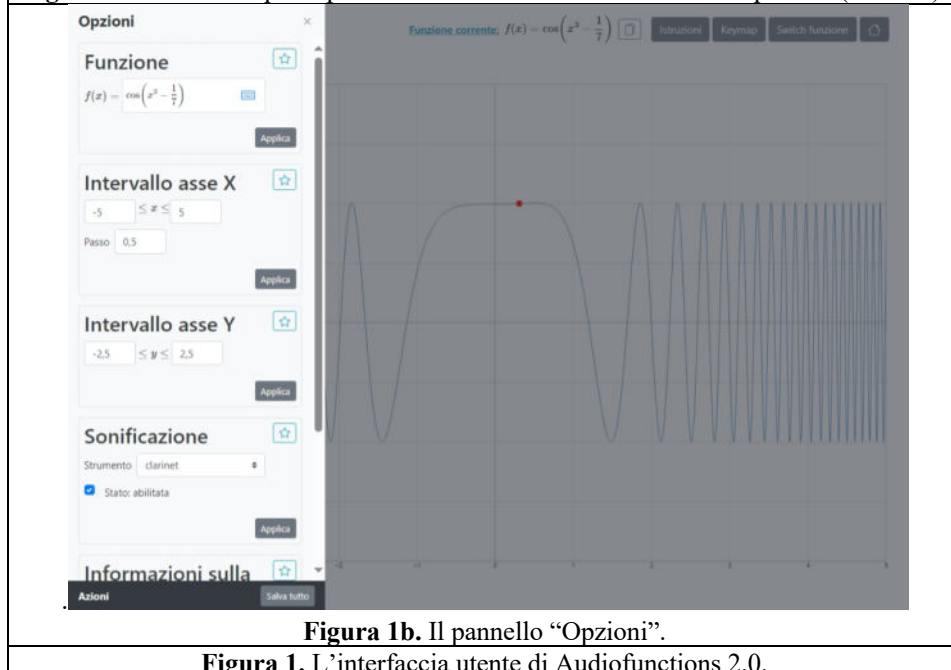


Figura 1b. Il pannello “Opzioni”.

Figura 1. L’interfaccia utente di Audiofunctions 2.0.

SONIFICAZIONE IN AUDIOFUNCTIONS 2.0

In questa sezione è illustrata la doppia modalità di sonificazione attualmente presente in Audiofunctions 2.0, ossia la sonificazione discreta e quella continua. Inoltre, a partire dalla presentazione dell’interfaccia utente e da una panoramica sulle modalità di interazione, sono qui brevemente presentate alcune delle nuove scelte implementative di Audiofunctions 2.0, illustrando le intenzionalità didattiche alla base delle modifiche realizzate rispetto alla prima versione di Audiofunctions.web.

Interfaccia utente

Audiofunctions 2.0 è un’applicazione web progettata per consentire l’esplorazione di una funzione a valori reali in una variabile reale attraverso un’interfaccia utente multimodale (visiva e uditiva). L’interfaccia web è progettata secondo le linee guida per l’accessibilità dei contenuti web (WCAG 2.1,

<https://www.w3.org/TR/WCAG21/>). Ciò significa che gli elementi dell'interfaccia utente e le modalità di interazione sono accessibili sia tramite periferiche tradizionali (ad esempio, mouse e schermo) sia attraverso diverse tecnologie assistive (ad esempio, screen reader e display Braille).

L'utente attraverso l'interfaccia può esplorare la funzione a variabili reali inserita e compiere azioni all'interno della stessa pagina. Alcuni esempi di azioni sono cambiare l'intervallo visualizzato sugli assi delle ascisse e delle ordinate o cambiare la funzione stessa inserendola manualmente o scegliendola attraverso un bottone tra un set di funzioni predefinite. Questa interattività non era presente nella prima versione di Audiofunctions, nella quale era presente solo la parte esplorativa: la parte di configurazione era definibile a priori solo in una pagina diversa da quella nella quale si poteva esplorare la funzione.

Sonificazione

La tecnica al cuore di Audiofunctions è la sonificazione, definita da Hermann et al. (2011) come “la tecnica di rendering del suono in risposta a dati e interazioni” (p. 1, nostra traduzione). Nel contesto di Audiofunctions la sonificazione mappa le informazioni relative alle funzioni su caratteristiche sonore. Più la sonificazione è semplice ed intuitiva, più aumenta il numero di informazioni che possono essere comunicate contemporaneamente ed efficacemente. Nell'intervallo di valori x e y del piano cartesiano visualizzato, Audiofunctions comunica il valore della funzione, $y = f(x)$, in relazione alla posizione attualizzata della x nell'intervallo di visualizzazione. Ciò può avvenire tramite uno strumento musicale scelto tra quelli disponibili: senoide, clarinetto e chitarra, dei quali di seguito si descriveranno le caratteristiche e le differenze. L'intervallo spaziale x da sinistra a destra è mappato con la spazializzazione sonora, tecnicamente denominata *panning*, dove un suono relativo a una x visivamente più vicina al limite sinistro dell'area di visualizzazione del grafico viene percepito maggiormente dall'orecchio sinistro, mentre un valore di x più vicino all'estremo destro dell'area di visualizzazione del grafico della funzione è maggiormente percepito dall'orecchio destro. Il valore della funzione ($y = f(x)$) è invece mappato sul *pitch*, cioè l'altezza del suono. L'altezza, in letteratura, è la caratteristica più efficace e utilizzata nel campo della sonificazione e il sistema uditivo umano è molto sensibile alle sue variazioni (Dubus & Bresin, 2013). La scelta del timbro dello strumento utilizzato per la sonificazione non è legata solo alla sonificazione, ma anche alla sua gradevolezza, sia soggettiva che in termini di qualità del suono. Questa scelta garantisce che gli studenti possano impegnarsi nell'esplorazione delle funzioni per una durata ragionevole, senza provare stanchezza a causa della natura del suono. Sebbene l'onda sinusoidale sia la più semplice e basilare non è acusticamente familiare all'orecchio umano. In Audiofunctions 2.0 sono disponibili tre timbri: l'onda sinusoidale (eredità della versione precedente, presto sarà abbandonata), un clarinetto e una chitarra acustica. Con clarinetto e chitarra individuiamo due modalità di sonificazione: una “continua” e l'altra “discreta”, rispettivamente. Entrambe producono una variazione del pitch al variare del valore della funzione, la differenza sta nel modo in cui viene percepita la variazione.

Nella sonificazione continua, come suggerisce il termine, percettivamente si sente una variazione continua del pitch con un suono che da un pitch al successivo non ha una pausa. Considerato che in un contesto digitale il concetto di “continuo” non esiste, per implementare questa continuità abbiamo preso pitch il più vicini possibile tra loro in modo che il nostro orecchio potesse non percepire un salto tra due pitch successivi.

Nella sonificazione discreta sfruttiamo invece proprio il salto tra due pitch successivi, oltre al concetto di pausa, per cambiare la qualità del feedback sonoro. In merito al salto tra pitch, abbiamo scelto di considerare i soli pitch appartenenti alle note musicali della scala temperata e usarli per definire un numero di intervalli contigui, condensando un intervallo di valori della funzione sotto un unico pitch di riferimento. Il concetto di pausa in questo scenario si concretizza scegliendo di sonorizzare solo il passaggio di soglia da un intervallo a un altro, cioè da un pitch a un altro. Per un certo intervallo sull'asse

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia delle ascisse, infatti, non c'è suono (cioè una pausa) se l'altezza associata a quelle posizioni è la stessa dell'ultima sonificazione. Una rappresentazione visiva di questa tecnica è presentata in Figura 2.

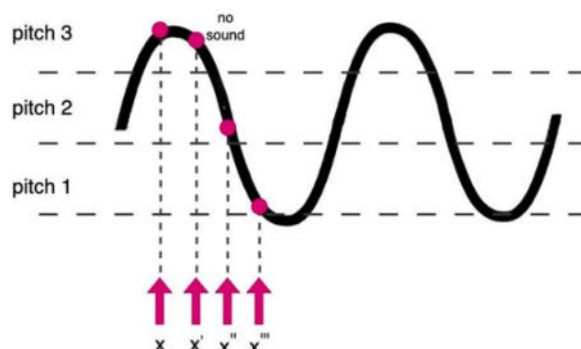


Figura 2. La sonificazione discreta.

Indichiamo x e x'' come posizioni distinte sull'asse delle ascisse effettivamente sonificate consecutivamente da Audiofunctions, il *pitch 3* come la nota prodotta in corrispondenza di x , e il *pitch 2* come la nota prodotta in corrispondenza di x'' . Tra la produzione del *pitch 3* e del *pitch 2* esiste una pausa. Questa pausa, in una certa misura, dipende da $\Delta x = x'' - x$, cioè dalla distanza tra x'' e x .

Se ipotizziamo l'asse x suddiviso in un numero specifico di passi in cui il tempo da un passo all'altro è mantenuto costante (es. 5 secondi diviso il numero di passi), allora la pausa tra il *pitch 3* e il *pitch 2* è proporzionale al numero di passi che separano x e x'' , in questo caso 2 passi.

Modalità di interazione

L'utente può interagire con Audiofunctions principalmente attraverso mouse e tastiera. In questa sezione ci concentreremo sull'interazione col grafico della funzione, che può avvenire in tre modalità, come illustrate in Figura 3: non interattiva, mono-dimensionale, bi-dimensionale.

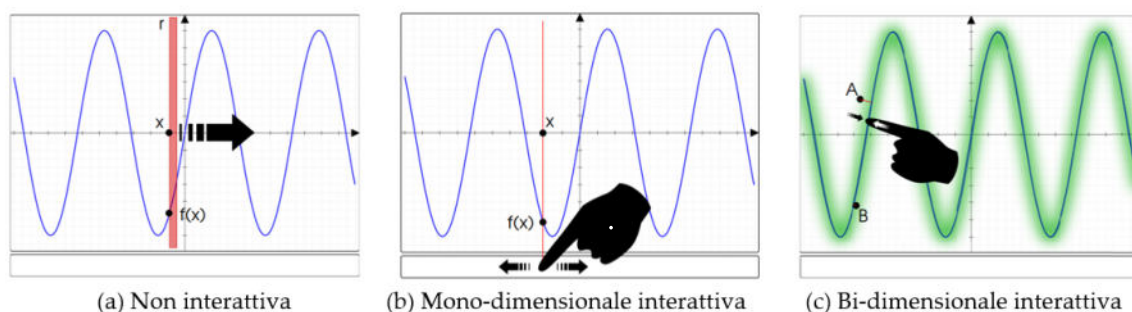


Figura 3. Le tre modalità di esplorazione di Audiofunctions (Taibbi et al., 2014, p. 542).

La modalità *non interattiva* (Fig. 3a) sonifica la funzione, ora implementata con il tasto "b" della tastiera, lungo l'asse delle ascisse da sinistra a destra, spostandosi di intervalli regolari in un tempo fissato (5 secondi). Ad ogni passo viene valutato il valore di x e il *pitch* sonificato è quello corrispondente al valore $y=f(x)$.

La modalità *mono-dimensionale* (Fig. 3b) è molto simile a quella non interattiva: funziona spostandosi lungo l'asse x e sonificando il *pitch* corrispondente a $y=f(x)$. Tuttavia l'esplorazione avviene manualmente, attraverso i tasti freccia destra/sinistra della tastiera: l'utente è così libero di esplorare la funzione con la velocità desiderata e sia da sinistra a destra che da destra a sinistra per intervalli scelti.

La modalità *bi-dimensionale* (Fig. 3c) permette di muoversi liberamente nel piano cartesiano. Questa modalità si può ottenere solo attraverso l'utilizzo del mouse e permette di sonificare anche punti esterni alla funzione muovendo il puntatore del mouse all'interno dell'area del grafico visualizzata.

IL WORKSHOP

Durante il convegno DIFIMA 2023, presso uno dei laboratori informatici del Liceo Classico Statale "Massimo D'Azeglio" di Torino, è stato organizzato un workshop dedicato alla presentazione e al testing della nuova versione di Audiofunctions. La sessione ha registrato la partecipazione di oltre trenta insegnanti provenienti da scuole e gradi scolastici differenti, anche se in prevalenza di secondaria di secondo grado, con la partecipazione inoltre di alcuni docenti universitari.

La proposta iniziale è stata di una libera esplorazione del software, con l'uso di cuffie personali laddove queste fossero disponibili (questo è stato chiesto per permettere ai partecipanti di apprezzare il *panning* della sonificazione prodotta da Audiofunctions, ovvero l'effetto di spostamento dell'origine del suono lungo la direzione orizzontale, da sinistra a destra, a seconda della posizione dell'ascissa del punto mobile lungo l'asse x). Dapprima i partecipanti hanno avuto la possibilità di esplorare la funzione $f(x)=\sin(x)$ con sonificazione continua (clarinetto); successivamente sono stati invitati a modificare liberamente la funzione da sonificare dal pannello "Opzioni" e a passare dalla sonificazione continua a quella discreta (chitarra). Dati i tempi del laboratorio, la complessità e la novità del funzionamento di Audiofunctions, la maggior parte del tempo è stata dedicata a rispondere alle curiosità e ai dubbi sollevati dai partecipanti durante la loro interazione con il software. Riportiamo quindi le principali questioni emerse, soffermandoci in particolare sulle ricadute sul piano didattico.

Innanzitutto, possiamo osservare che sia stata effettivamente apprezzata una differenza significativa di fruizione del software con le cuffie rispetto alla modalità senza cuffie, cosa che ha appunto permesso ai partecipanti di toccare con mano l'effetto della spazializzazione del suono e di apprezzare la parte di informazione che deriva da questa caratteristica del suono. In particolare è stato significativo per alcuni partecipanti rendersi conto della differenza dell'ascolto in cuffia da soli rispetto all'ascolto condividendo lo stesso paio di cuffie con un collega, in quanto l'effetto della spazializzazione in questo secondo caso viene a mancare: il software, infatti, per rendere conto del *panning* sfrutta una differenza di produzione del suono sulla cuffia destra o sinistra.

Si è anche proposto ai partecipanti di lavorare a coppie, con un componente che si occupava di inserire una funzione a sua scelta nel software e l'altro che, a occhi chiusi e con le cuffie, doveva cercare di individuare quale funzione fosse (o potesse essere) sulla base della sonificazione restituita da Audiofunctions. L'andamento sinusoidale, per esempio, ad un primo ascolto della sonificazione continua è stato riconosciuto da molti partecipanti grazie all'andamento altalenante del suono, la verbalizzazione ricorrente nel laboratorio era "alti e bassi". Qualcuno si è poi spinto ad esplorare la sonificazione delle funzioni lineari e costanti. È stato osservato molto presto che l'ascolto rendeva possibile capire l'andamento generale della funzione, ma non permetteva di risalire esattamente alla forma algebrica della funzione rappresentata (per esempio, all'ascolto non era chiaro come poter distinguere tra $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \sin(x) + 3$).

Un altro aspetto apprezzato del software è stato quello relativo alla possibilità di comporre funzioni direttamente in registro simbolico, grazie a una serie di simboli disponibili all'interno del software che possono essere attivati quando si va ad inserire la funzione voluta nella casella di testo corrispondente tramite una tastiera virtuale che compare a schermo su richiesta. Dal punto di vista didattico, questo ci fa pensare che tale funzionalità possa agevolare l'usabilità del software anche dal lato del docente e non solo lato utente – per esempio per la preparazione di consegne su funzioni specifiche.

L'aspetto emerso dalla discussione sul quale scegliamo di soffermarci maggiormente in questo contributo, e che riteniamo più significativo per il suo portato didattico, è tuttavia una riflessione che riguarda le potenzialità della sonificazione discreta per l'anticipazione del concetto di derivata. Come

descritto nel paragrafo precedente, nella modalità “chitarra”, Audiofunctions identifica diverse "strisce" orizzontali sul piano cartesiano, date da una suddivisione dell'intervallo dell'asse y visualizzato, corrispondente alla suddivisione delle altezze dei suoni in 37 intervalli; ogni intervallo corrisponde a una nota musicale di chitarra. Audiofunctions produce una nota solo quando $f(x)$ cade in una "striscia" diversa da quella precedentemente sonificata. Ciò influisce sulla durata della pausa tra due note suonate successivamente (non necessariamente consecutive nella scala). La caratteristica del comportamento della funzione che si può dedurre da questo tipo di sonificazione dipende dalla durata della pausa tra due diverse note sonificate successivamente: nell'intervallo considerato la funzione sarà tanto più ripida quanto Audiofunctions sonifica in modo molto ravvicinato due note molto distanti tra loro sulla scala. Se consideriamo, in particolare, le esplorazioni di grafici di funzioni in cui il software fa scorrere l'intero grafico da sinistra a destra (cioè nella modalità non interattiva o nella modalità interattiva monodimensionale, si vedano Fig. 3a e 3b rispettivamente), possiamo assumere che il tempo di transizione da un passo all'altro sia costante, a meno che non si zoommi o si cambi la dimensione del passo. Consideriamo quindi due punti del grafico $(x_n, f(x_n))$ e $(x_m, f(x_m))$ sonificati successivamente, dove x_i è la posizione sull'asse x relativa all' i -esimo passo, dove $i = 0, 1, \dots$ e $n < m$. La sonificazione discreta tra questi due punti rappresenta, a livello uditivo, l'idea di pendenza della retta che li collega. Infatti, tra x_n e x_m ci sono $m-n$ passi, per cui il tempo per passare da x_n a x_m è direttamente proporzionale a $m-n$. Poiché $(x_n, f(x_n))$ e $(x_m, f(x_m))$ sono sonificati in successione, la pendenza della retta che passa tra i due punti a livello uditivo viene “tradotta” come “rapidità” di passaggio tra due suoni diversi, cioè:

- se la sonificazione sentita in x_n e quella in x_m sono separate da una pausa "lunga", significa che la funzione aumenta tanto più “lentamente” quanto minore è il numero di "strisce" comprese tra quelle in cui si trovano i punti $(x_n, f(x_n))$ e $(x_m, f(x_m))$. Infatti, questo significa che i due punti sonificati appartengono a strisce non troppo distanti tra loro (quindi non ci si è spostati “molto” lungo l'asse y), ma sono necessari molti passi per passare da una striscia all'altra (quindi ci si è spostati “molto” lungo l'asse x);
- se x_n e x_m sono associati a passi consecutivi, cioè quando $m=n+1$, questo significa che nel giro di un solo passo la funzione passa da una striscia ad un'altra, quindi aumenta tanto più rapidamente quanto più i due suoni restituiti sono distanti.

Da quanto abbiamo descritto fin qui, si potrà osservare che questo tipo di sonificazione non permette di cogliere i dettagli del comportamento della funzione tra due “strisce” consecutive. L'interazione musicale tra pause e note riprodotte crea a livello sonoro un senso percettivo di "completamento" del grafico attraverso segmenti che collegano queste note – cioè restituisce la possibilità di approssimare la funzione in input con una linea spezzata interpolante i punti sonificati. Tuttavia, attraverso lo zoom-in o zoom-out, è possibile ridefinire l'intervallo di visualizzazione dell'asse y su cui viene calcolata la suddivisione delle altezze dei suoni, cosa che permette di apprezzare una sonificazione più fine o più grossolana della funzione. In generale, quindi, la sonificazione discreta non solo offre informazioni "macro" sul comportamento complessivo della funzione all'interno della porzione di piano cartesiano considerata, ma facilita anche la rappresentazione sonora e, di conseguenza, sensoriale del concetto di rapporto incrementale. Questo fenomeno può essere attribuito ai principi descritti dalla teoria della Gestalt a livello visivo (si veda per esempio Kanizsa, 1987), generando un approccio spontaneo e *embodied* al concetto di derivata.

CONCLUSIONI

Il workshop aveva l'obiettivo di far conoscere la nuova versione di Audiofunctions e di raccogliere dai docenti i loro primi feedback circa l'interesse e la fruibilità del software. Date le osservazioni sollevate da parte dei partecipanti, possiamo dire di aver riscontrato un certo interesse per il software e per le sue potenzialità didattiche, confermando anche una certa fruibilità percepita dai docenti. Sono sorte delle considerazioni sul fatto di considerarlo uno strumento didattico per lavorare in una prospettiva

qualitativa piuttosto che quantitativa sul concetto di funzione – cosa che probabilmente per alcuni docenti può essere risultata un po' inedita rispetto ad altri approcci didattici a questo concetto (questo in parte può dipendere dal fatto che il canale uditivo si presta per veicolare alcune informazioni sul comportamento della funzione ma non tutte). Questo accento sull'uso del software in ottica qualitativa dal nostro punto di vista si collega con la potenzialità di Audiofunctions di rappresentare a livello sonoro la funzione come covariazione della variabile indipendente e di quella dipendente. In particolare, è risultata interessante la sonificazione discreta come mezzo uditivo per anticipare a livello di percezione sonora il concetto di derivata e di rapporto incrementale.

Quanto rilevato fin qui costituisce un incoraggiante primo passo verso indagini più strutturate che consentono di mettere più pienamente a fuoco le potenzialità didattiche di Audiofunctions per l'apprendimento del concetto di funzione nella scuola secondaria (di primo e di secondo grado) e non solo in contesto universitario. Ulteriori studi potranno chiarire quali possano essere delle possibili implementazioni a livello didattico per rendere Audiofunctions non solo uno strumento per l'accessibilità ai grafici di funzione presenti nei testi, ma anche uno strumento per realizzare attività didattiche volte all'apprendimento del concetto di funzione in chiave inclusiva. In questa direzione, ricercatori del Laboratorio "S. Polin" e collaboratori stanno continuando a indagare il funzionamento del software, studiando come soggetti già esperti nell'ambito delle funzioni possano interfacciarsi con esso.

RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro è stato sostenuto dal GNSAGA dell'INdAM.

BIBLIOGRAFIA

- Ahmetovic, D., Bernareggi, C., Guerreiro, J., Mascetti, S., & Capietto, A. (2019). Audiofunctions.web: Multimodal exploration of mathematical function graphs. In *Proceedings of the 16th International Web for All Conference* (pp. 1–10). <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3315002.3317560>
- Ahmetovic, D., Armano, T., Bernareggi, C., & Capietto, A. (2020). Utilizzare grafici di funzione accessibili nelle attività di Moodle con AudioFunctions.web. In G. Fiorentino, & S. Rabellino (Eds.), *Atti del MoodleMoot Italia 2019* (pp. 65–70). MediaTouch 2000.
- Armano, T., Capietto, A., Maietta, D., Manolino, C., & Sofia, A. (2022a). Grafici sonori. Multicanalità e Inclusività nella Didattica delle STEM. [Sonified Graphs. Multichannel and Inclusiveness in STEM Education.] In R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza. DI.FI.MA. 2021* (pp. 527–532). Collane@unito.it. <https://www.collane.unito.it/oa/items/show/105>
- Armano, T., Capietto, A., Maietta, D., Manolino, C., & Sofia, A. (2022b). Produzione di documenti digitali accessibili con contenuto scientifico: strumenti inclusivi. In R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza. DI.FI.MA. 2021* (pp. 498–504). Collane@unito.it. <https://www.collane.unito.it/oa/items/show/105>
- Armano, T., Manolino, C., Piroi, M., Borsero, M., Maietta, D. & Capietto, A. (2022c). LaTeX tra competenze digitali e accessibilità: un'esperienza di PCTO con il Laboratorio Polin. [LaTeX between digital skills and accessibility: A PCTO experience with the Polin Laboratory]. *Mondo Digitale*, 20(97). <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-85147830970&partnerID=MN8TOARS>
- Baccaglioni-Frank, A., Antonini, S., & Lisarelli, G. (2023). Exploiting the potential of dynamic asymmetry in dragging to foster students' understanding of functions and their Cartesian graphs. *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1–28). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_14-1
- Borsero, M., Murru, N., & Ruighi, A. (2014). Il LATEX come soluzione al problema dell'accesso a testi con formule da parte di disabili visivi. *ArsTeXnica*, 22, 12–18.
- Dubus, G., & Bresin, R. (2013). A Systematic Review of Mapping Strategies for the Sonification of Physical Quantities. *PLOS ONE*, 8(12), e82491. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0082491>

- Hermann, T., Hunt, A., & Neuhoff, J. G. (Eds.) (2011). *The Sonification Handbook*. Logos Verlag Berlin. <https://sonification.de/handbook/>
- Howell, J., Chan, A., Hordemann, G., & Quek, F. (2022). Helping Those with Visual Impairments Read Mathematics: A Spatial Approach. In *PETRA '22: Proceedings of the 15th International Conference on Pervasive Technologies Related to Assistive Environments* (pp. 286–293). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3529190.3529193>
- Kanizsa, G. (1987). Quasi-Perceptual Margins in Homogeneously Stimulated Fields. In S. Petry, & G.E. Meyer (Eds.), *The Perception of Illusory Contours* (pp. 40–49). Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4760-9_4 [Translation of Kanizsa, G. (1955). Margini quasi-percettivi in campi con stimolazione omogenea. *Rivista di Psicologia*, 49, 7–30. Giunti-Barbéra.]
- Legge 5 febbraio 1992, n. 104, “Legge-quadro per l’assistenza, l’integrazione sociale e i diritti delle persone handicappate”. (1992, 17 febbraio) (Italia). – Suppl. Ordinario n. 30. *Gazzetta Ufficiale*, (39). <https://www.gazzettaufficiale.it/eli/gu/1992/02/17/39/so/30/sg/pdf>
- Moon, N. W., Todd, R. L., Morton, D. L., & Ivey, E. (2012). *Accommodating Students with Disabilities in Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM)*. Center for Assistive Technology and Environmental.
- Niss, M. (2020). Functions learning and teaching. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 303–306). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_96
- Piroi, M., Manolino, C., Armano, T., Taranto, E., & Capietto, A. (2023). Teacher Professional Development via a MOOC on Assistive Technology for Visually Impaired Students Learning Mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 16(1), 59–78. <https://doi.org/10.26711/007577152790164>
- Taibbi, M., Bernareggi, C., Gerino, A., Ahmetovic, D., Mascetti, S. (2014). AudioFunctions: Eyes-Free Exploration of Mathematical Functions on Tablets. In K. Miesenberger, D. Fels, D. Archambault, P. Peñáz, W. Zagler (Eds.), *Computers Helping People with 1279 Special Needs. ICCHP 2014. Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 8547, pp. 537–544). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08596-8_84
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

LA FISICA DEI GALLEGGIANTI SECONDO ARCHIMEDE CON LE CLASSI GEOGEBRA

Antonella Palma¹, Luca Dragone²

¹Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata, Italia; ²Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Italia
antonella.palma@gmail.com

Abstract

In questo lavoro si considera il problema del galleggiamento seguendo la trattazione squisitamente geometrica presente nel Libro II *Sui Galleggianti* di Archimede. L'approccio storico, che si avvale anche della lettura diretta dei testi e dei diagrammi archimedei, consente di avvicinarsi alla sensibilità geometrica tanto cara ai matematici della Grecia ellenistica, e anche di ampliare lo spettro semantico dei concetti ivi affrontati. La modellizzazione di uno scafo come segmento di paraboloide di rotazione, intuizione straordinariamente moderna di ingegneria navale, permette lo studio delle condizioni di stabilità in base alla densità relativa del materiale di cui è costituito lo scafo, all'altezza e al parametro caratteristico del paraboloide, che possono essere considerati come elementi costruttivi di una imbarcazione. Inoltre il comportamento del modello esibisce un risultato notevole di biforcazione. L'uso del software GeoGebra 2D e 3D consente di visualizzare dinamicamente la modellizzazione proposta da Archimede, e aiuta a fornire la chiave di lettura dei diagrammi presenti nei codici, che non sono immediatamente interpretabili in quanto schematici e non pittorici.

Parole-chiave

Archimede, Galleggiamento, Modello, GeoGebra, Storia della matematica

INTRODUZIONE

Nello studio dei problemi fisici talvolta si privilegia la risoluzione formulata attraverso il linguaggio algebrico, sicuramente potente e veloce, che però rischia di mettere in ombra i raffinati aspetti geometrici che si celano nella natura dei fenomeni. Invece, nei percorsi scolastici la visualizzazione e l'immaginazione sono fondamentali per dare significato ai concetti (Arzarello et al., 2009, pp. 97-109). La proposta di un percorso sul problema del galleggiamento seguendo il testo di Archimede intende, sia recuperare gli aspetti legati alla sensibilità geometrica della Grecia ellenistica (Russo, 2019), che indicare un esempio geniale di modellizzazione che racconta come nasce ed evolve un'idea scientifica. L'approccio storico non ha il solo fine di far conoscere un evento della storia ma vuole presentare il potente metodo di Archimede, che consiste nell'illustrare, spiegare e dimostrare i principi fisici utilizzando la geometria.

L'APPROCCIO INTERDISCIPLINARE ALL'OPERA DI ARCHIMEDE

Αρχιμήδους Οχουμένων è un'opera matura di Archimede (287-212 a.C.), nella quale sono richiamati risultati ottenuti in trattati precedenti, quali *l'Equilibrio dei piani*, *Sugli Sferoidi e Conoidi* e la *Quadratura della parabola*. Ciò rende l'opera ostica, non solo per i contenuti, ma anche per i requisiti necessari alla sua comprensione. Lo sforzo intellettuale richiesto è ripagato dall'opportunità di conoscere l'idea geniale di modellizzazione di uno scafo come paraboloide di rotazione e di trattare un fenomeno notevole di biforcazione con strumenti matematici di base. Sfruttando un felice connubio tra la Matematica, la Fisica e la Tecnologia, collegate con la Storia e le Lingue antiche, è possibile affrontare il tema in modo da cogliere la complessità dell'argomento nel suo insieme senza perdersi nei tecnicismi

propri di ciascuna disciplina. L'approccio proposto richiede di mantenere un quadro d'insieme e di tenere conto di alcuni risultati non dimostrati, bensì ottenuti attraverso osservazioni. Ciò consente un avanzamento consapevole dove gli approfondimenti possano essere rinviati a studi personali successivi. La storia funge da ponte interdisciplinare per far entrare la matematica all'interno di ambiti diversi del sapere, ed evidenzia che le creazioni di questa disciplina, come l'uso dei modelli, sono figlie di problemi spesso nati in altri campi della scienza. La lettura dei testi originali, oltre ad avere l'intrinseco valore di risalire alle fonti per una ricerca diretta, è importante perché dà centralità alle parole: lo sforzo della traduzione letterale è complemento e rinforzo alla fatica della comprensione del significato matematico.

LA VISUALIZZAZIONE DEL MODELLO CON LO STRUMENTO GEOGEBRA

Seguendo le indicazioni di Archimede si studiano le condizioni fisiche di stabilità e instabilità di un segmento di paraboloide di rotazione prima poggiato su un piano, secondo l'idea semplificativa suggerita da Lucio Russo, e poi immerso in un liquido.

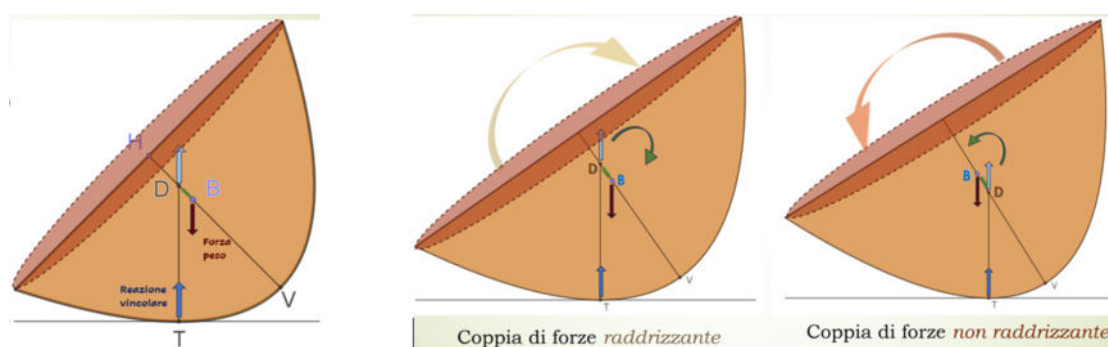


Figura 1. Modellizzazione di uno scafo come segmento di paraboloide di rotazione poggiato su un piano. Con B è indicato il baricentro del modello; con T è indicato il punto di appoggio.

L'utilizzo del software GeoGebra 2D e 3D per riprodurre le situazioni indicate nelle proposizioni del Libro II *Sui Galleggianti* consente di osservare dinamicamente in che modo e in quale intervallo variano i parametri geometrici del modello nella condizione di stabilità. Quest'ultima si realizza quando la coppia di forze che agisce sul corpo è raddrizzante, ossia tende a portare le forze sulla stessa retta perpendicolare alla superficie di appoggio. Il superamento del mero aspetto pittorico di un disegno permette di comprendere le relazioni di disuguaglianza presenti nelle proposizioni. La modellizzazione per lo studio di stabilità prevede la variazione continua dell'angolo di inclinazione rispetto alla posizione verticale (la simulazione del rollio), e ciò determina cambiamenti di altre grandezze collegate tra loro in modo non semplice da immaginare. Lo strumento GeoGebra permette di ricostruire il modello pensato da Archimede, col valore aggiunto di poter modificare i parametri in modo continuo e indipendente, consentendo esplorazioni di un numero molto grande di casi specifici che rendono evidenti i risultati ottenuti con dimostrazioni geometriche rigorose.

Per la comprensione delle proposizioni di Archimede, le parole esigono l'interpretazione dei diagrammi che, particolarmente in quest'opera, risultano criptici e apparentemente scollegati dal testo. È attraverso la mescolanza della diagrammatica schematica greca e della tecnologia moderna (GeoGebra) che è possibile ricostruire in modo chiaro la geometria del modello. I risultati ricavati dal siracusano ventidue secoli fa sono incredibilmente attuali e innovativi, tanto da essere superati solo in epoca moderna grazie all'uso della matematica computazionale.

LA PROPOSTA DIDATTICA

Il percorso didattico, realizzato in una classe terza di Liceo Scientifico, si attiene fedelmente all'opera di Archimede. Si evita pertanto l'impiego della trigonometria che snaturerebbe il fascino della linea dimostrativa originale (Rorres, 2004). L'uso di un *Libro GeoGebra* (codice: PG2UK9XT) permette di proporre attività costituite da sezioni guidate e da componenti interattive, con finestre per tracciare disegni nuovi, o già parzialmente realizzati. Domande mirate stimolano all'esplorazione delle figure grazie alla modifica di alcuni parametri e all'osservazione di situazioni particolari. Inoltre, la scoperta di alcune proprietà ha luogo, sia attraverso la misurazione di grandezze con gli strumenti di GeoGebra, sia tramite dimostrazioni geometriche. Nel percorso proposto l'apprendimento per scoperta e l'utilizzo del problem solving sono parimenti protagonisti.

Un racconto come innesco

Il coinvolgimento iniziale degli studenti avviene attraverso un aneddoto curioso: la storia fallimentare del galeone Vasa. Questa vicenda viene confrontata con la narrazione entusiastica di Ateneo di Naucrati relativa alla nave più grande del mondo antico, la *Συρακοσία*, costruita da Archimede grazie ai risultati custoditi nel testo *Sui Galleggianti*, che si può considerare il primo trattato di ingegneria navale.

La costruzione geometrica

Per ricavare la geometria del modello, si introducono alcune proprietà della parabola ricavate con riga e compasso. Gli studenti sono guidati ad osservare criticamente i parametri che caratterizzano la forma della figura, fino ad ottenere l'equazione della parabola in modo costruttivo. L'estensione al segmento di paraboloide di rotazione avviene gradualmente attraverso la manipolazione di oggetti concreti e figure GeoGebra3D. È importante l'approccio diretto alla figura: per i Greci l'oggetto non esiste in uno spazio, ma lo spazio è l'oggetto stesso definito dalle sue caratteristiche. Questo concetto è importante per capire come Archimede trova le relazioni geometriche del segmento di paraboloide in condizione di stabilità.

La parabola secondo la geometria ellenistica con la Classe GeoGebra

In una attività del *Libro GeoGebra* si forniscono le indicazioni per disegnare la parabola e individuare il vertice V e un punto P che determina i segmenti PQ e VQ, rispettivamente ordinata e ascissa del punto P della parabola (fig. 2). La costruzione consente di precisare che i termini ascissa e ordinata si riferiscono a segmenti e non a coordinate cartesiane (concetto ben più recente) e sottolineare così il significato di curva nell'accezione ellenistica. Una volta introdotta la specifica terminologia, si considera la proprietà caratteristica della parabola: «I quadrati costruiti sulle ordinate di due punti della parabola stanno nello stesso rapporto delle ascisse di quei punti», che viene interpretata nel disegno GeoGebra e tradotta in termini di relazione matematica tra segmenti. Il rapporto trovato si può ricondurre in un secondo momento al concetto moderno di funzione $y=ax^2$.

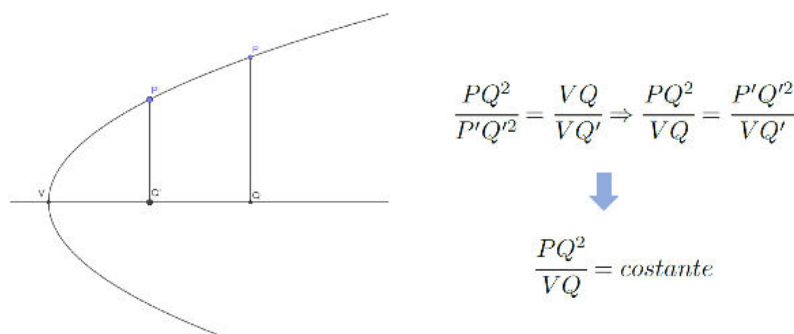


Figura 2. In figura PQ è l'ordinata e VQ l'ascissa del punto P. La proprietà caratteristica della parabola

La parabola così ottenuta è dunque una figura dalla quale si ricavano le caratteristiche, rovesciando la visione moderna che ricava il grafico dalla funzione algebrica. Poiché il concetto di funzione è uno dei principali ostacoli di carattere epistemologico riconosciuti sia nella storia della matematica sia nella didattica (Jankivist, 2009), questo ribaltamento può rappresentare una via alternativa per giungere all'equazione della parabola in modo più consapevole e creativo.

Definizioni di tangente a una parabola in un punto e di sottonormale di una parabola

Archimede non definisce in modo esplicito la tangente, ma chiaramente intende una retta che non tagli la parabola e abbia un solo punto in comune con essa; usa però in modo esplicito il teorema: se $AV = VQ$, allora la retta AP è tangente alla parabola (fig. 3A). La dimostrazione di ciò, attribuita ad Apollonio, è proposta su GeoGebra come esercizio guidato.

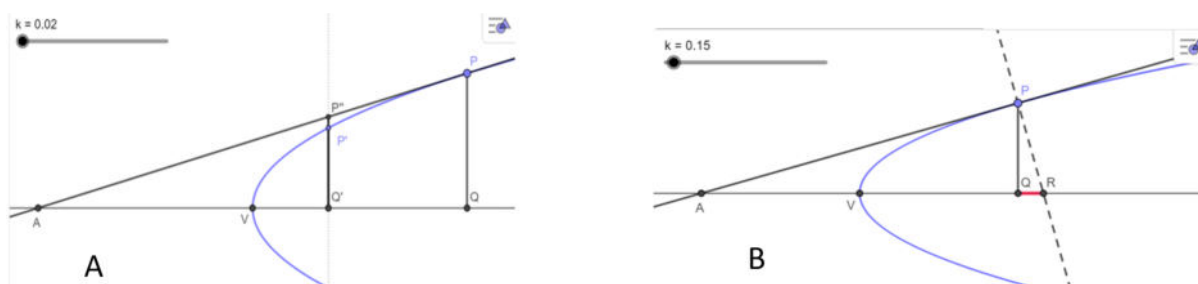


Figura 3. Definizioni di tangente alla parabola in un punto (P) e di sottonormale della parabola (QR)

La sottonormale di una parabola è definita come il segmento che ha per estremi il punto Q di intersezione dell'asse con l'ortogonale all'asse passante per P e il punto R di intersezione dell'asse con l'ortogonale alla tangente in P (fig. 3B). La sottonormale QR non dipende dal punto P, e pertanto è una costante caratteristica della parabola che prende anche il nome di parametro p . Da una dimostrazione geometrica si ricava che la caratteristica della parabola è il doppio parametro: $\frac{PQ^2}{VQ} = 2p$, il che determina la relazione $a = \frac{1}{2p}$ che lega p con il coefficiente a della moderna equazione canonica della parabola.

Studio dell'equilibrio del segmento di paraboloide poggiato su un piano

La scelta di proporre lo studio preliminare dell'equilibrio di un segmento di paraboloide poggiato su un piano è uno stratagemma didattico che consente di ridurre la complessità dell'argomento senza banalizzarlo. Questa analisi, infatti, non è direttamente presente nel trattato di Archimede, che studia prima la stabilità dell'equilibrio del segmento di paraboloide galleggiante, e poi considera il paraboloide poggiato come caso particolare in cui la parte immersa è nulla. Per affrontare questo studio si definiscono il vertice, l'altezza e l'asse del segmento di parabola retto, e poi si estende il concetto, in modo costruttivo, al segmento di paraboloide retto. Archimede introduce il baricentro senza definirlo, e assume come noto il fatto che il peso di un corpo sia in esso applicato; ne determina però la posizione nel caso del segmento di paraboloide pieno: il baricentro si trova sull'asse nel punto che dista dal vertice due terzi della lunghezza dell'asse stesso. Per ricavare le condizioni di stabilità del paraboloide poggiato si devono considerare le due forze: il peso, applicato al baricentro B, e la reazione vincolare, applicata nel punto di appoggio T, che agisce sull'asse nel punto D sulla verticale passante per T (fig. 4). Si costruisce la sottonormale, che ricordiamo essere indipendente dal punto T di tangenza al piano. L'equilibrio è determinato dalla posizione reciproca dei punti di applicazione delle forze. Sull'asse, se il baricentro B si trova "sotto" il punto D, la coppia di forze tende a raddrizzare il segmento di paraboloide (ossia far sì che l'asse tenda a divenire perpendicolare al piano d'appoggio); si parla in

questo caso di equilibrio verticale stabile. In caso contrario, la coppia di forze tende a far aumentare l'inclinazione dell'asse; si parla in questo caso di equilibrio verticale instabile.

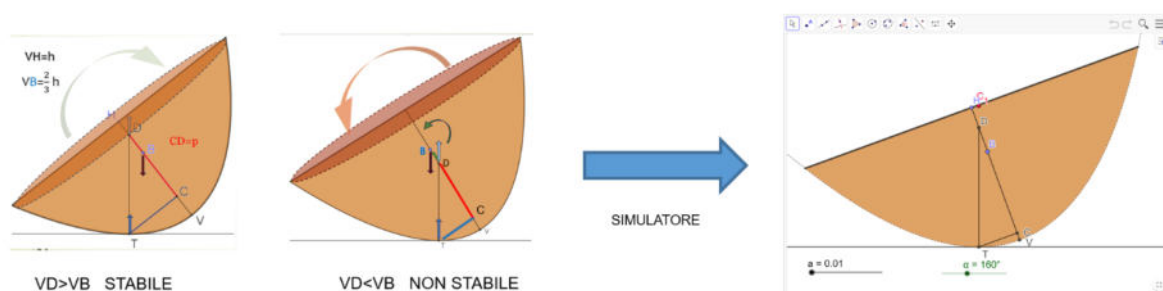


Figura 4. Condizioni di stabilità e instabilità di un paraboloide poggiato e modello realizzato con GeoGebra2D

Il modello realizzato con GeoGebra 2D presenta la figura di segmento di paraboloide con tre parametri variabili: la concavità a (legata al parametro p), l'angolo α di inclinazione dell'asse rispetto al piano orizzontale e l'altezza h del segmento di paraboloide. La figura dinamica consente di osservare le posizioni reciproche dei punti D e B sull'asse al variare dei parametri e trovare diverse situazioni di stabilità e instabilità attraverso esplorazioni libere. La condizione geometrica in cui la coppia di forze è raddrizzante è verificata dalla disuguaglianza $VD > VB$ e dalla più stringente $CD > VB$, dove CD è la sottonormale. Semplici sostituzioni permettono di ricavare una disuguaglianza legata al solo parametro di forma del segmento di paraboloide: $\frac{h}{p} < \frac{3}{2}$, che si può anche scrivere $ah < \frac{3}{4}$. Tale disuguaglianza è condizione sufficiente ma non necessaria di stabilità e non dipende dall'angolo di inclinazione α .

Studio del fenomeno di biforcazione

La condizione in cui la coppia di forze aumenta l'inclinazione del segmento di paraboloide si ha per $\frac{h}{p} > \frac{3}{2}$ (oppure $ah > \frac{3}{4}$) che è condizione necessaria ma non sufficiente di instabilità. La figura dinamica consente, una volta individuata una condizione di instabilità, di osservare un fenomeno di biforcazione all'aumentare dell'angolo α di inclinazione.

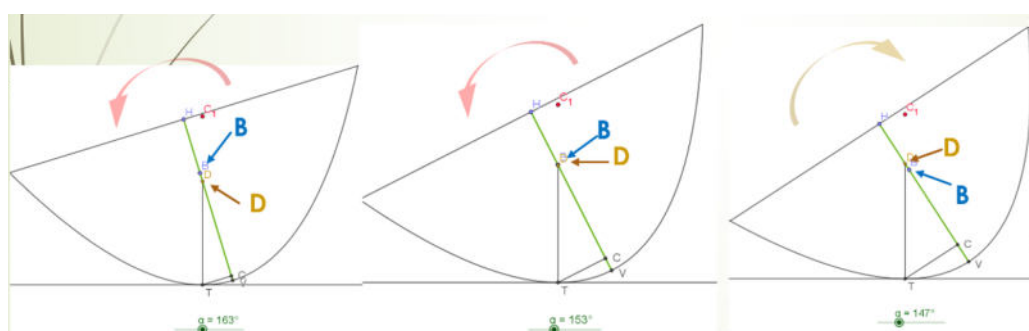


Figura 5. Fenomeno di biforcazione

Segmento di paraboloide immerso in un liquido

Quando il segmento di paraboloide viene immerso nel liquido le due forze agenti sono la forza peso dello scafo e la spinta idrostatica applicata nel baricentro del segmento di paraboloide obliquo della parte immersa, postulato inedito enunciato esplicitamente nel trattato *Sui Galleggianti*. Il solido posto

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia con la base parallela alla superficie del liquido sarà evidentemente in equilibrio per ragioni di simmetria, ma si intende studiare per quali condizioni tale equilibrio sia stabile.

