CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO
Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

CORRADO SEGRE

LEZIONI INEDITE DI DUE CORSI UNIVERSITARI

Università degli Studi di Torino

CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

5

Corrado Segre nel 1889 (AccSciTo)

Centro Studi di Storia dell'Università di Torino

Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

5

Corrado Segre

Lezioni inedite di due corsi universitari

A cura di:
Alberto Conte, Livia Giacardi, Maria Anna Raspanti

Università degli Studi di Torino

CENTRO STUDI DI STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

Lezioni e Inediti di 'Maestri' dell'Ateneo Torinese

ISBN: 978-88-909997-8-9

Questo volume è stato sottoposto a referaggio da parte di due esperti selezionati,
sulla base delle loro competenze, nell'ambito di un Comitato di Referee.
Il Centro Studi di Storia dell'Università di Torino è responsabile del processo.
Immagine sul frontespizio: *Corrado Segre nel 1889*

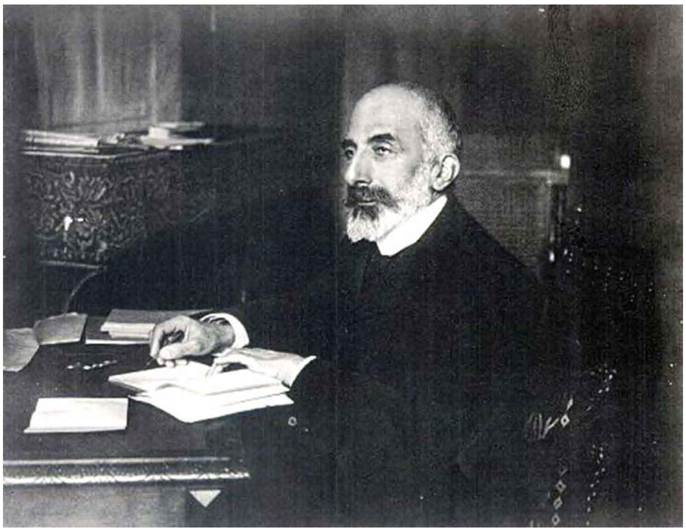
Indice

ABBREVIAZIONI E SIGLE

AccSciTo	Accademia delle Scienze, Torino
ANL-Castelnuovo	*Archivio Castelnuovo*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, accessibile sul sito curato da PAOLA GARIO: http://operedigitali.lincei.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/menu.htm
ASUT	Archivio storico dell'Università di Torino
BMP	Biblioteca Speciale di Matematica Giuseppe Peano, Università di Torino
BMP-Segre	*Fondo Segre*, Biblioteca Speciale di Matematica - Giuseppe Peano, Torino, accessibile sul sito curato da LIVIA GIACARDI: http://www.corradosegre.unito.it/
BUMPI	*Bollettino Ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione*
GU	*Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*
Opere	CORRADO SEGRE, *Opere*, Roma: Ed. Cremonese, 4 voll., 1957-1963.
UTo-ACS	*Archivio Corrado Segre*, Università di Torino. La maggior parte dei documenti è accessibile sul sito: http://users.mat.unimi.it/users/gario/Elenco-Segre.html

1. Corrado Segre studente
all'Università di Torino (UTo-ACS)

2. Corrado Segre nel 1899 (UTo-ACS)



3. Corrado Segre negli anni Venti (BMP-Segre)

Introduzione

Alberto Conte, Livia Giacardi, Maria Anna Raspanti

> «La mente del poeta - scrive Italo Calvino - e in qualche momento decisivo la mente dello scienziato funzionano secondo un procedimento d'associazioni d'immagini che è il sistema più veloce di collegare e scegliere fra le infinite forme del possibile e dell'impossibile. La fantasia è una specie di macchina elettronica che tiene conto di tutte le combinazioni possibili e sceglie quelle che rispondono a un fine, o che semplicemente sono le più interessanti, piacevoli, divertenti.»[1]

Iniziare con una frase di Calvino può sembrare una inutile ricerca dell'originalità. In realtà le parole del celebre scrittore illustrano uno degli aspetti peculiari del metodo di lavoro di Corrado Segre, maestro dell'Ateneo torinese e leader della Scuola italiana di geometria.

I due quaderni manoscritti che qui presentiamo, relativi rispettivamente alle lezioni universitarie di geometria superiore tenute da Segre nel 1890-1891 e al corso di matematica per la Scuola di Magistero dell'Università di Torino, sono emblematici sia di un modo particolare di fare ricerca, sia di una visione alta dell'insegnamento della matematica, in cui l'intuizione geometrica, l'analogia e la capacità di stabilire connessioni giocano un ruolo importante.