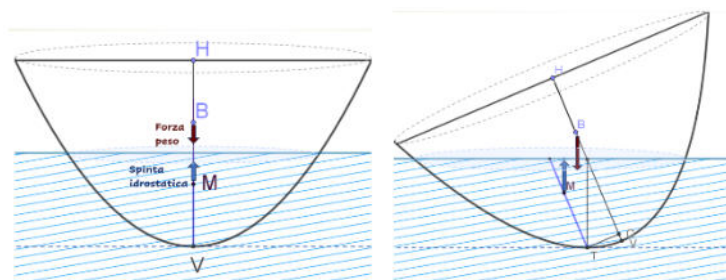


Figura 6. Segmento di paraboloide immerso in un liquido. Il punto B indica il baricentro del modello e M il baricentro del segmento di paraboloide obliquo che simula la parte immersa.

La parte immersa del modello con angolo di inclinazione diverso da zero è un segmento di paraboloide obliquo. Anche in questo caso, prima si definiscono il vertice, l'altezza e l'asse nel segmento obliquo della parabola, più complessi che nel segmento retto, e poi si estendono le definizioni al segmento di paraboloide obliquo. Le costruzioni con GeoGebra2D vengono così generalizzate al caso 3D.

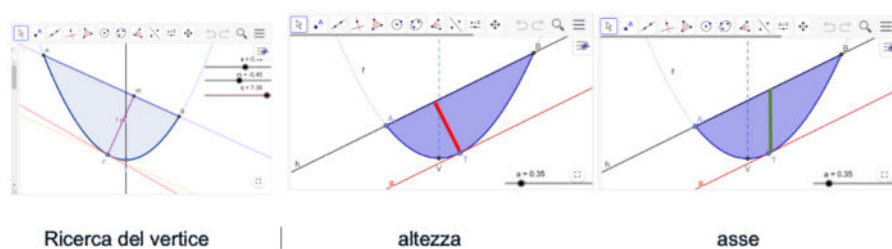


Figura 7. Vertice, altezza, asse nel segmento parabolico obliquo

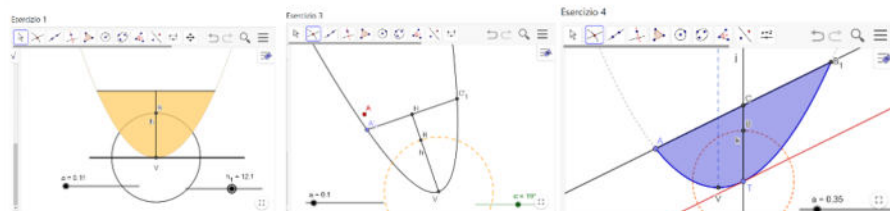


Figura 8. Esercizi per trovare il baricentro del segmento parabolico obliquo

Per lo studio del segmento di paraboloide in acqua c'è bisogno di far riferimento a due risultati ricavati da Archimede in altri contesti: uno indica che il volume del segmento di paraboloide (sia esso retto o obliquo) dipende esclusivamente dalla lunghezza del suo asse, l'altro che il rapporto tra i volumi di due segmenti di paraboloide di rotazione è uguale al rapporto tra i quadrati dei loro assi.

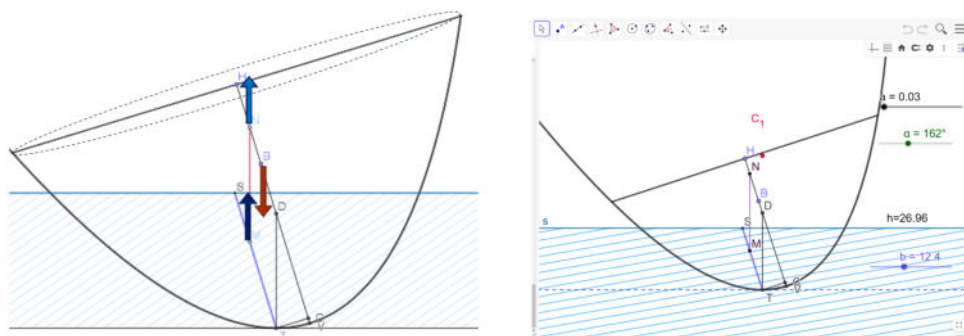


Figura 9. Segmento di paraboloide immerso in un liquido e simulatore nella Classe GeoGebra

Una trattazione geometrica, simile a quella del segmento di paraboloide poggiato su un piano, consente di trovare le condizioni di stabilità attraverso la posizione reciproca dei punti di applicazione delle forze sull'asse del segmento che simula lo scafo. Nella Classe GeoGebra è presentata la figura dinamica di un segmento di paraboloide immerso dove, oltre alle variabili: concavità a , angolo di inclinazione α e l'altezza h , si aggiunge il parametro b che indica la profondità di pescaggio. Esso dipende dalla densità relativa tra lo scafo e il liquido, determinata dal rapporto $s = \frac{\rho_{\text{scafo}}}{\rho_{\text{liquido}}}$. Lo studio geometrico di stabilità

riconduce a disuguaglianze tra segmenti che acquistano significato grazie ai risultati matematici e fisici ricavati in altri trattati, consentendo di scrivere una notevole relazione per la stabilità dipendente solo dalla forma dello scafo (p e h) e dal materiale (s) dell'imbarcazione considerata come un solido pieno:

$$s > \left(1 - \frac{3p}{2h}\right)^2 = \left(1 - \frac{3}{4ah}\right)^2.$$

La disequazione sembra favorire l'uso di materiali con peso specifico maggiore, concetto apparentemente controintuitivo, ma che in realtà si coniuga perfettamente con il modello teorico e con le sue applicazioni pratiche. Le condizioni di stabilità del modello dipendono da un delicato e ponderato equilibrio delle caratteristiche di costruzione.

GEOGEBRA E IL PENSIERO DIAGRAMMATICO DI ARCHIMEDE

Il percorso proposto ha seguito la linea dimostrativa di Archimede, ma è stato necessario ampliare le spiegazioni e utilizzare tanti risultati ottenuti altrove. Le costruzioni con GeoGebra, sfruttando la dinamicità del modello, hanno consolidato la comprensione visiva delle proprietà ricavate. Tornare con queste acquisizioni alla lettura del nudo testo archimedeo consente di godere delle parole prima ostiche e criptiche che lentamente disvelano la loro chiarezza. Ad esempio il testo della proposizione 2 altro non è che la descrizione della semplice situazione di stabilità nel caso in cui $h < \frac{3}{2}p$, sia per il segmento di paraboloide poggiato che per quello immerso. Le proposizioni successive completano lo studio di stabilità quando la base del segmento si trova completamente immersa, ritrovando ancora le condizioni studiate col simulatore GeoGebra.

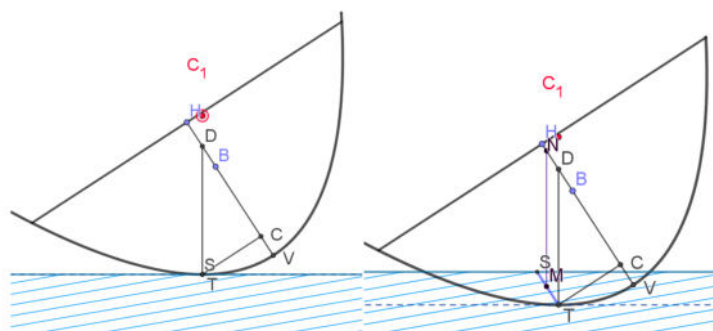


Figura 10. Condizioni di stabilità per qualunque peso specifico riprodotte col simulatore GeoGebra

La proposizione 8 è la più oscura, non solo per il contenuto, ma anche perché fa riferimento a un diagramma che sembra completamente disgiunto dal testo, in cui viene riportato un angolo $EB\Psi$ che è ignoto nella costruzione.

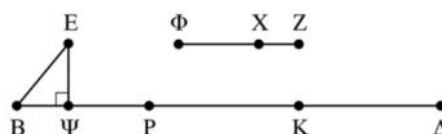


Figura 11. Diagramma riportato nel testo del palinsesto digitalizzato da Fleck

Solo lo studio preliminare effettuato col simulatore consente di interpretare le indicazioni presenti nella dimostrazione di Archimede che progressivamente si sovrappongono alle conoscenze acquisite. L'esercizio di studio della proposizione 8, proposto attraverso il modello realizzato dinamicamente con GeoGebra, sul quale si sovrappone il diagramma di Archimede (fig. 10), permette di muoversi consapevolmente tra antico e moderno, seguendo l'acume del ragionamento del siracusano, troppo geniale forse per essere compreso, non solo dai suoi contemporanei, ma anche da noi che possiamo avvalerci dei progressi matematici e informatici dei ventidue secoli che ci separano dal suo tempo.

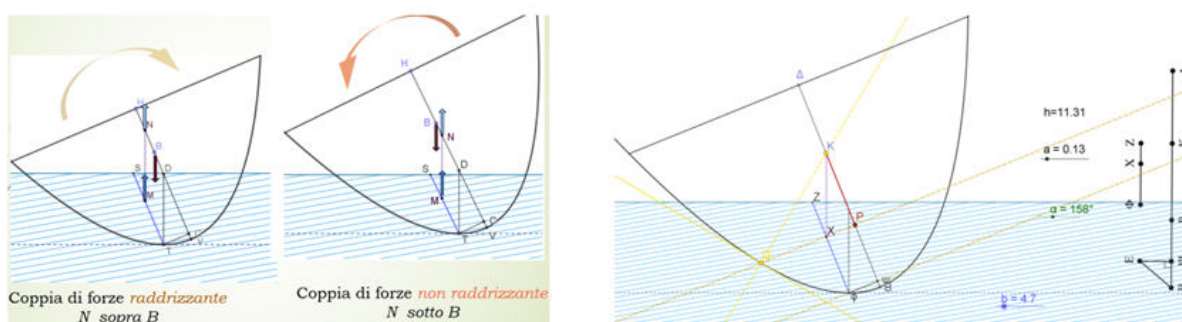


Figura 12. Condizioni di stabilità e instabilità ricavate col simulatore e condizione di equilibrio ad un certo angolo secondo le indicazioni di Archimede nella proposizione 8

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia la prof.ssa Loredana Morgante e tutto il personale scolastico che ha consentito la sperimentazione nella classe 3 del Liceo Scientifico Plinio Seniore - Roma

BIBLIOGRAFIA

- Arzarello F., Paola D., Robutti O., Sabena C. (2009). *Gestures as semiotic resources in mathematics classroom*, *Educ. Studies in Mathematics*. 70(2), pp 97-109.
- Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic.
- Dragone, L., Palma, A. (2023). *La proposta didattica dell'approccio geometrico alla fisica dei galleggianti secondo Archimede*. III convegno matematica, natura e scienza dell'alta costiera amalfitana. L'insegnamento e il fascino della matematica nella lettura della natura. Periodico di matematica per l'insegnamento secondario. Pagine 77-96 (parte prima) e 285-314 (parte seconda).
- Fleck H.F. (2016). *Archimede: Sui corpi galleggianti*.
<https://www.heinrichfleck.net/quaderni/corpi%20galleggianti.pdf>
- Frajese A. (1974). *Opere di Archimede*. UTET.
- Freudenthal H. (1991). *Revisiting mathematics education—China lectures*. Kluwer Academic.

Heath, T.L. (1981). A History of Greek Mathematics - vol II From Aristarchus to Diophantus, Dover Publications Inc.

Jahnke H.N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. J. Fauvel, J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education, the ICMI study (pp. 291–328). Dordrecht: Kluwer Academic

Jankvist U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, Educ Stud Math. Springer Science.

Netz, R., Noel, W. (2007). *Il codice perduto di Archimede*. Rizzoli.

Rorres C. (2004) Completing Book II of Archimedes's On Floating Bodies. The Mathematical Intelligencer (Vol. 26, N.3, pp. 32-42) https://www.cs.drexel.edu/~crrorres/screw/Rorres_MI_2004.pdf

Russo L. (2019). *Archimede*. Carocci.

NON SFUGGA IL MOVIMENTO.....

Laura Tomassi

Università di Roma Tor Vergata

Dipartimento di Matematica

laura.tomassi1@gmail.com tomassi@axp.mat.uniroma2.it

Abstract

Scopo del presente studio è sviluppare un percorso volto a mediare negli studenti la percezione del concetto di velocità, partendo da modelli intuitivi fino a costruire semplici modelli matematici. Seguendo il quadro teorico della storia integrata nella didattica della matematica, attraverso l'utilizzo di artefatti storici quali i *problemi d'abaco* del Liber Abaci di Leonardo Fibonacci, che costituiscono dei "compiti di realtà storica", si propone agli studenti del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado una riflessione sul concetto di velocità.

Parole-chiave

Velocità; modello matematico; storia; falsa posizione; Medioevo

LA STORIA INTEGRATA NELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA APPLICATA

Esistono ormai da anni studi volti a comprendere l'efficacia e le criticità dell'uso della storia integrata nella didattica della matematica (Chorlay R., 2022). Una prima descrizione di Poincaré ha posto un parallelismo tra lo sviluppo del pensiero matematico degli studenti e lo sviluppo storico concettuale della matematica nell'umanità. L'approccio genetico ha dato a questo il nome di ricapitolazione psicologica secondo la quale "Lo sviluppo della mente del bambino è una breve ricapitolazione dell'evoluzione filogenetica" (Hernandez, L. R., Furinghetti, F., Radford, L., & English, L., 2008).

In questo articolo si presenta il concetto di velocità, importante nei corsi di fisica del primo anno della scuola secondaria di secondo grado, tenendo conto principalmente degli studi fatti secondo l'approccio semiotico (Radford, L., 2008). Non solo è necessario individuare le tappe storiche dell'evoluzione dei concetti, ma al fine di focalizzare l'attenzione sul modo in cui tempo, spazio e velocità sono stati concepiti in determinati periodi storici, le concettualizzazioni di queste grandezze devono tenere conto delle strutture mentali culturali che le sostengono.

La domanda di base del mio studio è quindi: *interrogandosi sulle condizioni culturali e sociali che hanno reso possibili i costrutti teorici di spazio, tempo e velocità, si può trovare il modo di mediare l'apprendimento di questi concetti in ragazzi tra i tredici e i quindici anni?*

I compiti di realtà storica: "i problemi del Liber Abaci"

Oggetto del mio studio è l'impatto della lettura e soluzione dei problemi di inseguimento e svuotamento del Liber Abaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci. L'esperienza d'aula relativa ad esso viene estesa in Curriculum Verticale su classi terminali di scuola secondaria di primo grado ed iniziali di scuola secondaria di secondo grado.

La lettura dei testi originali in manoscritti (Conv. Sopp. C.I. 2616, BNCF, consultabile sul sito del Museo Galileo) e solo in un secondo tempo su testo stampato latino (Fibonacci L., 1202) o eventualmente tradotto (www.progettofibonacci.it), cioè degli artefatti storici principali di questo lavoro, ha portato gli studenti a contatto con ciò che definisco *compiti di realtà storica*: compiti cioè che riuniscono in sé le caratteristiche del compito di realtà (Tessari 2014), trasferito in un ambito storico particolarmente significativo per le esigenze d'apprendimento degli studenti. Essi riguardano o la vita quotidiana con le sue attività commerciali o sono una rappresentazione dei quesiti teorici posti nelle Scuole d'Abaco.

I problemi proposti sono uno spaccato realistico della vita medioevale, delle monete in uso, delle unità di misura, delle conoscenze tecnologiche e scientifiche dell'epoca, scritti in un latino che era sul punto di cedere il passo al volgare. Ciò li rende una base versatile per progettare attività didattiche multidisciplinari. I problemi del XII capitolo sono detti «questioni erratiche», problemi di natura eterogenea tutti risolvibili con diversi metodi, illustrati dall'autore, seguendo varie vie, ognuna delle quali porta al risultato voluto. Ciò costituisce un tentativo superare una didattica per regole rigide da applicare meccanicamente. Si deve prima di tutto capire il problema, cercare una strada risolutiva autonoma, confrontarla con quelle proposte e poi scegliere una strada «più bella» (termine utilizzato da Leonardo Pisano) per risolverlo. Non si tratta solo di pensiero divergente ma di sviluppare senso critico, condizione necessaria per il quale è la scelta e la possibilità di scelta. In generale viene proposto sempre un possibile approccio geometrico e un possibile approccio aritmetico. I due approcci dovrebbero essere sviluppati in ciascuno indipendentemente dalle singole caratteristiche cognitive. Le «questioni erratiche» non sono sempre legati al commercio o all'economia o alla pratica della vita quotidiana, ma sono problemi generalmente figurati con una immagine, un racconto, spesso surreale, nel senso che contiene elementi fortemente realistici ma mescolati ed inseriti in un contesto costruito ad arte. L'immagine serve per fissare la mente su tipo di problema matematico, su una procedura o, a volte per raccontare una situazione spesso, per i risultati numerici che produce, ridicolmente paradossale. In realtà si tratta di problemi astratti che cominciano col formare il corpo della nuova matematica diffusa da Leonardo in Occidente, che, con l'introduzione dei numeri razionali e dei relativi algoritmi, comincia ad assumere una diversa fisionomia. Il racconto con i suoi personaggi permette di articolare verbalmente una sorta di proto algebra dove le incognite sono indicate con una locuzione che ricorre, al posto di una lettera che la rappresenti simbolicamente, nei diversi passaggi algebrici (Ghione F., Catastini L., 2023). Il periodo storico prescelto è il 1200, nell'ottica del parallelismo tra l'evoluzione della storia della matematica e lo sviluppo mentale dei ragazzi: in entrambi i casi si tratta di un periodo in cui si sta costruendo un pensiero prealgebrico e in cui si stanno gettando le radici per fondare un vero e proprio pensiero scientifico.

In particolare i problemi di inseguimento, di svuotamento e di riempimento riguardano concetti che nel 1200 non potevano ancora contare sullo sviluppo di una vera scienza fisica e sono in realtà dei pretesti per l'autore per parlare di matematica. La teoria dei rapporti non ammetteva, del resto, una definizione di velocità come rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, non essendo queste ultime due grandezze omogenee. In ambito filosofico, mancava un apparato concettuale per affrontare lo studio del moto in termini quantitativi. Comprendere la motivazione socioculturale è importante per consolidare la scelta del periodo storico e di come portarlo in classe. Le motivazioni preliminari della scelta dei problemi d'abaco per studiare la velocità

- possono dar conto di come si siano effettivamente evoluti nella storia
- la maniera intuitiva e per situazioni di progressiva complessità crescente possono contribuire a costruire un modello corretto e ragionato di velocità ed in generale di tasso di variazione.

IL PERCORSO DIDATTICO

Di seguito verranno riportate le diverse attività sui problemi del Liber Abaci possono essere proposte e che in parte sono state già presentate agli studenti.

Attività 1

XII.3.23

De cane et uulpe.

Irem si queratur de uulpe, que est ante canem pasus 50, et pasus 9 fugientis uulpis sunt passus 6 sequentis canis; queritur in quantum ea consequetur. Hec enim questio

Figura1 Il problema del cane e della volpe, dal Liber Abaci (Capitolo XII paragrafo 3)

Si propone agli studenti la lettura (in latino o del testo tradotto a seconda dell'età). Alla lettura del testo latino segue la traduzione in italiano (reperibile comunque sul sito www.progettofibonacci.it) e una scheda di “osservazione” che riporto di seguito:

- *Il problema parla di movimento. Quali grandezze relative al movimento intervengono in esso?*
- *La velocità dei due animali come è rappresentata?*
- *Rifletti sulla domanda e sul tipo di risposta che puoi dare.*
- *Risolvi il problema con il metodo che ritieni più opportuno.*
- *Leggiamo insieme, nella seconda facciata di questa scheda, la soluzione*
- *Vi racconto la storia di questo problema.*

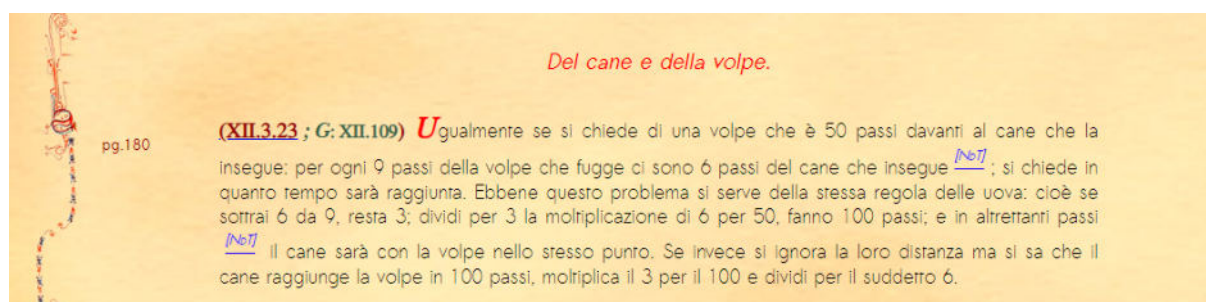


Figura 2 Il problema del cane e della volpe tradotto sul sito www.progettofibonacci.it

Un approccio risolutivo moderno partirebbe dal rapporto delle due velocità e dal vantaggio temporale dato alla lepre. Il tempo interviene in maniera obliqua nella risoluzione data da Fibonacci.

$$\frac{9x}{6} - x = 50$$

passi
100
distanza
50

Detto in termini moderni:

$$\frac{\text{velocità cane}}{\text{velocità della volpe}} = \frac{9}{6}$$

$$\frac{\text{tempo impiegato dalla volpe}}{\text{tempo impiegato dal cane}} = \frac{9}{6}$$

vantaggio della volpe=50 passi

$$\text{tempo impiegato dalla volpe} = \frac{9}{6} \text{ tempo impiegato dal cane}$$

$$\text{tempo impiegato dal cane} + 50 = \frac{9}{6} \text{ tempo impiegato dal cane}$$

$$\text{tempo impiegato dal cane} = \frac{6}{3} \cdot 50 = 100 \text{ passi}$$

D'altra parte è interessante notare che lo stesso problema veniva risolto da Alcuino da York (400 anni prima) nella stessa maniera

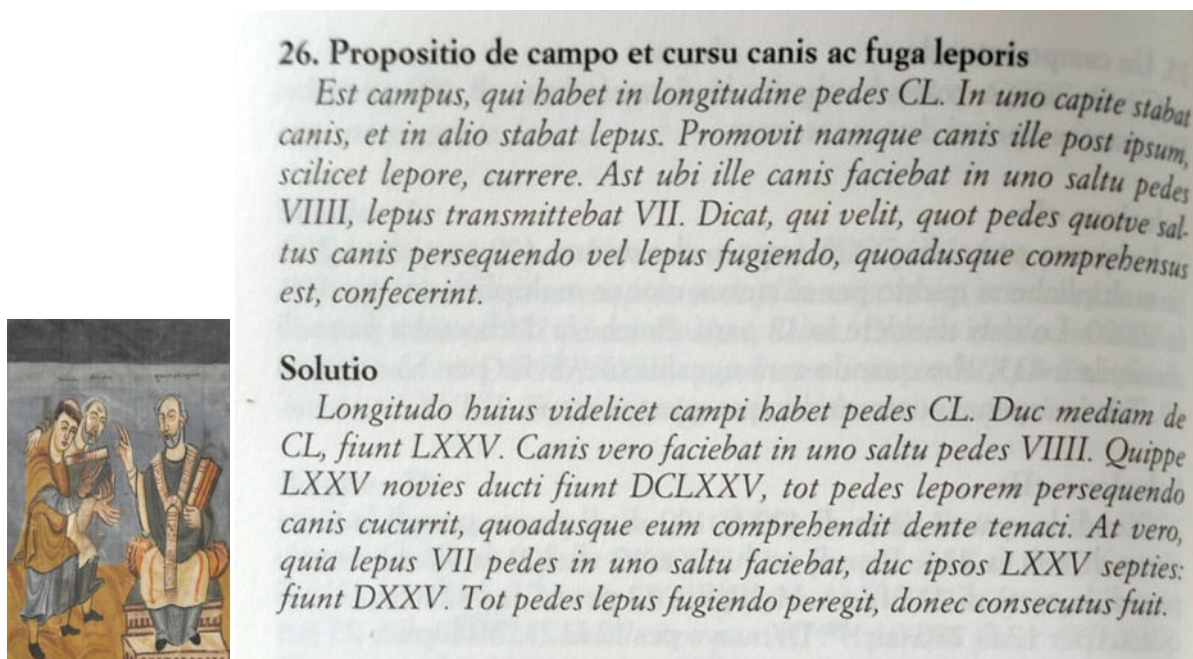


Figura 3 Il problema del cane e della volpe nella versione di Alcuino

Ma anche 200 anni più tardi Paolo Dell'Abbaco riproponeva lo stesso problema con uno schema di soluzione analogo: "Una volpe è 40 passi avanti a un cane, e ogni 3 passi del cane sono lunghi quanto 5 della volpe. Chiedo in quanti passi il cane raggiungerà la volpe". Il movimento sia del cane che della volpe si riferiva ad uno stesso punto spaziale (la posizione iniziale del cane nella corsa). Effettivamente i primi problemi di inseguimento risalgono ad un testo cinese del II secolo avanti Cristo e si trovano nella cultura matematica di molte civiltà, continuando a permanere nei trattati di aritmetica pratica per tutto il Rinascimento ed oltre. La versione di Alcuino è la prima in Europa (Franci R., 2016). Nei problemi medievali il movimento degli oggetti coinvolti rimaneva non descritto all'interno di un sistema di riferimento unificante. I calcoli venivano effettuati per confronto di "velocità" e non attraverso l'integrazione dei dati in una stessa totalità. Si tratta di un concetto davvero primitivo di velocità.

Attività 2

XII.3.33

De duabus nauibus se se inuicem coniungentibus.

Naves due distabant ad inuicem per aliquod spatium; quod iter prima nauis explebat in diebus 5; alia in diebus 7: queritur si ceperint iter in eadem hora, in quot diebus erunt coniuncte. Multiplica 5 per 7, erunt 35; et tot dies pone, in quibus prima nauis faciet iter

Figura 4 Il problema delle due navi, dal Liber Abaci (Capitolo XII paragrafo 3)

- Il problema parla di movimento. Quali grandezze relative al movimento intervengono in esso?
- La velocità delle due navi come è rappresentata?
- Rifletti sulla domanda e sul tipo di risposta che puoi dare.
- Risolvi il problema con il metodo che ritieni più opportuno.
- Leggiamo insieme, nella seconda facciata di questa scheda, la soluzione
- Ti sembra che vi sia un'innovazione culturale e scientifica rispetto al primo problema?

Due navi che si devono congiungere tra loro.

(XII.3.33 ; G: XII.131) Due navi distano tra loro di un certo spazio, la prima nave compie questo percorso in 5 giorni; l'altra in 7 giorni: si chiede, se cominciassero il cammino alla stessa ora, in quanti giorni esse si incontrerebbero. Moltiplica 5 per 7, fa 35; e poni, [*per incontrarsi*], tanti giorni; in essi la prima nave fa il suo percorso sette volte, l'altra invece 5 volte: perciò somma 7 con 5, fa 12; e poiché entrambe le navi devono compiere solo una volta quel cammino, moltiplica 1 per 35, e dividi per 12, fa $\frac{11}{12}$ 2; e in altrettanti giorni saranno ricongiunte. E se vuoi sapere in quale parte, dividi 7, e 5 per 12, fa $\frac{7}{12}$ di tutto il percorso dalla parte della prima nave e $\frac{5}{12}$ dalla parte della seconda. E se si suppone che la prima nave avanza sette volte verso il luogo dell'altra nave e l'altra torni indietro 5 volte in un giorno, dividi 1 per 12, fa 1 ora $\frac{1}{12}$ per la loro unione, che avverrà nella parte predetta.

Figura 5 Il problema delle due navi tradotto sul sito www.progettofibonacci.it

Non è difficile portare gli studenti sull'osservazione del fatto che questo problema comporta una misura di tempo e che la misura del tempo viene riportata con i numeri razionali la cui aritmetica è importata in Occidente da Fibonacci. Su questo è bene avviare una riflessione, in quanto ciò rappresenta un avanzamento scientifico importante e va fatto notare come parte di un processo che è servito a creare le condizioni per l'emergere di un nuovo concetto di tempo e di nuovi dispositivi per misurarlo, cioè gli orologi meccanici, apparsi diversi decenni dopo (Radford L., 2008). Attraverso i numeri, velocità e tempo sono diventati sistemi. In quanto tali, hanno reso possibile la creazione di sistemi unificanti di rappresentazione della conoscenza relazioni sociali. Precedentemente non esisteva in Occidente nemmeno un insieme di numeri che esprimessero adeguatamente i risultati di misure precise. Ispirandosi a quanto proposto da Radford si può suggerire ai ragazzi cosa mancasse davvero per arrivare a un moderno concetto di velocità attraverso l'uso dell'arte. Se si confronta un'immagine di un interno risalente al V secolo e un'opera di Paolo Uccello (immagini sotto riportate), si vede che la differenza fondamentale è nella prospettiva: nella prima immagine gli oggetti sono "giustapposti", nella seconda sono in un unico sistema di riferimento spaziale. Questo in realtà corrisponde allo sviluppo del concetto di spazio e di geometria come scienza dello spazio e non più come scienza delle figure. Come dire che se si mostra la soluzione moderna del problema si deve trovare un sistema di riferimento (per esempio Cartesiano) o in generale a *sistemi unificanti di rappresentazione della conoscenza*.



Figura 6 Rappresentazione di un interno nel Medioevo e in un'opera di Paolo Uccello

Altra cosa molto importante è considerare che la teoria dei rapporti non ammetteva, del resto, una definizione di velocità come rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, non essendo queste ultime due grandezze "omogenee".

Attività 3 Il problema della caraffa

Altro esempio di problema di velocità è un problema di "velocità di svuotamento".

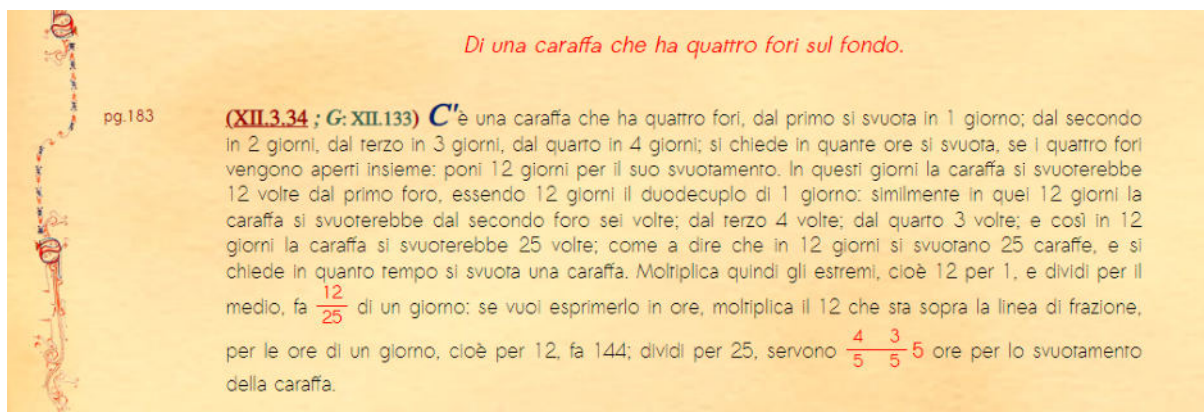


Figura 7 Il problema della caraffa tradotto sul sito www.progettofibonacci.it

La soluzione spontanea di questo problema sia da parte di ragazzi di terza classe SSIG sia da parte di ragazzi del biennio del Liceo Matematico fa capire che il pensiero può passare facilmente per un metodo di falsa posizione, attraverso l'uso quindi di una proporzione.

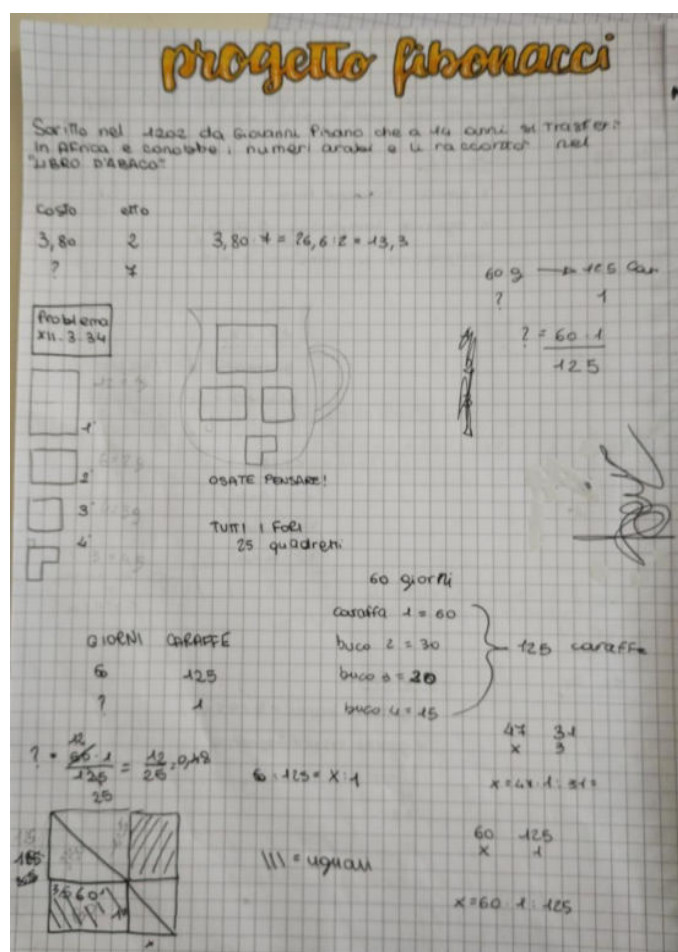


Figura 8 Il problema della caraffa risolto dai ragazzi di classe terza Scuola Secondaria di Primo Grado

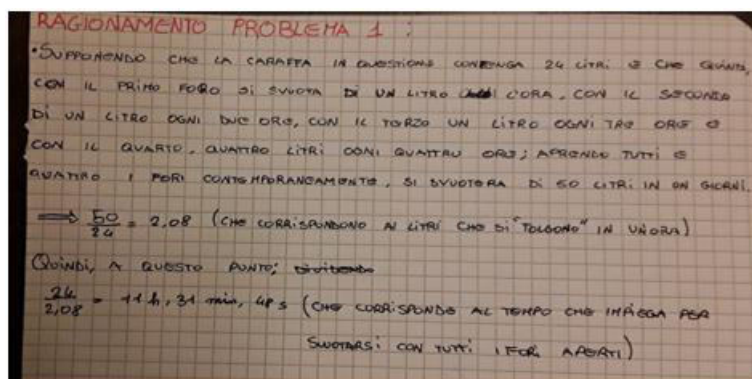


Figura 9 Il problema della caraffa risolto dai ragazzi di classe prima del Liceo Matematico

Dalle risposte dei ragazzi si capisce come in realtà il modello sotteso da Fibonacci alla soluzione di questi problemi è *“solo un pretesto per parlare di matematica e non di fisica”*, in particolare per *creare un metodo che parte da un esempio*, tecnicamente per *parlare di falsa posizione*.

Ci si è posti il problema di verificare se un recipiente di questo tipo è facilmente realizzabile, cioè di capire se è fisicamente plausibile pensare di fare la caraffa come quella descritta. Le classi di Liceo Matematico hanno realizzato esperimenti con bottiglie forate come nelle immagini: con dei fori di grandezza progressivamente e proporzionalmente più piccola. Sono stati realizzati dei grafici che riportano i tempi di svuotamento per i diversi fori. Gli studenti hanno dedotto che la fisica dell'esperienza segue un modello più complesso del modello matematico lineare, mettendo in dubbio che l'oggetto matematico “caraffa” di Fibonacci possa realizzarsi facilmente nella realtà.

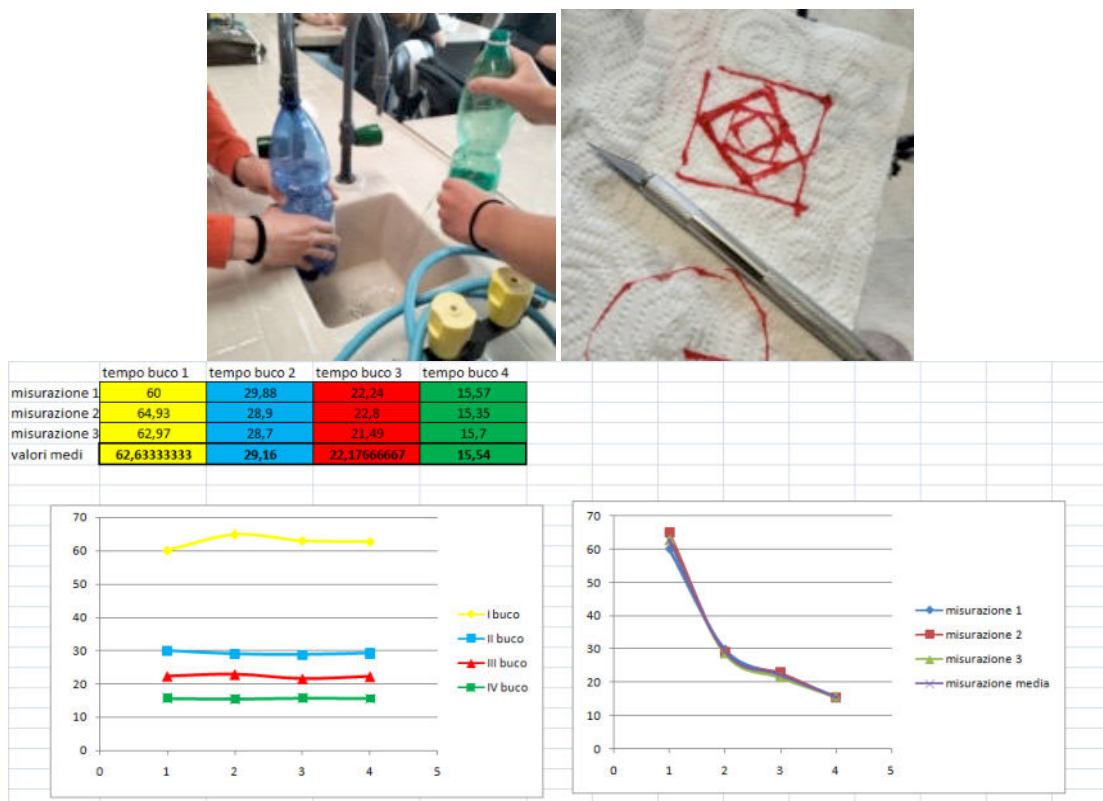


Figura 10 Il problema della caraffa in laboratorio di fisica

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio la professoressa Daniela Tossini rispettivamente della Scuola Secondaria Di Primo grado IC Falcone e Borsellino di Roma ed il professore Rodolfo Orlando del Liceo Matematico di Poggio Mirteto e le loro classi per la possibilità che mi hanno concesso di eseguire esperienze d'aula .

BIBLIOGRAFIA

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1407–1420. Hernandez, L. R., Furinghetti, F., Radford, L., & English, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 626–655).

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, 71, 235-261. Radford, L. (2008).

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, 30(2), 2-7.

Franci, R., (2005) *Giochi matematici alla corte di Carlomagno. Problemi per rendere acuta la mente dei giovani*, Edizioni ETS.

Ghione F., Catastini L., (2023) *La matematica che trasformò il mondo. Il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci*, Carocci

Pisano, L. (1857). 1202. *Liber Abaci*. *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo* pubblicati da Baldassarre Boncompagni, 1, 1857–1862.

Radford, L. (2008). Semiotic reflections on medieval and contemporary graphic representations of motion. Working paper presented at meeting of the History and Pedagogy of Mathematics Conference (HPM 2008), 14–18 July 2008, Mexico City. <http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>. Accessed July 14.

Tessaro F., (2014) *Compiti autentici o prove di realtà?*, in “Formazione e insegnamento”, XII(3), pp. 77–88

SITOGRAFIA

<https://www.progettofibonacci.it/>

<https://www.matmedia.it/il-concetto-di-velocita-nelle-raccolte-di-problemi/>

<https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1>

ATTIVITÀ DI ANALISI DI LIBRI DI TESTO CON IL *FAMILY RESEMBLANCE APPROACH*: UN'OCCASIONE PER RIFLETTERE SULL'INTERDISCIPLINARITÀ TRA MATEMATICA E FISICA

Lorenzo Pollani¹, Laura Branchetti², Francesca Morselli³

¹Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, Sapienza Università di Roma;

²Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Università di Milano;

³Dipartimento di Matematica (DIMA), Università di Genova

lorenzo.pollani@uniroma1.it

Abstract

In questo workshop presentiamo un'attività di analisi guidata di alcuni estratti di libri di testo per la scuola secondaria di secondo grado. L'attività è stata concepita nel progetto europeo Erasmus+ IDENTITIES con l'obiettivo di promuovere riflessioni sull'interdisciplinarietà tra Matematica e Fisica nel contesto di formazione iniziale degli insegnanti di matematica e fisica. Le sfide sociali contemporanee, come l'intelligenza artificiale o i cambiamenti climatici, spingono continuamente a pensare e dialogare in ottica interdisciplinare, incrementando l'interesse per questi temi nella ricerca in didattica. Nel progetto IDENTITIES è stato studiato un approccio per la formazione insegnanti in prospettiva interdisciplinare, identificando due possibili livelli di interdisciplinarietà: uno curricolare (considerando temi presenti nel curriculum e già strutturati all'interno di discipline, come la parabola e il moto dei proiettili) e uno emergente (considerando nuove forme di collaborazione tra discipline in contesti esterni alla scuola, come nello studio del cambiamento climatico o dell'intelligenza artificiale). Questo workshop si posiziona nel livello curricolare, in quanto considera la parabola e il moto dei proiettili, nella presentazione di libri di testo di fisica. Inoltre, sono discusse alcune riflessioni a partire dagli estratti relativamente a due pratiche significative nella matematica e nella fisica: esempi e rappresentazioni.

Parole-chiave

Interdisciplinarietà; Formazione insegnanti; Family Resemblance Approach; Boundary object.

INTRODUZIONE

Saper pensare e dialogare in ottica interdisciplinare, mettendo in relazione più discipline e relative competenze, sta diventando un requisito essenziale per le sfide sociali contemporanee come l'intelligenza artificiale o i cambiamenti climatici.

Nel contesto dell'educazione scolastica secondaria superiore questa esigenza è riconosciuta attraverso riferimenti espliciti alle relazioni tra e all'integrazione di discipline, come si evince nelle Indicazioni Nazionali per i licei (MIUR, 2010c) e nelle Linee Guida per gli Istituti tecnici (MIUR, 2010b) e professionali (MIUR, 2010a). Ad esempio, nelle Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali si legge: “Integrare non significa affidarsi ad accostamenti improvvisati, quanto piuttosto impegnarsi in un'operazione di alto profilo culturale, che richiede consapevolezza, apertura mentale e grande padronanza del sapere scientifico, non disgiunto dalla volontà e dalla propensione al lavoro di equipe. [...] [L'integrazione] si realizza nell'attività di progetto che muove dall'individuazione di elementi comuni che uniformano prospettive, visioni e metodi.” Nelle Indicazioni Nazionali per i licei, tra le linee generali e competenze descritte per l'insegnamento della matematica, si trova: “Al termine del percorso [...] lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico. [...] [I temi e gli approcci affrontati costituiranno] la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali,

la filosofia e la storia.” Questi due estratti permettono di arricchire il significato della richiesta trasversale, ma pur sempre curricolare, di sviluppare competenze di cittadinanza come “comunicare” e “individuare collegamenti e relazioni”, a cui sia licei sia istituti tecnici e professionali sono chiamati. Queste due competenze non si limitano a contenuti specifici disciplinari ma si estendono a riflessioni più ampie su “concetti e metodi” delle discipline, fino a raggiungere “prospettive e visioni” di ciascuna disciplina.

Il presente contributo offre una panoramica essenziale della letteratura di ricerca sull’interdisciplinarietà, concentrandosi sulle prospettive sviluppate all’interno di un progetto europeo, per poi spostarsi a presentare nello specifico il workshop e discutere alcuni aspetti rilevanti rispetto all’interdisciplinarietà che possono emergere attorno a esempi e rappresentazioni nel libro di testo.

L’interdisciplinarietà: alcune prospettive dalla letteratura di ricerca

La concettualizzazione proposta dai riferimenti normativi nazionali suddetti è coerente con l’ampia prospettiva, proposta da Klein (2010), di interdisciplinarietà come integrazione di più discipline. In questo contributo consideriamo le discipline matematica e fisica. Le loro interazioni, sia nella loro storia che nella loro didattica, sono state sottolineate da diversi ricercatori anche a livello internazionale (si vedano, ad esempio, Uhden et al., 2012; Tzanakis, 2016).

In alcune ricerche che fanno riferimento all’interdisciplinarietà si mette in discussione l’efficacia didattica del cosiddetto approccio strumentale, in cui la matematica viene considerata solo un insieme di strumenti da applicare in fisica e, viceversa, la fisica viene considerata solo un contesto applicativo di tecniche e strumenti appresi in matematica (Karam, 2015). Questa concezione non solo nasconde la complessità e la ricchezza delle interazioni che esistono o si possono instaurare tra le due discipline, ma non rispecchia nemmeno l’autenticità disciplinare (si vedano, ad esempio, Karam, 2015; Kapon et al., 2018; Branchetti et al., 2019). Inoltre, l’approccio strumentale ostacola lo sviluppo della consapevolezza necessaria al dialogo interdisciplinare (Satanassi et al., 2023), favorendo piuttosto l’insorgere negli studenti di strategie cieche (“plug and chug”), in cui per risolvere un problema o affrontare una situazione si deve solo cercare e applicare la formula corretta (Karam, 2015).

D’altra parte, la ricerca ha messo in evidenza che una pratica multidisciplinare, ossia di giustapposizione delle discipline, in cui i contributi disciplinari alla risoluzione di problemi arrivano separatamente (Klein, 2010), hanno ricadute poco significative sullo sviluppo di consapevolezza e di pensiero critico (Satanassi et al., 2023).

Realizzare una didattica interdisciplinare tra matematica e fisica e favorire lo sviluppo di consapevolezze negli studenti non solo limitate ai contenuti specifici delle singole discipline ma anche ad aspetti di somiglianza e trasversalità di metodi, pratiche e prospettive, sono quindi obiettivi ambiziosi e al tempo stesso complessi per i molteplici fattori che entrano in gioco (ad esempio, l’identità e il ruolo dell’insegnante, la relazione con le discipline, il ruolo e le attività della formazione insegnanti, sia permanente che iniziale). Le esigenze socio istituzionali e la complessità intrinseca (epistemologica, ma anche affettiva e cognitiva) creano un grande potenziale per riflettere, e molti progetti, anche di ricerca, stanno cercando di contribuire anche con implementazioni nella didattica quotidiana.

Questa proposta di workshop è frutto di riflessioni che riguardano principalmente il ruolo dell’insegnante e della formazione insegnanti, ed è di particolare interesse in un contesto nazionale dove esiste anche la possibilità che un singolo insegnante insegni più discipline, come matematica e fisica.

Il progetto IDENTITIES (2019-2022) e la genesi del workshop

L’interdisciplinarietà tra discipline scientifiche, tra cui in particolare matematica e fisica, è stata al centro delle riflessioni di ricerca condotte dal progetto europeo Erasmus+ IDENTITIES, di cui abbiamo fatto parte e da cui ha origine l’attività, il quadro teorico e le riflessioni proposte in questo workshop. Il progetto IDENTITIES, durato 36 mesi, ha coinvolto le università di Barcellona (ES), Creta (GR), Montpellier (FR), Parma e Bologna (IT), sotto il coordinamento di quest’ultima. Il progetto si è focalizzato sull’interdisciplinarietà nella formazione iniziale degli insegnanti. All’interno del progetto, sono stati identificati due possibili livelli per considerare l’interdisciplinarietà: un livello curricolare e un livello emergente (Branchetti & Nipyrakis, accettato). Tra i temi che si prestano a riflettere

sull'interdisciplinarità a livello emergente figurano, ad esempio, il cambiamento climatico, l'intelligenza artificiale, le nanotecnologie, mentre per il livello curricolare la crittografia, la parabola, le geometrie non euclidee e la gravitazione. A partire da questi, sono stati progettati attività didattiche, attività di formazione insegnanti e modelli di co-insegnamento (per approfondimenti si rimanda al sito del progetto, <https://identitiesproject.eu/it/>).

L'attività proposta in questo workshop è stata sviluppata in continuità con il progetto IDENTITIES e considera come tema quello curricolare della parabola e del moto dei proiettili.

Alcune ricerche recenti mettono in evidenza l'importanza di rendere gli insegnanti consapevoli sia delle potenzialità che delle sfide che una prospettiva interdisciplinare comporta nell'insegnamento secondario, facendoli riflettere in particolare sugli impliciti del processo di "disciplinarizzazione". Con questo termine intendiamo il processo con cui il sapere viene ri-organizzato in discipline, per il fine dell'insegnamento (Satanassi et al., 2023). Questo processo è alla base e può essere reso visibile nei libri di testo, in quanto forme di presentazione dei saperi. Essi infatti "possono diventare strumenti didattici importanti coi quali rendere espliciti e visibili i nodi epistemologici essenziali alla formazione delle discipline, chiarendo le loro mutue relazioni" (Bagolini et al., 2021, p. 136).

Nell'ambito del progetto IDENTITIES sono state effettuate analisi di libri di testo di fisica (Bagolini et al., 2021; Branchetti et al., 2022) che hanno mostrato una corrispondenza tra la forma di presentazione degli argomenti e le scelte epistemologiche. Tuttavia, sebbene le presentazioni dei libri di testo di fisica incarnino spesso aspetti legati sia alla fisica che alla matematica (ad esempio, abitudini comunicative, tipi di rappresentazioni e di esempi, criteri per stabilire la verità o la validità di enunciati), spesso questi aspetti rimangono impliciti agli studenti, ostacolando competenze e consapevolezze interdisciplinari. Crediamo che far riflettere esplicitamente gli insegnanti su alcuni di questi aspetti a partire dalla presentazione e dal confronto di libri di testo e di diverse prospettive disciplinari possa promuovere consapevolezza negli insegnanti su aspetti comuni e specificità della matematica e della fisica e su strutture o elementi di pensiero impliciti nel ragionamento.

Per questi motivi, abbiamo quindi deciso di proporre ai partecipanti al workshop l'analisi di libri di testo, riconoscendone anche il ruolo cruciale nella pratica didattica.

IL WORKSHOP

Riconcettualizzare l'interdisciplinarità con il *Family Resemblance Approach* e il costrutto di *boundary object*

La nostra prospettiva sull'interdisciplinarità nasce dalla distinzione tra interdisciplinarità e multidisciplinarità. Klein (2010) concepisce l'interdisciplinarità non come una giustapposizione additiva di discipline, come la multidisciplinarità, ma piuttosto come interazione e integrazione tra discipline. Qui di seguito riassumiamo due costrutti provenienti dalla letteratura e considerati all'interno del progetto IDENTITIES per approfondire il concetto di interdisciplinarità tra matematica e fisica: l'approccio *Family Resemblance* (FRA), sviluppato da Erduran e Dagher (2014), e il concetto di *boundary* e *boundary object*, derivato da Akkerman e Bakker (2011).

Coerentemente con le Indicazioni nazionali e con le Linee Guida (MIUR, 2010a; 2010b; 2010c), il FRA permette di caratterizzare le discipline non solo in termini di *conoscenza*, intesa come oggetti e tecniche (Satanassi et al., 2023), ma anche in termini di *pratiche* (come ad esempio il definire, rappresentare, esemplificare), *metodi* (ad esempio, il ragionamento assiomatico-deduttivo), *obiettivi e valori* (ad esempio, l'universalità, l'oggettività, la coerenza). Queste quattro componenti in corsivo caratterizzano, secondo il FRA, il *nucleo epistemico* di ciascuna disciplina scientifica. Questo approccio permette di ripensare le discipline scientifiche, in particolare matematica e fisica, come se fossero membri facenti parte di un'unica famiglia, quella delle scienze, in cui i membri tra loro si assomigliano per alcuni aspetti e differiscono per altri.

Nello studio delle interazioni tra due discipline, Akkerman e Bakker mettono in evidenza il concetto di *boundary object*, ossia un oggetto di confine, che svolge una funzione di ponte tra due lati (in questo caso, matematica e fisica). Gli autori sottolineano come questi oggetti siano intrinsecamente caratterizzati da un'ambiguità dovuta dal fatto che appartengono contemporaneamente a entrambi i

mondi e a nessuno dei due. L'analisi e il confronto di libri di testo permettono allora di evidenziare oggetti di confine (come le rappresentazioni, gli esempi, le dimostrazioni/giustificazioni) presenti all'interno dei libri di testo che stimolano riflessioni e favoriscono lo sviluppo di consapevolezze su entrambe le discipline.

L'attività del workshop

Il workshop si è svolto presentando brevemente il progetto IDENTITIES e i costrutti di *boundary objects* e di *Family Resemblance* per riconcettualizzare l'interdisciplinarietà. Successivamente, è stata proposta un'attività in cui ai partecipanti veniva chiesto di leggere due estratti e rispondere alle seguenti domande:

- C'è qualche aspetto che ti colpisce particolarmente?
- Che cosa vedi con gli occhi della matematica?
- Che cosa vedi con gli occhi della fisica?
- Che cosa diresti sul confronto tra i due estratti?

I partecipanti al workshop hanno affrontato questa attività lavorando a coppie o in piccolo gruppo e avendo a disposizione gli estratti in digitale. A questo lavoro è seguita una discussione collettiva che ha coinvolto anche i leaders del workshop in cui l'obiettivo è stato quello di riflettere sulle relazioni tra discipline e prendere nuove consapevolezze.

Gli estratti sono stati selezionati all'interno di due libri di testo di fisica per la scuola secondaria di secondo grado (Walker, 2010, p. 79-80; Ruffo, 2014, 2014, p. 96-97) e sono qui riportati in Figura 1 e Figura 2. L'argomento del moto dei proiettili e della parabola è stato scelto per la sua rilevanza, sia all'interno del curriculum nazionale sia nella co-evoluzione storica della matematica e della fisica (Bagaglini et al., 2021; Branchetti et al., 2022; Tzanakis, 2016). Walker (2010) è stato scelto per la sua ricchezza epistemologica (per approfondimenti si può vedere, ad esempio, Bagaglini et al., 2021), mentre un secondo testo, Ruffo (2014), è stato scelto per creare uno sfondo e un primo piano che favorisse l'emergere di differenze nella presentazione degli argomenti. Queste differenze, secondo noi, possono offrire agli insegnanti spunti di riflessione, di analisi e di confronto sia tra i partecipanti che, in generale, tra le discipline, in particolare quella propria di formazione.

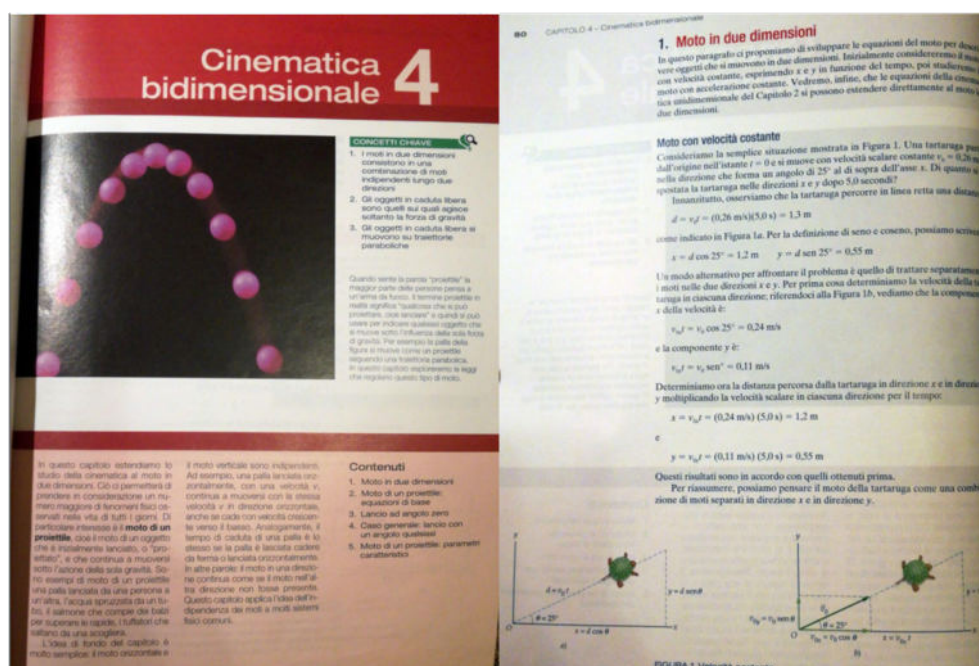


Figura 1. Walker (2010, p. 79-80).

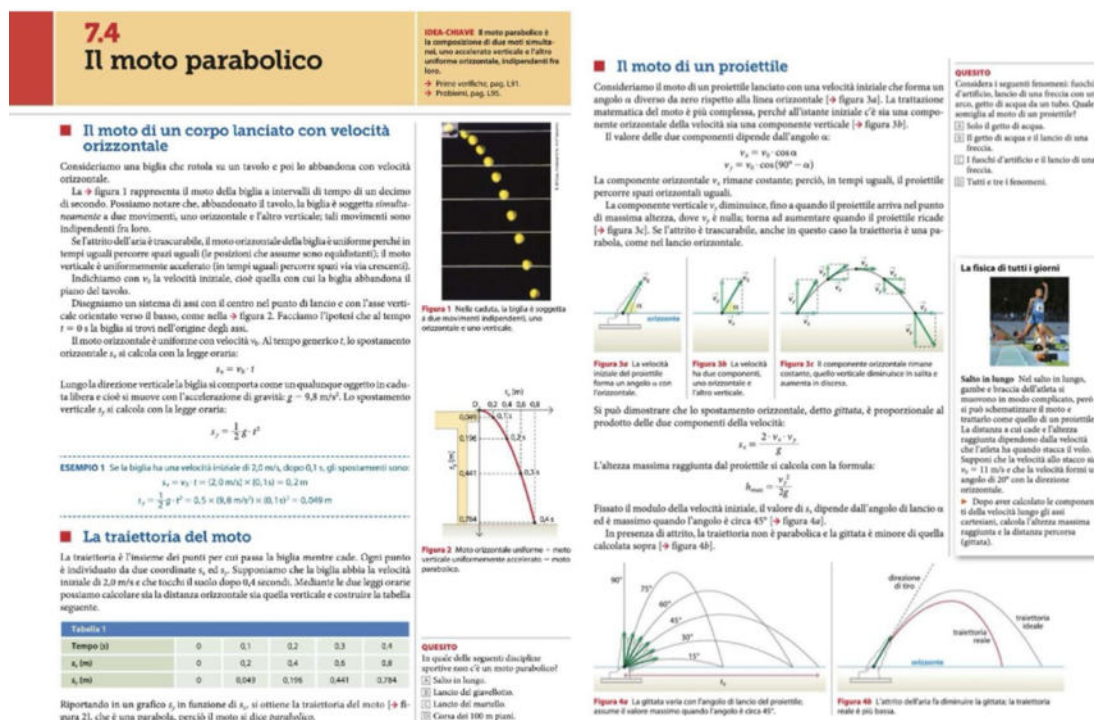


Figura 2. Ruffo (2014, p. 96-97).

Considerazioni su due *boundary objects*: esempi e rappresentazioni nei libri di testo

In questo paragrafo ci poniamo come obiettivo quello di tratteggiare brevemente alcuni aspetti rilevanti da un punto di vista di riflessione interdisciplinare che possono emergere dalla discussione degli insegnanti e dal confronto con i libri di testo. Questi aspetti riguardano due pratiche (nel significato della FRA) comuni ad entrambe le discipline matematica e fisica, che al tempo stesso rappresentano due *boundary objects* in quanto presentano elementi di ambiguità: l'esemplificazione, ossia il fornire esempi, e le rappresentazioni.

Il termine “esempio” compare esplicitamente quattro volte nei due testi considerati: una volta nel Ruffo (2014) e tre volte nel Walker (2010). Nel Ruffo (2014) si può osservare che “esempio” fa riferimento ad un “esempio svolto” (in letteratura, *worked-out example*), in cui si mostra una sostituzione di quantità note nelle formule che esprimono la legge oraria dei moti orizzontale e verticale, mentre gli altri possono essere inquadrati come esempi generici rispetto alla frase che precede quella contenente “esempio”. Con “esempio generico” facciamo riferimento a qualcosa di specifico che viene offerto per rappresentare una classe generale (Bills et al., 2006). Si osserva un'ambiguità epistemologica: non è infatti chiaro a priori se si tratti di esempi di un fenomeno generale inquadrato indipendentemente o esempi per generalizzare una classe di fenomeni (in letteratura si trovano i concetti di *example-of*, *example-for*: ad esempio, Watson & Chick, 2011). Il riconoscimento e l'emergere di questa ambiguità durante la discussione porta a favorire riflessioni su questioni interdisciplinari cruciali come il rapporto tra osservazioni, esperimenti e misure, e i diversi livelli di modellizzazione (anche in relazione alle rappresentazioni fornite).

Considerando le rappresentazioni presenti nei due estratti possiamo osservare, ad esempio, come entrambi i testi presentino un'immagine stroboscopica del moto di una palla. Nella figura a sinistra della Figura 1, il moto della palla ha velocità iniziale obliqua, mentre nella “Figura 1” nel testo Ruffo (2014) il moto della palla ha velocità iniziale orizzontale. Queste immagini sono esse stesse rappresentazioni ibride e ambigue: infatti, da una parte includono rappresentazioni di un esperimento

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia

concreto, impostato per studiare il moto di un proiettile (parte dei metodi della fisica) ma con alcune caratteristiche che conferiscono loro un certo livello di astrazione (scopo e valore sia della fisica che della matematica) – le linee orizzontali equidistanti, solo nell’immagine in Figura 2, lo schermo nero, la rappresentazione di una quantità diversa di fotogrammi negli stessi intervalli (un passo verso la rappresentazione dell’effetto dell’accelerazione) – rendendole un passo intermedio verso un modello di moto che includa aspetti quantitativi e relazioni che possano fare da ponte tra l’indagine empirica del fenomeno e gli oggetti matematici – curve, funzioni. Le due immagini includono in conclusione una descrizione discreta del moto e si collocano tra il fenomeno e la traiettoria come curva matematica, permettendo così di riflettere sul processo di matematizzazione e sul fatto che l’esperimento stesso non è un fenomeno naturale, ma un ambiente artificialmente costruito appositamente per indagare o validare congetture sul fenomeno.

Al contrario, la “Figura 2” nel Ruffo (2014) presenta una rappresentazione diversa, che è un passo verso l’idealizzazione e la creazione di un modello geometrico-algebrico (scopo e valore, metodo della matematica) – i punti rappresentano le immagini dell’oggetto concreto che cade, una linea continua in un piano cartesiano rappresenta la traiettoria. Tuttavia, la “Figura 2” è ben lontana dalla rappresentazione tradizionale di una parabola in un piano cartesiano che si può trovare in un libro di testo di matematica. La figura include dettagli che la rendono un oggetto di confine, un *boundary object*, tra la concezione della parabola come oggetto geometrico e l’idealizzazione della traiettoria sperimentale di un moto, verso la modellazione e l’astrazione (pratica e scopo e valore sia della matematica che della fisica).

La “Figura 2” è anch’essa ibrida, ma in qualche modo speculare alla “Figura 1”. Infatti, contiene una curva continua in un piano cartesiano con l’asse verticale orientato dall’alto verso il basso, insieme a una rappresentazione schematizzata del terreno e di un tavolo, da cui cade con velocità orizzontale una palla ideale (che però non appare rappresentata).

Presentando la traiettoria come una curva, l’immagine presuppone che la pallina sia assimilata a un punto con massa (metodo della fisica) e che il moto dell’intero oggetto sia identificato con il moto di un centro di massa (conoscenza della fisica). Al contrario, l’immagine stroboscopica è più vicina ai dati provenienti da un esperimento (disegno di una palla in diversi istanti di tempo – dati discreti di un processo continuo; pratiche, metodi della fisica). Le posizioni sono identificate con numeri, corrispondenti a misurazioni (pratica della fisica), che si adattano a un modello matematico parabolico (pratica della fisica). Sulla curva sono evidenziati alcuni punti, con ascisse alla stessa distanza e valori diversi sull’asse delle ordinate; tutti i numeri appaiono con decimali e unità di grandezza, che ricordano le misure empiriche (pratica della fisica).

In prossimità dei punti evidenziati sul grafico, compare un altro numero, che rappresenta istanti di tempo in secondi; il tempo è una variabile nascosta che non è necessaria per descrivere la parabola come oggetto geometrico, ma è fondamentale per descrivere il moto come fenomeno che coinvolge il tempo. La rappresentazione non è codificata nella conoscenza matematica dei grafici cartesiani: sulla curva, il tempo appare in modo insolito, rendendo la rappresentazione ambigua rispetto alla rappresentazione delle parabole in matematica. Di solito, infatti, si rappresentano le curve e non le curve tracciate nel tempo. Questa rappresentazione è molto più vicina a una rappresentazione più simbolica, cioè all’espressione algebrica delle leggi del moto, aumentando il livello di astrazione (scopo e valore della matematica e della fisica).

In conclusione, gli elementi di ambiguità sopra menzionati possono rendere queste rappresentazioni fonti di riflessioni su dettagli (come la curva, la palla, il tempo, l’esperimento, il fenomeno reale), portando così a riflettere sulla trasformazione dall’osservazione a un modello continuo e sulla differenza tra la curva geometrica e la traiettoria fisica.

BIBLIOGRAFIA

- Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research*, 81(2), 132–169. <https://doi.org/10.3102/0034654311404435>
- Bagaglini, V., Branchetti, L., Gombi, A., Levrini, O., Satanassi, S., & Viale, M. (2021). Il ruolo del testo nell'interdisciplinarietà tra matematica, fisica ed educazione linguistica: Il tema del moto parabolico tra testi storici e manuali di fisica per la scuola secondaria di secondo grado. *Italiano a scuola*, 3(1), 133–184. <https://doi.org/10.6092/ISSN.2704-8128/13083>
- Bills, L., Mason, J., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). RF02: Exemplification: The use of examples in teaching and learning mathematics. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125–154). Charles University, Faculty of Education.
- Branchetti, L., Cattabriga, A., & Levrini, O. (2019). Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the black body. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 15(2), 1–21. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020130>
- Branchetti, L., Cattabriga, A., Levrini, O., & Satanassi, S. (2022). Continuity and rupture between argumentation and proof in historical texts and physics textbooks on parabolic motion. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 109–116). Free University of Bozen-Bolzano.
- Branchetti, L., & Nipyrakis, A. (accettato). Epistemological issues in interdisciplinary teacher education: Curricular topics and emerging fields. ESERA2023.
- Erduran, S., & Dagher, Z. R. (2014). *Reconceptualizing the nature of science for science education: Scientific knowledge, practices and other family categories* (Vol. 43). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9057-4>
- Kapon, S., Laherto, A., & Levrini, O. (2018). Disciplinary authenticity and personal relevance in school science. *Science Education*, 102(5), 1077–1106. <https://doi.org/10.1002/sce.21458>
- Karam, R. (2015). Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics. *Science & Education*, 24(5), 487–494. <https://doi.org/10.1007/s11191-015-9763-9>
- Klein, J. T. (2010). A taxonomy of interdisciplinarity. In R. Frodeman, J. T. Klein, & C. Mitcham (Eds.), *The Oxford handbook of interdisciplinarity* (pp. 15–30). Oxford University Press.
- MIUR (2010a). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti professionali*, DPR 87 del 15 marzo 2010.
- MIUR (2010b). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici*, DPR 88 del 15 marzo 2010.
- MIUR (2010c). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i licei*, DPR 89 del 15 marzo 2010.
- Ruffo, G. (2014). *Fisica: Lezioni e problemi: Vol. unico*. Zanichelli.
- Satanassi, S., Branchetti, L., Fantini, P., Casarotto, R., Caramaschi, M., Barelli, E., & Levrini, O. (2023). Exploring the boundaries in an interdisciplinary context through the Family Resemblance Approach: The Dialogue Between Physics and Mathematics. *Science & Education*. <https://doi.org/10.1007/s11191-023-00439-2>
- Tzanakis, C. (2016). Mathematics & physics: An innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning. *History and Pedagogy of Mathematics*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349231>
- Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. *Science & Education*, 21(4), 485–506. <https://doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6>
- Walker, J. (2010). *Corso di Fisica: Vol. 1. Meccanica* (4th ed.). Pearson Italia.
- Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, 43(2), 283–294. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0301-6>

ESPLORARE LA COVARIAZIONE CON IL TRACCIATORE FISICO E DIGITALE

Sara Bagossi¹, Federica Ferretti², Carlotta Soldano¹, Eugenia Taranto³

¹Università di Torino, ²Università di Ferrara, ³Università di Enna Kore

sara.bagossi@unito.it

Abstract

Il ragionamento covariazionale, ovvero saper concettualizzare due quantità che variano simultaneamente, è importante per un apprendimento significativo di numerosi concetti matematici, tra cui quello di funzione. Gli studi in Didattica della Matematica ribadiscono la necessità di promuovere un approccio covariazionale fin dai primi gradi scolastici, ma, soprattutto per quanto riguarda questi livelli scolastici, esistono pochi studi ed attività a cui far riferimento. Questo workshop propone spunti per lavorare e riflettere su alcuni aspetti del ragionamento covariazionale nei processi di apprendimento della matematica nel primo ciclo di istruzione. In particolare, i partecipanti al workshop sono stati coinvolti in una serie di attività condotte in piccoli gruppi utilizzando due artefatti: il tracciatore fisico e digitale. Nel presente contributo vengono riportati i riferimenti teorici e ministeriali che inquadrano le attività e l'utilizzo dei due artefatti in gioco, le indicazioni metodologiche sulle attività proposte e quanto emerso dalla discussione collettiva svoltasi nella parte conclusiva del workshop.

Parole-chiave

Ragionamento covariazionale, tracciatore, artefatti fisici e digitali, laboratorio di matematica, embodiment.

PERCHÉ UN WORKSHOP SULLA COVARIAZIONE?

Immaginate una scala a pioli appoggiata ad una parete. Considerate ora le due estremità della scala e le loro distanze dalle pareti. La scala inizia a scivolare lentamente: le due distanze, dunque, variano nel tempo e co-variano tra loro. Riuscite a immaginare come? Sapreste rappresentare, per esempio con un grafico, la relazione tra le due distanze in gioco? Se pensate non sia semplice... è normale! Ci sono due grandezze in gioco, due distanze, che stanno variando nel tempo e lo stanno facendo simultaneamente, ovvero al variare di una delle due distanze anche l'altra varia. Questa è una tipica situazione in cui per la sua comprensione è utile il ragionamento covariazionale. Saper ragionare covariazionalmente significa essere in grado di immaginare e concettualizzare i valori di due grandezze che variano simultaneamente (Thompson & Carlson, 2017). Il ragionamento covariazionale o covariazione è importante per un apprendimento significativo di numerosi concetti matematici, tra cui quello di funzione, e soprattutto supporta la modellizzazione matematica di situazioni dinamiche. Imparare a sviluppare questa forma di ragionamento richiede tempo e pratica; diversi studi in Didattica della Matematica ribadiscono la necessità di promuovere un approccio covariazionale fin dai primi gradi scolastici. Anche nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo di istruzione (MIUR, 2012), in cui mancano riferimenti espliciti a questa forma di ragionamento, si sottolinea che “la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana” (p. 60) e, ancora, che l'alunno dovrebbe imparare ad “analizza[re] le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce[re] schemi ricorrenti, stabili[re] analogie con modelli noti” (p. 60). Nonostante la riconosciuta importanza della covariazione, spesso mancano esempi di attività e modalità per poter stimolare il ragionamento covariazionale e la rappresentazione matematica di situazioni dinamiche. Questo workshop si propone, dunque, di fornire spunti per lavorare e riflettere su alcuni aspetti del ragionamento covariazionale nei processi di apprendimento della matematica nel primo ciclo di istruzione.

TRACCIATORE FISICO E DIGITALE

Durante il workshop sono stati presentati, esplorati e poi utilizzati due artefatti: il tracciatore fisico e quello digitale. Il tracciatore fisico (Figura 1a) è costituito da un pannello di legno su cui sono fissate perpendicolarmente due guide dotate di pomelli che permettono di far scorrere due barre rigide mantenendo la perpendicolarità. L'intersezione delle due barre identifica un punto sul pannello ed è possibile utilizzare un pennarello che, posizionato nel punto di intersezione, consente di lasciare traccia del percorso. Il tracciatore digitale (Figura 1b), invece, è realizzato con il software gratuito Geometric Constructor (GC) che supporta il multitouch, ossia permette all'utente di trascinare più punti sullo schermo contemporaneamente (in questo caso i punti A e B). Il tracciatore digitale riproduce alcune delle caratteristiche del tracciatore fisico e prevede una funzionalità automatica di "traccia" per tracciare il percorso del punto di intersezione.

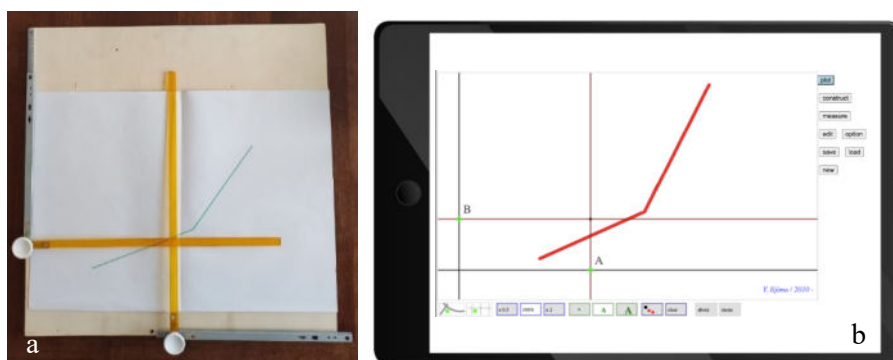


Figura 1. a) Tracciatore fisico; b) Tracciatore digitale.

UN LABORATORIO DI MATEMATICA A TUTTI GLI EFFETTI

Il workshop proposto si è articolato come un laboratorio di matematica ovvero “un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. [...] La costruzione dei significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività” (MIUR, UMI, & SIS, 2001)⁸².

Infatti, dopo aver introdotto brevemente cosa fosse la covariazione ed aver presentato i due artefatti protagonisti del workshop, le e gli insegnanti, circa una decina, si sono suddivisi in gruppetti da tre/quattro persone ciascuno e hanno lavorato con gli artefatti, dapprima quello fisico e poi quello digitale.

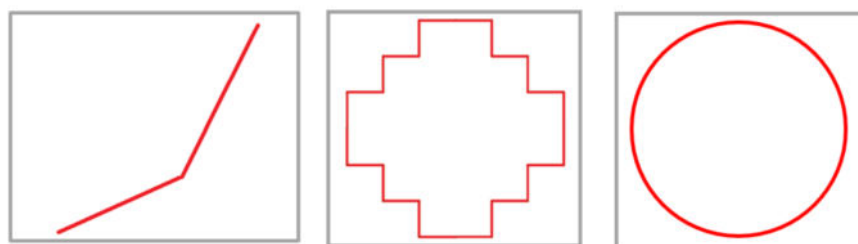


Figura 2. Le tre tracce fornite per le attività con i tracciatori.

Le attività si sono strutturate basandosi sulla riproduzione di tre tracce: una spezzata, degli scalini e una circonferenza (Figura 2). Ai partecipanti è stato chiesto di: (i) riflettere su quali movimenti potesse fare ciascun artefatto; (ii) utilizzare il tracciatore fisico per percorrere tre tracce, riportate su fogli A3, lasciando liberi i partecipanti di decidere di riprodurre o meno le tracce con un pennarello da noi fornito;

⁸² <https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>

(iii) utilizzare il tracciatore digitale per percorrere le stesse tre tracce del punto precedente, stavolta fornite attraverso dei QR code⁸³.

Le attività dei punti (ii) e (iii) sono state svolte a coppie: due partecipanti in ciascun gruppo muovevano una delle due barre del tracciatore e chi del gruppo, in quel momento, non era direttamente coinvolto nell'uso del tracciatore aveva il compito di osservare i compagni e annotare quanto stava accadendo. In alcuni casi, un partecipante non direttamente coinvolto nell'azione di movimento delle barre nel tracciatore fisico, ha retto il pennarello messo a disposizione (Figura 3). In Figura 4 è possibile vedere un esempio di traccia prodotta da uno dei gruppi con il tracciatore digitale. Chi ha avuto tempo, ha potuto sperimentare lo svolgimento delle attività non solo in coppia ma anche individualmente.

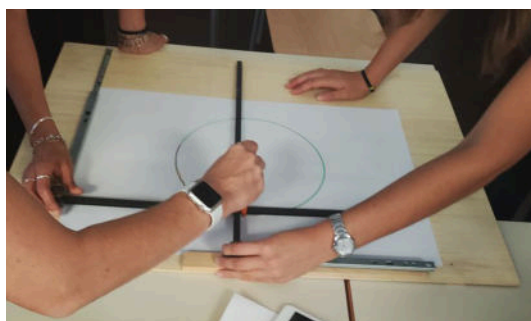


Figura 3. Partecipanti al lavoro con il tracciatore fisico durante il workshop.

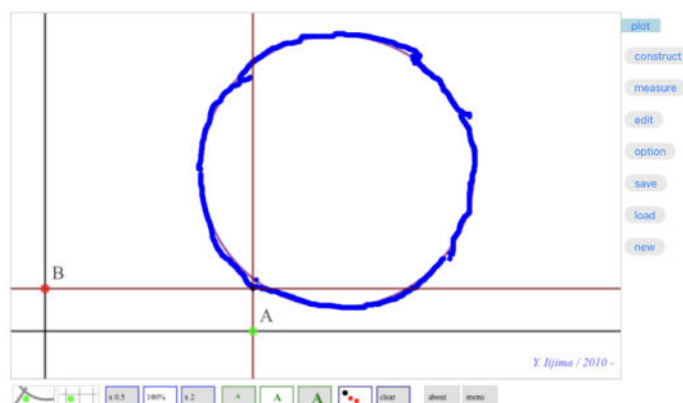


Figura 4. Traccia prodotta da uno dei gruppi con il tracciatore digitale.

CONSIDERAZIONI DALLA DISCUSSIONE

Allo svolgimento delle attività in piccoli gruppi, ha fatto seguito una discussione collettiva guidata dalle relatrici del workshop in cui le attività svolte sono state inquadrare teoricamente e in cui si è esplicitato il riferimento alle Indicazioni Nazionali. Sono state fornite indicazioni metodologiche di carattere laboratoriale per la realizzazione delle attività nelle classi ed è stato infine somministrato un Padlet sul quale è stato richiesto ai partecipanti di lasciare commenti liberi sulle attività svolte. In questo paragrafo riportiamo in maniera non strutturata alcune delle riflessioni emerse che provengono sia dai post pubblicati su Padlet sia dalla riflessione orale emersa durante la discussione conclusiva, annotata dalle relatrici.

⁸³ Le tre attività con il tracciatore digitale sono disponibili ai link che seguono.

Spezzata: https://yiijima.sakura.ne.jp/GCes/e-01/gchtml/gc_00011-Tracciatore_CrfGrande_1a_8px_red_none.htm

Scalini: https://yiijima.sakura.ne.jp/GCes/e-01/gchtml/gc_00018-Tracciatore_Scalini-02.htm

Circonferenza: https://yiijima.sakura.ne.jp/GCes/e-01/gchtml/gc_00014-Tracciatore_Circonferenza-01.htm

In merito all'uso del tracciatore fisico, un partecipante ha scritto sul Padlet che *“è stato importante coordinarsi con la collega sulla velocità da tenere costante e da variare. Nel tracciare la circonferenza ho provato a tenere gli occhi chiusi (avevamo concordato che avrei mantenuto una velocità costante) e ci sembra di aver ottenuto un risultato migliore. Scala molto più facile di spezzata e circonferenza”*.

Anche se i due tracciatori hanno delle similarità in termini di funzionalità, è evidente invece la differenza a livello di percezione corporea nell'uso dei due artefatti. In merito all'uso del tracciatore digitale, il medesimo partecipante ha osservato che *“è sembrato più semplice in confronto a quello fisico controllare il movimento per via dell'utilizzo di un solo dito e perché non dovevamo tenere anche il pennarello”*.

Da quanto emerso, è diverso anche il coinvolgimento del corpo nell'utilizzo dei due tracciatori. Un'altra partecipante ha infatti osservato che con il tracciatore digitale *“nel muovere le barre il dito seguiva il punto, perché la concentrazione andava sull'occhio che seguiva i movimenti dello schermo”* [note delle relatrici] mentre con il tracciatore fisico, le mani, muovendo le manopole, restano vincolate a muoversi lungo le due guide.

Nella realizzazione delle attività proposte, alcuni partecipanti hanno dichiarato di aver incontrato diverse difficoltà e durante la discussione sono emerse diverse concettualizzazioni dei concetti in gioco. In merito alla traccia scalini, una partecipante ha detto che *“è più facile. Qui si vede bene che quando ho rette parallele all'asse delle x, le y stanno ferme, infatti la barra resta ferma”*; invece con la traccia spezzata *“in due si va a velocità diverse”* [note delle relatrici].

Infine, chi ha avuto modo di sperimentare le attività sia in coppia che individualmente ha affermato *“è questione di abitudine, da solo mi autoregolo, con l'altro doso la mia velocità in funzione di quella dell'altro”*. E ancora: *“se lavoriamo in due è più esplicita la variazione di velocità da adottare. È una visione pratica che chiarifica la variazione tra le due grandezze”* [note delle relatrici].

NOTE CONCLUSIVE

Riuscire a cogliere che un grafico in un piano cartesiano può rappresentare un continuum di stati di grandezze che covariano, non è né immediato né banale (Saldanha & Thompson, 1998). L'uso del tracciatore, sia fisico che digitale, può favorire una concettualizzazione intuitiva della covariazione prima ancora di introdurre una qualsiasi quantificazione specifica attraverso i numeri, ma attraverso una prima graduazione intuitiva della grandezza velocità e della dinamicità dei movimenti coordinati. Le attività presentate possono quindi offrire spunti di riflessione didattica per introdurre un approccio di tipo covariazionale fin dal primo ciclo di istruzione. Ci sembra opportuno sottolineare che l'approccio alla covariazione qui proposto è certamente *embodied*, poiché è proprio il coinvolgimento del corpo, e in particolare i movimenti di braccia e dita, che permettono di percepire le variazioni e la co-variazione degli oggetti in gioco.

In conclusione, il workshop ha offerto esempi pratici di attività didattiche incentrate sul ragionamento covariazionale mediante l'esplorazione dei due tracciatori e ha veicolato concettualizzazioni e riflessioni inerenti l'approccio covariazionale nel processo di apprendimento della matematica. Ulteriori indicazioni e proposte sull'uso del tracciatore fisico si possono leggere in un capitolo del libro *Varia tu che covario anch'io* (Bagossi et al., 2023).

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo il MaT&L Research Group per aver contribuito allo sviluppo delle attività e delle riflessioni proposte in questo workshop.

BIBLIOGRAFIA

Bagossi, S., Beltramino, S., Ferretti, F., Giberti, C., & Taranto, E. (2023). *Varia tu che covario anch'io. Riflessioni e progettazioni sul ragionamento covariazionale*. Ledizioni.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7797424>

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo d'Istruzione*.

https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

MIUR, UMI, & SIS (2001). *Matematica 2001. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica*.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education – North America* Vol 1, 298–304.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mat

ATTIVITA' DI SVILUPPO DEL PENSIERO PROPORZIONALE IN AMBIENTE IMMERSIVO DI GIOCO: MINECRAFT EDUCATION

Gianna Bellò¹, Chiara Pusceddu², Riccardo Gasperin³, Caterina Staffieri⁴, Patrizia Cedrino⁵

**¹Sovrintendenza agli studi; ^{2,5}I.C. Mont Rose A; ³I.C. Saint Roch; ⁴I.C. E.Lexert
a.bello@mail.scuole.vda.it**

Abstract

Il pensiero proporzionale è un modo di pensare il mondo che si riferisce a molteplici contesti; si esplicita intuitivamente in semplici esperienze di vita e di gioco, si sviluppa in strategie cognitive via via più complesse ed astratte che, lontane dall'essere il naturale approdo della sua evoluzione, diventano percorsi ad ostacoli nei quali districarsi tra misconcezioni e meccanicismi. I videogiochi educativi (serious games), sono laboratori in cui fare esperienza senza vincoli legati a strumenti o spazi fisici, laboratori sempre disponibili e fortemente motivanti in cui esercitare le capacità di analisi, l'individuazione di problemi e le scelte di strategie risolutive, negoziando sempre significati e azioni con altri giocatori. Le attività che proponiamo utilizzano un noto videogioco, Minecraft, nella sua versione educativa, per affrontare il ragionamento proporzionale, senza tuttavia abbandonare l'utilizzo di strumenti consueti quali carta e penna.

Parole-chiave

Pensiero proporzionale. Serious games. Modalità percettivo-motoria. Artefatto digitale. Motivazione.

CONTESTO DI LAVORO

Minecraft è, a tutt'oggi, uno dei videogiochi più giocati al mondo; presenta, tra le altre, alcune peculiarità particolarmente interessanti: è un mondo aperto, liberamente esplorabile, senza obiettivi prefissati, in cui costruire oggetti, edifici e congegni meccanici; simula ambienti naturali o propone ambienti fantastici costituiti da cubi di materiali vari; la semplicità nell'utilizzo di gioco lo rende fruibile in modi e contesti diversi. Nel lavoro proposto si è utilizzata la versione educativa, nella modalità "creativa", l'ambiente di gioco non prevedeva cioè la ricerca di risorse, a disposizione in un'interfaccia a catalogo, e non erano necessarie le funzioni di sopravvivenza. Gli studenti sono stati divisi in gruppi eterogenei con distinzione di ruolo; ogni gruppo ha condiviso i diversi momenti di lavoro e un mondo in Minecraft.

Fasi di lavoro e ambiente di apprendimento

Tutto comincia con l'evoluzione di una popolazione di conigli, il progetto; infatti, aveva come obiettivo quello di ideare e quindi riprodurre in Minecraft degli artefatti digitali secondo la proporzione aurea.

La soluzione del problema di Fibonacci e la scoperta della regolarità della successione hanno costituito parte della prima fase del lavoro proposto; in seguito si è preso in considerazione il rapporto fra un numero successivo e uno precedente della successione; si è potuto così notare l'approssimarsi di questo valore al numero aureo ϕ , numero del quale gli studenti hanno approfondito la conoscenza mediante ricerche su libri e internet.

La seconda fase del progetto prevedeva il disegno inizialmente su carta, quindi con il software GeoGebra, di un rettangolo aureo.

La terza fase è stata una fase di ideazione che si è concretizzata in un disegno individuale, un prototipo reale o fantastico dell'oggetto da costruire. A questa è seguita la fase di progettazione: gli studenti divisi in gruppi, negoziata, a partire dai singoli disegni, un'idea comune, hanno realizzato su foglio a quadretti

o su carta millimetrata un progetto in scala della costruzione da realizzare; quando possibile si sono direttamente prese le misure di ambienti, oggetti reali a cui ispirarsi, altrimenti si è partiti da immagini, fotografie dalle quali ricavare le dimensioni necessarie.

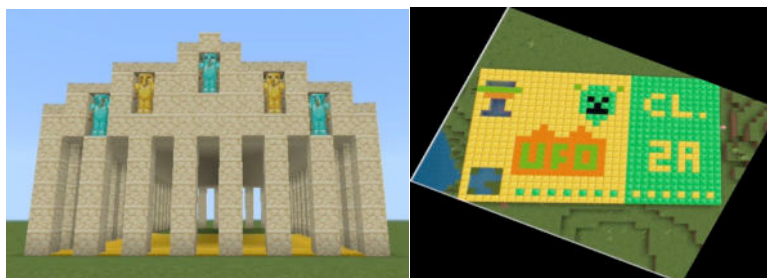
La realizzazione dell'artefatto digitale è stato il lavoro finale; in questa fase si sono verificati continui aggiustamenti del progetto iniziale per poterlo adattare all'ambiente di Minecraft Education.

I gruppi di lavoro sono stati organizzati in apprendimento cooperativo con distinzione di ruolo (Cohen 2013); gruppi eterogenei, composti da quattro o cinque studenti con ruoli orientati soprattutto al compito mentre l'attenzione agli aspetti relazionali era assegnata a ciascun membro del gruppo; si riportano di seguito i profili di ruolo previsti:

- Coordinatore; controlla i tempi di lavoro e le fasi di esecuzione del compito.
- Esperto tecnico; ha conoscenza più approfondita dell'ambiente Minecraft.
- Relatore; riporta nella discussione di classe le difficoltà incontrate, le soluzioni adottate.
- Progettista; presenta e presidia il progetto cartaceo elaborato dal gruppo.

Ambienti immersivi di gioco: alcune considerazioni. Molti hanno sicuramente provato un profondo coinvolgimento nella lettura di un libro o nella visione di un film, l'esperienza immersiva che offrono i videogiochi come Minecraft è simile, ma più intensa, in quanto prevede la presenza attiva del giocatore nei contesti di gioco; lo studente in Minecraft vive un profondo e reale coinvolgimento in un contesto virtuale che può modificare tramite le sue azioni; si tratta di un'immersione prevalentemente cognitiva che si presta comunque a identificare questi contesti di gioco come ambienti laboratoriali, senza vincoli di spazio o di materiali; in questi laboratori virtuali, di facile accesso e di semplice utilizzo, si realizza quell'apprendimento percettivo-motorio che Francesco Antinucci, nel libro "La scuola si è rotta" (2001), vede come un modo di apprendere più naturale ed efficace, anche se meno conveniente in termini di tempo e impegno progettuale, della modalità simbolico-ricostruttiva, mediata dal linguaggio orale e scritto.

Nel lavoro proposto entrambe le modalità, l'imparare per cicli di azione e monitoraggio dei risultati e tramite le modalità più consuete dell'utilizzo di testi e disegni, hanno convissuto utilmente.



Alcuni esempi di costruzioni in Minecraft: il Partenone e un "Logo aureo"

RINGRAZIAMENTI

Un particolare ringraziamento va rivolto a tutti i docenti della rete "Robotica Educativa Valdostana" che interpretano il loro mestiere nella prospettiva della ricerca e dell'impegno costante ed ai loro studenti, veicoli di entusiasmo, e, a loro volta, maestri.

Si ringrazia inoltre la Sovrintendenza agli studi che supporta il lavoro delle classi non solo fornendo le risorse materiali necessarie ma anche sostenendo l'idea di una scuola aperta all'innovazione e orientata alle nuove istanze sociali

BIBLIOGRAFIA

- Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A., (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Routledge.
- Benassi A., (2018). Didattica immersiva. Bricks - anno 8 - numero 3 https://www.rivistabricks.it/wp-content/uploads/2018/08/2018_3_18_Benassi.pdf
- Cohen, E., (2013). Organizzare gruppi cooperativi. Ruoli, funzioni, attività. Erickson
- Malara, N.A, Ponzi, S., (2003). Ragionamenti intuitivi di allievi posti di fronte a problemi di proporzionalità. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol 28A n. 3, 245-269
- Mariotti M. A., Sainati Nello M., Sciolis Marino M., (1988) Il ragionamento proporzionale negli alunni di 13-14 anni, Parte I, Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 11, n. 2, 105-136, Vol. 11, n. 4, 313-339
- Papert, S. (1995). I bambini e il computer. Rizzoli
- Pesci, A., (2002). Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe. Pitagora

IMMAGINARE E VISUALIZZARE: LA GEOMETRIA NELLO SPAZIO SENZA E CON LA REALTÀ VIRTUALE

Raffaele Casi, Margherita Piroi, Cristina Sabena, Carlotta Soldano
Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università di Torino
margherita.piroi@unito.it

Abstract

Come viene messo in luce sia da illustri matematici sia da ricercatori in didattica della matematica, “saper vedere in matematica” è fondamentale per favorire una visione della materia che non sia ridotta a un insieme di nozioni e procedure prive di significato. In particolare, la nota difficoltà di produrre rappresentazioni tridimensionali rende particolarmente necessario promuovere questa competenza nell’ambito della geometria dello spazio già a partire dalla scuola primaria. Gli ambienti di realtà virtuale offrono un'enorme potenzialità per favorire la creazione e l'esplorazione immersiva di oggetti tridimensionali. Tuttavia, dato che si tratta di tecnologie ancora relativamente nuove, il loro utilizzo nelle scuole è ancora limitato. In questo lavoro, presentiamo le principali potenzialità del software di realtà virtuale NeoTrie. Questo software consente di creare, manipolare e interagire con oggetti geometrici tridimensionali. Utilizziamo come esempio il possibile impiego di NeoTrie per un'attività di visualizzazione delle sezioni del cubo, attività proposta durante il workshop svolto nel Convegno con insegnanti di ogni ordine e grado.

Parole-chiave

Geometria tridimensionale, NeoTrie, realtà virtuale, visualizzazione

IL “SAPER VEDERE” IN MATEMATICA

Nel 1967 venne pubblicato un libro di fondamentale importanza per la didattica della matematica italiana: Il “Saper vedere” in Matematica, di Bruno de Finetti. De Finetti argomenta che la capacità di “vedere” concetti matematici, anziché semplicemente comprendere le regole e le procedure, è essenziale per sviluppare una comprensione profonda e intuitiva della disciplina. L'autore sottolinea l'importanza di integrare l'aspetto visuale nell'insegnamento della matematica fin dalle prime fasi dell'istruzione, al fine di far apprezzare agli studenti la bellezza e la concretezza della materia.

L'importanza della visualizzazione nello studio matematico è confermata dalla ricerca internazionale in didattica della matematica. Arcavi (2003) definisce la visualizzazione in matematica come:

“l'abilità, il processo e il prodotto della creazione, dell'interpretazione e dell'uso di e riflessione su fotografie, immagini, diagrammi, nella nostra mente, su carta o con strumenti tecnologici, con lo scopo di raffigurare e comunicare informazioni, pensare e sviluppare idee precedentemente sconosciute e di far progredire le proprie conoscenze” (p. 217).

L'autore insiste sull'importanza di considerare la visualizzazione come il processo di visualizzare e non come un prodotto finito. In particolare, per Arcavi la visualizzazione permette di vedere il “non visto”. Questo “non visto” letteralmente si riferisce a tutto ciò che noi esseri umani non siamo in grado di vedere per le limitazioni della nostra possibilità fisiologica di vedere oggetti. Si pensi, per esempio, al problema relativo alle diagonali del cubo discusso da Mariotti (2005): “Determinare se le diagonali di un cubo si incontrano e se si incontrano perpendicolarmente”. Nonostante il problema riguardi un poliedro familiare, saper vedere come si incontrano le sue diagonali utilizzando un disegno sul foglio bidimensionale di un oggetto tridimensionale o immaginandolo nella propria mente è tutt'altro che banale. Per vedere se le diagonali sono perpendicolari o meno, è necessario concepirle come diagonali di rettangoli formati da una coppia opposta di spigoli del cubo e una coppia di diagonali di facce opposte del cubo. Poiché le diagonali di questi rettangoli non sono perpendicolari tra loro, la risposta è negativa. In altre parole, è necessario immaginare un rettangolo dentro al cubo e supportare il controllo figurale

con un controllo di tipo concettuale. Secondo la teoria dei concetti figurali (Fischbein, 1993) sviluppare e integrare questi due tipi di controlli è fondamentale quando si ha a che fare con gli oggetti geometrici, che per loro natura sono concetti figurali, ossia entità mentali che contemporaneamente possiedono sia componenti concettuali che figurali. Molto spesso la sola immaginazione, visione o rappresentazione bidimensionale non sono sufficienti a supportare lo sviluppo negli studenti di una corretta e raffinata componente figurale delle figure geometriche. Fortunatamente, oggi le nuove tecnologie permettono in molti casi di far vedere ciò che i media tradizionali non ci permettono di vedere, rendendo così il “non visto” visibile. È il caso della realtà virtuale, che permette di percepire la profondità degli oggetti tridimensionali, rendendo visibile ciò che altrimenti sarebbe inaccessibile tramite rappresentazioni bidimensionali.

LA REALTÀ VIRTUALE E IL SOFTWARE NEOTRIE

Esistono diversi nomi e usi della realtà virtuale. Noi facciamo riferimento alla definizione di Fuchs e colleghi (2011):

"La realtà virtuale è un dominio scientifico e tecnico che utilizza l'informatica e le interfacce comportamentali per simulare in un mondo virtuale il comportamento di entità tridimensionali, che interagiscono in tempo reale tra loro e con uno o più utenti in un'immersione pseudo-naturale attraverso canali sensomotori". (p. 8)

Tale tecnologia ha visto negli ultimi anni un enorme sviluppo e diffusione in numerosi ambienti. Non stupisce un conseguente aumento del numero di studi che ne stanno esaminando il potenziale nei processi di insegnamento e apprendimento.

Diversi studi recenti si concentrano su come la realtà virtuale offra l'opportunità di creare ambienti immersivi in cui lo studente possa realizzare attività a sfondo matematico. Tuttavia, resta ancora molto da esplorare riguardo al grande potenziale della realtà virtuale nel consentire la visualizzazione e la manipolazione di rappresentazioni statiche e dinamiche di oggetti geometrici tridimensionali. Un software progettato con questo obiettivo è NeoTrie⁸⁴, un'applicazione di geometria 3D dinamica per la realtà virtuale immersiva sviluppata nel 2017 da un team dell'università di Almería coordinato dal Prof. José L. Rodríguez. Dal punto di vista didattico, NeoTrie consente la creazione, la visualizzazione, la manipolazione e l'interazione dinamica con oggetti e modelli geometrici 3D, offrendo un'esperienza simile a quella di un ambiente di geometria dinamica come GeoGebra, ma completamente immersiva in un ambiente tridimensionale.

le principali funzionalità di NeoTrie

Il software si utilizza con un visore e due telecomandi. Le azioni principali sono controllate dai due telecomandi, che appaiono come mani quando si è immersi nell'ambiente virtuale dell'applicazione (Figura 1). Cliccando sul dorso della mano si apre una gamma di possibili “ruoli” che si possono attribuire a quella mano. Ad esempio, impostando la modalità *create* (crea), azionando uno specifico pulsante del telecomando sarà possibile creare dei punti o dei segmenti che uniscono due dati punti. La modalità *faces* (facce) consente di creare la faccia di un poligono toccando i suoi lati. *Move* (muovi) consente di muovere una figura e se viene attivata su entrambe le mani permette di ridimensionare completamente la figura, proporzionalmente a quella iniziale. Con *grab* (afferra) si può non solo muovere, ma anche ruotare un oggetto. Con *extrude* è possibile creare un prisma o una piramide a partire da una faccia.

Nell'ambiente simulato, rappresentato da un tempio greco, è presente un tavolo su cui sono posizionati diversi strumenti (Figura 2). Questi strumenti consentono di eseguire funzioni più avanzate e complesse. Ciò che li rende particolari è che devono essere afferrati da una mano e utilizzati direttamente "sull'oggetto" desiderato. Ad esempio, prendendo lo strumento riflessione (in basso a destra in Figura 2) e facendone toccare la punta a un segmento o due punti nello spazio, e successivamente toccando una

⁸⁴ È possibile visualizzare il sito del progetto su: <https://www2.ual.es/neotrie/>

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia qualsiasi figura presente nello spazio, si genererà la sua immagine simmetrica rispetto all'asse indicato precedentemente (o rappresentato dalla retta che congiunge i due punti selezionati).



Figura 1. Modalità attivabili per le azioni da telecomando

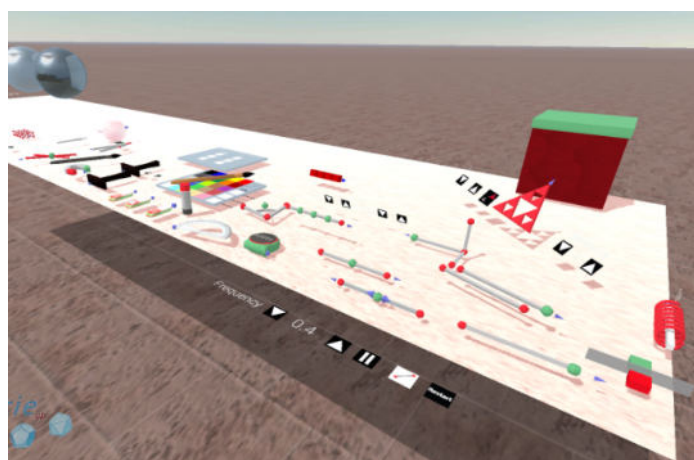


Figura 2. Strumenti disponibili sul tavolo

È possibile sempre accedere ad una galleria di figure, che genera in automatico figure bidimensionali o tridimensionali scelte, per non doverle necessariamente costruire con le funzionalità della mano e gli strumenti di base. Nell'ambiente è inoltre presente una schermata in cui è possibile visualizzare degli "scenari" precedentemente salvati. Questo permette di costruire degli oggetti specifici e salvare lo scenario che li contiene, in modo da poterli utilizzare successivamente senza che debbano essere ricostruiti da capo.

ESEMPIO DI UTILIZZO: LE SEZIONI DEL CUBO

Durante il workshop abbiamo presentato due problemi di visualizzazione, ovvero problemi in cui la capacità di immaginare elementi è estremamente utile (se non fondamentale) nella risoluzione degli stessi.

Ai/lle docenti alla scuola dell'Infanzia e Primaria partecipanti al workshop abbiamo proposto il classico problema di Fischbein (1993) nella formulazione:

Secondo voi, le diagonali del cubo si intersecano? Se si intersecano, formano angoli retti?

Ai/lle docenti della scuola secondaria abbiamo proposto un secondo problema:

Considerate i tre cubi in figura (figura 3). Immaginate di sezionare ciascuno di essi con un piano passante per i tre punti indicati. Quali figure si formano?

Più in generale, quali sono le possibili figure che si possono ottenere sezionando il cubo con un piano?

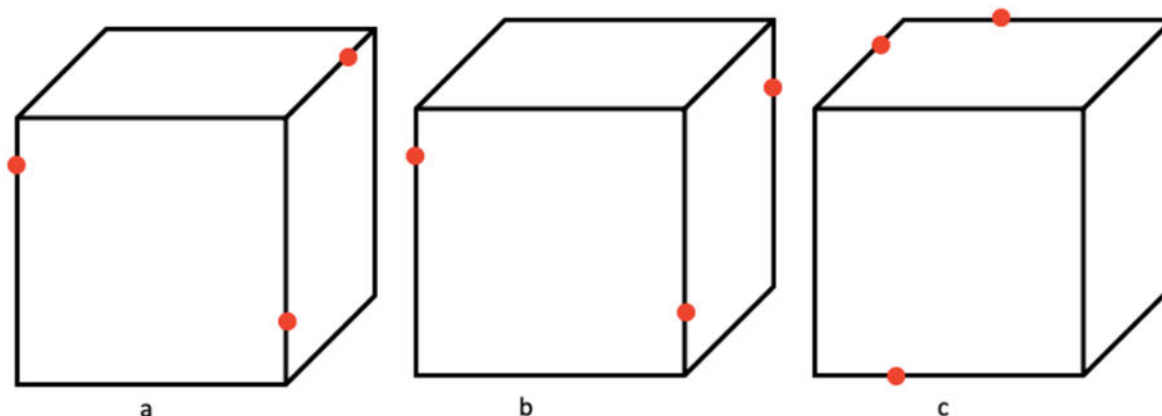


Figura 3. Immagine fornita assieme al secondo problema.

Attività ispirata a <https://www2.ual.es/neotrie/secciones-de-corte-de-figuras/>

Inizialmente abbiamo lasciato del tempo per lavorare in piccoli gruppi ai problemi. Successivamente, abbiamo svolto una discussione di gruppo per condividere le soluzioni proposte e far emergere le difficoltà incontrate nello svolgimento del problema, con particolare focus sulle difficoltà riscontrate nell'immaginazione degli oggetti matematici in gioco. Come ci aspettavamo, i partecipanti al workshop hanno mostrato difficoltà a vedere visivamente le soluzioni dei problemi facendo uso solo della carta e matita. In particolare, i gruppetti che hanno risolto il problema delle diagonali del cubo lo hanno fatto passando attraverso un tipo di controllo concettuale come guida e supporto di quello figurale (Fischbein, 1993).

Dopo aver lasciato i partecipanti immaginare e provare a visualizzare con carta e matita le soluzioni di questi problemi, i conduttori del workshop hanno mostrato come il software NeoTrie possa supportare la visione della componente figurale dell'oggetto geometrico.

Attraverso la funzionalità prevista dagli sviluppatori del software NeoTrie di condivisione su schermo di quanto un utilizzatore vede sul proprio visore, abbiamo mostrato ai partecipanti alcune possibili esplorazioni delle due situazioni descritte nei due problemi scelti.

Grazie alla possibilità di costruire in NeoTrie superfici semitrasparenti, è possibile costruire un cubo e un piano che abbiano tali caratteristiche, come si vede in Figura 4. Attraverso le manipolazioni presentate precedentemente (afferra, muovi) e utilizzate opportunamente sul cubo e sul piano, si giunge a visualizzare l'intersezione tra il piano e il cubo. Questo permette di esplorare e visualizzare le configurazioni di entrambi i problemi.

Per quanto attiene al primo problema, diventa immediato vedere che il piano che contiene due diagonali di un cubo è quello che passa per due spigoli e interseca due facce lungo la diagonale delle stesse. L'intersezione tra il cubo e il piano così posizionato è un rettangolo, le cui dimensioni sono il lato e la diagonale di una faccia del cubo. Pertanto, attivando un controllo di tipo concettuale, si può affermare che le diagonali del cubo non siano perpendicolari.

Anche il secondo problema diviene di facile esplorazione nel setting predisposto. Costruendo in NeoTrie tre cubi come quelli presentati nella scheda cartacea consegnata ai/lle docenti e riportati in Figura 3, e manipolando opportunamente il piano in modo che contenga via via i tre punti indicati sui tre cubi, è possibile visualizzare le intersezioni prodotte e, successivamente, continuare l'esplorazione individuando altre possibili configurazioni.

Inoltre, attivando la funzione muovi su entrambe le mani, come detto in precedenza, è possibile ridimensionare la figura. Si è quindi mostrato come afferrando il cubo per due vertici e allargando le braccia, la figura si allarga mantenendo le proporzioni. Diventa allora possibile, virtualmente, entrare dentro al solido, osservando le intersezioni dall'interno, andando a osservare più da vicino le varie configurazioni, e formulando ipotesi anche a partire da altri punti di vista. È stato possibile, anche in questo secondo problema, giungere alla soluzione.

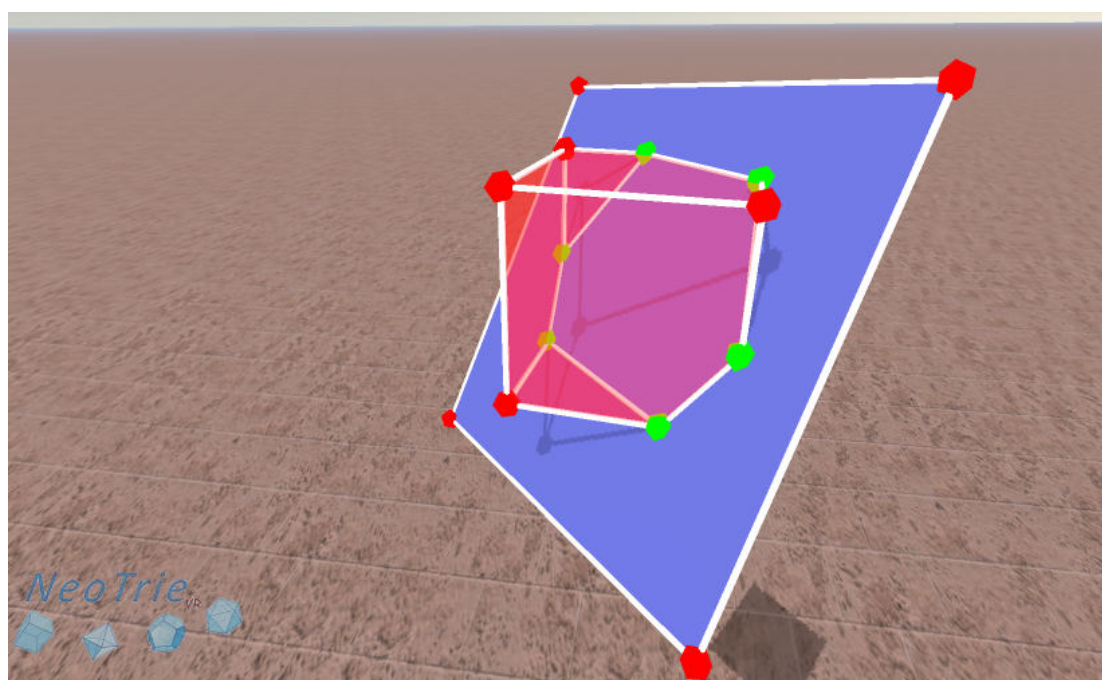


Figura 4. Intersezione tra il cubo e un piano passante per i tre punti indicati nel problema

RIFLESSIONI FINALI

Le ricerche sull'utilizzo di strumenti interattivi e immersivi che aiutano gli studenti a migliorare la visualizzazione tridimensionale, contribuendo a sviluppare una comprensione più profonda dei concetti geometrici, sia nel senso figurale sia in quello concettuale, sono ancora poche. A nostro avviso, la realtà virtuale offre nuove possibilità nel campo dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica: consentendo agli studenti di interagire con oggetti tridimensionali in modo immersivo, la realtà virtuale può contribuire a rendere visibili concetti più difficili da comprendere attraverso rappresentazioni bidimensionali. In tal senso, NeoTrie è un esempio di software progettato per facilitare la visualizzazione e la manipolazione di oggetti geometrici tridimensionali tramite la realtà virtuale. Questo tipo di strumento offre agli studenti un'esperienza simile a quella di un ambiente di geometria dinamica, ma completamente immersiva in un ambiente tridimensionale. Attraverso la visualizzazione e la manipolazione di oggetti geometrici tridimensionali, gli studenti possono esplorare problemi matematici complessi, come per esempio imparare a “vedere” le intersezioni di piani con cubi e altre figure geometriche.

Un grosso limite alla pratica didattica è costituito dall'isolamento dello studente dagli altri membri del gruppo-classe (l'insegnante e, soprattutto, gli altri studenti). Nelle nostre future ricerche con tale software, esploreremo l'utilizzo di un sistema multi-player, che ci consentirà di indagare le potenzialità per l'interazione e per la formazione del pensiero geometrico in una prospettiva di costruzione sociale della conoscenza.

BIBLIOGRAFIA

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fuchs, P., Moreau, G. & Guitton, P. (2011). Introduction to Virtual Reality. In P Fuchs, G. Moreau & P. Guitton (Eds.), *Virtual Reality: Concepts and Technologies* (pp. 3–10).
- Mariotti, M. A. (2005). *La geometria in classe: riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Pitagora Editrice.

DA ZERO A EULERO: POLIEDRI E GRAFI A SCUOLA

Luca Dragone*, Daniela Tossini**

* Università degli Studi di Roma Tor Vergata, **I.C. Falcone e Borsellino di Roma

luca.dragone71@gmail.com

Abstract

Il workshop, presentato al Convegno Di.Fi.Ma. 2023, ripercorre le fasi salienti delle attività proposte ad alunni del terzo anno della scuola secondaria di I grado e dei primi tre anni del Liceo. Viene qui riportato il percorso completo realizzato nelle scuole. Lavorando in piccoli gruppi, i partecipanti costruiscono modelli di poliedri e di grafi e li utilizzano per riconoscere proprietà geometriche e regolarità (la formula di Eulero, per esempio). Viene dato ampio spazio alla ricerca di cammini hamiltoniani e passeggiate euleriane, e vengono proposte attività sulle colorazioni e sul concetto di dualità, con considerazioni e approfondimenti anche di natura topologica. L'argomento è trattato privilegiando l'approccio storico, con riferimenti ad eventi e aneddoti del passato.

Parole-chiave

Poliedri, grafi, Eulero, cammini, colorazioni.

INTRODUZIONE

Nati nel XVIII secolo dalla mente geniale di Leonhard Euler (a noi noto come Eulero) per risolvere il famoso problema dei ponti di Königsberg, i grafi costituiscono uno strumento molto versatile, che riveste un ruolo fondamentale nello sviluppo del pensiero matematico moderno. Eulero per primo intuì la stretta correlazione tra i poliedri ed una particolare categoria di grafi, detti “planari”, per i quali ricavò la nota formula Vertici – Spigoli + Facce = 2. Negli anni a seguire lo studio di questi due oggetti matematici è rimasto indissolubilmente legato, al punto che molti teoremi riguardanti i poliedri sono stati dimostrati usando i grafi planari e viceversa. Il legame è così forte che, in tempi più recenti, il concetto stesso di poliedro è stato ridefinito; alla definizione classica: “il poliedro è un solido geometrico limitato da un numero finito di poligoni disposti in modo tale che ciascun lato sia comune a due e due soli di questi poligoni” oggi si aggiunge la postilla: “un poliedro è tale se può essere proiettato su una superficie piana (o sferica) per generare un grafo planare” (si dice anche che il poliedro si può “immergere” in una superficie sferica). Questo aspetto permette anche di classificare in modo semplice le superfici topologiche usando come strumento la “caratteristica di Eulero”. Questi concetti sono stati elaborati nel XIX secolo ma, come spesso accade, il tempo lentamente cancella l'origine delle cose. Così, nella cultura scientifica e tecnologica di oggi, i grafi sono noti quasi esclusivamente per le applicazioni computazionali, e vengono trattati solo in corsi universitari specifici. Nelle scuole italiane il potenziale didattico dei poliedri e dei grafi è quasi del tutto inesplorato. I poliedri vengono quasi sempre usati come mero espediente per applicare formule di calcolo (aree di superfici e volumi), trascurando completamente la trattazione delle proprietà geometriche; i grafi, sebbene siano presenti in moltissime applicazioni pratiche nella vita di tutti i giorni (si pensi allo schema delle linee di una metropolitana), sono quasi del tutto assenti nelle indicazioni ministeriali e nei libri scolastici. Eppure, alcuni quesiti Invalsi si basano proprio sulla comprensione delle proprietà geometriche dei poliedri e sull'interpretazione dei grafi. Il percorso didattico presentato nel workshop ha lo scopo di proporre la riscoperta del ruolo fondamentale dei poliedri e dei grafi nello sviluppo della matematica moderna, e di affermare e promuovere la valenza didattica di questi argomenti nella scuola secondaria di I e II grado.

PERCORSO DIDATTICO

Le attività sono state realizzate in classi terze di Scuola Secondaria di I grado, in classi seconde di Liceo Scientifico e in classi prime e terze di Liceo Classico.

Il percorso didattico si svolge in forma laboratoriale, in piccoli gruppi (di 2-3 alunni ciascuno), con l'ausilio di schede di lavoro appositamente predisposte, che guidano i ragazzi nella costruzione autonoma dei materiali e nel loro utilizzo per la ricerca delle proprietà geometriche. La presenza di domande-stimolo a risposta aperta permette agli alunni di realizzare un percorso di riflessione sui contenuti appresi e ai docenti di ottenere un ampio feedback. I frequenti momenti di discussione collettiva servono a condividere i risultati dei lavori di gruppo e ad elaborare considerazioni più generali, rendendo il percorso più dinamico e interattivo.

Attività 1

Dopo una presentazione introduttiva di carattere storico-epistemologico sull'argomento poliedri, si passa al lavoro in piccoli gruppi. Ad ogni gruppo viene assegnato un poliedro tra quelli elencati: cubo, tetraedro regolare, ottaedro regolare, piramide retta a base quadrata, prisma retto a base triangolare regolare e bpiramide trigonale. Viene chiesto di ricostruire lo scheletro del solido con cannucce o barrette magnetiche e di osservarne le caratteristiche. Ciò consente ai ragazzi di familiarizzare con la forma tridimensionale del poliedro in modo completo, avendo a disposizione il solido pieno, con facce tangibili, e lo scheletro vuoto, che mette meglio in evidenza i vertici e gli spigoli. Segue un'attività di conteggio dei vertici, degli spigoli e delle facce che porta alla verifica della formula di Eulero. Viene introdotto anche il concetto di "grado" di un vertice, definito come numero degli spigoli che incidono su di esso.

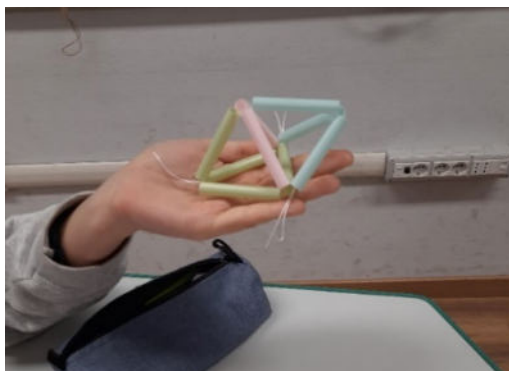


Figura1. Costruzione e osservazione dei poliedri.

Attività 2

L'obiettivo di questa attività è quello di rappresentare i poliedri con sviluppi piani e con grafi planari, e di operare un primo confronto tra le due rappresentazioni.

Generalmente al terzo anno della scuola secondaria di I grado gli alunni hanno già lavorato sulla rappresentazione dei poliedri con sviluppi piani, e quindi si tratta solo di richiamare alcuni concetti di base. Più accurato deve essere invece il lavoro sui grafi, che il più delle volte costituiscono un argomento del tutto nuovo per i ragazzi. Soprattutto con gli alunni della scuola secondaria di I grado, che non hanno ancora sviluppato pienamente la capacità di astrazione, ha senso utilizzare del materiale concreto per costruire il grafo planare di un poliedro. Per esempio, si possono usare delle cannucce con un filo elastico all'interno che possano essere dilatate a piacimento fino a generare una forma schiacciata sul piano.

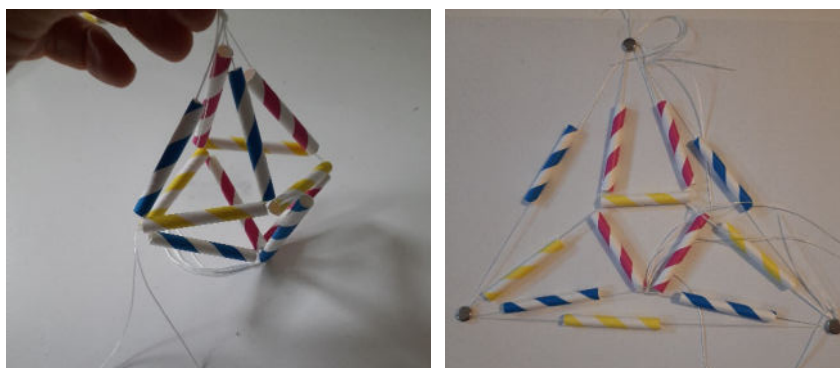


Figura 2. Costruzione del grafo planare di un ottaedro con cannuce ed elastici.

Anche la proiezione dello scheletro del poliedro su uno schermo appositamente orientato è molto utile, poiché di immediata comprensione.

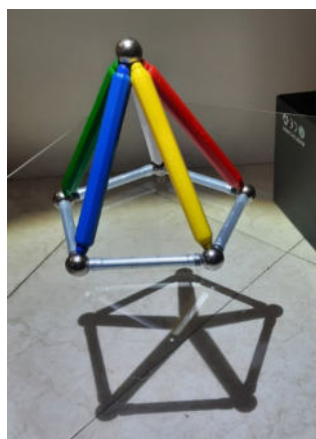


Figura 3. Costruzione del grafo planare di una piramide a base pentagonale per proiezione dello scheletro.

Tali strategie hanno il vantaggio di permettere la rappresentazione dei poliedri con grafi planari in modo semplice, ma hanno il difetto di non sottolineare adeguatamente la totale indipendenza dei grafi dalla forma delle linee. Infatti, nel passaggio da poliedro a grafo, gli spigoli del poliedro possono trasformarsi non solo in segmenti, ma anche in archi di forma qualsiasi, a patto che vengano rispettate le adiacenze. Per illustrare meglio questo aspetto si possono usare dei nastri in grado di scorrere all'interno delle cannuce.

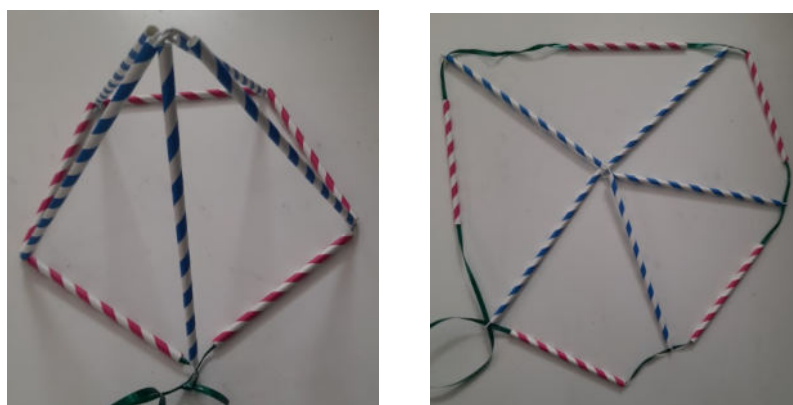


Figura 4. Costruzione del grafo planare di una piramide a base pentagonale con cannuce e nastri.

Un altro concetto importante è costituito dalla cosiddetta “faccia all’infinito”. Un dato poliedro può essere rappresentato con un grafo planare in modo diverso a seconda della faccia che si decide di espandere all’infinito. Il fatto che anche la regione esterna di un grafo rappresenti una faccia del poliedro di partenza costituisce un nodo concettuale complesso, che pertanto non va sottovalutato. Per favorire il corretto apprendimento di questo delicato aspetto è necessario soffermarsi ad analizzare diversi casi specifici prima di proporre una generalizzazione.

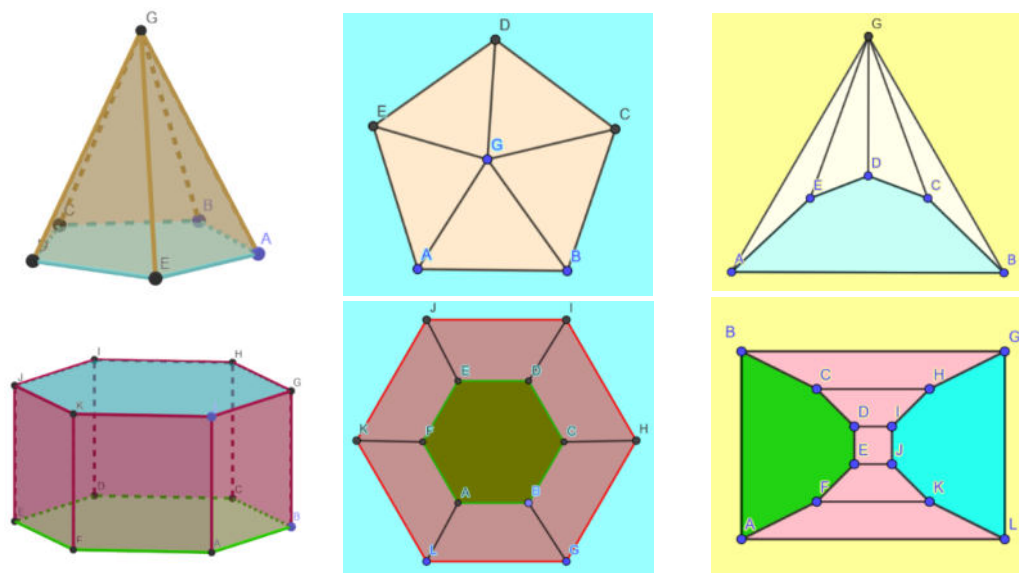


Figura 5. Grafi della piramide a base pentagonale e del prisma a base esagonale costruiti scegliendo diverse facce all’infinito.

Il metodo che si dimostra più efficace per fornire una corretta interpretazione dei grafi planari che rappresentano i poliedri è quello di presentare numerosi esempi e di sottoporli ad un’analisi preliminare nei piccoli gruppi e ad una successiva discussione collettiva. Nel percorso didattico vengono proposti 21 esempi di grafi, 3 per ciascuno dei poliedri assegnati e 3 che non corrispondono ad alcun poliedro, e ne viene chiesta l’attribuzione con la relativa giustificazione.

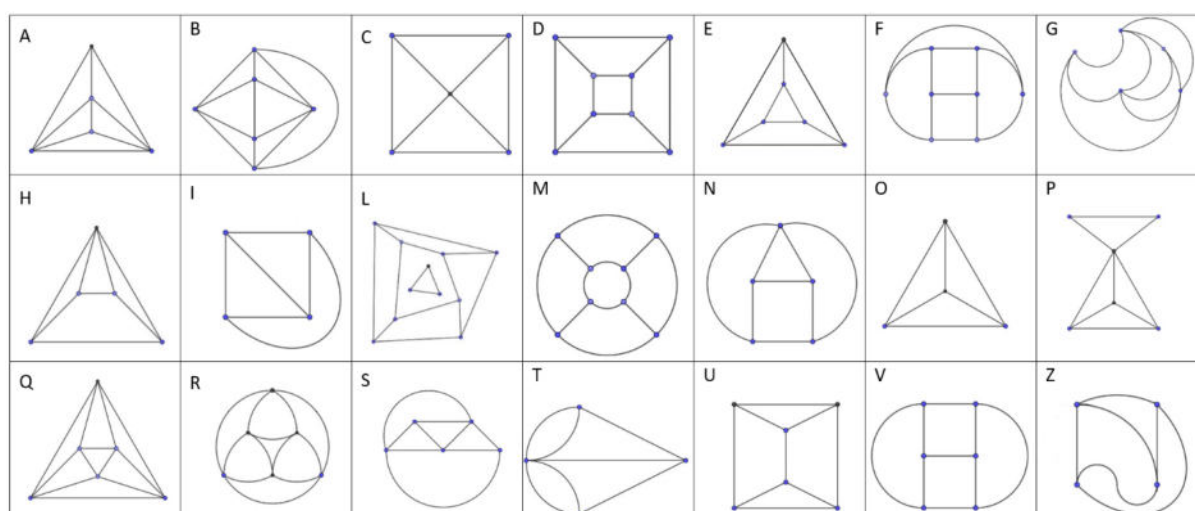


Figura 6. Esempi di grafi utilizzati nel percorso didattico.

Attività 3

Si chiede ad ogni gruppo di tracciare un percorso sulla superficie del poliedro assegnato che parta da un punto al centro di una faccia e passi una sola volta per il centro di tutte le altre facce. Esso deve essere tracciato con una linea continua sulla superficie del solido che tagli alcuni spigoli non passando per i vertici. Il percorso deve essere poi riprodotto sullo sviluppo piano e sul grafo planare. Questa attività permette di completare il confronto tra i due strumenti per la rappresentazione piana di un poliedro presi in esame.

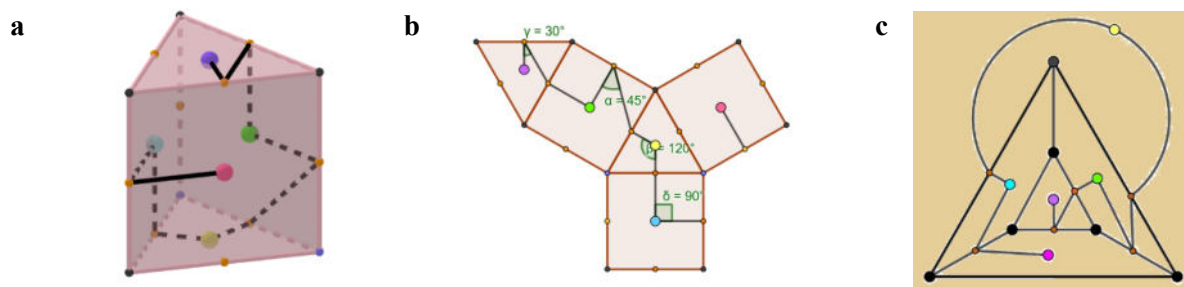


Figura 7. a. Percorso sulla superficie del prisma a base triangolare. b. Riproduzione del percorso sullo sviluppo piano. c. Riproduzione del percorso sul grafo planare.

La discussione collettiva sulle caratteristiche geometriche che si conservano oppure si perdono quando si rappresenta un poliedro con uno sviluppo piano o con un grafo planare ha portato ai risultati riassunti nella tabella riportata sotto:

Tabella 1. Caratteristiche del poliedro che si conservano o si perdono nella rappresentazione con sviluppi piani e con grafi planari.

Sviluppo piano	Grafo planare
Conserva le misure di lunghezze e angoli.	Non conserva le misure di lunghezze e angoli.
Conserva il numero di facce ma non quello di spigoli e vertici.	Conserva il numero di facce, spigoli e vertici.
Non conserva il grado dei vertici.	Conserva il grado dei vertici.
Non conserva l'adiacenza di alcune facce.	Conserva l'adiacenza delle facce.
Non conserva la continuità dei percorsi sulla superficie.	Conserva la continuità dei percorsi sulla superficie.

Si riscontra quindi che, per lo studio dei poliedri, la scelta di una certa rappresentazione sul piano piuttosto che un'altra dipenda dall'utilizzo che se ne vuole fare. In particolare, gli sviluppi piani costituiscono un ottimo strumento per lo studio delle proprietà metriche, mentre i grafi sono da preferire per la descrizione delle proprietà topologiche come l'adiacenza delle facce e la continuità dei percorsi sulla superficie del poliedro. In particolare, nel caso di cammini o passeggiate lungo gli spigoli il ricorso agli sviluppi piani è chiaramente da escludere, mentre i grafi costituiscono una valida alternativa all'uso diretto del solido in 3D.

Attività 4

Nella prima fase dell'attività si chiede di trovare, ove possibile, passeggiate euleriane chiuse e cicli hamiltoniani sugli spigoli dei poliedri e dei grafi planari che li rappresentano. Si definisce passeggiata euleriana un percorso che passa per tutti gli spigoli percorrendoli una sola volta (i vertici invece possono essere raggiunti anche più di una volta). La passeggiata è chiusa se il vertice di partenza e quello di arrivo coincidono. Si definisce cammino hamiltoniano un cammino chiuso che passa per tutti i vertici una volta sola (ma non necessariamente passa per tutti gli spigoli). Un cammino hamiltoniano chiuso può essere chiamato anche ciclo hamiltoniano.

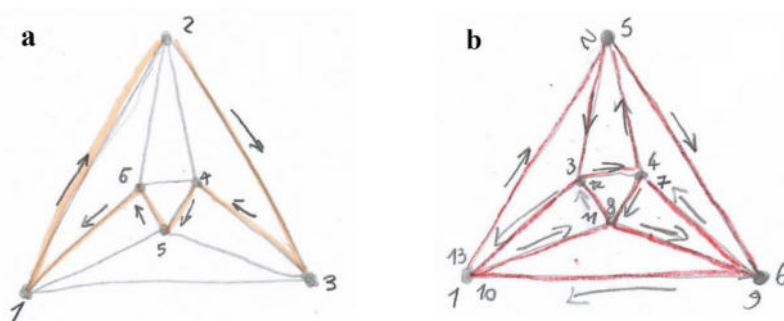


Figura 8. Esempi di: a. ciclo hamiltoniano, b. passeggiata euleriana chiusa trovati dagli alunni sul grafo planare dell'ottaedro.

Risulta ben presto evidente il vantaggio dell'uso della rappresentazione con grafi planari rispetto all'uso diretto del modellino solido in questa attività. Infatti, nei grafi tutti gli elementi in gioco (spigoli e vertici) sono evidenti e non si deve ruotare lo scheletro per seguire il cammino o la passeggiata, come accade invece nel caso del modellino 3D.

La discussione collettiva permette di scoprire la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di passeggiate euleriane chiuse: "in un poliedro, o in un grafo planare, è possibile trovare una passeggiata euleriana chiusa se e solo se tutti i vertici sono di grado pari". Si tratta di una proposizione di semplice dimostrazione, sulla quale non è il caso di soffermarsi. Se però si considerano i sei poliedri utilizzati nei diversi gruppi di lavoro, ci si accorge che solo l'ottaedro soddisfa la condizione appena enunciata (ha tutti i vertici di grado 4). Per i cicli hamiltoniani, invece, la ricerca giunge facilmente a buon fine in tutti i casi proposti. Se si vuole rendere più ricca l'esperienza, si può estendere l'attività al cubottaedro, poliedro semiregolare ottenuto prendendo come vertici i punti medi degli spigoli del cubo. Anche in questo caso, l'uso del grafo planare si è rivelato molto efficace, come testimoniato dalla figura seguente:

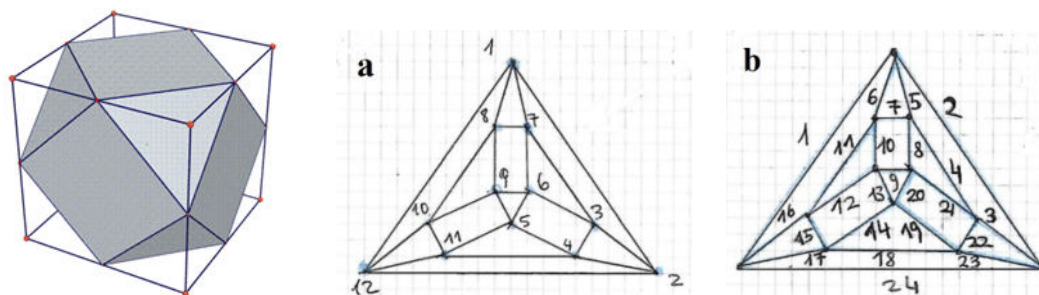


Figura 9. Rappresentazione del cubottaedro. Esempi di: a. ciclo hamiltoniano, b. passeggiata euleriana chiusa trovati dagli alunni sul grafo planare del cubottaedro.

Attività 5

Questa attività permette di trovare le colorazioni dei poliedri e dei grafi planari che li rappresentano. Si possono realizzare colorazioni delle facce, degli spigoli e dei vertici, definite come segue:

- la "colorazione delle facce" è un modo di colorare i poliedri o i grafi planari attribuendo colori diversi a facce adiacenti (per facce adiacenti si intende due facce che abbiano uno spigolo in comune) usando il minimo numero possibile di colori;
- la "colorazione degli spigoli" è un modo di colorare i poliedri o i grafi planari attribuendo colori diversi a spigoli adiacenti (per spigoli adiacenti si intende due spigoli che abbiano un vertice in comune) usando il minimo numero possibile di colori;
- la "colorazione dei vertici" è un modo di colorare i poliedri o i grafi planari attribuendo colori diversi a vertici adiacenti (per vertici adiacenti si intende due vertici che abbiano uno spigolo in comune) usando il minimo numero possibile di colori.

Se si considera l'esempio del cubo (e del grafo planare che lo rappresenta), si scopre facilmente che esso è 3-colorabile per facce, 3-colorabile per spigoli, 2-colorabile per vertici.

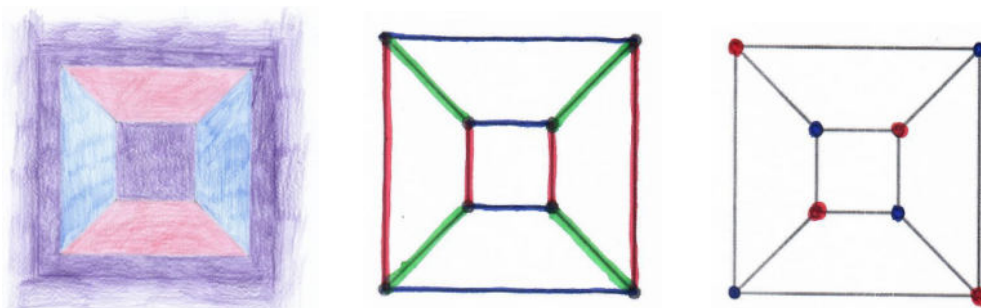


Figura 10. Colorazioni per facce, spigoli e vertici del cubo trovate dagli alunni.

Nell'attività didattica proposta, ogni gruppo deve trovare le colorazioni per spigoli, per vertici e per facce del poliedro che gli è stato assegnato. Una volta completato il lavoro, i risultati vengono condivisi in una discussione collettiva e riportati nella seguente tabella:

Tabella 2. Colorazioni dei poliedri a confronto

	per spigoli	per vertici	per facce
Tetraedro	3 - colorabile	4 - colorabile	4 - colorabile
Cubo	3 - colorabile	2 - colorabile	3 - colorabile
Ottaedro	4 - colorabile	3 - colorabile	2 - colorabile
Prisma a base triangolare	3 - colorabile	3 - colorabile	4 - colorabile
Bipiramide trigonale	5 - colorabile	4 - colorabile	3 - colorabile
Piramide a base quadrata	4 - colorabile	3 - colorabile	3 - colorabile

Se si considera la colorazione per facce e per vertici, ci si accorge che il numero dei colori utilizzati non supera mai 4, e questo è conseguenza del noto teorema dei 4 colori e della dualità tra i poliedri. Se prendiamo ad esempio il cubo e l'ottaedro, essendo l'uno il duale dell'altro, si ha che la colorazione per vertici dell'uno corrisponde alla colorazione per facce dell'altro, e viceversa. Stessa cosa per il prisma a base triangolare e la bipiramide trigonale. Il tetraedro e la piramide a base quadrata invece sono duali di se stessi, e pertanto hanno la stessa colorazione per vertici e per facce.

La figura che segue mostra la dualità del cubo e dell'ottaedro in forma di poliedri e di grafi. La corrispondenza biunivoca delle facce dell'uno con i vertici dell'altro giustifica la simmetria delle colorazioni per facce e per vertici tra questi due poliedri.

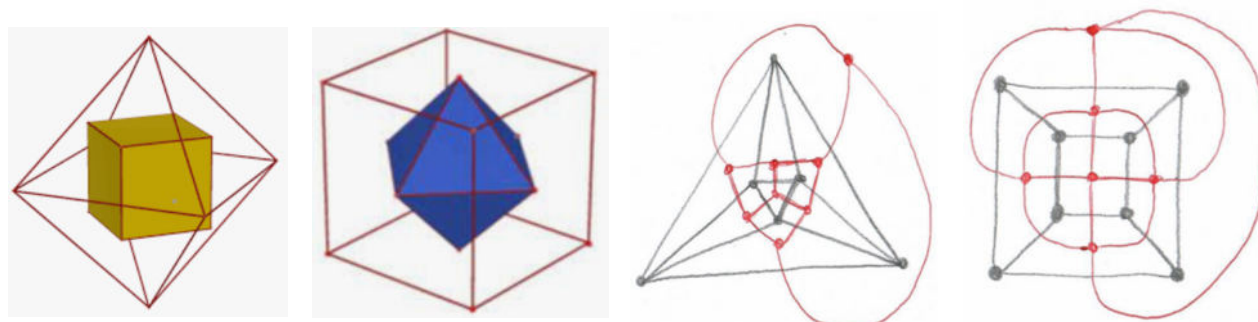


Figura 11. Dualità tra il cubo e l'ottaedro in forma di poliedri e di grafi planari.

Per completare l'attività si possono proporre le colorazioni del cubottaedro e di uno dei suoi grafi planari. Come visto precedentemente, il cubottaedro si ottiene collegando tra loro i punti medi degli spigoli adiacenti del cubo, e quindi avrà una colorazione per vertici equivalente alla colorazione per spigoli del cubo.

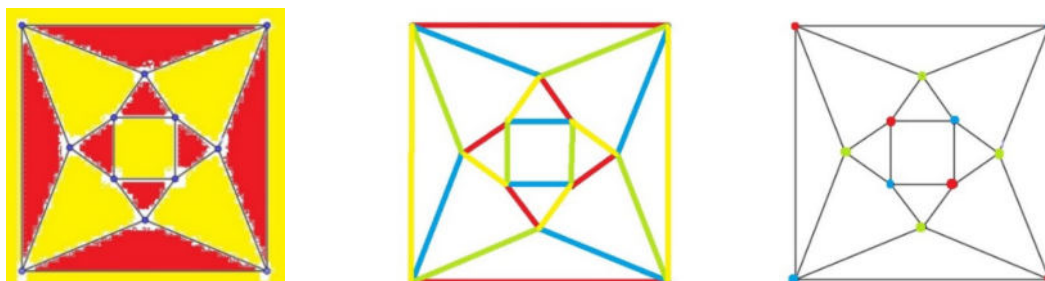


Figura 12. Colorazioni del cubottaedro: 2-colorabile per facce, 4-colorabile per spigoli, 3-colorabile per vertici.

Si noti che il grafo planare del cubottaedro utilizzato per ricavare le colorazioni di figura 12 è diverso da quello utilizzato per trovare i cicli hamiltoniani e le passeggiate euleriane di figura 9. Tuttavia, i due grafi sono equivalenti, poiché rappresentano lo stesso poliedro, seppur con una diversa scelta della faccia all'infinito. Per esercizio si possono cercare i cicli hamiltoniani e le passeggiate euleriane sul grafo di figura 12 e le colorazioni sul grafo di figura 9.

CONCLUSIONI

La rappresentazione dei poliedri con grafi planari presenta alcune difficoltà di fondo che spesso ne scoraggiano lo studio a scuola. Essa richiede infatti lo sforzo di abbandonare le caratteristiche metriche della superficie del poliedro e di mantenere solo le proprietà topologiche (adiacenza degli spigoli, dei vertici e delle facce). Un altro scoglio è costituito dall'idea di faccia all'infinito, un concetto non banale soprattutto per alunni della scuola secondaria di I grado. Tuttavia, questi ostacoli possono essere superati con attività mirate che permettano di analizzare in dettaglio questi aspetti, trasformando il problema in una risorsa. Una volta che i ragazzi hanno preso confidenza con l'uso dei grafi, riescono anche a coglierne i vantaggi rispetto ad altre rappresentazioni come gli sviluppi piani che, pur mantenendo le caratteristiche di isometria con la superficie del poliedro, perdono l'adiacenza delle facce, e quindi anche la continuità dei percorsi.

I grafi si rivelano un ottimo strumento per la ricerca dei cammini hamiltoniani e delle passeggiate euleriane sulla superficie dei poliedri, e anche per lo studio delle colorazioni, che permette di introdurre in modo originale e semplice il concetto di dualità.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i Dirigenti Scolastici, i Docenti e tutte le altre figure professionali che hanno permesso la realizzazione di questi laboratori nelle scuole romane: I.C. Falcone e Borsellino, I.C. Via Vega, Liceo Scientifico Antonio Labriola, Liceo Classico Francesco Vivona.

BIBLIOGRAFIA

- Acerbi, F. (2014). *Euclide tutte le opere*, Bompiani.
 Bondy, J.A., Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*, Springer.
 Milella, S., Iacono, D. (2023). *Il teorema dei quattro colori*, Le Scienze.
 Richeson, D.S. (2008). *Euler's Gem: the polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton.
 Saracco, A. (2023). *Teorema di Eulero sui grafi*, Le Scienze.

LA COSTRUZIONE EUCLIDEA PER PUNTI DELLA RETTA DEI NUMERI CON GeoGebra®

Tullio Aebischer

Ph.D. School, Dip. di Matematica, Università degli Studi di Roma Tor Vergata

aebischer@axp.mat.uniroma2.it

Abstract

L'uso degli artefatti nella didattica della matematica è diventato una pratica molto utilizzata con l'introduzione dell'attività laboratoriale. In questo contesto l'avvento delle tecnologie informatiche ha dato impulso sia alla ricerca che a nuovi approcci didattici. In particolare, l'uso di artefatti manipolati virtualmente con i DGS (*Dynamic Geometry Software*) aprono nuovi scenari a disposizione sia dei docenti che degli studenti. Nel presente lavoro si descriverà una modalità alternativa di manipolazione di un artefatto virtuale: la sua destrutturazione (riduzione ai suoi elementi fondamentali) e la sua ristrutturazione (ricostruzione dell'artefatto) per offrire agli studenti la possibilità di afferrare anche l'informazione intrinseca all'artefatto stesso e ai docenti di approfondire i fondamenti della matematica. Si analizzerà tale tipologia manipolativa nel caso della Retta dei Numeri e degli insiemi numerici.

Parole-chiave

Retta dei Numeri, artefatto geometrico, teoria dei numeri, costruzione riga e compasso

PREMESSA DIDATTICA

La presente proposta didattica ha come obiettivo la classe terza della Secondaria di I Grado e/o le prime due della Secondaria di II Grado. In questo ambito l'esperienza professionale dell'Autore, ristretta alla Secondaria di I Grado, e i risultati delle prove INVALSI (Banca Dati GESTINV, Matematica: Gradi 8 e, in prospettiva, 10) relativi agli items riguardanti la sezione NUMERI e, in particolare, la Retta dei Numeri o Linea dei Numeri, permettono di schematizzare come segue la problematica degli studenti relativamente al mondo dei numeri:

- i numeri sono tutti 'uguali' con la predilezione per le forme intero e decimali come conseguenza dell'uso della calcolatrice;
- difficoltà nel gestire numeri scritti in forma 'mista' nei quali si devono considerare contemporaneamente cifre, segni e simboli: -7 2^n $4/5$ π $\sqrt{2}$;
- la non differenziazione dei numeri comporta la non profonda comprensione del loro uso in determinati ambiti (p. es. Scienze $\rightarrow$ misura);
- la non completa conoscenza della tipologia dei numeri si riversa nell'inesatta applicazione e comprensione delle tecniche di approssimazione;
- difficoltà nel dare un ordinamento ai numeri per la loro diversa scrittura.

Pertanto, sia la conoscenza delle proprietà dei vari tipi di numeri che la visualizzazione degli stessi può essere, insieme al diverso modo di disegnarli, un aiuto a muoversi con maggiore consapevolezza con questi oggetti matematici fondamentali.

Come ambiente di lavoro virtuale si adotterà il DGS (*Dynamic Geometric Software*) GeoGebra®. L'utilizzo didattico di tale strumento software svincola il disegno dalla contingenza della bravura del singolo studente nell'uso di riga e compasso e nell'abilità del disegno. Non che queste siano competenze inutili ma per quanto si dirà non risultano dirimenti relativamente alla comprensione dell'argomento principale. Ovviamente, per quanto si dirà si considererà esatta la costruzione virtuale non approfondendo la tematica della rappresentazione informatica interna e sullo schermo sia dei numeri che delle figure geometriche (si consideri, come esempio, il troncamento dei numeri periodici). In

particolare, la caratteristica di un software di geometria dinamica dà un valore aggiunto rispetto al disegno a mano libera con l'ausilio di strumenti come la dinamicità e la condivisibilità informatica che permettono di cogliere quei significati più profondi che le classiche Rette dei Numeri dei libri di testo scolastici nascondono o, peggio, danno per scontati. Un'altra caratteristica di GeoGebra[®] che si ritiene molto utile per una discussione critica a posteriori è l'elencazione automatica dei passi operativi che dovranno essere riempiti di un significato non solo geometrico ma anche di teoria dei numeri.

LA RETTA DEI NUMERI E LA COSTRUZIONE CON RIGA E COMPASSO

Il disegno della Retta dei Numeri non deve essere visto come un passaggio preparatorio per la costruzione di un artefatto, nel nostro caso virtuale, con lo scopo di progettare una successiva attività su di o con esso. Il disegno secondo le tecniche euclidee di riga e compasso è l'attività principale, è lo scopo finale poiché la sua costruzione richiede una conoscenza sia teorica che storica (Stumbo, 2023, cap. 10) che si vuole evidenziare e trasmettere. La destrutturazione e ristrutturazione dell'artefatto permette di analizzare il ruolo dei suoi componenti basilari per comprendere l'insieme totale. Per la costruzione euclidea della Retta dei Numeri, gli *Elementi* mettono a disposizione oltre ai due suddetti strumenti, i seguenti enti geometrici fondamentali attraverso Postulati (Post.) o Definizioni (Def.) (Sbaragli, 2005):

- il punto (Deff. I,1; I,3; Post. I,1);
- la 'linea retta', il segmento nel linguaggio moderno (Deff. I,2; I,4; I,6; Post. I,2);
- la circonferenza (Def. I,15; Post. I,3);
- la 'superficie', il piano nel linguaggio moderno (Def. I,7).

Si eseguirà il disegno della Retta dei Numeri con il metodo euclideo ossia quello descritto negli *Elementi* di Euclide (III sec. a.C.) utilizzando solo riga e compasso (Hartshorne, 2000; Stumbo, 2023). Riga, non graduata, e compasso per i Greci erano semplicemente degli strumenti per tracciare, rispettivamente, segmenti rettilinei e non per misurare lunghezze, per tracciare circonferenze di dato centro e passanti per un dato punto o avente un dato segmento come raggio. Questi erano strumenti ideali per realizzare proprietà di incidenza tra punti, rette e circonferenze. Il loro esclusivo uso fece iniziare la proficua analisi di quei problemi che non potevano essere risolti con tale metodo come la trisezione dell'angolo, la quadratura del cerchio e la duplicazione del cubo.

Per poter individuare un punto collegato con un numero α , il costruire con riga e compasso α è sinonimo della possibilità di disegnare un segmento di lunghezza α . Naturalmente, ciò ha senso solo se si è fissato nel piano un segmento di lunghezza unitaria. Il concetto base per la costruzione dei numeri che si descriverà è di partire da punti dati per costruirne altri con le seguenti regole:

- costruire una retta/segmento dati due punti;
- costruire una circonferenza dati un punto definito centro e un altro punto;
- costruire altri punti o con l'intersezione di due rette/segmenti o di due circonferenze o di una circonferenza e una retta/segmento;
- costruire la perpendicolare passante per un punto da altri punti dati.

La Retta dei Numeri è un artefatto didattico (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008) ideale praticamente immutato dal XVII sec. da quando fu usato per la prima volta da J. Wallis (1616-1703) in *Treatise of algebra* (1685) dove la parte negativa fu indicata con il tratto puntinato. Per questo motivo la si può definire un artefatto fossile. Comunque, non sembra che Wallis avesse disegnato il segmento con l'intento di collocarvi i numeri conosciuti per ordinarli ma solo come esempio di una 'strada' percorsa in un verso e/o nell'altro ossia più come un sistema di riferimento per il moto sul quale, poi, operava con gli interi relativi.

La Retta dei Numeri la si deve considerare fondamentalmente astratta poiché la sua definizione richiede il punto geometrico e idealmente ha un'estensione infinita cosa che nella traduzione materiale non può aversi. Pertanto l'artefatto che materialmente viene a trovarsi tra le mani degli studenti è una materializzazione di quei concetti geometrici.

La Retta dei Numeri è, comunque, una buona rappresentazione geometrica per la sua caratteristica di spazio unidimensionale per soddisfare l'ordinamento totale dei vari insiemi numerici.

LA CONTINUITÀ GEOMETRICA DELLA RETTA

La costruzione della Retta dei Numeri per punti corrispondenti a numeri costruibili con riga e compasso permette un ulteriore spunto didattico rispetto all'uso classico che della stessa viene fatto sui libri di testo scolastici: eseguire 'salti' per visualizzare le operazioni aritmetiche. Analizzare i costituenti primi della retta, ossia i punti, permette anche di sollevare la questione della continuità negli *Elementi*, questione che si deve analizzare già con la Prop. I,1 (costruzione del triangolo equilatero da un segmento dato): le due circonferenze hanno un punto in comune per disegnare il terzo vertice del triangolo?

Un'ulteriore questione tra continuità e insiemi numerici deve essere considerata nell'affrontare lo studio della geometria analitica di R. Cartesio (1596-1650). In questo ambito si ritorna alla descrizione delle curve, altra tematica che con A.-L. Cauchy (1789-1857) e K. Weierstrass (1815-1897) ebbe i suoi primi approcci improntati al rigore sui concetti di limite e di funzione.

La questione della continuità in geometria si è dipanata lungo la storia della matematica sin dai tempi di Aristotele (IV sec. a.C.) ma che con la richiesta di rigore di inizio Ottocento (Borzacchini, 2015; Klein, 1896; Segura, Sepulcre, 2015) iniziò a collegarsi con i numeri reali come evidenziò nella seconda metà dello stesso secolo R. Dedekind (1831-1916) con la sua sezione. Senza entrare nei dettagli, anche se i lavori di Dedekind e di G. Cantor (1845-1918) permisero un progresso notevole nella comprensione dei numeri reali, il primo si rifece all'opera euclidea (teoria delle proporzioni di Eudosso di Cnido, Libro V) denotando la grande importanza degli *Elementi* come di un testo non solo del periodo greco antico ma di tutti i secoli che ha attraversato ispirando e sollevando problemi: uno tra tutti il V postulato delle parallele che ha aperto l'importante filone delle geometrie non-euclidee proprio all'inizio del XIX sec..

LA COSTRUZIONE DEGLI INSIEMI NUMERICI

A seguire si specificheranno le problematiche inerenti il disegno con riga e compasso dei vari insiemi numerici che dalla teoria dei numeri si relazionano secondo la seguente catena insiemistica:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ossia naturali, relativi, razionali, reali. L'uno sottoinsieme del successivo.

Considerando le suddette regole di costruibilità, gli strumenti utilizzabili e la previa esposizione teorica delle caratteristiche dei singoli insiemi numerici, la consegna agli studenti si può così esplicitare:

Disegnare la Retta dei Numeri come progressiva aggregazione di punti seguendo la catena insiemistica degli insiemi numerici, dai naturali ai reali. Il disegno deve eseguirsi alla maniera euclidea ossia con i soli riga (non graduata) e compasso (collassabile), e senza tracciare la retta o parte di essa indicante la Retta dei Numeri.

Costruzione di $\mathbb{N}$

Per costruire i numeri naturali ($\mathbb{N}$) è necessario scegliere un punto per identificarlo con lo 0 (Seife, 2013). Siccome si vuole costruire una retta per punti si rende necessario sceglierne almeno uno in uno spazio unidimensionale (linea geodetica euclidea) ma considerando le tipologie di costruzioni sopra presentate con riga e compasso è necessario uno spazio bidimensionale ossia un piano Π .

Definito il luogo geometrico dove individuare lo 0 ci si deve chiedere se posizionandolo in esso a caso si abbia la certezza di trovare un punto. Ciò richiede che Π sia formato da punti continui. Questa proprietà del piano in generale non è esplicitata negli *Elementi* ma sembra che la si possa dedurre dal Post. I,3. Comunque, tale sicurezza si ha con l'introduzione del piano cartesiano (punti = coppia ordinata di numeri reali), dalla definizione di Dedekind dei reali (1872) e dall'analisi assiomatica svolta da D. Hilbert (1862-1943) a fine Ottocento.

Il posizionamento dell'1 è importante poiché identifica l'unità di cui si parla in Def. VII,1 e per la Def. VII,3 questa unità, sia aritmetica che geometrica, è la misura di tutta la nostra costruzione (Figura 1). Il piano Π di per sé non ha una metrica per cui la scelta del punto corrispondente a 1 è completamente arbitraria tra quelle che distano da 0 per una distanza unitaria utilizzando il compasso per tracciare una circonferenza (Def. I,15). Volutamente non si è disegnato il segmento $\overline{01}$ poiché, come dato dalla consegna, si vuole mettere in evidenza la caratteristica di $\mathbb{N}$ per cui tra due naturali consecutivi non vi è alcun altro naturale ($\nexists x \in \mathbb{N} : n < x < n + 1$). Ciò ci dice che con i soli naturali non è possibile descrivere tutti i punti della Retta dei Numeri.

Come per la costruzione per induzione del numero naturale successivo a n , si deve escogitare una costruzione geometrica euclidea per identificare il punto corrispondente al 2 che disti della distanza euclidea $\overline{01}$ da 1 e sia lungo la retta che si sta costruendo per punti. Non volendo applicare il Post. I,2, l'assicurazione che la costruzione dei successivi naturali sia possibile senza l'uso della riga si appoggia al teorema Mascheroni-Mohr (1672/1797). Per soddisfare la distanza unitaria da 1 si disegna la circonferenza con centro in 1 e raggio $\overline{01}$ identificando sul piano i due punti A e B come da Prop. I,1 (Figura 2). Il problema della costruibilità è identificare sulla circonferenza di centro 1 il punto 2 allineato a 0 e a 1. Tale punto può essere identificato come l'opposto a 0 del diametro $\overline{02}$ rispetto a 1 dato che questo ultimo diventa il punto medio. Quindi si deve costruire il vertice opposto a 0 di un poligono inscritto alla circonferenza di centro 1. I poligoni candidati sono quelli con un numero pari di lati (quadrato, esagono, ecc.) e con un vertice in 0. Tra questi poligoni è preferibile scegliere l'esagono poiché il suo lato è congruente con il raggio della circonferenza che lo circoscrive. In definitiva si costruisce il punto 2 puntando il compasso in A o in B con ampiezza $\overline{A1}$ o $\overline{B1}$ per individuare, rispettivamente, i punti C e D. Di nuovo, centrando in C o in D con la stessa ampiezza si identifica il punto 2 allineato con 0 e 1. La costruzione di tutti i successivi numeri naturali si esegue con la stessa procedura.

Costruzione di $\mathbb{Z}$

Gli interi relativi $\mathbb{Z}$ si costruiscono con la stessa procedura descritta per $\mathbb{N}$ ma anche lungo il verso negativo (a sinistra per convenzione occidentale). Da considerare che l'unità nel senso dei negativi è, in valore assoluto, congruente a quella nel senso dei positivi. Ciò è giustificato geometricamente dall'esistenza del raggio della circonferenza centrata in 0 opposto a quello $\overline{01}$ ossia i due raggi sono consecutivi secondo la Def. I,17 e aritmeticamente che ogni intero relativo ha il suo opposto. Come nei naturali, tra due interi relativi consecutivi non vi sono altri interi relativi ($\nexists x \in \mathbb{Z} : z < x < z + 1$) per cui con soli questi numeri non è possibile descrivere tutti i punti della Retta dei Numeri.

Costruzione di $\mathbb{Q}$

In questo caso l'insieme che si considera ha la caratteristica che tra due razionali esiste sempre un altro razionale:

$$p, q \in \mathbb{Q}, p < q, \exists h \in \mathbb{Q} : p < h < q$$

Per costruire i razionali consideriamo l'intervallo tra due naturali consecutivi n ed $n+1$. Il numero di punti razionali con denominatore m da costruire sarà $m-1$. In questa attività vi sarà la sovrapposizione di razionali a razionali evidenziando geometricamente l'equivalenza tra queste frazioni. Per la costruzione dei razionali si utilizzerà il teorema di Talete (Prop. VI,2) nella seguente modalità.

Per i punti corrispondenti ai due numeri interi consecutivi si tracciano le rette tra loro parallele e perpendicolari alla retta ideale passante per i numeri interi precedentemente costruiti facendo riferimento alla Prop. I,11 e con la procedura della Prop. I,1 (Figura 3). Lungo le suddette rette, si identifichino i punti $k_0, \dots, k_m, j_0, \dots, j_m, h_0, \dots, h_m$ e $w_0, \dots, w_m$ tra loro equidistanti partendo da 0 e 1 lungo le quattro semirette. Da evidenziare che gli m punti equidistanti si possono disegnare come eseguito per l'insieme $\mathbb{N}$. Successivamente il punto 0 si congiunge con h_m e w_m sulla retta passante per 1. Lo stesso si fa congiungendo il punto 1 con k_m e j_m sulla retta passante per 0. Il disegno continua congiungendo i restanti punti di una perpendicolare con quelli dell'altra con un segmento parallelo ai segmenti disegnati

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
all'inizio. Le intersezione dei segmenti lungo la Retta dei Numeri tra n e $n+1$ individueranno i razionali cercati.

Costruzione di $\mathbb{R}$

Riprendendo la caratteristica dei razionali di avere sempre un razionale tra due razionali diversi, ciò non è più possibile quando tra due razionali si cerca un razionale il cui quadrato sia uguale a un naturale non quadratico. Se, per esempio, si considera come naturale non quadratico il 2, la seguente relazione insiemistica è verificata:

$$\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$$

ossia tra due razionali vi sono numeri non esprimibili in forma razionale che sono denominati irrazionali e formano, insieme ai precedenti insiemi numerici visti, l'insieme dei reali. In questo caso ci si trova davanti a quelle grandezze incommensurabili che i Greci antichi non riuscivano a esprimere come rapporti. Caratteristica dei reali è che tra due reali diversi vi è sempre un altro reale per cui con questo insieme numerico è possibile individuare tutti i punti della retta come definito dall'assioma di continuità o completezza di Dedekind. Ciò giustifica anche la completezza del piano Π preso a base nella nostra costruzione della Retta dei Numeri.

Prima di proseguire si accenna che in base alla teoria dei gruppi di Galois (XIX sec.) i numeri che sono costruibili con riga e compasso sono solo alcuni tra i numeri algebrici (soluzioni di equazioni a coefficienti razionali): in particolare, come visto, tutti i naturali, gli interi, i razionali e le radici quadrate di un numero naturale. Gli irrazionali non algebrici sono i trascendenti come e e π (problema classico dell'impossibilità della quadratura del cerchio).

Tra i reali, i numeri più semplici da costruire sono i radicali di indice 2 $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ applicando il teorema di Pitagora (Prop. I,47) e basandosi sulla formula

$$\sqrt{n} = \sqrt{(\sqrt{n-1})^2 + 1^2}$$

ossia costruendo un triangolo rettangolo con un cateto congruente all'unità e l'altro congruente con il naturale immediatamente precedente: il numero cercato sarà quello pari alla lunghezza dell'ipotenusa. Anche in questo caso non potendo materializzare la Retta dei Numeri bisogna considerare che la costruzione con il teorema di Pitagora dovrà eseguirsi utilizzando il piano non potendosi restringere alla sola retta ideale della Retta dei Numeri (Figura 4).

Il disegno della perpendicolare passante per un irrazionale algebrico non coincidente con un naturale pone il problema, se si utilizza la procedura vista per la costruzione dei razionali, dell'individuazione di due punti lungo il diametro della circonferenza di centro $\sqrt{n-1}$. In realtà, il problema non è nell'individuazione di entrambi: è possibile individuare come raggio la distanza col naturale k immediatamente inferiore ma diventa impossibile individuare, lungo il diametro della circonferenza, il punto antipodale alla distanza $\sqrt{n-1} - k$, se non coincidente con un naturale. Per ovviare a ciò si può fare ricorso alla Prop. I,31 che permette il disegno di una parallela per un punto esterno a una retta data ossia la perpendicolare disegnata per il punto individuante il naturale immediatamente inferiore all'irrazionale che si vuole disegnare. Per esempio, $\sqrt{2}$ si individua disegnando la perpendicolare per il punto 1 e su di essa si riporta la distanza unitaria $\overline{10}$ (punto b_1). Si disegna poi la circonferenza di centro 0 e raggio $\overline{0b_1}$ che risulta pari alla lunghezza $\sqrt{2}$ poichè diagonale del quadrato. Questa circonferenza attraversa il 'vuoto numerico' tra 1 e 2 per cui bisogna disegnare un arco che identifichi il punto $\sqrt{2}$ allineato ai naturali. Considerando che il triangolo $01b_1$ è isoscele e rettangolo con angolo al centro pari a $\frac{\pi}{4}$, si ha che b_1 è il vertice dell'ottagono inscritto nella circonferenza di centro 0. Quindi, il punto $\sqrt{2}$ si individua intersecando la circonferenza con centro 0 e la circonferenza con centro in b_1 e raggio $\overline{a_1b_1}$. Per localizzare il punto corrispondente a $\sqrt{3}$ si può rieseguire la procedura vista prima ma ora l'angolo in 0 è 35.2° ossia tra i 32.7° e i 36° corrispondenti, rispettivamente, agli angoli al centro di un 11-agono

e di un decagono regolari. Ciò ci dice che non è possibile l'individuazione di $\sqrt{3}$ partendo da un vertice del poligono inscritto come si è fatto per $\sqrt{2}$. La costruzione di $\sqrt{3}$ con il teorema di Pitagora è simile a quella svolta per $\sqrt{2}$. Affinchè si possa individuare il punto corrispondente a $\sqrt{n+1}$ senza prolungare il segmento $\overline{O1}$ si possono applicare sia il disegno di una retta parallela a una data per un punto esterno (Prop. I,31) sia il 2° teorema di Euclide (Prop. VI,8).

Alla fine, ma solo alla fine e con una maggiore consapevolezza del suo significato, è possibile uscire dalla consegna e tracciare la retta indicante la Retta dei Numeri secondo il Post. I,2 risultando l'unico modo per disegnare i numeri non costruibili che formano il continuum non numerabile dei reali (Corry, 2020).

CONCLUSIONI

Il mondo dei numeri, intesi come enti fondamentali della matematica, ha interessato molti matematici fin dall'antichità che ne hanno investigato la definizione, l'esistenza, le caratteristiche, le proprietà fino alle vette raggiunte con gli studi sui numeri reali della seconda metà dell'Ottocento.

Dal punto di vista didattico questo lungo iter storico è poco considerato nella sua presentazione agli studenti poiché, forse, ritenuto noioso e/o ridondante, forse anche difficile, privilegiando la definizione immediata dei vari insiemi numerici. In realtà, la Retta dei Numeri come strumento relegato nei primi giorni della Secondaria di I grado e poi dimenticato, dovrebbe essere rivalutato come ambiente laboratoriale stimolante non solo dal punto di vista matematico ma anche interdisciplinare.

Il workshop qui descritto e presentato durante l'*XI GeoGebra® Italian Day* (Torino, ottobre 2023) ha permesso di evidenziare:

- la versatilità e le potenzialità dell'ambiente dei DGS che offrono gli strumenti per un corretto disegno, per una sua dettagliata analisi e consentendo la dinamicità di visualizzazione oltre alla facile condivisione informatica;
- l'importanza della connessione, teorica e storica, tra geometria e teoria dei numeri che nei libri di testo scolastici, specialmente in quelli della Secondaria di I grado, non è adeguatamente portata a conoscenza degli studenti;
- che il trasferimento della presente proposta in classe potrà rendere più consapevoli gli studenti dell'importanza di conoscere questi enti fondamentali della matematica alla stregua di quando, e il parallelismo è voluto, si studiano le lettere dell'alfabeto per il linguaggio naturale;
- che essendo l'artefatto della Retta dei Numeri presente in vari items delle prove INVALSI con risposte corrette in percentuali non esaltanti, lo studio della sua costruzione sarà un'utile modalità di approfondimento e miglioramento;
- l'opportunità di svolgere l'attività con la copresenza dei docenti di matematica e tecnologia per riprendere e dare un significato alle procedure di disegno già svolte.

Fino a qui si sono individuati i punti di una Retta dei Numeri come in Figura 5 (per i razionali vi sono solo le frazioni con denominatore 3) che danno un'idea migliore della natura più profonda della Retta dei Numeri evidenziando la presenza di numeri non costruibili.

In definitiva, l'attività di destrutturazione / ristrutturazione della Retta dei Numeri (Aebischer, 2024a) qui presentata ha portato a quanto si ritrova nei libri di testo, e non poteva essere altrimenti, ma con una consapevolezza degli elementi fondamentali molto maggiore. Schematicamente si può rappresentare il percorso svolto con la sequenza piano euclideo / costruzione punti-numeri / Retta dei Numeri dove i primi due passi evidenziano quella che si era chiamata l'informazione intrinseca dell'artefatto (Aebischer, 2024b).

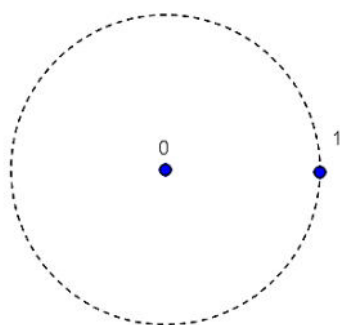


Figura 1. Il punto 0 e l'individuazione del punto 1.

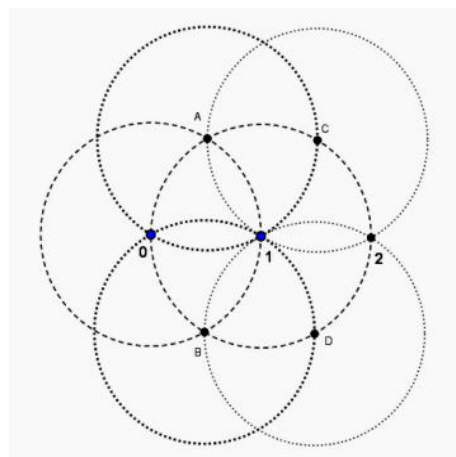


Figura 2. Costruzione dei numeri naturali.

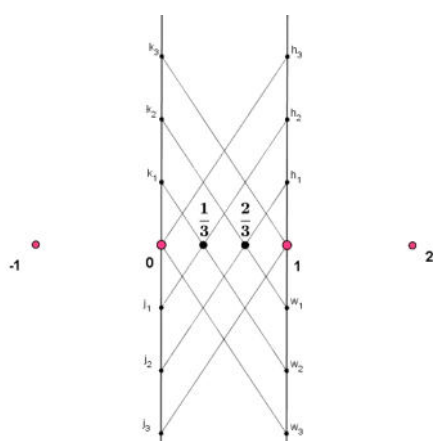


Figura 3. Costruzione dei numeri razionali.

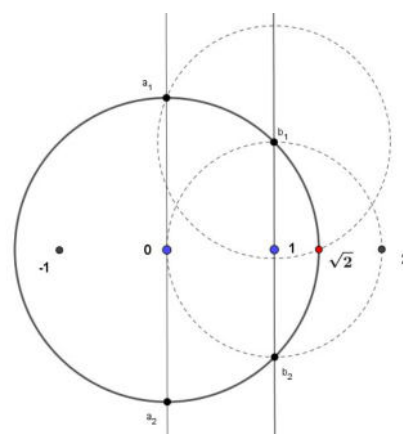


Figura 4. Costruzione dell'irrazionale $\sqrt{2}$.

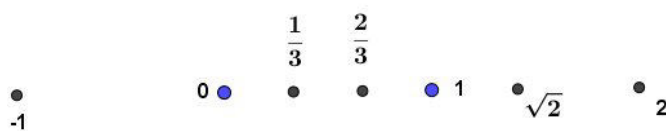


Figura 5. Bozza di costruzione per punti della Retta dei Numeri.

RINGRAZIAMENTI

La proposta teorico/didattica presentata è parte del progetto di ricerca per il dottorato di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

Aebischer, T. (2024a). Destructuring / restructuring of a virtual geometric artifact: the case of the Number Line. In pubblicazione negli Atti della Conferenza ICMI Study 26 ADVANCES IN GEOMETRY EDUCATION, Reims (Francia), 23-26 aprile 2024.

- Aebischer, T. (2024b). *I numeri della Retta dei Numeri: teoria, storia, laboratorio*, seminario/laboratorio Scuola di Primavera 2024 (<http://crf.uniroma2.it/formazione/scuola-dautunno/scuola-di-primavera-2024>).
- Banca Dati GESTINV, parte Matematica, <https://www.gestinv.it/Matematica.aspx>
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.), 746-783, Routledge.
- Borzacchini, L. (2015). *Il computer di Kant. Struttura della matematica e della logica moderne*, Dedalo.
- Corry, L. (2020). *Breve storia dei numeri*. Hoepli.
- Corso *Le coniche e le loro applicazioni: Scheda I. 3 - La non possibilità di duplicare il cubo con riga e compasso* (<http://crf.uniroma2.it/piano-lauree-scientifiche/laboratori-di-matematica/2009-2010/coniche-e-applicazioni/materialeconiche>).
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Pitagora.
- Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond*. Springer.
- Klein, F. (1896). The arithmetization of the mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2, 241–249 (traduzione in inglese dell'originale in tedesco).
- Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei docenti di matematica*, 50, 69–76.
- Seife, C. (2013). *Zero. La storia di un'idea pericolosa*, Bollati Boringhieri.
- Segura, L., & Sepulcre, J. M. (2015). Arithmetization and rigor as beliefs in the development of mathematics. *Foundations of science*, 21, 1, 207–214.
- Stumbo, F. (2023). *Costruzioni con riga e compasso*. Unione Matematica Italiana.
- Wallis, J. (1685). *Treatise of algebra*.

DANZA, MUSICA E MATEMATICA: UNA SINERGIA VINCENTE PER L'APPRENDIMENTO

Rossella Cerrato, Lara Monformoso, Martina Ascrizzi

Università degli Studi di Torino

rossella.cerrato@edu.unito.it

Abstract

Sia la danza che la musica sono arti permeate di matematica. È proprio questo legame che ha accresciuto l'interesse della ricerca didattica negli ultimi anni, che si è concentrata sul loro ruolo nell'apprendimento della matematica. Il workshop, realizzato e presentato nell'ambito del progetto Quality Class (Malmö, Svezia, 10 – 19 agosto 2023), intende indagare questo aspetto ancora poco esplorato proponendo due attività di difficoltà e livello di prerequisiti richiesti crescenti, collegate dal filo conduttore del ruolo del corpo e degli artefatti nella pratica matematica e dalla metodologia dell'*ensemble learning*. L'interdisciplinarietà e la progressiva complessità di entrambe le attività rendono i contenuti del workshop un prezioso spunto di riflessione per gli insegnanti di matematica dei vari gradi scolastici, nonché un esempio di attività di tipo esplorativo finalizzata allo sviluppo di competenze non routinarie, sempre più richieste dal mondo del lavoro e in linea anche con gli obiettivi dell'Agenda 2030. In particolare, il design dell'attività prevede una prima esplorazione delle proprietà del quadrato, attraverso la messa in scena di una coreografia precedentemente mostrata in video. La figura del quadrato viene poi ripresa nel secondo compito, in cui i partecipanti sono invitati a esplorare e produrre congetture sul problema di inseguimento noto come "Four bugs". La danza torna infine in primo piano quando ai partecipanti – che lavoreranno in gruppo – viene chiesto di produrre una "coreografia di inseguimento" che coinvolga tutte le congetture precedentemente prodotte.

Parole-chiave

Materie STEAM; Didattica della Matematica; Danza; Embodied Cognition; Teoria della Variazione.

INTRODUZIONE

Nel nostro workshop, ci siamo proposti di indagare e approfondire insieme ai colleghi europei della Quality Class alcuni importanti temi su cui il gruppo di ricerca dell'Università di Torino è stato ed è tuttora impegnato. Tra questi ci sono: il ruolo del corpo nell'apprendimento della matematica (la teoria dell'*embodied cognition*), il ruolo della danza – e in generale delle STEAM – nell'apprendimento della matematica, il metodo della *variation inquiry* (MVI) e le metodologie didattiche dell'*ensemble learning* e del *Laboratorio di Matematica*. In un primo momento, i partecipanti saranno divisi in gruppi e sarà chiesto loro di impegnarsi in due attività che coinvolgono la danza, la musica, il corpo e la collaborazione di tutti i membri del gruppo. Successivamente, si dedicherà un tempo adeguato alla condivisione di idee, riflessioni ed esperienze sulla base dell'attività svolta.

DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ

La progettazione del nostro workshop prevede due attività di esplorazione della figura del quadrato e di un particolare movimento che ha origine nei vertici di tale figura. Il nostro scopo era quello di produrre un lavoro strutturato verticalmente, cioè che potesse essere adattato a tutti i gradi di scuola, dalla secondaria di primo grado all'ultimo anno della secondaria di secondo grado. La scheda di attività qui di seguito segue il medesimo formato di quelle presenti nel database interattivo delle attività SSPM.

Presentazione dell'Attività

L'attività si divide in due fasi principali, con un incremento graduale di difficoltà e prerequisiti. I problemi proposti sono "aperti", incoraggiando l'esplorazione e la formulazione di congetture. Questo tipo di apprendimento è completo e duraturo, coinvolgendo attivamente gli studenti e stimolandoli con sfide. Gli studenti saranno divisi in gruppi di quattro per esplorare le proprietà di un quadrato attraverso una coreografia e risolvere il problema dei "four bugs", cercando di comprendere i loro movimenti e, per i livelli più avanzati, descriverli analiticamente.

Studenti Destinatari

In base alle IINN, riteniamo che la nostra attività sia adatta a diversi gradi scolastici, con la possibilità di adattarla o ampliarla. La prima parte, che richiede una conoscenza base della geometria piana euclidea e coinvolge l'esplorazione di figure piane, può essere proposta dalla classe quinta della primaria. La seconda parte dell'attività può essere modulata in diverse versioni in base al livello degli studenti:

- Se l'obiettivo è semplicemente tracciare le traiettorie dei quattro insetti e prevedere se si incontreranno al centro del quadrato, l'attività è adatta a una classe della scuola secondaria di primo grado e rappresenta un ottimo punto di partenza per introdurre i concetti di velocità e funzione.
- L'attività può essere approfondita ulteriormente nella secondaria di secondo grado coinvolgendo concetti come derivate, limiti, integrali, piano cartesiano, equazioni delle curve (sia cartesiane che parametriche) e collegamenti interdisciplinari con la fisica.

Contesto

Il contesto dell'attività è di natura matematica, ma il problema viene presentato in una forma non routinaria.

Nuclei Tematici

Geometria; Relazioni e Funzioni.

Nodi Concettuali

Altezza; angoli di un quadrato; bisettrici; calcolo letterale; coefficiente angolare/pendenza; continuità; coordinate cartesiane; costruzione geometrica; curva parametrica; derivate; diagonali; distanza; espressioni letterali; funzione; integrali; lato; limiti; luogo dei punti; misura delle lunghezze; misura del tempo; modello; perimetro; perpendicolarità; piano cartesiano; proprietà delle figure piane; punto medio; quadrato; quadrilatero; relazioni tra grandezze (velocità); retta; retta tangente; segmento; simmetria; trasformazioni (riflessione, rotazione, traslazione); variabili (dipendenti e indipendenti); vertici.

Competenze

L'attività che proponiamo permette agli studenti di sviluppare diverse competenze trasversali, tra cui comunicare, argomentare, collaborare e partecipare, risolvere e porsi problemi, individuare relazioni e connessioni, congetturare, dimostrare, misurare, definire, generalizzare, formalizzare, muoversi agevolmente tra diversi registri di rappresentazione, usare strumenti, comprendere il significato degli oggetti di studio, sviluppare una visione critica di quanto appreso e fare connessioni con altre discipline. Tra gli obiettivi specifici di apprendimento su cui l'attività si concentra ci sono: la descrizione e la modellizzazione di fenomeni, la conoscenza delle proprietà delle figure piane (e, in generale, la padronanza dei principali concetti di geometria euclidea), la realizzazione di costruzioni geometriche tramite strumenti tradizionali e non convenzionali, l'uso delle coordinate cartesiane, la risoluzione di

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
problemi attraverso equazioni, il calcolo di limiti, derivate, integrali, lo studio grafico e analitico di funzioni e lo studio della velocità attraverso funzioni.

Materiali e Strumenti

Fogli di carta e cancelleria, righello, nastro scotch di carta, coperte termiche di emergenza o qualsiasi altro lenzuolo di forma quadrata di lato 160 cm (o simile) e schede attività.

Metodologie Didattiche

Le principali metodologie didattiche coinvolte nel workshop includono:

- Utilizzo di materiali poveri/artefatti didattici: vengono forniti oggetti di uso quotidiano che, attribuendo loro schemi d'uso appropriati, possono diventare potenti mediatori nella costruzione di significati matematici (Verillon & Rabardel, 1995).
- Discussione matematica (Bartolini Bussi & Boni, 1995): basata sull'idea della dimensione sociale dell'apprendimento di Vygotskij, coinvolge la discussione e il confronto tra pari come motori per l'apprendimento. Coerentemente con questa vision, sono coinvolte anche metodologie quali l'*ensemble learning*, il *cooperative* e *collaborative learning* e il lavoro in piccoli gruppi.
- Laboratorio di matematica (Anichini, Arzarello, Ciarrapico, & Robutti, 2004).

Descrizione dell'Attività

1. "Quadrati danzanti": questa prima fase dell'attività consiste nell'esplorare la figura geometrica del quadrato. Gli studenti sono divisi in gruppi di quattro e ricevono una scheda guida per gruppo per condurre la loro esplorazione. La scheda include istruzioni per guardare un estratto del filmato della [cerimonia di apertura dei Giochi Olimpici di Rio 2016](#) (Olympics, 2016, minuti 12:12 – 15:15) e cercare di replicare la coreografia usando un lenzuolo fornito loro in precedenza. Dopo aver familiarizzato con la forma del quadrato attraverso i movimenti di gruppo con il lenzuolo, vengono poste domande per esplorare le sue proprietà principali e le possibili trasformazioni: "Potete traslarla?", "Potete ruotarla?", "Che cos'altro potete fare?". Le risposte vengono discusse nel gruppo e annotate su un foglio. Successivamente, si riflette su come sarebbero cambiate le proprietà e la coreografia se il lenzuolo fosse stato rettangolare, triangolare o circolare, incoraggiando gli studenti a esplorare pieghe e soluzioni creative.
2. "Four bugs": presentiamo quindi una nuova sfida, sempre attraverso una scheda fornita a ciascun gruppo, incentrata sull'inseguimento all'interno di un quadrato. Gli studenti sono invitati a tracciare un quadrato sul pavimento, con lato di 2 m, usando dello scotch di carta, e a posizionarsi ai vertici del quadrato. Successivamente, devono immaginare di essere piccoli insetti che strisciano simultaneamente e alla stessa velocità, ciascuno seguendo il compagno alla propria destra, così come rappresentato nella figura 1. Questo movimento dovrà poi essere simulato su carta, tenendo ciascuno in mano una penna e tracciando la traiettoria senza mai staccarla dal foglio. Durante questa attività, devono annotare le riflessioni del gruppo, rispondendo a domande come: "Qual è la traiettoria seguita dai quattro insetti?", "Si incontreranno mai al centro del quadrato?", "Quali vincoli fisici sono osservabili in questo problema?", "È possibile descrivere analiticamente il movimento degli insetti?", "Come cambierebbe il moto se ci fossero quattro punti adimensionali in movimento?", "E se ci fossero solo tre insetti?", "E se fossero posizionati ai vertici di un rettangolo, partendo da distanze diverse?", "E se fossero tre insetti posizionati ai vertici di un triangolo equilatero?". Le domande fornite sono quelle che sono state utilizzate durante il workshop; è a discrezione del docente modificarle a seconda del livello della classe.

Questo problema, a differenza delle altre parti dell'attività, è noto e utilizzato anche al di fuori del contesto scolastico. Alcune aziende, addirittura, lo impiegano nei colloqui di lavoro per esplorare i processi cognitivi dei candidati durante situazioni che richiedono capacità di *problem solving* (Antonick, 2014).

Esiste una soluzione analitica efficace che impiega le coordinate polari (talljerome, 2011), consentendo il passaggio da componenti lineari ad angolari e permette inoltre di lavorare sul concetto di limite per trattare una distanza infinita. Anche i vincoli fisici del problema forniscono un potente percorso di ragionamento per giungere a una soluzione. Due potenziali approcci significativi al problema sono: primo, non vi è alcun incremento nella distanza iniziale tra gli insetti durante l'inseguimento, poiché si muovono ortogonalmente; secondo, assumendo che gli insetti si incontrino al centro, formano iterativamente un quadrato con diagonali passanti sempre per il centro, e la distanza percorsa dall'insetto è sempre quella originale (Four Bug Problem - Why Is the Solution Referencing from the Vertex of the Square to the Middle of the Square.).



Figura 5. Il movimento dei “four bugs”.

3. “L’ultimo ballo”: infine, i gruppi sono incoraggiati a creare una coreografia utilizzando una canzone di loro scelta, che coinvolga tutti e quattro i membri del gruppo, l’uso del lenzuolo e includa un inseguimento.

Alla conclusione dell’attività, è fondamentale dedicare un momento di valutazione formativa con gli studenti. Riservare del tempo per questo scambio tra studente e insegnante è essenziale per riconoscere le competenze e le abilità di ciascuno studente. Questo è anche il motivo per cui è preferibile proporre problemi aperti, differenziati per livelli di difficoltà, in modo che ogni studente possa raggiungere almeno un obiettivo e contribuire attivamente.

APPROFONDIMENTI E RIFERIMENTI TEORICI

Come accennato nell'introduzione, le nostre attività si basano sul ruolo del corpo (Smith & Walkington, 2019) e in particolare della danza, nell'apprendimento della matematica e sulla metodologia didattica dell'*ensemble learning*. In questa sezione, ci concentreremo sui principali studi di ricerca che hanno ispirato la progettazione del nostro workshop.

Iniziamo esplorando il costrutto del Laboratorio di Matematica, la cui filosofia ha illuminato il nostro percorso sin dai primi giorni nell'ambito della Didattica della Matematica. Il concetto è stato elaborato da una commissione dell'UMI (Unione Matematica Italiana), composta dai ricercatori G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico e O. Robutti, e presentato nel volume “Matematica per il cittadino – Matematica 2003” (Anichini, Arzarello, Ciarrapico, & Robutti, 2004). Il Laboratorio di Matematica rappresenta un insieme di approcci metodologici focalizzati sulla costruzione di significati matematici piuttosto che sulla mera trasmissione di contenuti o processi. Esso incorpora sia strumenti tecnologici che tradizionali e non si limita a uno spazio fisico separato dalla classe, ma comprende attività strutturate al suo interno. Coinvolge studenti e insegnanti, strutture e idee, creando un ambiente simile a una bottega rinascimentale, nel quale gli apprendisti acquisivano conoscenze facendo e vedendo fare e in costante dialogo sia tra loro che con i maestri. La costruzione del significato nel Laboratorio di Matematica,

infatti, è strettamente legata all'utilizzo degli strumenti e alle interazioni sociali. Crediamo fortemente in un insegnamento guidato da questa vision, in cui la conoscenza matematica e i relativi significati prendono forma in una dimensione sociale, in cui gli studenti "imparano facendo" e sono coinvolti attivamente attraverso discussioni matematiche, lavori di gruppo e le metodologie del *collaborative*, *cooperative* e *ensemble learning*.

F. Antinucci sostiene l'esistenza di due tipi di apprendimento: percettivo-motorio e simbolico-ricostruttivo. Anche se la forma più completa, approfondita e teorica di conoscenza si raggiunge con il secondo, è difficile arrivarvi senza prima passare attraverso il primo. Il coinvolgimento sensoriale e il contatto diretto con gli oggetti di apprendimento sono cruciali per consolidare i concetti, il che a sua volta è fondamentale per raggiungere la formalizzazione teorica (Antinucci, 2001). La nostra attività mirava a offrire un'esperienza completa, combinando momenti di esplorazione fisica con l'uso di semplici artefatti, coinvolgendo i cinque sensi e l'intero corpo, a momenti di discussione e formalizzazione. In entrambe le fasi, secondo l'approccio dell'*ensemble learning*, il coinvolgimento attivo di tutti i membri del gruppo è cruciale per il successo dell'attività e, in generale, per un insegnamento efficace. Gli insegnanti dovrebbero strutturare attività che consentano agli studenti di essere protagonisti del proprio apprendimento. D. Tall, in questo senso, sottolinea l'importanza per gli educatori di presentare le idee in una sequenza comprensibile agli studenti, inclusi coloro che studiano la materia per le sue applicazioni pratiche senza aspirare a studi matematici avanzati. Questo non implica adottare un tono condiscendente verso gli studenti, proponendo i concetti matematici in modo eccessivamente semplificato. Significa piuttosto abbandonare il proprio punto di vista da esperti sulla matematica, cercando di adottare invece quello di ciascuno studente (Tall, 2012). Come evidenziato da K. Devlin, non è compito degli studenti avvicinarsi alla matematica, ma è responsabilità degli insegnanti portare la matematica agli studenti.

Dopo aver delineato i principi fondamentali del nostro workshop, miriamo ad approfondire ulteriormente i temi chiave della ricerca educativa discussi al termine del workshop, suddividendoli in tre principali ambiti tematici.

Considerazioni a livello istituzionale

Abbiamo iniziato la nostra discussione proponendo l'esplorazione di esercizi e soluzioni di problemi non routinari. Dato il rapido mutamento del panorama globale, è fondamentale che gli educatori si adeguino e forniscano ai futuri cittadini competenze pertinenti a questo mondo in continua evoluzione. A questo proposito, ci ha particolarmente colpito un grafico che illustra l'evoluzione delle competenze richieste nel mondo del lavoro, presentato da Andreas Schleicher, ex direttore del programma OCSE-PISA, nei risultati dell'indagine PISA 2009 (OECD, 2010; Testa, 2013). Il grafico (Fig. 2) ha rivelato un cambiamento significativo negli ultimi sessant'anni: le attività non routinarie hanno gradualmente preso il posto di quelle di routine, poiché in un mondo in cui le tecnologie avanzano costantemente, le queste ultime risultano facilmente automatizzabili. Per gli educatori, questo rappresenta una sfida: se, infatti, è piuttosto semplice insegnare attività meccaniche e cognitive (di routine), dobbiamo mettere tutto il nostro ingegno per consentire ai nostri studenti di sviluppare anche quelle abilità non routinarie che il nostro mondo moderno richiede loro. L'integrazione di attività finalizzate allo sviluppo di queste competenze nei nostri programmi di studio è in linea con gli obiettivi futuri dell'Unione Europea, come delineato nella sua Agenda delle Competenze 2020 (Employment, 2020). In particolare, l'Azione 7 – "Aumentare i laureati in materie STEM e promuovere le competenze imprenditoriali e trasversali" – ci coinvolge personalmente come attuali e futuri insegnanti di matematica. Per stare al passo con questo mondo sempre più tecnologico, si raccomanda inoltre di fare ampio uso delle nuove tecnologie di supporto all'apprendimento, come per esempio GeoGebra, nella nostra pratica in classe.

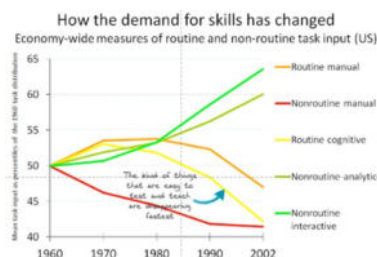


Figura 2. Fonte: *What students know and can do*, Andreas Schleicher (Pisa 2010).

Considerazioni sulla teoria e sulle metodologie didattiche

Uno degli scopi principali del nostro workshop è riflettere sul ruolo del corpo nell'apprendimento della matematica. Tradizionalmente, mente e corpo sono stati considerati entità distinte, ma la teoria dell'*embodied cognition*, portata all'attenzione delle scienze cognitive a inizio 2000, grazie al lavoro dello scienziato cognitivo e linguista George Lakoff e dello psicologo Rafael Núñez, suggerisce una relazione bidirezionale tra di essi. Secondo questa prospettiva, i concetti matematici sono incarnati in noi esseri umani, in quanto frutto dell'interazione del corpo con l'ambiente, sfidando la visione platonica classica per cui la matematica fa parte di un regno perfetto delle idee, estraneo all'umanità ed eterno (Lakoff & Núñez, 2000). Sebbene l'origine della matematica sia tutt'ora (e forse per sempre) oggetto di dibattito tra matematici, è innegabile la relazione tra azioni corporee e pensieri. Gli insegnanti di matematica dovrebbero considerare questa connessione nelle attività didattiche, poiché i concetti matematici spesso risultano astratti agli studenti. Fondare tali concetti sull'attività fisica può favorire l'apprendimento, come dimostrano diversi studi (Cook, Mitchell, & Goldin-Meadow, 2008; Gerofsky, 2011; Nathan & Walkington, 2017; Smith, 2018). Le esperienze che collegano i concetti matematici a immagini e azioni fisiche possono dare a questi un significato più tangibile e facilitare la comprensione e la risoluzione dei problemi. Obiettivo del nostro workshop era offrire la possibilità di fare esperienza diretta di queste ricerche, attraverso la progettazione di un'attività che, da un lato, potesse essere proposta a un gran numero di studenti e dall'altro tenesse conto dei quattro principi per le attività *embodied* che Smith e Walkington (2019) hanno tratto dalle più recenti ricerche nel campo:

1. il movimento degli studenti deve avere un significato matematico;
2. utilizzare la capacità di movimento dinamico del corpo;
3. passare progressivamente dal concreto all'astratto per costruire connessioni;
4. incorporare la collaborazione.

Per i primi due punti abbiamo preso ispirazione da un precedente workshop delle professoresse Francesca Ferrara e Giulia Ferrari (Università degli Studi di Torino) e da un articolo di ricerca di Vogelstein, Brady & Hall (2019), dove appunto la danza era protagonista della lezione di matematica. La danza, come attività artistica, offre connessioni profonde con la matematica, sia nei movimenti coreografici che nella struttura ritmica della musica. Essa, inoltre, è intrinsecamente legata alle emozioni e alle immagini, fornendo un contesto ricco per un apprendimento significativo. Sebbene il loro ruolo nell'insegnamento della matematica sia ancora in fase di esplorazione, numerosi e promettenti studi evidenziano il potenziale educativo della danza e della musica (Vogelstein, Brady, & Hall, 2019; Belcastro & Schaffer, 2011; Rosenfeld, 2013). L'adozione della metodologia dell'*ensemble learning* ci ha consentito, invece, di integrare il quarto principio di Smith e Walkington (2019). Questo tipo di apprendimento collettivo e performativo enfatizza la necessità di coinvolgere attivamente tutti i membri del gruppo. A differenza del *cooperative* o *collaborative learning*, dove un singolo individuo può risolvere il problema, l'*ensemble learning* richiede che nessun membro del gruppo resti in disparte, trasmettendo il messaggio dell'uguaglianza di importanza di ciascuno e riconoscendo il potenziale di ogni individuo, anche degli studenti più difficili e recalcitranti, laddove adeguatamente stimolati.

Considerazioni a livello di contenuti

Durante il workshop, abbiamo coinvolto i partecipanti con domande specifiche sulla variazione del problema, incoraggiandoli a discuterne anche nella fase finale di riflessione. In entrambi i casi, abbiamo sottolineato l'importanza di questo punto, introducendo una breve discussione sul Metodo della *Variation Inquiry* (MVI), metodologia basata su una teoria introdotta in Europa da Ference Marton (Marton & Tsui, 2004; Marton, 2014), secondo cui per comprendere appieno le caratteristiche delle cose è essenziale sperimentare come esse possono variare. In particolare, Marton individua quattro schemi di variazione (Marton, 2014):

1. *Contrasto*: Per comprendere un concetto, è necessario confrontarlo con un concetto diverso.
2. *Generalizzazione*: Esplorare diverse rappresentazioni dello stesso concetto per identificarne gli aspetti distintivi e quelli meno rilevanti.
3. *Separazione*: Analizzare e studiare separatamente i vari aspetti peculiari del concetto.
4. *Fusione*: Riunire i diversi aspetti peculiari del concetto precedentemente studiati per ottenere una visione complessiva e approfondita.

Il MVI, teorizzato da F. Arzarello, A. Cusi, O. Robutti e O. Swidan (2023), consiste nel rendere gli studenti dei veri e propri ricercatori, coinvolgendoli attivamente nell'esplorazione dei problemi mediante i quattro schemi di variazione di Marton. In questo modo, l'apprendimento diventa un processo in cui lo studente acquisisce gradualmente sempre più consapevolezza e conoscenza dell'oggetto di studio, ponendosi domande, formulando ipotesi e congetture, argomentando e dimostrando le congetture, esattamente come farebbe un ricercatore. L'insegnante ha il compito di guidare gli studenti attraverso questo processo senza influenzarlo direttamente, ma stimolando il loro pensiero critico e la formulazione di ipotesi. Il MVI si basa, infatti, sui seguenti punti:

- Scegliere un'attività in linea con gli obiettivi didattici e con la zona di sviluppo prossimale degli studenti (cfr. Vygotskij).
- Definire chiaramente il contenuto o il concetto da trasmettere, rimanendo aperti a modifiche e miglioramenti in caso di mancato raggiungimento del nostro obiettivo.
- Dividere gli studenti in gruppi e chiedere loro di osservare una situazione, raccogliere idee e confrontarle.
- Richiedere agli studenti di argomentare il ragionamento dietro le loro ipotesi.
- Incoraggiare gli studenti a pensare in termini di variazione del problema, ponendo loro domande stimolanti e invitandoli a esplorare ("Cosa succederebbe se...?"), fare congetture e ampliare la loro comprensione dell'argomento.

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare sentitamente la professoressa Ornella Robutti per il prezioso supporto durante i mesi di preparazione alla QC. Un ringraziamento speciale va anche al professor Lambrecht Spijkerboer e, in particolare, alla pazienza e la dolcezza con cui la professoressa Monica Mattei ci ha accompagnate in questo percorso.

BIBLIOGRAFIA

- Amorous Bugs - a Classic Martin Gardner Puzzle*. (2011, November 29). GeoGebra.
<https://www.geogebra.org/m/e3jxstgf>
- Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). Matematica 2003. In *La Matematica per il cittadino*.
- Antinucci, F. (2001). *La scuola si è rotta: perché cambiano i modi di apprendere*. GLF Editori Laterza.

- DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
- Antonick, G. (2014, September 8). *Bugs on a Square*. Wordplay Blog.
<http://archive.nytimes.com/wordplay.blogs.nytimes.com/2014/09/08/bugs/>
- Arzarello, F., Cusi, A., Robutti, O., & Swidan, O. (2023). The Method of Varying Inquiry for Stimulating Learning. *For The Learning of Mathematics*, 43(1), 14–18.
- Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'Interazione Verbale Nella Discussione Matematica: Un Approccio Vygotskiano (A Verbal Analysis of Interaction in Mathematics Discussion: The Vygotskiano Approach). *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 18A(3), 221–256.
- Belcastro, S. M., & Schaffer, K. (2011). Dancing mathematics and the mathematics of dance. *Math Horizons*, 18(3), 16–20. <http://dx.doi.org/10.4169/194762111X12954578042939>
- Commission presents European Skills Agenda for sustainable competitiveness, social fairness and resilience. (2020, July 1). European Union.
<https://ec.europa.eu/social/main.jsp?catId=89&furtherNews=yes&newsId=9723&langId=en>
- Cook, S. W., Mitchell, Z., & Goldwin-Meadow, S. (2007). Gesturing makes learning last. *Cognition*, 106(2), 1047–1058. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2007.04.010>
- Four Bug Problem - why is the solution referencing from the vertex of the square to the middle of the square. (2018, October 28). Math Stack Exchange.
<https://math.stackexchange.com/questions/2974784/four-bug-problem-why-is-the-solution-referencing-from-the-vertex-of-the-square>
- Gerofsky, S. (2011). Seeing the graph vs. being the graph: Gesture, engagement and awareness in school mathematics. In *Integrating gestures: The interdisciplinary nature of gesture* (pp. 245–256). John Benjamins Publishing Company. <https://doi.org/10.1075/gs.4.22ger>
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.
- Marton, F. (2014). *Necessary Conditions of Learning*. Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781315816876>
- Marton, F., & Tsui, A. B. (2004). *Classroom Discourse and the Space of Learning*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Nathan, M. J., & Walkington, C. (2017). Grounded and embodied mathematical cognition: Promoting mathematical insight and proof using action and language. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 9. <https://doi.org/10.1186/s41235-016-0040-5>
- OECD. (2010). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do - Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)*. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en>
- Rio 2016 Opening Ceremony Full HD Replay | Rio 2016 Olympic Games. (2016, September 25). YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=N_qXm9HY9Ro
- Rosenfeld, M. (2013). Making Math and Making Dance: A Closer Look at Integration. *Teaching Artist Journal*, 11(4), 205–214. <https://doi.org/10.1080/15411796.2013.815542>
- Smith, C. (2018). Body-based activities in secondary geometry: An analysis of learning and viewpoint. *School Science and Mathematics*, 118(5), 179–189.
<https://doi.org/10.1111/ssm.12279>
- Smith, C., & Walkington, C. (2019). Four Principles for Designing Embodied Mathematics Activities. *Australian Mathematics Education Journal*, 1(4), 16–20.
- Tall, D. (2012). A Sensible approach to the Calculus. *El cálculo Y Su enseñanza*, 3(1), 81–128.
<https://doi.org/10.61174/recacym.v3i1.139>
- Testa, A. (2013, January 21). *La Scuola del Duemila*. Internazionale.
<https://www.internazionale.it/opinione/annamaria-testa/2013/01/21/la-scuola-del-duemila>
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77–101. <http://www.jstor.org/stable/23420087>
- Vogelstein, L., Brady, C., & Hall, R. (2019). Reenacting mathematical concepts found in large-scale dance performance can provide both material and method for ensemble learning. *ZDM Mathematics Education*, 51, 331–346. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01030-2>

GIOCHIAMO A SET CON LA MATEMATICA

Marta Manassero⁽¹⁾, Madlena Adrovic⁽¹⁾, Michelangela Di Giorno⁽²⁾

**(1) IIS Polo Tecnologico Imperiese, Imperia (2) IIS Fermi – Polo – Montale,
Ventimiglia (IM)**

m.manassero@outlook.com

Abstract

Si tratta di un laboratorio-gioco che prevede l'uso di carte colorate come artefatto cognitivo.

Attraverso opportuni abbinamenti lo studente può fissare concetti e recuperare eventuali lacune. Trattandosi di un'attività ludiforme, essa può lavorare molto sull'inclusione, sia di alunni fragili che di studenti con particolari problematiche. A tal proposito, si sottolinea l'importanza dello svolgimento di attività di gruppo che coinvolgano artefatti concreti, anche ai fini del miglioramento della socializzazione, dopo i periodi di isolamento forzato e di didattica a distanza dovuti all'emergenza pandemica.

L'intero laboratorio può essere sviluppato agevolmente in una lezione; durante il suo svolgimento vengono coinvolti aspetti argomentativi e di produzione, in modo che il tema scelto sia effettivamente padroneggiato.

Ciò che caratterizza il gioco è la versatilità rispetto agli argomenti matematici che possono essere coinvolti.

Le regole base prevedono che agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, venga fornito un mazzo di cartoncini sul quale saranno presenti oggetti matematici (es. equazioni di funzioni, grafici, espressioni algebriche) da abbinare secondo regole assegnate, giustificando le proprie scelte.

Dopo aver lasciato giocare gli studenti per un tempo adeguato, la seconda parte dell'attività prevede la costruzione, da parte degli alunni stessi, di nuove terne di carte, con richieste che guidino verso una maggiore consapevolezza rispetto al tema trattato.

Quest'ultima attività, così come la costruzione dei mazzi da parte del docente, può essere vista come una buona occasione per applicare i concetti della variation e del metodo della ricerca variata.

Il laboratorio è stato sperimentato in varie classi di secondaria di secondo grado, ottenendo un buon riscontro da parte dei partecipanti. L'attività può essere progettata anche per la secondaria di primo grado.

Durante il workshop sono stati proposti mazzi su diversi argomenti: derivate successive, rette parallele e perpendicolari, proprietà dei logaritmi, monomi equivalenti.

Parole-chiave

Didattica ludiforme, argomentazione, cooperative learning, variation, carte.

PRESENTAZIONE

L'utilizzo del gioco nell'insegnamento è stato da tempo proposto. Ma se nei bambini questo aspetto è stato ampiamente studiato e promosso, a partire da grandi nomi della pedagogia come Piaget e Vygotskij, rileviamo una discontinuità nel passaggio tra primo e secondo ciclo. Sembra quasi che entrando nella scuola secondaria di secondo grado lo studente non sia più un target appetibile per una didattica ludiforme.

A nostro avviso, invece, il gioco può essere uno strumento potente in un momento, quello dell'adolescenza, in cui l'atteggiamento verso lo studio e le agenzie educative si rivela spesso problematico.

Il nostro gioco è nato nell'estate del 2022 da una riflessione didattica a partire dal gioco Set®, pubblicato in Italia da Creativamente. La caratteristica che ci ha colpito è la richiesta di individuare gruppi di 3 carte (triplette), che rende il gioco molto più sfidante rispetto alla ricerca di coppie: il passaggio da 2 a 3 aumenta in maniera significativa - più che lineare - la complessità del sistema.

Ci è quindi sorto spontaneo domandarsi se e come utilizzare in classe questa meccanica di gioco. Il primo spunto è partito da una necessità contingente: lavorando in un istituto tecnico tecnologico, si arriva a completare lo studio di funzioni alla fine della quarta e in quinta il primo argomento da affrontare è l'integrazione. Quindi ripassare le derivate all'inizio dell'ultimo anno risulta assai opportuno, ma sia per evitare una noiosa ripetizione di quanto studiato in precedenza che per lavorare sulle derivate nell'ottica del concetto di primitiva, bisognava trovare una strada stimolante.

In questo contesto l'idea è stata quella di costruire un mazzo di carte che contenessero le equazioni di alcune funzioni, di cui fosse possibile individuare la primitiva e almeno due derivate successive.

La costruzione del mazzo è stato oggetto di profonda riflessione, per individuare il livello desiderato di complessità, che secondo noi doveva essere qualcosa di intermedio tra la banalità delle funzioni elementari e lo scoglio di funzioni per la cui derivazione servissero troppi passaggi (ad esempio prodotti o rapporti). Il tutto sempre con lo sguardo rivolto "all'indietro", cioè al fatto che gli studenti riuscissero in modo spontaneo a risalire anche alle primitive e potessero notare la non unicità della primitiva di una funzione.

Per quanto riguarda il tipo di attività, fin da subito abbiamo pensato al piccolo gruppo come unità fondamentale di lavoro.

Dopo aver costruito alcuni mazzi di derivate abbiamo iniziato a chiederci se la stessa meccanica fosse applicabile ad altri argomenti e ci siamo risposte positivamente. Riteniamo che l'idea sia applicabile in tutte le classi della secondaria di secondo grado e, con i dovuti aggiustamenti, anche nei gradi inferiori.

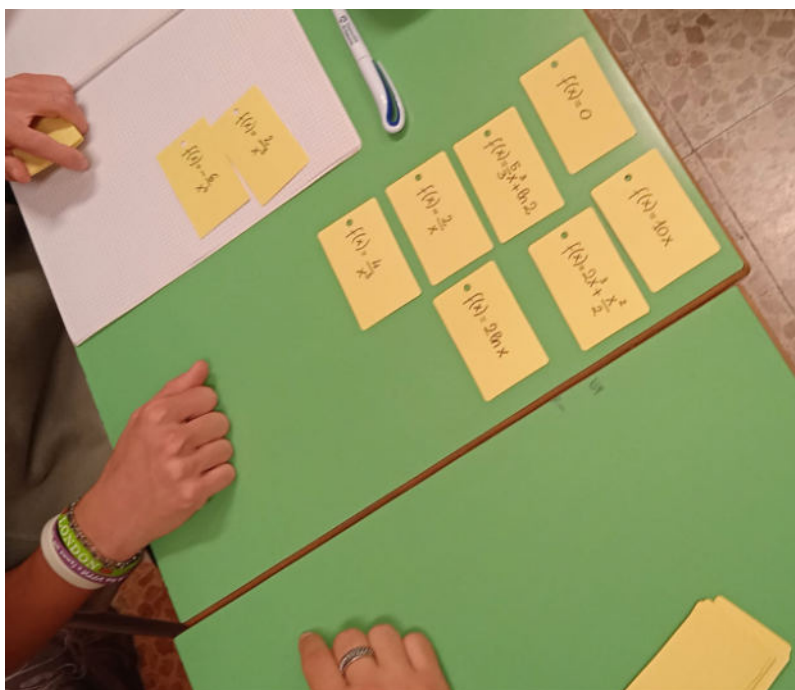
SVOLGIMENTO DEL LABORATORIO

Il gioco proposto è inserito all'interno di un'attività laboratoriale in cui esso viene proposto in apertura. Lo schema completo dell'attività è riportato nella Tabella 1.

Tabella 1. Fasi dell'attività e relative tempistiche

Fase dell'attività	Tempi
Introduzione	5 minuti
Svolgimento del gioco	20 minuti
Confronto collettivo	10 minuti
Costruzione dei set	15 minuti
Riflessioni finali collettive	10 minuti
Totale	60 minuti

La struttura base del gioco è la seguente. La classe viene divisa in piccoli gruppi e a ciascuno viene assegnato un mazzo di 36 carte. Si devono girare a faccia in su sul tavolo 12 carte del mazzo e contemporaneamente tutti i giocatori devono individuare gruppi di 3 carte che si possano associare in base alla regola fornita (es. le 3 carte rappresentano monomi equivalenti). Chi individua una tripletta deve giustificare agli altri giocatori la sua scelta e in caso di disaccordo si apre una discussione: le 3 carte non possono essere prese finché tutti i giocatori non sono d'accordo nel riconoscere la tripletta.



385

RIFLESSIONI DIDATTICHE

Il materiale prodotto finora, il suo uso in classe e le riflessioni che ne sono scaturite ci permettono di individuare le caratteristiche essenziali della nostra idea. Il gioco:

- non è fine a sé stesso, ma fa da apertura (starter) per un vero lavoro di apprendimento: in questo senso il progetto si attesta nel filone della didattica ludiforme;
- lascia spazio all'argomentazione, un aspetto che noi riteniamo fondamentale nella pratica didattica quotidiana;
- è basato, per la costruzione dei mazzi, sulla variation e sul metodo della ricerca variata;
- è flessibile nel suo utilizzo, sia per quanto riguarda gli oggetti di apprendimento che per le finalità didattiche;
- è fruibile da tutti gli studenti, a prescindere dal loro livello in matematica;
- può essere utilizzato sia in modalità competitiva che cooperativa;
- è manipolabile e non digitale: nel momento dell'ideazione si era ancora in periodo pandemico e quindi ci era molto caro il tema del ritorno della didattica in presenza e della ripresa della socialità; inoltre crediamo nell'utilizzo di artefatti concreti per una didattica efficace.

Analizziamo questi aspetti uno alla volta.

Gioco come starter

Come illustrato nel paragrafo precedente, l'attività ludica si pone in apertura di una lezione con intenti di apprendimento significativo.

Inoltre, il gioco nella sua essenza ha degli aspetti che lo accomunano con la matematica e quindi questo approccio permette lo sviluppo effettivo di conoscenze, abilità e competenze sia negli ambiti propri della materia che in quello trasversale.

Come fanno notare Spagnolo e Bolondi⁸⁵, accanto alla funzione tattica che caratterizza l'uso del gioco in qualunque disciplina scolastica - agendo sulla motivazione, facilitando l'attenzione, predisponendo a un atteggiamento positivo - in matematica le attività ludiformi hanno anche una funzione strategica. Infatti, esse permettono di orientare l'insegnamento e l'apprendimento verso il nucleo formativo della materia, attivando una serie di operazioni peculiari del pensiero matematico: esplorazione, congettura, verifica, argomentazione, individuazione e definizione di oggetti rilevanti, connessione di informazioni, generalizzazione, astrazione.

Altre caratteristiche del gioco risuonano nell'apprendimento della matematica: la funzione simbolica, l'uso del linguaggio, la coerenza interna delle regole. Anche l'errore è vissuto diversamente in un ambiente ludiforme, riducendo l'ansia da prestazione.

Per tutte queste ragioni è possibile considerare l'atto del giocare come parte integrante dell'insegnamento: "l'aspetto ludico può sottrarre l'attività matematica a quella caratteristica rigidamente operativa e formale a cui troppo spesso, purtroppo, è collegata nella percezione degli scolari. Nel gioco si può spezzare il circolo vizioso regola-applicazione, problema-schema risolutivo che avvilisce l'apprendimento matematico ad addestramento, e si possono reintrodurre invece elementi di intuizione, creatività, prefigurazione, competizione e infine divertimento, che non dovrebbero mancare in nessuna attività matematica⁸⁶".

Il passaggio dalla fase ludica a quella di riflessione e produzione mette a frutto tutto quanto di positivo si è creato durante il gioco, sia a livello tattico che strategico.

Argomentazione

La matematica è un ambito in cui l'argomentazione è centrale: tutto deve essere dimostrato e giustificato. Argomentare è una competenza trasversale, perché per essere efficace richiede una buona padronanza sia della lingua di comunicazione che degli strumenti matematici. Inoltre, è evidentemente

⁸⁵ Spagnolo C., Bolondi G., Giochi matematici per lo sviluppo di competenze, in Di Paola & Taranto (2018)

⁸⁶ Manara (2002), p. 33

una competenza sociale e aumenta la capacità di ascoltare l'altro e di mettere in discussione le proprie convinzioni.

D'altro canto, a scuola il tempo lasciato per questa attività sembra sempre ridotto.

L'argomentazione trova una collocazione naturale in vari momenti dell'attività: durante la fase ludica i giocatori devono giustificare tutte le proprie scelte ai compagni, verbalizzando i ragionamenti che soggiacciono alle proprie decisioni. Questo è utile per tutti: chi spiega, esplicitando i percorsi di pensiero seguiti, ha la possibilità di analizzarli in modo critico; chi ascolta a sua volta attiva il proprio spirito critico e può imparare nuovi contenuti o rivedere ciò che sapeva.

Tutto questo viene svolto tra pari, in un contesto di basso stress rispetto al normale setting d'aula.

Anche durante la costruzione delle carte viene richiesto di spiegare e giustificare quanto si svolge e la richiesta di creare le carte a livello di piccolo gruppo lascia spazio per un ulteriore momento di confronto tra pari.

Variation e metodo della ricerca variata

La teoria della variation è stata proposta da Marton e Tsui (2004). Essi partono dalla considerazione che una certa caratteristica può essere percepita solo in riferimento alla sua variazione; ciò è vero in qualunque contesto, anche di vita quotidiana: ad esempio, se la nostra visione fosse monocromatica, l'umanità non avrebbe elaborato il concetto di colore.

Apprendere, dunque, presuppone la rilevazione di variazioni ed il ruolo dell'insegnante è creare le migliori condizioni affinché l'apprendimento di un certo oggetto possa avvenire. Ciò richiede l'individuazione delle caratteristiche peculiari dell'oggetto e la scelta di cosa far variare e cosa no, attraverso vari esempi o esperienze. Gli autori sottolineano la centralità dell'esperienza diretta: non basta che un certo carattere sia illustrato o spiegato, ma è fondamentale per una reale comprensione che esso sia provato direttamente da chi apprende.

Le variazioni, a loro volta, possono essere percepite se si mantiene uno sfondo invariante; in caso contrario, l'attenzione non può essere focalizzata sugli aspetti rilevanti.

In questo filone si innesta anche il metodo della ricerca variata proposto da Arzarello (2018), secondo cui il metodo "coltiva e stimola le competenze argomentative degli allievi, che favoriscono a loro volta l'abitudine al pensiero ipotetico, cui una particolare attenzione è dedicata sia nelle ricerche sull'apprendimento della matematica sia nelle Indicazioni ministeriali per i vari ordini scolastici"⁸⁷.

Il primo momento in cui la variation è centrale è quello della costruzione dei mazzi. Costruire delle triplette sconnesse tra loro renderebbe il gioco più semplice e soprattutto lo svuoterebbe del suo significato più profondo; far variare solo alcuni elementi, lasciando fissi gli altri, invece, permette allo studente di concentrare l'attenzione sul particolare oggetto di apprendimento su cui l'insegnante intende lavorare. Consideriamo l'esempio dei monomi equivalenti: le lettere utilizzate nel mazzo saranno sempre le stesse, mentre varieranno gli esponenti, in modo che lo studente si concentri su di essi, considerando i casi simili generati dalle varie proprietà delle potenze. Lo stesso varrà per il coefficiente numerico: se varierà, sarà in modo significativo (ad es. $6 = 3 \times 2$ e $9 = 3^2$). Per il mazzo da 36 carte abbiamo scelto 6 monomi di partenza, diversi ma affini tra loro secondo la logica appena illustrata, e abbiamo costruito per ciascuno 6 monomi equivalenti, sfruttando le operazioni di moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza.

Per questa ragione pensiamo che uno sviluppo ottimale dell'attività parta dalla costruzione dei mazzi da parte dell'insegnante che li utilizzerà, in modo da poterli adattare alle sue necessità didattiche e alle peculiarità della classe in cui proporrà il gioco. Per nostra esperienza, la predisposizione dei mazzi innesca anche nel docente riflessioni interessanti sull'oggetto di apprendimento.

Un meccanismo simile si presenta nella fase dell'attività in cui sono gli studenti a dover costruire triplette in base alle indicazioni fornite; lavorare in piccolo gruppo porta ad un arricchimento anche dal punto di vista dell'argomentazione.

⁸⁷ Arzarello (2018), p. 147

Flessibilità

Il nostro gioco ha visto la sua genesi per una necessità contingente molto specifica, ma ci siamo rese conto molto presto che la stessa meccanica poteva essere sfruttata in moltissimi ambiti. In questo senso, ci sembra che la nostra proposta si avvicini più ad una prassi didattica che ad una mera attività. Fermi restando i punti salienti, è possibile generare mazzi su quasi qualunque argomento, abbracciando nella logica costruttiva le peculiarità dell'oggetto di apprendimento scelto: se spesso il *fil rouge* è una relazione di equivalenza (pensiamo ai monomi, alle scomposizioni, ai logaritmi), nel caso delle rette si lavora sui concetti di parallelismo e perpendicolarità e sui diversi registri semiotici – apprendo ad una gamma di possibili modi di giocare – mentre per le derivate la relazione che guida il gioco è appunto quella di “essere la derivata” o “essere la primitiva” di qualcosa.

Un altro aspetto che ci è caro è quello dell'adattabilità del gioco a diversi fini didattici: esso può essere utilizzato per far scoprire nuove proprietà, per ampliare concetti già visti, per lavorare sul recupero delle fragilità. Sarà il singolo insegnante a capire quale sarà il modo migliore per sfruttare l'attività in ciascuna classe.

Fruibilità

Le attività di tipo ludiforme si prestano molto bene ad una didattica inclusiva. L'esperienza in classe ci ha mostrato che anche gli studenti più restii a partecipare alle lezioni di tipo tradizionale si mostrano interessanti e attivi durante il laboratorio. In questo senso pensiamo che sia cruciale il design dei gruppi: renderli non troppo disomogenei permette un confronto tra pari ricco e coinvolgente; inoltre, se nella classe ci sono livelli molto differenti è possibile creare mazzi di diversa difficoltà, in modo da lavorare sullo sviluppo prossimale e rafforzare ciò che gli studenti già conoscono, dando modo a tutti di ottenere risultati soddisfacenti. In caso di alunni particolarmente fragili, è possibile ridurre la numerosità del mazzo e far giocare con 9 carte contemporaneamente, anziché le usuali 12; un'altra possibilità è quella di far abbinare le carte a coppie anziché a triplete.

Competitivo vs. Collaborativo

La nostra idea originale prevede che il gioco sia di tipo competitivo, ma proponendo l'attività agli studenti ci siamo accorte che spesso essi virano su un'impostazione collaborativa.

Pensiamo che entrambe le modalità siano valide: è uno dei numerosi aspetti di flessibilità che caratterizza il nostro progetto. Sarà il singolo insegnante a valutare quale strategia sia preferibile nella specifica classe e per la specifica attività.

Si consiglia solo di adattare lo schema premiale al tipo di strategia scelto.

Artefatti

In un'epoca sempre più orientata al digitale, la nostra scelta è stata quella di lavorare su artefatti cartacei. E' stata una scelta consapevole, frutto di alcune riflessioni. Innanzitutto l'idea è nata nel periodo post-pandemico in cui si stava tornando a scuola in presenza e gli studenti avevano quanto mai bisogno di riappropriarsi di spazi di condivisione “spalla a spalla”; inoltre, riteniamo che poter manipolare le carte permetta un ampliamento e un arricchimento degli spazi argomentativi.

La scelta dell'artefatto condiziona il tipo di apprendimento e, in questo caso, anche la dinamica di gioco: affinché tutti abbiano una visione egualitaria delle carte, infatti, la numerosità ottimale del gruppo è tre. Ciò risulta particolarmente importante in alcuni casi, come quello delle rette, in cui poter osservare le carte nel verso giusto è fondamentale per la corretta individuazione degli abbinamenti.

CONCLUSIONI

Il workshop ha permesso di illustrare in modo concreto a docenti e ricercatori la nostra proposta didattica, basata su un'attività di tipo ludiforme che, attraverso la *variation*, intende lavorare sulla padronanza di oggetti matematici e sull'argomentazione.

Si tratta di un laboratorio che può essere sviluppato durante una singola lezione e le cui caratteristiche di flessibilità e fruibilità ne permettono l'uso in molti ambiti, promuovendone il passaggio a prassi didattica.

RINGRAZIAMENTI

Intendiamo ringraziare innanzitutto la prof.ssa Ornella Robutti, la cui capacità di ascolto critico è quanto di meglio si possa desiderare; grazie a lei siamo state coinvolte in uno dei progetti del prof. Roberto Capone, che ci ha dato un ulteriore stimolo nello sviluppo dell'attività e che ci ha permesso di diventare un vero gruppo di lavoro.

Inoltre, un pensiero di gratitudine a tutti i colleghi che hanno mostrato interesse per la nostra idea e che con le loro osservazioni ci hanno permesso di migliorarla ed arricchirla.

Il grazie più grande, infine, è per tutti gli studenti che hanno testato l'attività insieme a noi rispondendo sempre con entusiasmo e arricchendo ogni volta il nostro punto di vista: senza di loro, tutto questo non esisterebbe.

BIBLIOGRAFIA

Afari, E., Aldridge, J.M. & Fraser, B.J. (2012). Effectiveness of using games in tertiary-level mathematics classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Vol.10(6), 1369–1392.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education*. The Fibonacci Project.

Arzarello, F. (2018). Insegnare, apprendere e valutare in matematica: un'interazione delicata. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 41, 135–159.

Di Paola, B. & Taranto, E., a cura di (2018), Quaderni di Ricerca in Didattica, quaderno 1, numero speciale 2. *Atti del convegno Giocare con la matematica: dall'apprendimento informale all'apprendimento formale*.

Kapp, K. M. (2012). Games, gamification, and the quest for learner engagement. *T+ D*, 66(6), pp. 64–68.

Manara R. (2002). *La matematica e la realtà - Linee di metodo*. Marietti 1820.

Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. P. P. M. Chik, P. Y. Ko, M. L. Lo, Eds., Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Watson, A. & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical thinking and learning*, 8(2), pp. 91–111.

MATEPRATICAMENTE POST-PANDEMIA: TRA TIC E MATERIALI POVERI PER UNA DIDATTICA PIÙ INCLUSIVA

**Tallone Chiara, Alocco Ilenia, Carrino Stefania, Cavallera Laura, Durando Chiara,
Isoardi Giorgia, La Paglia Luisa, Zamboni Francesca**
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
matepraticamente.info@gmail.com

Abstract

Il progetto Matepraticamente ha visto un'evoluzione delle proposte nel corso degli anni, pur mantenendo l'obiettivo di rendere la matematica più coinvolgente e di motivare anche gli studenti più fragili. Nell'a.s. 22/23 si sono svolti due percorsi: uno per le scuole secondarie di 1° grado; l'altro rivolto a studenti del primo biennio delle scuole secondarie di 2° grado e a docenti interessati a pratiche didattiche innovative. Durante il workshop i partecipanti hanno sperimentato attività laboratoriali tratte dai due percorsi sopra citati, con l'utilizzo di differenti strumenti (materiali poveri, foglio di calcolo e Mathigon) per affrontare tematiche tratte dagli ambiti "Spazio e Figure" e "Dati e Previsioni".

La prima attività, "Le gemme di SuperMario", ha come obiettivo la costruzione di un esagono regolare con la piegatura della carta. Nelle diverse fasi di costruzione della "gemma" gli studenti osservano e analizzano alcune proprietà caratteristiche di varie figure geometriche piane. L'attività può continuare in ambiente digitale con l'applicazione Mathigon.

La seconda attività, "Dati e grafici... è tutto come sembra?", propone di analizzare, rielaborare e interpretare un set di dati disponibili sul sito di Arpa Piemonte attraverso l'utilizzo consapevole delle tecnologie e in particolare del foglio di calcolo. Quest'attività permette inoltre di approfondire diversi temi di educazione civica, facendo uso di apposite rappresentazioni per modificare la percezione dei fenomeni, come il cambiamento climatico.

Parole-chiave

Matepraticamente - origami - errore - grafici - statistica

IL PROGETTO MATEPRATICAMENTE FINO AL 2022/23

Matepraticamente è un progetto avviato nel 2010, facente parte del Piano Lauree Scientifiche e inserito nelle attività di orientamento dell'Università degli Studi di Torino per le scuole secondarie. L'iniziativa nasce dall'idea di un gruppo di docenti della scuola secondaria e di studenti universitari appassionati di didattica. Nella sua prima fase, a partire dall'a.s. 2014/2015, le attività proposte si svolgevano all'interno di palestre o aule magne di diversi istituti piemontesi, dove i ragazzi, a turno, partecipavano ai laboratori matematici proposti in vari stand, utilizzando perlopiù materiali poveri e oggetti di uso quotidiano. L'obiettivo era ed è tuttora quello di far sperimentare ai partecipanti una matematica più pratica e accessibile, in un contesto diverso da quello curricolare, rivolgendosi ad una platea composta non soltanto dalle eccellenze (Tallone et al., 2017). Nel 2020, con l'interruzione dell'attività in presenza a causa della pandemia, le attività sono proseguite in una veste differente. Durante il primo periodo di lockdown i formatori, introducendo nell'organizzazione abituale l'uso delle TIC, hanno organizzato la *#matepraticchallenge*, una sfida social sulla pagina Instagram del progetto (Matepraticamente, 2018). Nell'a.s. 2020/21, con l'incremento delle possibilità di svolgere la didattica a distanza, è nato *Matepraticamente 2.0*, proposto interamente online in *modalità e-learning* sincrona e asincrona, attraverso vari strumenti digitali, prima fra tutti la piattaforma Orient@mente (Università degli Studi di Torino, n.d.). All'iniziativa hanno partecipato più di 500 studenti di diversi istituti piemontesi suddivisi in 3 percorsi: uno per gli studenti delle scuole secondarie di primo grado, uno per il primo biennio del secondo grado ed infine uno per il secondo biennio, inserito nel Percorso per le Competenze Trasversali

e per l'Orientamento (PCTO) promosso dal Dipartimento di Matematica “G. Peano” dell’Università degli Studi di Torino (Tallone et al., 2022).

Nell’A.S. 2022/2023, cessata la fase emergenziale, è stato possibile tornare a svolgere attività in presenza. Si è dunque deciso di riproporre alcuni dei laboratori delle prime edizioni, in versione ampliata e rivista, con la consapevolezza del potenziale offerto dalle TIC. Il progetto è stato declinato in due percorsi: uno per la scuola secondaria di primo grado e uno per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Il primo ha coinvolto le classi seconde di due istituti di Torino (l’Istituto “Maria Ausiliatrice” e l’I.C. “Parri-Vian”) e si è svolto in due appuntamenti della durata di 2 ore ciascuno, in orario curricolare, presso gli stessi istituti. I laboratori e le attività ludiche proposte hanno avuto come filo conduttore una narrazione ispirata a *SuperMario*, noto personaggio dei videogiochi e hanno toccato i vari nuclei della matematica.

L’edizione destinata al primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado della città di Cuneo si è svolta nei locali dell’IIS “Virginio Donadio”. Essa ha coinvolto in particolar modo gli studenti con un livello base di competenze logico-matematiche per i quali erano state evidenziate fragilità nell’apprendimento. Il percorso si è svolto in due edizioni parallele di quattro incontri pomeridiani, una rivolta agli studenti del primo anno e una a quelli del secondo anno. Ciascun *workshop*, incentrato su uno dei quattro nuclei fondamentali della disciplina, era composto da tre diverse attività: la prima svolta interamente con materiali poveri e artefatti analogici, la seconda con l’utilizzo delle TIC all’interno dell’aula informatica e l’ultima combinando materiali di uso comune con strumenti digitali (tablet). Una delle novità principali è stata la partecipazione di docenti delle scuole secondarie di primo e secondo grado: il progetto, infatti, è stato offerto loro come percorso di formazione riconosciuto dall’Università degli Studi di Torino e finalizzato all’approfondimento della didattica laboratoriale e di buone pratiche di insegnamento.

Obiettivi del progetto

L’intento del progetto rispecchia l’obiettivo che ha portato alla sua nascita e che ha guidato tutte le esperienze degli ultimi dieci anni. Lo scopo è, infatti, quello di rendere la matematica più inclusiva e accessibile, scardinando i pregiudizi che contribuiscono ad una scarsa motivazione e carente autoefficacia, in particolare in presenza di difficoltà nell’apprendimento della stessa. Attraverso la presentazione di attività relative ai quattro nuclei fondanti della disciplina si vuole incrementare negli studenti una visione più ampia della matematica. Il frequente utilizzo di temi legati alla realtà e il riferimento alle sue applicazioni mirano a stimolare la curiosità dei ragazzi, nonché a favorire le competenze logico-matematiche e di cittadinanza attiva attraverso la proposta di compiti autentici, in ottica di *lifelong learning* (2018/C 189/01). Per lo stesso motivo entrambi i percorsi sono caratterizzati dal ricorso costante alla didattica laboratoriale, ad attività di tipo esplorativo e al *problem solving*, che coinvolgono attivamente lo studente (*learning by doing*). L’utilizzo delle TIC e dei materiali poveri favorisce la modellizzazione dei problemi matematici e costituisce un’occasione per riflettere sul confronto tra diversi registri di rappresentazione e differenti aspetti di un medesimo concetto.

Il ritorno alle attività in presenza, nel periodo post-pandemia, ha incentivato il coinvolgimento e il confronto diretto degli studenti, con l’obiettivo di contribuire al superamento delle maggiori difficoltà sociali e relazionali dovute al periodo di isolamento. Per questo motivo tutti i laboratori proposti hanno previsto forme di interazione e lavoro a coppie o in piccoli gruppi, in cui i partecipanti fossero coinvolti in attività sfidanti. Queste modalità hanno favorito l’apprendimento cooperativo, stimolando l’interdipendenza positiva e sviluppando negli studenti competenze trasversali quali organizzare e condividere il proprio lavoro con gli altri, nonché cercare sostegno qualora fosse necessario.

ATTIVITÀ PER LA SCUOLA SECONDARIA DI 1° GRADO: LE GEMME DI SUPER MARIO

L’attività, inerente la geometria piana e dunque il nodo concettuale “Spazio e Figure”, è stata proposta a due classi seconde della scuola secondaria di primo grado. Essa si inserisce all’interno di un percorso più ampio, costituito da quattro attività, una per ogni nucleo matematico, in cui gli studenti devono superare delle sfide per progredire in una storia basata sulle avventure del personaggio di Super Mario.

La narrazione, come sostiene Bruner (1956), risultando connessa alle esperienze dei soggetti, facilita l'apprendimento perché si configura come mediatore per il conferimento di senso nei vari livelli di gioco. Infatti l'utilizzo di un filone narrativo che lega un'attività alla successiva e la struttura della gamification hanno aumentato la motivazione degli studenti che, resi co-protagonisti, si sono sentiti coinvolti ed incentivati a raggiungere il livello finale.

Titolo: <i>Le gemme di Super Mario</i>	
Destinatari: studenti delle classi seconde della Scuola Secondaria di Primo Grado	
Nucleo di riferimento: spazio e figure	
Nodi concettuali: geometria piana	
Contesto: extracurricolare e interdisciplinare	
Strumenti: fogli di carta A4	
Obiettivi: imparare a procedere seguendo uno schema di lavoro, potenziare l'attenzione e l'analisi di un modello, stimolare il confronto, l'aiuto reciproco e la riflessione costruttiva sugli errori	
Tempi: circa un'ora	
Metodologia: lezione partecipata, collaborative learning, gamification, didattica laboratoriale, problem solving	

Figura 1. Scheda dell'attività didattica *Le gemme di Super Mario*

In questa fase di gioco gli allievi sono stati suddivisi in squadre e disposti in maniera tale da favorire l'osservazione degli altri componenti del gruppo durante l'attività. L'obiettivo era quello di costruire una gemma, tramite un foglio di cartoncino di formato A4 consegnato a ciascuno di loro, per salvare la principessa Peach. Alla LIM sono state proiettate le istruzioni iterative per piegare il foglio e ad ogni passaggio ci si interrogava sulle proprietà geometriche delle figure ottenute con le diverse pieghe: triangoli rettangoli, trapezi isosceli e rettangoli, pentagoni ecc. Alla fine l'origami ottenuto aveva la forma di un esagono regolare in cui era evidente, grazie alle pieghe precedentemente create, la suddivisione in sei triangoli equilateri congruenti. Da questa configurazione è stato possibile osservare le proprietà relative ai suoi lati, alle diagonali e agli angoli interni. Per questa fase sono stati utilizzati solamente materiali poveri, come la carta, mentre in altri livelli di gioco, sono state adoperate anche delle TIC.

Un possibile approfondimento consiste nel costruire esagoni e altre figure geometriche attraverso l'utilizzo della piattaforma Mathigon, per evidenziare un'eventuale correlazione con le tassellazioni del piano.

Il ruolo dell'errore in questa attività

Per la costruzione dell'origami gli studenti hanno seguito in modo autonomo le istruzioni fornite passo dopo passo e confrontato il proprio lavoro con il modello di riferimento realizzato dall'insegnante. Le fasi di osservazione, analisi e verifica della correttezza del proprio prodotto sono risultate fondamentali per poter individuare immediatamente gli eventuali errori commessi e proseguire l'attività. L'errore, appena viene percepito e individuato, induce infatti a riconsiderare le pieghe fatte fino a quel momento, tornare indietro del numero di passi necessario e provare a replicare nuovamente le piegature secondo gli schemi corretti. Inoltre questo processo risulta cruciale per stimolare il controllo attento e l'autovalutazione del proprio operato.

La consequenzialità delle azioni richieste favorisce il monitoraggio del processo e il riscontro di eventuali criticità da parte dell'allievo: è infatti impossibile terminare la costruzione se non si corregge un errore o se si salta qualche passaggio. Fondamentale per raggiungere l'obiettivo finale è stato anche il confronto tra pari: l'osservazione attenta degli origami realizzati dai compagni ha permesso di aumentare la consapevolezza sul lavoro svolto dal singolo studente.

Dai feedback raccolti dagli allievi al termine dell'attività emerge come essi stessi riconoscano l'efficacia del metodo collaborativo (Figura 2).

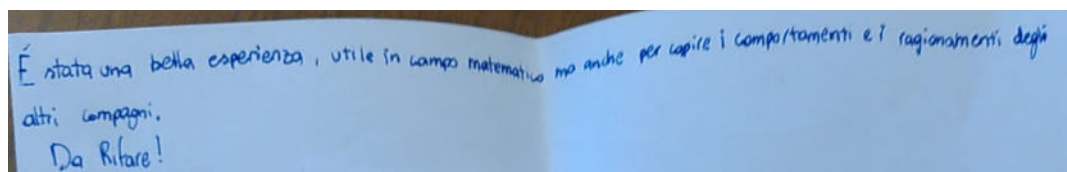


Figura 2. Feedback di un allievo: *“È stata una bella esperienza, utile in campo matematico ma anche per capire i comportamenti e i ragionamenti degli altri compagni. Da rifare!”*

Procedendo per tentativi ed errori, grazie alle osservazioni, al confronto e alla possibilità di autocorrezione, tutti gli studenti sono riusciti a portare a termine il proprio origami, indipendentemente dal livello iniziale di padronanza delle conoscenze matematiche e abilità manuali richieste.



Figura 3. Studenti con le gemme appena realizzate.

ATTIVITÀ PER LA SCUOLA SECONDARIA DI 2° GRADO: DATI E GRAFICI... È TUTTO COME SEMBRA?

La seconda attività presentata durante il workshop è tratta dall'edizione del progetto rivolta al biennio della scuola secondaria di secondo grado. Essa è stata svolta durante l'appuntamento relativo al nucleo Dati e Previsioni in aula informatica, in modo tale che ogni studente avesse a disposizione un pc. L'incremento nell'utilizzo delle TIC, rispetto alle edizioni iniziali del progetto (Tallone et al., 2017) deriva dall'esperienza vissuta durante gli anni di pandemia con le edizioni di Matepraticamente 2.0 (Tallone et al., 2022). Gli strumenti digitali permettono infatti un arricchimento delle possibilità di informazione, di esplorazione e indagine e di realizzazione di prodotti e materiale didattico, ampliando le possibilità di perseguire i valori cardine del progetto, quali l'approccio pratico alla matematica, con attività extracurricolari e collegamenti interdisciplinari, in ottica inclusiva.

Analisi di dati reali e loro rappresentazioni: un approccio esplorativo alla statistica

L'attività introdotta prevede l'analisi di dati grezzi reperiti sul sito ufficiale di ARPA Piemonte riguardanti le temperature rilevate in alcune città piemontesi, con l'obiettivo di riflettere sulle differenti percezioni che si hanno nel momento in cui si osserva un grafico e che potrebbero portare alla nascita di misconcetti.

Inizialmente, mediante l'utilizzo delle opportune funzioni del foglio di calcolo, si effettua una valutazione degli indici statistici dei dati presenti (moda, mediana, media e deviazione standard). Tramite domande mirate viene posta l'attenzione sul significato reale di tali indici. Se i concetti di moda, mediana e media risultano essere già noti o comprensibili grazie alle conoscenze pregresse, diverso è il caso della deviazione standard, di cui gli studenti riescono a comprendere il senso attraverso un approccio intuitivo anche senza una definizione formale, che viene fornita in seguito.

Titolo: *Dati e grafici... tutto è come sembra?*

Destinatari: studenti del Primo Biennio della Scuola Secondaria di Secondo Grado

Nucleo di riferimento: dati e previsioni

Nodi concettuali: indici statistici, rappresentazione grafica di dati reali

Contesto: curricolare e interdisciplinare

Strumenti: pc, foglio di calcolo, sito ARPA Piemonte, giornali

Obiettivi: rappresentare dati sul foglio di calcolo, leggere un grafico e fare previsioni su determinati fenomeni

Tempi: 30 minuti + lavoro di approfondimento a casa

Metodologie utilizzate: lavoro in piccoli gruppi, didattica laboratoriale, problem solving, apprendimento con le TIC, discussione collettiva dei risultati, lezione dialogata

Fasi dell'attività:

- 1) indici statistici e foglio di calcolo
- 2) cosa ci dicono concretamente gli indici trovati?
- 3) grafici per rappresentare i dati
- 4) percezione del fenomeno a partire dal range di dati selezionati
- 5) previsioni a partire dal set di dati studiato
- 6) caccia all'errore in grafici tratti da giornali

Figura 4. Scheda dell'attività didattica *Dati e grafici... tutto è come sembra?*

Successivamente viene spiegato ai ragazzi come ottenere una rappresentazione grafica a partire dalle tabelle di dati nel foglio di calcolo e si esegue un'analisi qualitativa dei risultati ottenuti. Si analizza infine un ulteriore grafico (*Figura 5*) in cui vengono rappresentati i valori medi annui della temperatura massima negli anni 1958-2019 nelle città piemontesi. In esso vengono evidenziate due diverse linee di tendenza: la prima, in blu, tiene conto dei dati di tutto l'arco temporale considerato, mentre la seconda, in rosso, prende in esame soltanto gli ultimi 40 anni. Tramite discussione collettiva si riflette sul significato delle linee di tendenza rappresentate, le quali evidenziano un aumento delle temperature più marcato negli ultimi 40 anni rispetto al passato.

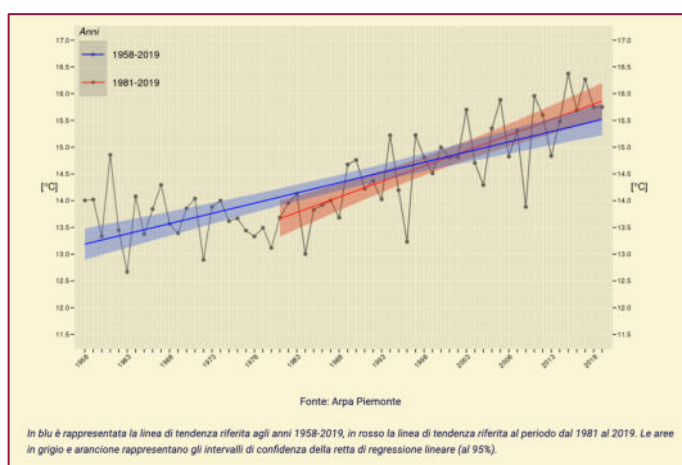


Figura 5. Rappresentazione delle temperature medie annue (anni 1958-2019) nelle città piemontesi.

Il ruolo dei grafici nell'informazione: contrastare i misconcetti con gli strumenti matematici

La seconda parte dell'attività è focalizzata sull'osservazione e interpretazione di grafici da parte dello studente, al fine di riflettere sulla rappresentazione dei dati e scardinare il concetto di percezione soggettiva a favore dell'analisi critica. Nella figura sottostante viene riportata due volte la rappresentazione delle temperature medie annue di Alessandria, visualizzando la linea di tendenza. La scala scelta per l'asse delle ordinate, nel quale è riportata la temperatura, non è la stessa per i due grafici, infatti nel secondo si osserva esclusivamente l'intervallo $[11^{\circ}, 14^{\circ}]$. Senza una lettura approfondita si ha la sensazione che nel secondo grafico il tasso di variazione sia più alto rispetto al primo, ma analizzando meglio i dati si scopre che non è così. Si può quindi avviare una discussione con gli studenti sull'importanza dei modelli e su come essi influenzino la percezione di un fenomeno.



Figura 6. Rappresentazione delle temperature medie annue ad Alessandria con due scale diverse.

Alcuni mezzi di informazione modificano infatti la rappresentazione con l'intento di veicolare una certa idea a discapito di un'altra e risulta pertanto di fondamentale importanza saper interpretare correttamente un grafico.

A questo punto l'attività pone un nuovo obiettivo: dopo una prima fase di utilizzo del foglio di calcolo, durante la quale lo studente è invitato a mettere in campo diverse competenze per la realizzazione di grafici, la richiesta ora è quella di riconoscere rappresentazioni errate o fuorvianti tratte da articoli o siti web. L'importanza dell'errore in matematica è una tematica ampiamente affrontata nella ricerca didattica, sia dal punto di vista filosofico che pedagogico: Rosetta Zan (2007) parla di *misconcezioni* come "causa di errori", spesso legate all'inconsapevolezza del soggetto; per Popper (1972) l'errore è un fatto positivo in quanto costituisce un'occasione di sviluppo della conoscenza; per Enriques (1936) l'errore è un elemento irrinunciabile per il proprio processo costruttivo. In questa fase dell'attività l'errore diventa quindi protagonista: i ragazzi riflettono sulle rappresentazioni create da altri, ad esempio giornalisti, per individuare l'uso non corretto di diagrammi nella presentazione di determinate notizie o informazioni. Si riportano alcuni esempi in *Figura 7*.

Nel primo areogramma il settore relativo al 18,02% non riporta l'età di riferimento delle vittime, a differenza di tutti gli altri. Inoltre non è rispettata la regola aurea di far partire dall'alto (le ore 12 in un ipotetico orologio) la suddivisione in porzioni, per poi proseguire in senso orario con il dato più rilevante della statistica presentata. Nel diagramma in alto a destra si hanno rappresentazioni differenti per maggioranza, opposizione e gruppo misto, quindi non è chiaro quale sia l'effettiva altezza delle barre. Occorre in realtà considerare solo la parte più chiara sopra ai simboli di partito per avere coerenza con le percentuali riportate. Nel cartogramma in basso sembrerebbe schiacciante la vittoria del candidato associato al colore rosso, invece è stata l'opposizione (in blu) a registrare il maggior numero di voti, circa tre milioni in più. La superficie colorata non corrisponde infatti al numero assoluto di persone votanti, poiché la densità di popolazione non è proporzionale all'area geografica⁸⁸.

Un'attività di questo tipo aiuta lo studente a distinguere i vari grafici utilizzati in statistica e lo porta a riflettere sull'importanza della coerenza tra i dati, il tipo di rappresentazione scelto e il messaggio veicolato, prestando attenzione ad un uso improprio degli strumenti matematici o ad eventuali forzature, più o meno intenzionali, che si trovano sui giornali. In questo modo il ragazzo mette in atto diverse competenze, che spaziano dalla matematica all'educazione civica. Inoltre, facendo riferimento al quadro DigComp 2.1 (2017) per le competenze digitali dei cittadini, questa attività offre agli studenti l'opportunità di valutare dati, informazioni e contenuti digitali (*alfabetizzazione su informazioni e dati*),

⁸⁸ Ciò è ben visibile dalla rielaborazione grafica proposta nel sito try-to-impeach-this.jetpack.ai.

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia
 li aiuta ad integrare e rielaborare informazioni (*creazione di contenuti digitali*) e gli permette di utilizzare
 in modo creativo le tecnologie (*risolvere problemi*).

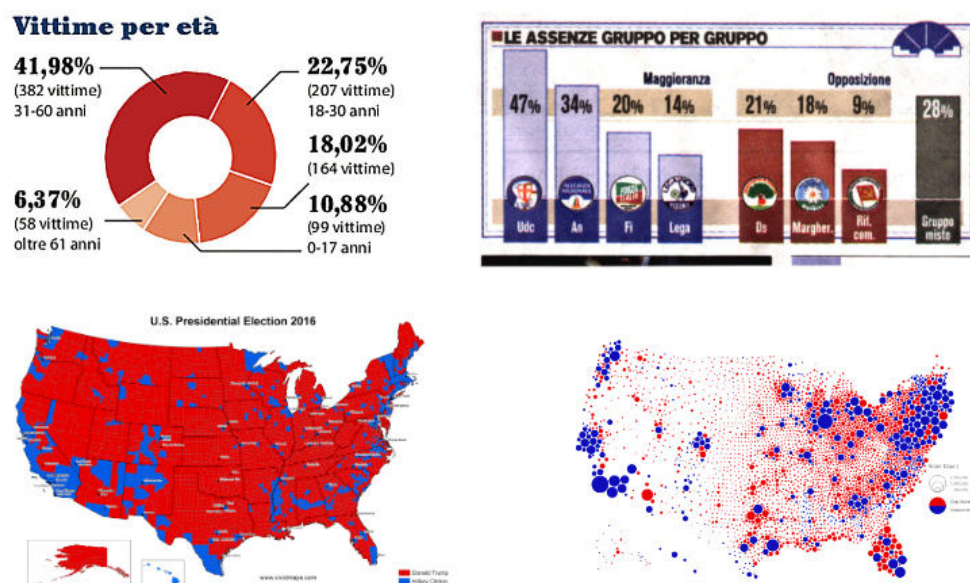


Figura 7. In alto a sinistra articolo de La Repubblica 20/03/2017 p.11 - Morti per mano mafiosa dal 1893 al 2015, in alto a destra articolo de La Repubblica (10/11/2004, pag. 2) dove viene presentata la percentuale di assenze dalle sedute della Camera dei Deputati per ognuno dei partiti sia della maggioranza sia dell'opposizione.
 In basso infografica rielaborata con i risultati delle elezioni presidenziali degli USA del 2016.

CONCLUSIONI

Al termine dei due percorsi il riscontro dei partecipanti è stato molto positivo. Essi hanno manifestato entusiasmo per la nuova modalità con cui hanno affrontato le attività matematiche e per buona parte degli studenti si è evidenziato un miglioramento nel coinvolgimento e nell'atteggiamento nei confronti della disciplina, con ricadute positive sull'apprendimento. In particolare ciò si è reso evidente in un progetto di *peer-tutoring inverso*, proposto dalle docenti Tallone e Carrino in una classe dell'IIS Virginio Donadio, in cui gli studenti coinvolti nel percorso pomeridiano hanno riproposto in aula le medesime attività laboratoriali in veste di tutor dei compagni di classe. L'iniziativa si è rivelata un progetto di inclusione molto efficace: si sono infatti ribaltati i ruoli abituali di *tutor-tutee*, in genere affidati a studenti con un grado di competenza rispettivamente maggiore e minore.

Il coinvolgimento dei docenti ha realizzato uno degli obiettivi principali dello sviluppo di *Matepraticamente* degli ultimi anni: quello di instaurare una maggiore collaborazione con gli insegnanti, per far sì che il progetto abbia ricadute anche sulla didattica curricolare. In quest'ottica il maggiore utilizzo delle TIC ha consentito di estendere il percorso anche al di fuori delle ore di workshop. La piattaforma Orient@mente ha permesso di creare una *repository* contenente tutti i materiali utilizzati durante gli incontri in presenza ed eventuali approfondimenti a disposizione di studenti e docenti anche dopo il laboratorio. In questo modo i primi hanno potuto proseguire le esplorazioni intraprese nel progetto attraverso le *matepraticchallenge*, una serie di compiti autentici proposti sotto forma di sfida che riprendono le tematiche affrontate nei workshop. Tali attività sono state declinate all'interno di situazioni reali o come *task* propri dell'area professionale (scrittura di articoli, raccolta di materiale fotografico, analisi di dati, elaborazione di presentazioni...). Per gli insegnanti, invece, la condivisione dei materiali utilizzati ha permesso di dare continuità al progetto e di fornire un archivio di attività cui attingere all'interno della propria progettazione didattica. Il maggiore ricorso al digitale ha inoltre permesso di ampliare i laboratori proposti negli anni precedenti, ricorrendo a software e app facilmente accessibili (Mathigon, foglio di calcolo, Genially...) che hanno consentito una trattazione più approfondita e diversificata sui concetti proposti.

La riflessione sulla valenza educativa dell'errore quale mezzo attraverso cui perseguire un determinato obiettivo ha caratterizzato entrambi i percorsi, seppur in due diverse declinazioni. Per gli studenti della scuola secondaria di primo grado il riconoscimento di un errore ha richiesto un'analisi critica del proprio processo di costruzione dell'artefatto, finalizzata all'autocorrezione dello stesso. Il confronto con il modello di riferimento, alla ricerca di analogie e differenze, ha favorito una riflessione spontanea e autonoma sulle diverse proprietà delle figure geometriche. In questo caso l'errore ha contribuito al processo di acquisizione delle conoscenze e competenze. Nel percorso della secondaria di secondo grado, invece, l'individuazione e correzione di un errore commesso da terzi è stato il risultato dell'applicazione di conoscenze e competenze matematiche già possedute. Ciò ha permesso agli studenti di esercitare il pensiero critico e di sviluppare il proprio senso di autoefficacia. In entrambi i casi il binomio errore-correzione è stato parte integrante del processo cognitivo e costruttivo del sapere, contribuendo a scardinare la concezione negativa che spesso esso ha all'interno della pratica didattica e a realizzare l'idea di una matematica alla portata di tutti, obiettivo che guida il progetto da ormai 10 anni.

BIBLIOGRAFIA

- Bruner J. (1956). *A Study of Thinking*. John Wiley and Sons; New York, NY, USA.
- Bruner, J. S. (2002). *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola*. Feltrinelli Editore.
- Cairo, A. (2020). *Come i grafici mentono. Capire meglio le informazioni visive*. Raffaello Cortina Editore.
- Enriques F. (1936). *Il significato della storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- European Commission, Joint Research Centre, Carretero, S., Vuorikari, R., Punie, Y. (2017). *DigComp 2.1 : the digital competence framework for citizens with eight proficiency levels and examples of use*, Publications Office. <https://data.europa.eu/doi/10.2760/38842>
- Popper K. (1972). *Objective Knowledge an Evolutionary Approach*. Oxford: Clarendon Press.
- 2018/C 189/01. Raccomandazione del Consiglio, del 22 maggio 2018, relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (Testo rilevante ai fini del SEE.). (2018). *Gazzetta ufficiale*, C 189, 1–13. CELEX: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32018H0604(01))
- Tallone, C., Minisola, R., Olivero, F., and Raspitzu, M. (2017). Matepraticamente: una palestra per la mente. In L. Giacardi, M. Mosca, and C. Sabena (A cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017* (p. 265–284). L'artistica Editrice.
- Tallone, C., Alocco, I., Cavallera, L., Durando, C., Isoardi, G., Olivero, F., Raspitzu, M., & Zamboni, F. (2022). Matepraticamente 2.0: laboratorio a distanza, da esigenza temporanea a risorsa innovativa. In R. Bonino et al., *Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza*. Torino, 11-12-13 ottobre 2021 - online (pp. 457–464). Collane@unito.it, <https://www.collane.unito.it/oa/items/show/105>.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire*. Springer Science & Business Media.
- Zan, R. (2017). Il ruolo cruciale del pensiero narrativo nella comprensione dei problemi. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula* (2), 46–57. [10.33683/ddm.17.2.3](https://doi.org/10.33683/ddm.17.2.3).

SITOGRAFIA

- Spreafico M. L. (2022). *Ritorno all'alveare: un'attività origami per il back to school*. <https://blog.matematica.deascuola.it/articoli/attivita-didattica-matematica-origami-alveare>
- © Genially (2015): <https://genial.ly/it/>
- Matepraticamente (2018). Pagina Instagram @matepraticamente <https://www.instagram.com/matepraticamente/>
- © Mathigon (2018): <https://it.mathigon.org/>
- Università degli Studi di Torino (n.d.). *Orient@mente*. <https://orientamento.unito.it>
- Douieb K. (2019). *Try to impeach this? Challenge accepted!* <http://try-to-impeach-this.jetpack.ai>

GEOMETRIA ANALITICA 3D CON LA SCATOLA DA SCARPE

V. Andriano – A. Doveri – G. Marchi – L. Polito – P. Porta

Liceo Scientifico Galileo Ferraris - Torino

valeria.andriano@liceogalfer.it

Abstract

Si presenta un'attività laboratoriale di introduzione alla geometria analitica nello spazio sperimentata in classi quarte e quinte del liceo scientifico. L'attività è stata progettata attraverso quattro cicli di lesson study. Nel laboratorio si parte dalla manipolazione di un oggetto concreto, realizzato con materiale povero facilmente reperibile, per arrivare a introdurre l'equazione del piano nello spazio. Nella presentazione, dopo aver brevemente analizzato le scelte didattiche che hanno portato alla realizzazione dell'artefatto, si illustra l'attività proposta agli studenti. Si conclude con una riflessione su come utilizzare l'artefatto proposto in una attività a gruppi seguita da una discussione a classe intera.

Parole-chiave

Lesson study – Geometria analitica nello spazio – Mediazione semiotica - Discussione matematica

INTRODUZIONE

L'attività proposta si inserisce in un progetto di lesson study che prosegue da cinque anni nell'istituto. In questo anno il gruppo ha scelto come argomento la geometria analitica nello spazio e ha deciso di introdurre l'argomento attraverso un artefatto realizzato con materiale povero, una scatola da scarpe. Il quadro teorico di riferimento scelto è quindi quello della mediazione semiotica. Attraverso l'attività di lesson study si è progettato l'artefatto in modalità collaborativa, si è analizzato il suo potenziale semiotico e si sono concordate le attività da proporre agli studenti. La lezione è stata proposta e osservata in quattro classi diverse, apportando dopo ogni osservazione alcune modifiche prima di riproporla. In questa fase sono emersi i segni utilizzati dagli studenti e le loro difficoltà. Questa osservazione ha dato ai docenti gli strumenti per gestire in modo consapevole la discussione per costruire il sapere matematico obiettivo della lezione, ossia il concetto di equazione del piano.

IL LESSON STUDY

Il lesson study è una modalità di formazione in servizio tradizionalmente molto diffusa in alcuni paesi orientali, quali Giappone, Cina, Singapore. Attualmente tale modalità sta suscitando grande interesse nel mondo della ricerca in didattica e si sta diffondendo in altri paesi come Stati Uniti, Gran Bretagna, Germania, Norvegia, Olanda, Portogallo. In Italia inizialmente le esperienze hanno coinvolto la scuola primaria (Ramploud, Munarini 2015, Bartolini Bussi, Ramploud 2018). Recentemente la proposta si è allargata alla scuola secondaria (Andriano 2023, Capone 2023). Per un sommario analitico degli articoli di ricerca apparsi ultimamente sul lesson study si veda Huang-Shimizu (2016), che mostra anche che il lesson study assume caratteristiche diverse a seconda dei paesi in cui viene introdotto. L'idea generale è la seguente: un gruppo di docenti progetta una lezione. Uno dei docenti tiene la lezione nella sua classe mentre gli altri docenti osservano. Infine, i docenti si riuniscono e discutono quali miglioramenti si possono apportare alla lezione. Questo ciclo può essere ripetuto diverse volte. Quindi si distinguono tre

fasi: progettazione, implementazione/osservazione, discussione. La prima fase di progettazione viene fatta dal gruppo che scrive un Lesson Plan, ossia un documento sul quale si riportano le varie fasi della lezione, i tempi, i lavori proposti agli studenti e le modalità (in gruppo, individuale), gli esercizi, ecc. La fase di implementazione/osservazione prevede che un docente del gruppo svolga la lezione nella sua classe mentre gli altri docenti osservano. È importante che i docenti si accordino preventivamente sull'oggetto dell'osservazione. Nella discussione successiva, i docenti confrontano le osservazioni effettuate durante la lezione e propongono modifiche e miglioramenti da apportare. Normalmente la discussione avviene immediatamente dopo la lezione. Si prevede che il ciclo venga ripetuto almeno una volta, cioè che un altro docente ripeta la lezione modificata nella sua classe, con l'osservazione degli altri insegnanti e ci si ritrovi per discutere il risultato delle modifiche.

QUADRO TEORICO

La Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008) è un quadro teorico che descrive il processo attraverso il quale gli studenti si appropriano di un concetto matematico attraverso l'uso di uno strumento specifico. Tale teoria affonda le sue radici nella prospettiva di Vigoskij, che vede l'evoluzione della cognizione umana come il risultato dell'interazione sociale e culturale. Secondo Vigoskij, nella zona di sviluppo prossimale lo sviluppo cognitivo è legato al processo di interiorizzazione, che è la ricostruzione interna di un'operazione che è stata esterna, nel senso di sociale, prima di diventare interna, nel senso di un'operazione mentale. Per la sua natura sociale, un processo esterno ha una dimensione comunicativa che implica la produzione e l'interpretazione di segni (linguaggio, schemi, disegni, gesti, ...). Quindi l'uso di segni nella risoluzione di un compito ha due funzioni cognitive distinte: da un lato si producono segni per risolvere il compito, dall'altro si usano e producono segni per comunicare.

Quando un insegnante progetta un intervento didattico che utilizza un artefatto per mediare un contenuto matematico, l'artefatto diventa uno strumento di mediazione semiotica. Secondo la TMS, la mediazione semiotica dell'artefatto può essere descritta secondo lo schema seguente:

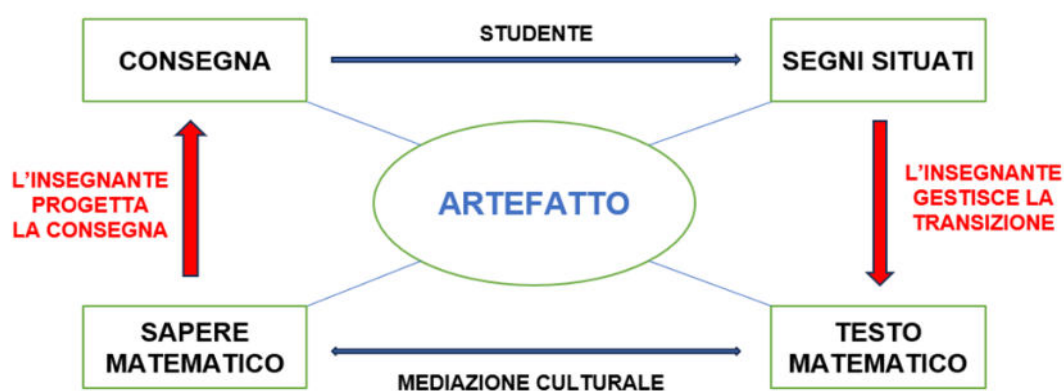


Figura 1. Teoria della Mediazione Semiotica

Il sapere matematico, il contenuto, che l'insegnante vuole veicolare si esprime culturalmente in un testo matematico, riconoscibile come matematica da un esperto. L'insegnante, per veicolare tale sapere, progetta una consegna per la cui risoluzione gli studenti devono utilizzare l'artefatto (a sinistra nello schema). Gli studenti per risolvere la consegna producono segni (linguaggio, gesti, schemi, parole, ...),

che chiamiamo segni situati. All'insegnante, in una discussione a classe intera, spetta il compito di gestire la transizione che porta dai segni situati al testo matematico. Per farlo il docente usa i segni situati, che sono legati ad una conoscenza radicata nell'uso dell'artefatto. I segni situati possono essere di diverso tipo: segni artefatto, che nascono dall'attività svolta sull'artefatto quindi legati all'azione sull'artefatto, segni matematici, legati al significato matematico condiviso nella classe, segni pivot, caratterizzati da una polisemia, quindi legati ad entrambi i domini. Tali segni pivot possono quindi rappresentare un perno per favorire il passaggio dall'artefatto al contesto matematico.

L'attività è inserita in un ciclo didattico suddiviso in tre fasi che possono ripetersi ciclicamente: 1) attività sull'artefatto, 2) produzione individuale o a piccoli gruppi, 3) discussione collettiva.

La progettazione di un intervento didattico che prevede l'utilizzo di un artefatto deve essere preceduta dall'analisi del *potenziale semiotico dell'artefatto*, ossia della relazione tra i significati personali che emergono dall'utilizzo dell'artefatto e i significati matematici riconoscibili come matematica da un esperto (Mariotti, Maffia 2018).

CONTESTO

La lezione è stata progettata per un liceo scientifico, da un gruppo formato da cinque docenti seguendo la metodologia lesson study, ed è stata proposta a quattro classi quarte e a una classe quinta. L'obiettivo scelto era l'introduzione dello spazio cartesiano, di punti e vettori in tale spazio e di ricavare l'equazione del piano a partire da un suo punto e dal vettore normale. L'argomento è previsto nell'ultimo anno dalle Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico: "L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere" (2010). Nelle lezioni precedenti all'ora di attività in tutte le classi coinvolte sono stati ripassati i vettori nel piano cartesiano, il prodotto scalare e le condizioni di perpendicolarità tra vettori nel piano.

PROGETTAZIONE

La lezione si compone di tre momenti distinti:

- a) Introduzione;
- b) Attività 1, guidata da una scheda (Attività 1);
- c) Attività 2, guidata da una scheda (Attività 2).

In ogni fase gli studenti lavorano in piccoli gruppi, ogni gruppo ha dovuto costruire un modello di spazio cartesiano tridimensionale (Figura 2) a partire da una scatola da scarpe che potrà sfruttare per manipolare e riuscire a far propri i concetti matematici che vogliono essere introdotti. Tra un momento e l'altro il docente, attraverso una breve discussione di classe, cercherà di controllare quanto fatto dai gruppi e formalizzare il contenuto matematico.

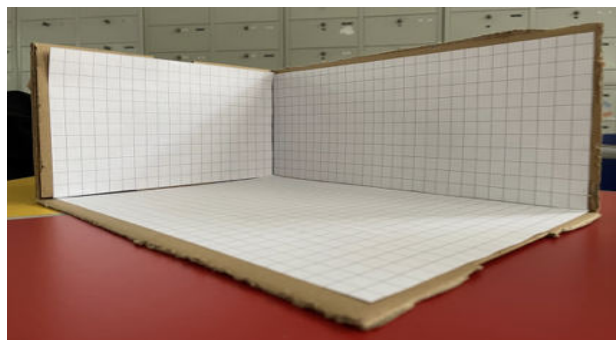


Figura 2. Modello di spazio cartesiano: scatola da scarpe su cui sono stati incollati fogli a quadretti da 10mm

Il primo obiettivo della lezione è prendere confidenza con l'artefatto e nominare i tre assi cartesiani. Viene chiesto agli studenti in quanti modi differenti è possibile nominare i tre assi a meno di rotazioni

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia della scatola e si arriva a dire che i modi possibili sono due e per convenzione verrà scelto quello antiorario.

Il secondo obiettivo è introdurre punti e vettori nello spazio cartesiano fino ad arrivare a determinare la lunghezza di un segmento. Ad ogni gruppo viene consegnata una scheda di lavoro (Figura 3) e viene richiesto di disegnare e visualizzare punti sulla scatola, di determinare le componenti di vettori e di ricavare la distanza tra due punti.

Data: _____ Componenti del gruppo: _____

ATTIVITÀ # 1

- I. Disegnate i punti A(4;5;0), B(0;5;6) e C(4;0;6)
- II. Trovate le distanze di A, B e C dall'origine O degli assi cartesiani.
 $OA =$ _____
 $OB =$ _____
 $OC =$ _____
- III. Determinate le componenti dei vettori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$
 $\overrightarrow{OA} (\_ ; \_ ; \_)$
 $\overrightarrow{OB} (\_ ; \_ ; \_)$
 $\overrightarrow{OC} (\_ ; \_ ; \_)$
- IV. Visualizzate il punto D(4;5;6)
- V. Trovate la distanza di D dalla origine e il vettore $\overrightarrow{OD}$
 $OD =$ _____
 $\overrightarrow{OD} (\_ ; \_ ; \_)$
 Quale ragionamento avete seguito per arrivare a determinare la distanza? _____

- VI. Estendete il punto precedente ad un generico punto P(x;y;z)
 $OP =$ _____
- VII. Visualizzate i punti P(5;3;4) e Q(4;1;7), trovate la lunghezza del segmento PQ, e i vettori $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$
 $PQ =$ _____
 $\overrightarrow{PQ} (\_ ; \_ ; \_) \quad \overrightarrow{QP} (\_ ; \_ ; \_)$
 Provate a ricavare una formula generica per determinare la distanza tra 2 punti nello spazio

Figura 3. Scheda di lavoro Attività 1

Ci si aspetta che il poter visualizzare concretamente i punti dovrebbe aiutare i ragazzi a generalizzare il teorema di Pitagora nel caso tridimensionale e arrivare ad una formula per determinare la lunghezza di un segmento qualsiasi.

Per la terza fase della lezione viene distribuita ai gruppi la seconda scheda (Figura 4).

La scheda di lavoro è stata strutturata per far arrivare gli studenti a comprendere che l'unico vettore che identifica univocamente un piano nello spazio è quello perpendicolare al piano stesso e che due piani sono paralleli solo se hanno come vettore normale due vettori tra loro paralleli. Infine, la scheda cerca di guidare i gruppi nel ricavare l'equazione di un piano a partire dal vettore normale e da un suo punto sfruttando il prodotto scalare tra due vettori per imporre la condizione di perpendicolarità.

ATTIVITÀ #2

- i. Una retta nel piano è definita a partire da un punto e da una direzione. Un piano nello spazio è definito da un punto e? Prendete un cartoncino, muovetelo cambiando angolazione e orientamento nello spazio. C'è un vettore, nello spazio, che definisce in modo univoco l' "orientamento" del piano rappresentato dal cartoncino? Questo vettore è contenuto nel piano? E' unico? (motivate la risposta)

- ii. Prendete ora la scatola e consideriamo un piano passante per l'origine. Prendete un cartoncino e fissatelo alla scatola (esternamente allo spigolo) con uno stecco in modo che passi per l'origine degli assi. Quale vettore potrebbe definire l' "orientamento" del piano?

- iii. Questo vi permette di definire una CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA PIANI:
Due piani sono paralleli se _____

- iv. Vogliamo ora trovare l'equazione del piano come luogo di punti (ossia l'equazione soddisfatta da tutti i punti del piano). Prendete il cartoncino e segnate il punto $O(0;0;0)$ e un punto qualunque $P(x;y;z)$. Tracciate il vettore $\overrightarrow{OP}$. Se l' "orientamento" del piano è definito dal vettore $\vec{n}(a, b, c)$, che caratteristica ha il vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\vec{n}$? Quale operazione tra vettori esprime questa condizione?

Quindi l'EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE PER L'ORIGINE è: _____ :

- v. Se il piano non passa per l'origine, passa per il punto $Q(1; 2; 3)$ ed è parallelo al piano precedente, qual è la sua equazione?

- vi. Qual è l'equazione di un generico piano passante per $P_0(x_0; y_0; z_0)$ che ha "orientamento" definito dal vettore $\vec{n}(a, b, c)$?

Figura 4. Scheda di lavoro Attività 2

Per il terzo e ultimo momento della lezione, ritenuto più complicato, vengono aggiunti due materiali di supporto: ad ogni gruppo vengono forniti stecconi da spiedino per avere un modello concreto per i vettori (Figura 5) e cartoncini colorati che modellizzano i piani (Figura 6).



Figura 5. Modello di vettore: steccone da spiedino

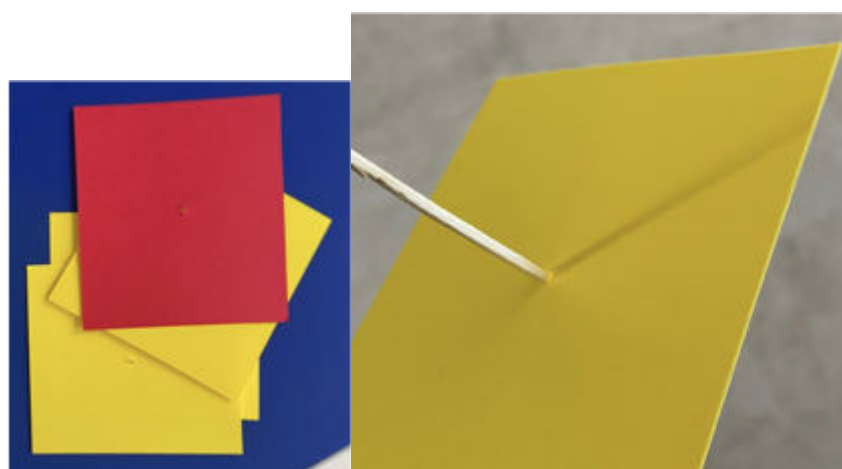


Figura 6. Modello di piano: cartoncino colorato ritagliato

ANALISI ESPERIENZA

Nella fase introduttiva della lezione si richiede di nominare gli assi cartesiani nella scatola. Si prevedeva che gli studenti avessero difficoltà a capire che le possibilità sono solo due, e in effetti nell'osservazione diversi gruppi sono partiti dall'idea che fossero tutte le possibili permutazioni di tre elementi: x , y , z , quindi $3!$. Il lavoro sulla scatola ha aiutato a visualizzare il fatto che le permutazioni sono a 3 a 3 equivalenti.

La prima attività sull'artefatto è da svolgere a gruppi ed è guidata dalla scheda 1. L'attività permette un'esplorazione dell'artefatto partendo da punti e vettori che possono essere disegnati sulle pareti della scatola. Dopo la prima sperimentazione, si è osservato che gli studenti avevano difficoltà a visualizzare i punti nello spazio non appartenenti ai piani coordinati. Gli studenti utilizzavano le dita o si servivano di oggetti vari. Nella discussione dopo l'osservazione della prima lezione si è deciso di modificare l'artefatto aggiungendo degli stecconi di legno (spiedini) da infilare nello spigolo della scatola, in maniera da vedere concretamente il vettore. Questa aggiunta ha permesso di visualizzare nello spazio il punto (un estremo dello steccone), o il vettore, e di visualizzare le sue proiezioni sui piani, aiutando gli studenti in una delle difficoltà previste che era proiettare correttamente.

La seconda attività ha come obiettivo la costruzione dell'equazione del piano. La difficoltà prevista era quella di comprendere il ruolo che gioca il vettore perpendicolare al piano. Per aiutare gli studenti nella visualizzazione, durante la discussione dopo la prima lezione si è deciso di modificare l'artefatto

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia aggiungendo dei cartoncini, che rappresentano i piani. I cartoncini vengono infilati nello steccone sul vertice della scatola, all'esterno della scatola. In questo modo gli studenti possono visualizzare un piano passante per l'origine perpendicolare a un vettore, oppure due piani paralleli.

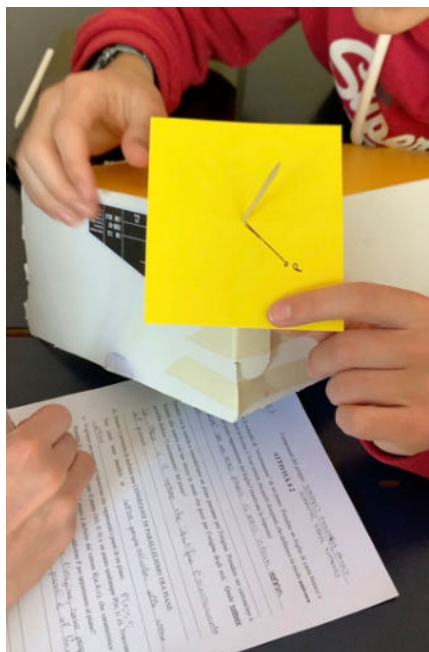


Figura 7. Segni artefatto e segni matematici

Svolgendo l'attività proposta gli studenti hanno prodotto segni di diverso tipo. *Segni artefatto* come: gesti, scritte o disegni sulla scatola o sui cartoncini, come punti o vettori. *Segni matematici* come: scritte sulla scheda, indicanti diversi gradi di formalizzazione (Figura 7). Tra questi segni, uno è stato utilizzato da molti gruppi: girare lo steccone con il cartoncino infilato, per esprimere il fatto che il vettore OP disegnato sul cartoncino è sempre perpendicolare allo steccone. Questo segno contiene due elementi chiave: la perpendicolarità legata allo steccone infilato nel cartoncino, e il fatto che il punto P può essere preso casualmente sul piano, quindi l'idea di luogo geometrico, che si esprime col gesto di girare lo steccone. Quindi questo segno riassume tutto il significato dell'attività, ed è stato utilizzato dai docenti come *segno pivot* durante la discussione.

Nella seconda attività è emersa anche un'altra difficoltà: gli studenti, grazie al lavoro sull'artefatto, non hanno avuto difficoltà a comprendere che la condizione da imporre era quella di perpendicolarità tra il vettore OP e il vettore normale, ma è emersa la difficoltà nell'esprimere la condizione di perpendicolarità attraverso il prodotto scalare. Nelle due riunioni che hanno seguito la seconda e la terza osservazione si è modificata la scheda per suggerire l'utilizzo del prodotto scalare. Una possibile spiegazione di questa difficoltà (che si è riscontrata in tutte le classi) è che gli studenti utilizzano il prodotto scalare prevalentemente in fisica, in cui è un'operazione che definisce una grandezza fisica. Per questa ragione forse hanno difficoltà a pensarlo come una relazione tra enti matematici.

CONCLUSIONI

L'attività che abbiamo presentato si basa sull'uso di un artefatto realizzabile in modo semplice con materiale povero. Dalla sperimentazione che abbiamo condotto in quattro classi possiamo concludere

DI.FI.MA. 2023: Insegnamento e apprendimento della Matematica e della Fisica nel periodo post pandemia che l'uso dell'artefatto attraverso le attività pratiche progettate favorisce la costruzione dei concetti di distanza tra punti e di equazione del piano.

Infine, ci sembra importante una riflessione riguardante la metodologia lesson study che abbiamo adottato. In questo lavoro il lesson study è stato utile in varie fasi: nella fase di progettazione, perché il lavoro collaborativo ha permesso la progettazione dell'artefatto e l'analisi del suo potenziale semiotico. L'abitudine, attraverso la compilazione del lesson plan, di prevedere esplicitamente le difficoltà degli studenti ha permesso una progettazione attenta delle attività da svolgere. Infine, la fase di osservazione ci ha permesso di focalizzare la nostra attenzione sui segni prodotti dagli studenti durante le attività. Questo fornisce al docente la consapevolezza necessaria per gestire, durante la discussione, l'evoluzione dei significati: da significati radicati nell'uso dell'artefatto a significati coerenti col sapere matematico.

BIBLIOGRAFIA

- Andriano, V., (2023), Un ponte tra due mondi: un'esperienza di Lesson Study al liceo scientifico. In C. Manolino, & R. Minisola (Eds.), *Atti del Convegno "La Formazione dei Docenti di Matematica tra continuità e innovazione: Il Lesson Study"*. (pp. 27-35). Collane@unito.it
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, second revised edition (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bartolini Bussi M. G., Ramploud A., (2018), *Il Lesson Study per la formazione degli insegnanti*, Roma, Carocci
- Capone, R., Adesso, M.G., Manolino, C. *et al.* (2023), Culturally crafted Lesson Study to improve teachers' professional development in mathematics: a case study in Italian secondary school. *J Math Teacher Educ* (2023). <https://doi.org/10.1007/s10857-023-09578-3>
- Huang, R., & Shimizu, Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: An international perspective. *ZDM Mathematics Education*, 48(4), 393–409. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0795-7>
- Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (4), 50-64. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3>
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali". http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
- Ramploud A., Munarini Frenesi R., (2015), Il Lesson Study [guanmo ke]: trasposizione culturale di una metodologia di formazione, *Scuola Italiana Moderna*, 10, 54-61

PARABOLOGRAFI E GEOGEBRA PER COSTRUIRE COMPETENZE NEL LABORATORIO MATEMATICO

Federica Troilo - Maria Lucia Bernardi - Roberto Capone - Eleonora Faggiano

Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Bari Aldo Moro

federica.troilo@uniba.it - marialucia.bernardi@uniba.it - roberto.capone@uniba.it -

eleonora.faggiano@uniba.it

Abstract

Diversi studi hanno provato l'efficacia delle macchine matematiche e dell'uso sinergico di strumenti manipolativi e digitali nei processi di insegnamento-apprendimento in matematica. Partendo da queste ipotesi è stata condotta una ricerca con l'obiettivo di approfondire l'indagine relativa alla sinergia di strumenti di diverso tipo in situazioni laboratoriali, focalizzando l'attenzione sullo sviluppo delle competenze matematiche di studenti di una scuola secondaria di II grado. Nello specifico è stata progettata e sperimentata una sequenza di attività laboratoriali riguardante la costruzione significativa del concetto di parabola, avvenuta tramite l'utilizzo del software di geometria dinamica GeoGebra e delle macchine matematiche, in particolare il parabolografo a filo e il parabolografo di Cavalieri. Durante il workshop gli insegnanti hanno potuto sperimentare in prima persona alcune delle attività oggetto della ricerca, avendo la possibilità di valutarne l'efficacia, con l'intento di sperimentarla nelle loro classi.

Parole-chiave

Competenze matematiche, KOM, Parabolografo, Geogebra.

INTRODUZIONE

La ricerca condotta dagli autori ha avuto inizio dall'idea di utilizzare strumenti in situazioni di didattica-laboratoriale. Con l'obiettivo di voler studiare se e come si sviluppano competenze matematiche, si è deciso di voler utilizzare strumenti di tipo diverso (digitali e manipolativi) e sfruttare la sinergia tra di essi (Bartolini Bussi e Maschietto, 2006; Maschietto & Martignone, 2009; Faggiano e Montone, 2019). Per perseguire tale obiettivo di ricerca è stata predisposta la sperimentazione di una sequenza didattica con uno scopo specifico: guidare gli studenti verso una maggiore consapevolezza del concetto matematico di parabola, evidenziando le diverse rappresentazioni ad essa associate.

Se in fase di progettazione delle attività laboratoriali, la scelta dello strumento digitale da utilizzare è immediatamente caduta verso il noto e diffuso software GeoGebra, per quanto riguarda la possibilità di sfruttare la sinergia con altri strumenti non digitali, si è scelto di esplorare le potenzialità offerte dalle macchine matematiche, in particolare il parabolografo a filo e il parabolografo di Cavalieri.

Volendo dare una definizione delle macchine matematiche, secondo una caratterizzazione di Marcello Pergola (1992), progettista e costruttore della cospicua collezione di macchine collocata presso il Dipartimento di Matematica di Modena e Reggio Emilia, si ha: *“Una macchina matematica (in un contesto geometrico) ha come scopo fondamentale (indipendentemente dall'uso che poi si farà della macchina) risolvere questo problema: obbligare un punto, o un segmento, o una figura qualsiasi (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge astrattamente, matematicamente determinata.”* (Bartolini Bussi e Maschietto, 2006, p. XI).

Le macchine matematiche costituiscono un ottimo supporto didattico per l'insegnante, in quanto il loro utilizzo in classe può contribuire allo sviluppo del processo di apprendimento della matematica da parte degli studenti. L'introduzione di questi strumenti potrebbe essere un'opportunità che offre alla classe una esperienza tattile e visiva diretta e un modo innovativo di far matematica, operando anche in piccoli

gruppi, leggendo fonti storiche, costruendo relazioni sull'attività svolta. L'uso di macchine matematiche offre la possibilità di esplorare e sperimentare concetti matematici, procedure e relazioni, in modo concreto. D'altra parte, i software, come quelli di geometria dinamica, calcolo simbolico e grafica tridimensionale, ma anche le moderne tecnologie per la realtà virtuale e la realtà aumentata, offrono strumenti per creare e interagire con rappresentazioni visive e interattive. Tutto ciò permette agli studenti di esplorare grafici, di manipolare oggetti virtuali e di sperimentare variazioni dei parametri in tempo reale. Questo favorisce una comprensione più approfondita delle relazioni matematiche e delle proprietà dei concetti studiati.

Il quadro teorico scelto per studiare i processi di acquisizione delle competenze in attività caratterizzate dalla sinergia tra le macchine matematiche e il software di geometria dinamica GeoGebra è il noto quadro KOM delle competenze di Niss e Hojgaard (2019). Nel nostro lavoro di ricerca intendiamo comprendere se e come l'uso combinato di questi strumenti, possa non solo offrire agli studenti un'esperienza di apprendimento più completa, ma anche favorire lo sviluppo delle loro competenze matematiche, come descritte nel KOM.

Durante il workshop gli insegnanti hanno potuto sperimentare in prima persona alcune delle attività oggetto della ricerca, avendo la possibilità di valutarne l'efficacia, con l'intento di sperimentarla nelle loro classi.

RIFERIMENTI TEORICI

Per la progettazione della sperimentazione e per raggiungere gli obiettivi prefissati, la scelta è ricaduta sul quadro teorico del KOM (Competencies and the Learning of Mathematics), la cui prima versione risale al 2002 e si deve a Niss e Jensen, mentre l'ultima versione è stata pubblicata nel 2019 da Niss e Hojgaard. L'applicazione del quadro KOM nella progettazione permetterà di esplorare e comprendere il tipo di competenze matematiche che gli studenti mettono in atto durante la risoluzione di una situazione problematica con uso di strumenti. Dal momento che si intende studiare lo sviluppo di competenze matematiche in situazioni laboratoriali che prevedano l'uso sinergico di strumenti di varia natura, prima di introdurre il quadro KOM è opportuno delineare le caratteristiche di ambienti di apprendimento in cui si fa uso di strumenti.

L'uso degli strumenti nella didattica della matematica

L'uso degli strumenti nella didattica della matematica riveste un ruolo cruciale nell'agevolare l'apprendimento e la comprensione di questa disciplina spesso considerata inaccessibile. Tuttavia, attraverso l'impiego di una vasta gamma di strumenti, è possibile rendere l'apprendimento della matematica più accessibile, coinvolgente ed efficace, in analogia con quanto evidenziato nella Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Uno dei principali obiettivi nell'insegnamento della matematica è trasmettere agli studenti una solida comprensione dei concetti matematici e la capacità di applicarli in contesti reali. Per raggiungere questo scopo, gli insegnanti sfruttano diversi strumenti educativi che vanno oltre i tradizionali libri di testo. Gli insegnanti possono utilizzare gli strumenti per rispondere alle esigenze specifiche degli studenti e rendere la matematica più concreta e applicabile alla vita di tutti i giorni. Inoltre, favoriscono l'acquisizione di competenze matematiche che promuovono la capacità degli studenti di risolvere problemi in modo creativo e critico.

Gli strumenti possono fornire l'opportunità di esplorare la matematica in profondità e sviluppare una comprensione intensa che dura nel tempo e di migliorare la capacità degli studenti nel comunicare in modo chiaro ed efficace i loro processi di pensiero matematico.

Nello specifico, in questo lavoro l'uso delle macchine matematiche manipolabili consente agli studenti di avere un'esperienza tattile e visiva diretta, offrendo un modo concreto per esplorare i concetti matematici e per sperimentare direttamente le relazioni tra variabili, curve e oggetti geometrici. In secondo luogo, i software di geometria dinamica offrono agli studenti un modo per esplorare grafici, per manipolare oggetti virtuali e per sperimentare variazioni dei parametri in tempo reale.

Il quadro KOM e le otto competenze matematiche

Il quadro KOM (Competencies and the Learning of Mathematics) nasce nell'ambito di un progetto danese che si pone come obiettivo quello di capire cosa significhi padroneggiare la matematica e metterla in pratica in modo competente e consapevole, in altre parole cosa significhi possedere una competenza matematica.

L'obiettivo principale non è quello di capire cosa significhi conoscere la matematica, ma piuttosto come metterla in pratica in modo competente e consapevole. Possedere la competenza matematica, significa avere la capacità di capire, giudicare, fare e usare la matematica in una varietà di contesti e situazioni matematiche ma anche extra-matematiche, in cui essa gioca un ruolo fondamentale. La caratterizzazione di competenza matematica deve essere di natura generale e non deve dipendere da un particolare contenuto matematico e non deve riferirsi ad uno specifico livello d'istruzione. La competenza matematica implica una serie di abilità e conoscenze che consentono ad una persona di comprendere, applicare e comunicare concetti matematici in modo efficace.

Nello specifico il quadro KOM individua otto competenze matematiche, basate sulla seguente caratterizzazione: *“Una competenza matematica è la disponibilità intuitiva di una persona ad agire in modo appropriato in risposta ad uno specifico tipo di sfida matematica relativa ad una determinata situazione.”* (Niss & Hojgaard, 2019, p. 14, traduz. degli autori).

Le prime quattro tentano di chiarire cosa significhi porre domande di matematica e rispondere attraverso essa, mentre le ultime quattro riguardano la capacità di affrontare e gestire il linguaggio, i costrutti e gli strumenti della matematica:

- Competenza di pensiero matematico;
- Competenza nella gestione dei problemi matematici;
- Competenza di modellizzazione matematica;
- Competenza di ragionamento matematico;
- Competenza nell'uso di rappresentazioni matematiche;
- Competenza nell'uso dei simboli e formalismi matematici;
- Competenza nella comunicazione matematica;
- Competenza nell'uso di ausili e strumenti matematici.

Ci sono quattro osservazioni importanti da fare su queste otto competenze. In primo luogo, le competenze sono di natura cognitiva, vale a dire che non sono coinvolte componenti affettive o volitive. In secondo luogo, ogni competenza nasce con una dualità intrinseca tra una sfaccettatura ricettiva e una costruttiva. L'aspetto ricettivo ha a che fare con la capacità di un individuo di relazionarsi e orientarsi rispetto a considerazioni e processi esistenti. L'aspetto costruttivo si concentra sulla capacità dell'individuo di attivare autonomamente la competenza e di utilizzarla in modo costruttivo per affrontare determinati contesti e situazioni. In terzo luogo, è fondamentale l'idea che tutte le competenze si sovrappongono reciprocamente, pur essendo chiaramente distinte l'una dall'altra. Questa relazione tra le competenze è rappresentata da un fiore con otto petali, il cosiddetto *fiore delle competenze* (Fig. 1).

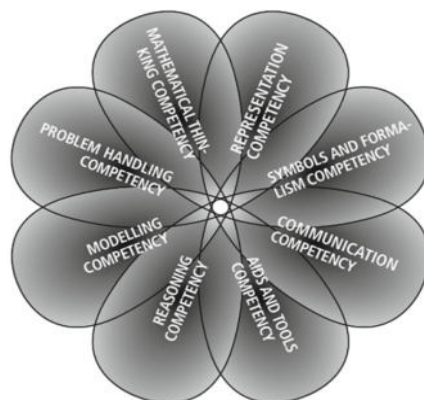


Figura 6. Rappresentazione delle competenze matematiche (Niss & Hojgaard, 2019, p.19)

Infine, le definizioni e le descrizioni delle competenze non riguardano particolari contenuti matematici o aree tematiche, neanche specifici livelli d'istruzione. Tuttavia, si manifestano in modo molto diverso a diversi livelli e in diversi paesi, come accade nel caso della padronanza di una lingua.

IL LABORATORIO SULLA PARABOLA

In questa sezione, si analizzeranno nello specifico gli strumenti selezionati per la sperimentazione e il loro impatto sul processo di apprendimento degli studenti. Successivamente, saranno esaminate le fasi chiave della sperimentazione ed infine, si presenteranno i risultati ottenuti, offrendo un'analisi del loro significato e delle implicazioni per la pratica didattica.

Gli strumenti in gioco

Le macchine matematiche che sono state scelte per la realizzazione del laboratorio sono il parabolografo a filo e il parabolografo di Cavalieri. Queste macchine offrono un approccio tangibile e preciso per costruire una parabola, consentendo un esame pratico e interessante delle proprietà geometriche di questa conica.

Il *parabolografo a filo* (Fig. 2) è costituito da una squadra con due aste perpendicolari a e b , dove il lato a può scorrere su una guida rettilinea d . Vi sono due perni, F e A , fissati rispettivamente sul piano e sull'asta b . Un filo di lunghezza $l=AH$ è vincolato nei suoi estremi ai punti A e F . Facendo scorrere a lungo d e contemporaneamente con la punta di una matita mantenendo il filo teso e accostato all'asta b , si disegna un arco di parabola avente fuoco in F e direttrice coincidente con d . Questo accade perché $PF=l-AP=AH-AP=PH$. Nella figura riportata di seguito, il sistema è raddoppiato per poter consentire la costruzione di due archi simmetrici di parabola.

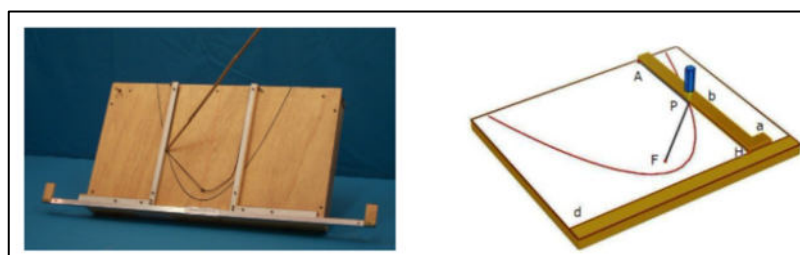


Figura 7. Il parabolografo a filo

Il *parabolografo di Cavalieri* (Fig. 3) è composto da una base in legno con una scanalatura rettilinea AB lungo la quale scorre un segmento CK (materializzato in legno o metallo) di lunghezza k prestabilita. Al suo estremo C è vincolata rigidamente, in direzione perpendicolare a CK , una asta CV , giacente sul piano. Quando l'angolo retto KCV si muove, trascina con sé un altro angolo retto AVK (materializzato anch'esso in legno o metallo), che ha i lati VA e VK costretti a passare, rispettivamente, per i punti A e K . Durante il movimento, in ogni istante AVK è un triangolo rettangolo (variabile) di cui VC rappresenta l'altezza relativa all'ipotenusa AK . Possiamo applicare ad esso il teorema di Euclide: ricavando $VC \cdot VC = CK \cdot CA = K \cdot CA$ proprietà caratteristica della parabola. Ponendo $CA=x$ e $VC=y$, si può scrivere: $y^2=k \cdot x$. Abbiamo ottenuto così l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x .

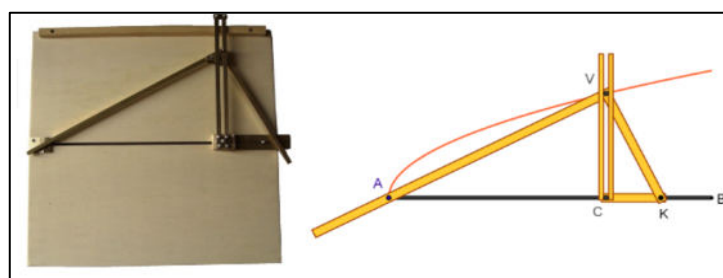


Figura 8. Il parabolografo di Cavalieri

L'ultimo strumento utilizzato è il software di geometria dinamica Geogebra, progettato per aiutare gli utenti a esplorare concetti matematici in modo dinamico e visuale. Offre una vasta gamma di strumenti che consentono di creare figure geometriche, grafici di funzioni, tabelle di dati e molto altro ancora. Geogebra è uno strumento potente che favorisce l'apprendimento attivo e l'esplorazione matematica attraverso la visualizzazione e l'interattività. Nello specifico, nella sperimentazione è stato utilizzato per costruire la parabola ed esplorarne le proprietà. Per disegnare la parabola non esiste un unico modo "corretto", ma ci sono diverse costruzioni ugualmente valide, che sfruttano e mettono in evidenza differenti proprietà della curva. Qui di seguito si riporta un esempio di costruzione che è quello che è stato adottato dalla maggioranza degli studenti.

Si fissi sul piano un punto F , che rappresenterà il fuoco, e una retta d , che sarà invece la direttrice della parabola. Sulla retta d si sceglie un punto A e si traccia, con lo strumento apposito, la retta s perpendicolare alla retta d passante per A . Successivamente si considera il segmento AF e si individua il punto P di intersezione della retta s con l'asse del segmento AF , trovato con lo strumento "asse di simmetria" offerto dal software stesso. Infine, attivando lo strumento "traccia" del punto P e muovendo il punto A lungo la direttrice, il punto P avrà disegnato una parabola.

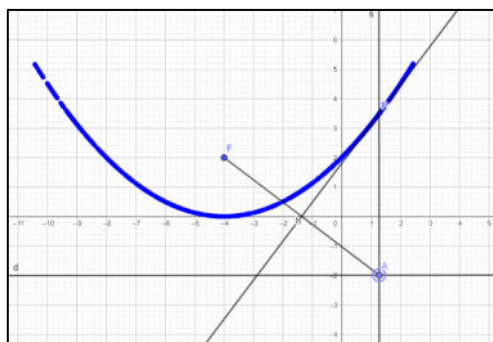


Figura 9. La costruzione della parabola con GeoGebra

La sequenza didattica

Al fine di raggiungere gli obiettivi descritti nell'introduzione, è stata sviluppata una sequenza didattica composta da tre attività. Nella sperimentazione effettuata, la sequenza è stata sviluppata nell'arco di due incontri di due ore più uno finale di un'ora. Durante il primo incontro sono state svolte le prime due attività. Nel secondo incontro, sono stati dedicati 30 minuti alla discussione collettiva sulle attività precedenti, seguiti poi dall'ultima attività. Mentre nel terzo incontro si è svolta una discussione collettiva finale con l'intera classe.

Nella fase iniziale della prima attività si richiede agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, di esplorare il parabolografo a filo e di rispondere alle domande poste nella scheda di lavoro a loro fornita (vedi Fig. 5). L'obiettivo di questa fase è quello di stimolare la curiosità degli studenti nei confronti della macchina, incoraggiandoli a esplorare lo strumento senza preconcetti, a fare ipotesi e formulare domande per comprenderne meglio il contesto e le potenzialità. Per l'esecuzione di questa attività sono previsti 20 minuti.

Nella seconda fase dell'attività, agli studenti viene assegnato un compito preciso: utilizzare il parabolografo per tracciare una parabola. In seguito, si richiede agli studenti di descrivere il procedimento che hanno eseguito, le sfide e difficoltà incontrate, e le osservazioni che hanno potuto dedurre da questa esperienza. L'obiettivo è quello di attivare e far emergere le conoscenze pregresse degli studenti riguardo al concetto di parabola e sfruttarle al fine di utilizzare il parabolografo in modo efficace e disegnare la curva con maggiore comprensione. Inoltre, questa attività permette agli studenti di sviluppare competenze pratiche nell'utilizzo del parabolografo, promuovendo la comprensione concettuale della parabola e delle sue caratteristiche. Attraverso il processo di disegno e la successiva riflessione sulle metodologie impiegate, le difficoltà incontrate e le osservazioni fatte, ci si aspetta negli studenti un miglioramento delle loro capacità di problem-solving, di analisi critica e di comunicazione. Per questa fase dell'attività sono previsti 60 minuti.

Prima attività	
1° FASE 1. Descrivi, nel dettaglio, il <u>parabolografo</u> che ti è stato consegnato, analizzando gli elementi importanti osservati. 2. Descrivi, a parole tue, in che modo, attraverso l'uso del <u>parabolografo</u> potresti apprendere la matematica. 3. Conosci la storia del <u>parabolografo</u>? Dove è nato? Quando è nato? Per cosa era utilizzato? (Proviamo a rispondere a queste domande cercando sul web) 	2° FASE <u>Utilizzando il parabolografo disegna la parabola.</u> 1. Descrivi il procedimento adottato. 2. Quali difficoltà hai incontrato? 3. Cosa hai potuto osservare nell'utilizzo del <u>parabolografo</u>?

Figura 10. Scheda di lavoro sul parabolografo

Il primo incontro si conclude con una seconda attività della durata prevista di 40 minuti, nella quale si utilizza il software GeoGebra con lo scopo di tracciare la curva attraverso lo strumento specifico “Parabola” che il software stesso offre. In questo processo, gli studenti avranno l’opportunità di visualizzare gli elementi caratteristici della parabola. Successivamente si richiede di spostare la direttrice e il fuoco, e di scrivere le osservazioni notate sulle variazioni della curva, offrendo una comprensione più profonda del comportamento della parabola in relazione alle sue componenti fondamentali. L’obiettivo è quello di far emergere, rafforzare e approfondire la comprensione della definizione, delle proprietà fondamentali della parabola e delle relazioni tra i diversi elementi che la compongono, attraverso l’interazione diretta con GeoGebra. Utilizzando questo software e manipolando la direttrice e il fuoco, gli studenti hanno l’opportunità di esplorare in modo interattivo come queste modifiche influenzano la forma e la posizione della curva, e di comprendere caratteristiche e interazioni tra parametri coinvolti.

Questa attività può essere vista come complementare alla precedente, poiché mentre nella prima gli studenti utilizzano le conoscenze pregresse per disegnare la parabola con il parabolografo, nella seconda partono dal disegno fornito dal software e attraverso il processo di manipolazione possono esplorare e verificare le proprietà intrinseche della curva. In questo modo, gli studenti possono sviluppare una comprensione più approfondita e concreta delle caratteristiche della parabola, unendo l’aspetto teorico alla sperimentazione pratica.

Il secondo incontro si sviluppa partendo con una discussione collettiva (di 30 minuti), al fine di consolidare l’apprendimento e promuovere la consapevolezza degli studenti sul percorso che hanno intrapreso. L’obiettivo di questa discussione è di riflettere sull’esperienza precedente, evidenziare la complementarità delle attività e consentire agli studenti di prendere consapevolezza delle loro conoscenze. Questa riflessione collettiva intende favorire una visione più chiara del percorso di apprendimento e aiutare a comprendere in che modo le attività si sono integrate per arricchire la loro comprensione dell’oggetto trattato. In generale, questo tipo di attività è pensata per raccogliere feedback dagli studenti, identificando quali abilità specifiche sono state esercitate, quali connessioni sono state fatte tra le diverse attività e come i concetti matematici sono stati applicati nella pratica. Con questa discussione ci si aspetta di mettere in luce le competenze matematiche che si sono sviluppate durante l’intero processo, valutando l’efficacia dell’approccio didattico e individuando eventuali aree in cui gli studenti possono avere bisogno di ulteriore supporto o chiarimenti.

I restanti 90 minuti dell’incontro saranno dedicati all’esecuzione della terza e ultima attività. Questo compito implica l’esclusivo utilizzo di GeoGebra: si richiede agli studenti di impiegare il software per tracciare la curva senza ricorrere allo strumento “Parabola”, ma piuttosto facendo uso della definizione e delle proprietà. Si richiede agli studenti di descrivere e giustificare per iscritto la validità del procedimento adottato. L’obiettivo primario consiste nell’applicare le conoscenze pregresse degli studenti in merito alla parabola, al fine di abilitarli a tracciare la curva utilizzando tali conoscenze in modo efficace. L’implementazione di questa attività vuol consentire agli studenti di mettere in luce ed

applicare le competenze e le conoscenze acquisite sulle proprietà della parabola durante le attività precedenti.

Il terzo e ultimo incontro sarà incentrato su una discussione collettiva in merito alla terza attività sulla costruzione della parabola utilizzando GeoGebra. Inizialmente, si esamineranno e saranno discussi vari approcci utilizzati per la costruzione della parabola. Successivamente, saranno presentati alla classe altri metodi alternativi per realizzare la stessa costruzione, attraverso l'uso del parabolografo di Cavalieri. L'intento di questa fase è quello di evidenziare come differenti metodologie di costruzione, basate anche su differenti proprietà della parabola, possano condurre alla medesima rappresentazione grafica della curva. Durante la discussione, si vuol verificare se gli studenti non solo sono in grado di interpretare la parabola attraverso il suo aspetto analitico, ma hanno anche sviluppato una comprensione più ampia e profonda delle sue proprietà sintetiche e geometriche. Ovvero si intende verificare non soltanto se vedono la parabola come un'entità matematica definita da un'equazione di secondo grado, ma se la comprendono in termini di relazioni geometriche intrinseche. Nella prospettiva analitica, ci si aspetta che gli studenti riconoscano la parabola come una curva generata da un'equazione quadratica, ma la discussione ha l'obiettivo di permettere loro di considerare anche il suo aspetto sintetico e geometrico, percependo la parabola come un insieme di punti che soddisfano specifiche condizioni geometriche. Come nella discussione del secondo incontro al termine delle prime due attività, questa ultima parte della sequenza didattica vuol fornire l'opportunità di mettere in evidenza le competenze matematiche sviluppate durante l'intero processo, valutando l'efficacia dell'approccio didattico e individuando possibili ambiti in cui gli studenti potrebbero necessitare di ulteriore sostegno o spiegazioni. Nel complesso, con questo processo riflessivo guidato si vuol valutare il livello di apprendimento raggiunto dagli studenti e adattare l'insegnamento, di conseguenza allo scopo di massimizzare il loro coinvolgimento e la loro comprensione. In definitiva, dalla discussione ci si attende che gli studenti non solo comprendano la parabola in modo più completo, ma abbiano rafforzato la loro capacità di applicare le conoscenze matematiche acquisite e consolidate in modi diversi e interconnessi. Ciò li preparerebbe meglio ad affrontare sfide matematiche più avanzate e a sfruttare appieno le proprietà dei concetti matematici nel contesto della geometria analitica.

I risultati della sperimentazione

La sequenza didattica è stata progettata in modo da coinvolgere attivamente gli studenti in attività che richiedono l'applicazione pratica di diverse competenze matematiche. Questo approccio attivo ha favorito un apprendimento significativo, consentendo agli studenti di acquisire una comprensione più profonda dei concetti matematici e di consolidare abilità matematiche essenziali.

Analizzando i protocolli e le registrazioni fatte in classe è emerso come attraverso l'esplorazione, la discussione e la risoluzione di problemi legati alla parabola, gli studenti hanno avuto l'opportunità di sviluppare una vasta gamma di competenze matematiche, inclusi il ragionamento, l'uso di simboli e formalismi matematici, la gestione dei problemi, la comunicazione matematica e la capacità di lavorare con diverse rappresentazioni matematiche. In definitiva, questa sequenza didattica è stata efficace nel promuovere un apprendimento matematico completo e approfondito, consentendo agli studenti di manipolare concretamente la parabola e di avere un'interazione virtuale con le rappresentazioni della curva.

CONCLUSIONI

Dai risultati della sperimentazione è emerso come l'integrazione di macchine matematiche e di strumenti digitali ha offerto un'esperienza di apprendimento più completa del concetto di parabola. Infatti, dall'analisi finale emerge chiaramente come le attività svolte che coinvolgono strumenti manipolativi e digitali hanno avuto un impatto significativo sulla comprensione degli studenti riguardo al concetto di parabola. Questo approccio ha contribuito a fornire una conoscenza più completa e consapevole del concetto stesso, favorendo lo sviluppo di competenze matematiche più forti.

Visti i validi risultati ottenuti dalla sperimentazione si è ritenuto interessante proporre agli insegnanti un workshop che potesse rappresentare un'utile proposta didattica da riportare nelle loro classi,

permettendo loro di sperimentare in prima persona l'efficacia delle attività proposte. A causa del poco tempo a disposizione, sono state selezionate e riadattate solo alcune delle attività della sequenza didattica (la prima e la terza attività) che hanno visto gli insegnanti protagonisti. Dopo le attività laboratoriali, sono stati raccolti i pareri, le perplessità, i consigli e le riflessioni degli insegnanti, seguiti da una discussione collettiva nella fase finale del workshop. Durante questa discussione, basata sull'esperienza laboratoriale degli insegnanti e su considerazioni fornite dagli autori basate sull'esperienza in classe, sono emersi aspetti chiave e potenzialità del laboratorio, descritti in precedenza. Inoltre, è stato sottolineato l'importante ruolo del docente in attività di questo tipo. Il docente deve fare scelte accurate sugli strumenti da utilizzare e riflettere sulle loro potenzialità, nonché selezionare compiti adeguati in base agli obiettivi prefissati e agli strumenti scelti. In conclusione, gli insegnanti hanno valutato positivamente la sequenza didattica proposta, riconoscendola come un approccio altamente efficace per arricchire l'educazione matematica degli studenti, promuovendo una comprensione completa e consapevole dei concetti e lo sviluppo di competenze.

RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro è stato parzialmente prodotto con il supporto di una borsa di studio finanziata dal DM MUR n. 118 del 02.03.2023, a valere nell'ambito del PNRR, M4C1 - Investimento 4.1 "Estensione del numero di dottorati di ricerca e dottorati innovativi per la pubblica amministrazione e il patrimonio culturale", ciclo XXXIX (dottoranda M.L. Bernardi), Codice CUP: H91I23000500007.

BIBLIOGRAFIA

- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32, 269–294.
- Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer.
- Faggiano, E., Montone, A., & Mariotti, M. A. (2018). Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(8), 1165–1180. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1449908>
- Faggiano, E., & Montone, A. (2019). Artefatti digitali e artefatti manipolativi in sinergia: il ruolo di GeoGebra. In Bonino R., Marocchi D., Rinaudo M. Serio M. (A cura di) *Atti del VIII Convegno Nazionale DI.FI.MA 2017* (pp. 46–58). Graphot Editrice
- Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2022). *Mathematical Competencies in the Digital Era*. Springer.
- Maschietto, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2011). Mathematical machines: from history to mathematics classroom. In Zaslavsky, O., Sullivan, P. (Eds.) *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (pp. 227–245). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09812-8_14
- Maschietto, M., & Martignone, F. (2009). Attività con le Macchine Matematiche. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 32, 295–315.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, 115–124.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>

MODELLIZZARE IL COVID

Alessio Drivet
GeoGebra Institute di Torino
alessio.drivet@tin.it

Abstract

La proposta di workshop mira ad analizzare i dati della pandemia COVID-19 sfruttando le potenzialità di GeoGebra ed Excel. Dal confronto tra diversi modelli di regressione possono emergere diversi spunti didattici.

Parole-chiave

Covid, Modelli matematici, GeoGebra, Excel.

INTRODUZIONE

Con pandemia di COVID-19 si fa riferimento alla diffusione della malattia infettiva COVID-19, iniziata in Italia il 30 gennaio 2020 e terminata ufficialmente il 5 maggio 2023 a seguito della dichiarazione dell'Organizzazione mondiale della sanità.

I dati disponibili partono dal 24 febbraio del 2020, seppur si sia appurato che il virus era già in circolazione da più di tre mesi, e sono ulteriormente aggiornati e disponibili su <https://github.com/pcm-dpc/COVID-19/blob/master/dati-andamento-nazionale/dpc-covid19-ita-andamento-nazionale.csv>

È difficile stabilire quante ondate ci siano state e con quale durata, le varie fonti divergono su questo punto. Uno dei problemi maggiori è che non ci sono certezze sul numero esatto di persone contagiate e quelle guarite. L'unico dato "sufficientemente" attendibile, almeno nei paesi in grado di tenere una seria contabilità, è quello dei decessi. L'avverbio sufficientemente dovrebbe comunque essere preso in considerazione con una certa prudenza. Se si esamina l'andamento delle terapie intensive si colgono quattro picchi, se si prendono come riferimento i dati di mortalità sembrerebbe esserci cinque ondate più altre "ondine".

Un aspetto interessante è che i dati sono numerosi, facilmente reperibili. Una occasione imperdibile per esplorare alcuni modelli matematici. Essi permettono di fare proiezioni ed esplorare scenari futuri. Il limite è che i modelli compartimentali più significativi tipo SIR (Susceptible-Infectious-Recovered), SEIR (Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered) o SEIRD (Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered-Dead) sono basati su sistemi di equazioni differenziali [1][2] che spesso non trovano riscontro in diversi programmi scolastici.

Il workshop è una occasione per esplorare diversi modelli di regressione [3] che si possono mostrare a studenti delle superiori con una conoscenza, anche non particolarmente approfondita, del concetto di funzione. In un crescendo di complessità è possibile far cenno alle funzioni disponibili distinguendo tra tre grandi famiglie: polinomiali, logistiche, poli-logistiche [4][5][6].

Tralasciando gli aspetti previsionali ma concentrandoci solo su ciò che è avvenuto ci si può domandare: la tragica esperienza Covid può servire come esempio per verificare quale modello si è rivelato più "vicino" all'andamento dei decessi?

Per rendere facilmente accessibile e riproducibile l'analisi si possono mettere a confronto GeoGebra con un semplice foglio di calcolo come Excel. Entrambi possono visualizzare graficamente i dati e determinare alcune semplici regressioni.

Con GeoGebra possiamo esaminare la funzione lineare, quella polinomiale e la logistica. Quest'ultima curva è particolarmente interessante in quanto il picco dell'epidemia corrisponde al punto di flesso. Per poter individuare quando sia iniziata un'inversione di tendenza nella diffusione della pandemia (quindi lavorando sui dati non cumulati) possiamo sfruttare lo studio della derivata.

Per una analisi più approfondita Excel si dimostra superiore grazie alla possibilità di sfruttare il Risolutore, Fondamentale è, in particolare, il ruolo svolto dal Risolutore nell'applicazione degli algoritmi di ottimizzazione [7][8][9]; date le caratteristiche del problema soprattutto il GRG non lineare (Nonlinear Generalized Reduced Gradient). In questo caso si possono apprezzare anche Gompertz, PL4 (four parameters logistic) o modelli meno noti come quelli di Perez e di Vazquez-Ziff. Per non complicare troppo lo studio si farà riferimento solo alla prima ondata.

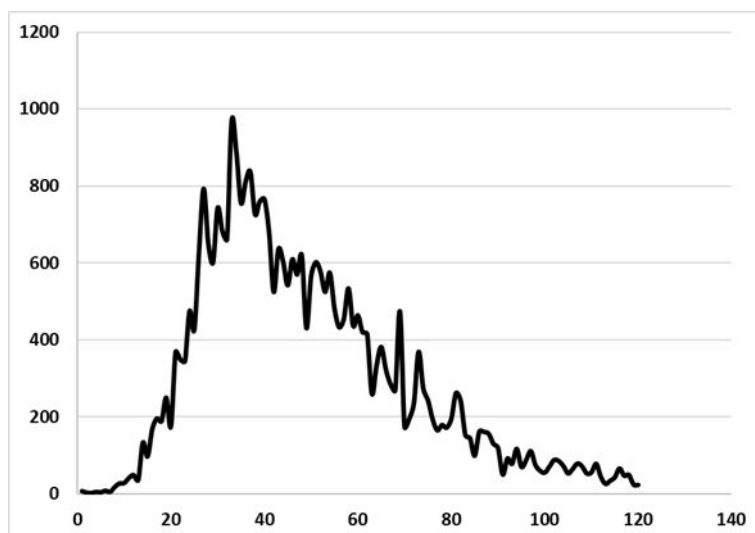


Figura 1. Decessi prima ondata

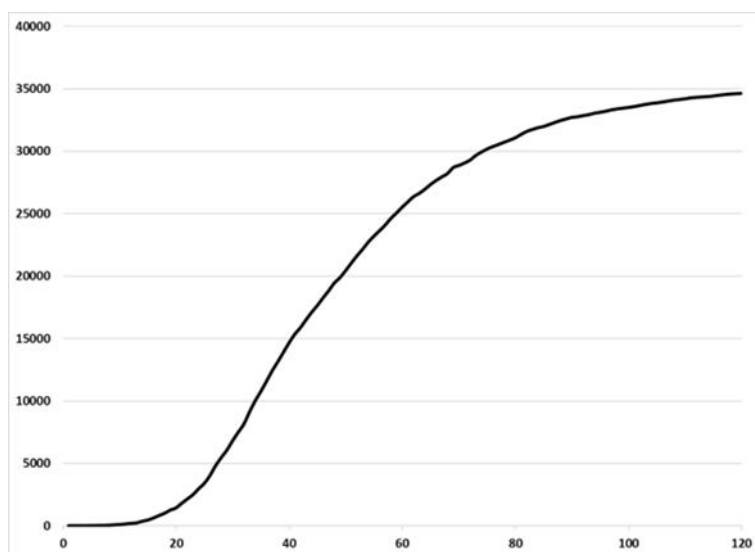


Figura 2. Decessi cumulati prima ondata

IL LABORATORIO

Il punto di partenza è la serie storica dei primi 120 giorni, questi dati sono stati messi a disposizione dei partecipanti al workshop grazie al file Excel *dati.xlsx*.

Il primo passo è stato quello di utilizzare GeoGebra.

Per mettere tutti sullo stesso piano una slide riportava i passi necessari:

GeoGebra

- Aprire Foglio di calcolo
- Incollare i valori tratti da dati.xlsx
- Selezionare i valori
- Crea Spezzata aperta (mouse dx)
- Adattare la scala degli assi (Shift + mouse sx)
- Selezionare i valori
- Utilizzare Analisi di regressione bivariata
- Scegliere tra le varie opzioni: lineare, polinomio 2°, logica

Figura 3. Come utilizzare GeoGebra per l'analisi dei dati.

In questo modo si raggiungono i risultati mostrati in una slide successiva:

Risultati

- $y = 359,05 x - 1009,11$
- $y = -2,73 x^2 + 689,32 x - 7724,73$
- $y = 33509,53 / (1 + 52,202 e^{-0,087 x})$

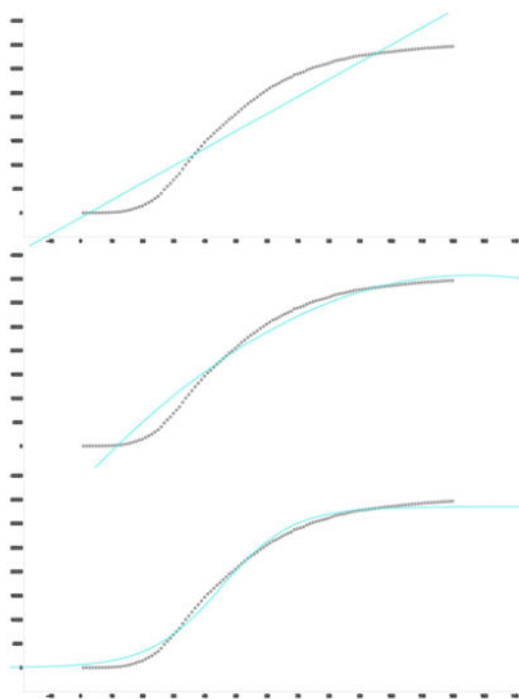


Figura 4. I risultati con GeoGebra.

Dopo aver discusso sia le procedure che i risultati il focus si è spostato sull'utilizzo del foglio di calcolo.

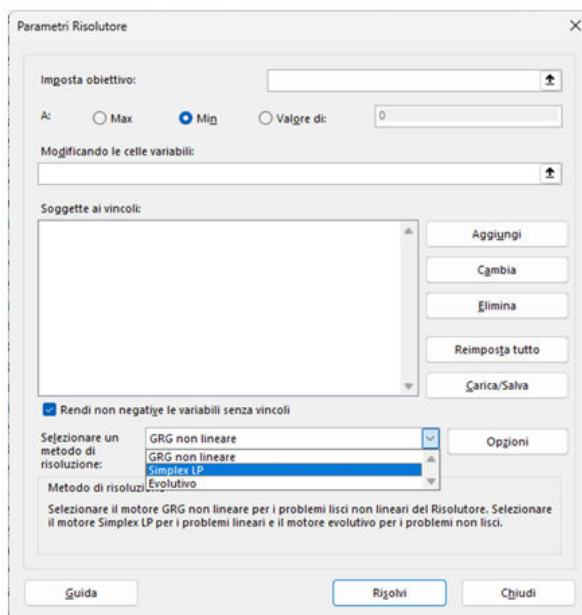
Anche in questo caso due slides indicavano la procedura da seguire per i modelli di Gompertz e di PL4 e un'altra i risultati.

Excel

- Aprire Foglio dati.xlsx e aggiungere due colonne per stime e $(d-s)^2$
- Per Gompertz: $y_t = Ke^{-ce^{-rt}}$ impostare valori iniziali di K, c, r
- Per PL4: $k + \frac{a-k}{1+(\frac{t}{c})^b}$ impostare valori iniziali k, a, c, b
- Utilizzando la formula desiderata completare la colonna delle stime
- Riportare in colonna i quadrati degli scarti
- Porre Somma automatica al fondo dei quadrati degli scarti
- Inserire grafico a dispersione dei dati e delle stime
- Dal menu Dati aprire il Risolutore per determinare i parametri

Figura 5. Come utilizzare Excel per l'analisi dei dati.

Il Risolutore



- Impostare funzione obiettivo come minimo della Somma dei quadrati degli scarti
- Modificando le celle con i parametri
- Selezionare come metodo di risoluzione GRG non lineare
- Premere Risolvi

Figura 6. Come usare il risolutore

Risultati

- Gompertz

- $y = 34775e^{-7e^{-0,05t}}$

- PL4

- $y = 35662 + \frac{450-35662}{1+(\frac{t}{46})^{3,5}}$

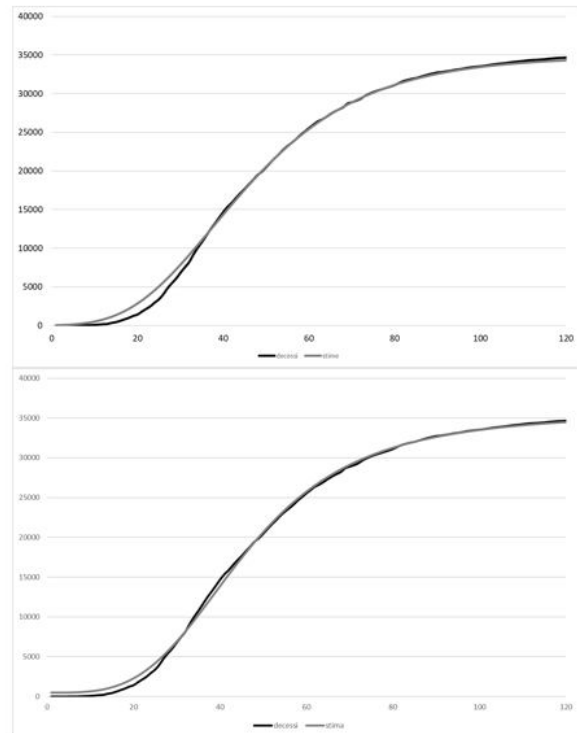


Figura 7. I risultati con Excel

BIBLIOGRAFIA

- [1] Keeling, M. J., & Rohani, P. (2011). Stochastic dynamics. In *Modeling infectious diseases in humans and animals* (pp. 190-231). Princeton University Press.
- [2] Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Feng, Z. (2019). *Mathematical models in epidemiology* (Vol. 32). New York: Springer.
- [3] Harrell, F.E. (2015). Aspetti generali del fitting dei modelli di regressione. *Strategie di modellazione della regressione*. Springer.
- [4] Hosmer Jr, D. W., Lemeshow, S., & Sturdivant, R. X. (2013). *Applied logistic regression* (Vol. 398). John Wiley & Sons.
- [5] Khan, M. A., Khan, R., Algarni, F., Kumar, I., Choudhary, A., & Srivastava, A. (2022). Performance evaluation of regression models for COVID-19: A statistical and predictive perspective. *Ain Shams Engineering Journal*, 13(2), 101574.
- [6] Villalobos-Arias, M. (2020). Using generalized logistics regression to forecast population infected by Covid-19. *arXiv preprint arXiv:2004.02406*.
- [7] MacDonald, Z. (1995). Teaching Linear Programming using Microsoft Excel Solver. *Computers in Higher Education Economics Review(CHEER)*, 9(3).
- [8] Lasdon, L. S., Fox, R. L., & Ratner, M. W. (1974). Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, 8(V3), 73-103
- [9] Tettamanzi, A. G. (2005). Algoritmi evolutivi: concetti ed applicazioni. *Mondo Digitale*, 2005(1), 3-17.

Indice analitico degli autori

A

Adesso · 51
Adrovic · 383
Aebischer · 367
Alluto · 261
Alocco · 390
Amoroso · 188
Andriano · 398
Armano · 311
Ascrizzi · 375

B

Bagossi · 345
Baldi · 244; 252
Bellò · 350
Bernardi · 406
Bernareggi · 311
Bologna · 193
Bonino · 304
Borgognone · 201
Borso · 59
Boscolo · 114; 132
Bosia · 161
Branchetti · 338
Brunetto · 311

C

Caffaratti · 269
Camperi · 183
Cane · 209
Capone · 51; 406
Carrino · 139; 390
Caselle · 23
Casi · 65; 353
Cavallera · 139; 390
Cedrino · 350
Centomo · 148
Cerasaro · 88
Cerello · 183
Cerrato · 167; 375
Ciaschini · 259
Cirio · 183
Corni · 9
Cucchi Osano · 277

D

Davico · 292
De Giorgi · 65
Deut · 183
Di Giorno · 383
Doveri · 398
Dragone · 321; 359
Drivet · 414
Ducci · 311
Durando · 390

E

Eugeni · 300

F

Faggiano · 406
Ferrara · 79
Ferrari · 79
Ferrero · 183
Ferretti · 345
Ferro · 183
Fiore · 51
Fiorina · 183
Fuchs · 9
Funghi · 311

G

Galante · 269
Galeno Mellucci · 269
Gasperin · 350
Gazzera · 174
Gentile · 231
Giorda · 154
Giordanengo · 183
Giraudi · 277
Giudici · 209
Grosso · 300

I

Isoardi · 390

J

Jahier · 123

L

La Mura · 193
La Paglia · 390
Lacarbonara · 216
Leone · 154; 188
Longo · 193
Lorenzo · 79

M

Manassero · 383
Manolino · 311
Marchi · 398
Marino · 265; 269
Marocchi · 188; 201; 216; 223
Marocco · 231
Medina · 183
Monaco · 277
Monformoso · 375
Montalvan Olivares · 183
Moro · 59
Morselli · 114; 132; 338
Mostardi · 183

N

Nardacchione · 244

O

Onorato · 34
Oss · 34

P

Pace · 223
Palma · 321
Pancanti · 128
Paschetta · 286
Pecchio · 265

Pennazio · 183

Pera · 73

Piccione · 238; 252; 269; 304

Piccoli · 193

Piroi · 311; 353

Polito · 398

Pollani · 338

Porta · 398

Pusceddu · 350

Q

Quartara · 114; 132

R

Rinaudo · 154; 183; 188; 201; 216

Robotti · 114; 132

Rosi · 34

S

Sabena · 65; 353

Sacchi · 183

Santi · 9

Scalambro · 96

Serio · 154; 188; 201; 216; 223

Soldano · 345; 353

Staffieri · 350

Strano · 26

T

Tallone · 139; 390

Taranto · 39; 345

Tomassi · 330

Tonon · 154

Torre · 105; 292

Tossini · 359

Troilo · 406

V

Vallero · 183

Vignati · 183

Viterbo · 231

Z

Zamblera · 277

Zamboni · 390