1. Cenni biografici su Corrado Segre[2]

Segre nacque a Saluzzo il 20 agosto 1863 da Abramo Segre ed Estella De Benedetti, compì gli studi secondari presso l'Istituto tecnico Sommeiller di Torino. Ottenuta la licenza non ancora sedicenne, nel 1879, contrariamente al parere del padre che lo voleva ingegnere, si iscrisse al corso di laurea in Matematica presso l'Ateneo torinese, dove si laureò nel 1883 con Enrico D'Ovidio. La dissertazione dal titolo *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad n dimensioni ed applicazioni alla geometria della retta e specialmente delle sue serie quadratiche*, fu pubblicata nello stesso anno

[1] Italo Calvino, *Lezioni americane. Sei proposte per il prossimo millennio*, Milano, Mondadori, 2018, p. 93.

[2] Questo paragrafo si deve a Livia Giacardi.

in due memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino[3] a proposito delle quali l'amico Guido Castelnuovo scriverà:

> «Chi legge anche oggi [...] i due lavori, strettamente collegati resta sorpreso della sicurezza e vastità di vedute e di mezzi con cui quel giovane, Corrado Segre, tratta l'ampio soggetto. La dissertazione sembra dovuta non già ad un principiante, ma ad un matematico provetto.»[4]

Vincitore di concorso, nel 1888 fu chiamato a ricoprire la cattedra di Geometria superiore presso l'Università di Torino, cattedra che reggerà per trentasei anni fino alla morte.[5] Oltre al suo corso istituzionale insegnò anche per diciotto anni alla Scuola di Magistero per la formazione degli insegnanti, annessa alla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, divenendone direttore nel 1916.

L'attività scientifica di Segre si esplicò in varie direzioni e in ciascuna di esse egli aprì nuove strade.[6]

I primi lavori riguardano soprattutto la geometria degli iperspazi. Prendendo le mosse dai recenti risultati algebrici di Karl Weierstrass e di Ferdinand G. Frobenius, Segre riuscì a dare una sistemazione geometrica e analitica alla geometria proiettiva iperspaziale portandola a quel grado di sviluppo necessario per fare di essa uno strumento per le ulteriori ricerche della Scuola italiana di geometria. In alcune brillanti memorie egli mostra anche l'utilità di ricorrere agli iperspazi per studiare proprietà dello spazio ordinario S_3. Esempio notevole è la memoria del 1884.[7] La considerazione che sta alla base di questo lavoro era stata fatta anche

---

[3]La tesi è pubblicata nelle due memorie: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, s. 2, 36, 1883, pp. 3-86 (anche in CORRADO SEGRE, *Opere*, Roma, Ed. Cremonese, 4 voll, 1957-1963, 3, pp. 25-126) e *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Ivi, pp. 87-157 (*Opere*, 3, pp. 127-217). Il manoscritto della tesi è custodito in BMP-Segre, Scritti. 1. Citando gli scritti di Segre si farà sempre riferimento anche alle *Opere*; si segnala che i quattro volumi della stesse sono accessibili in rete all'indirizzo http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre.

[4]GUIDO CASTELNUOVO, [*Commemorazione del socio C. Segre*], Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti, s. 5, 33.2, 1924, p. 353.

[5]Sulla carriera universitaria di Segre si veda ALBERTO CONTE, LIVIA GIACARDI, PAOLA NOVARIA, *Corrado Segre (1863-1924). A 150 anni dalla nascita, Catalogo delle Mostre documentarie, - Torino, Novembre 2013*, Torino, Kim Williams Books, 2013, pp. 19-65.

[6]Sull'opera scientifica di Segre la bibliografia è molto ampia, per cui ci limitiamo a segnalare il recente volume G. CASNATI, A. CONTE, L. GATTO, L. GIACARDI, M. MARCHISIO, A. VERRA (eds.), *From Classical to Modern Algebraic Geometry, Corrado Segre's Mastership and Legacy*, Birkhäuser, 2016, che contiene anche una completa bibliografia aggiornata. Si segnalano, per il carattere storico, i seguenti articoli: ALBERTO CONTE, LIVIA GIACARDI, *Segre's University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry*, pp. 3-91; ERIKA LUCIANO, C. SILVIA ROERO, *Corrado Segre and His Disciples: the Construction of an International Identity for the Italian School of Algebraic Geometry*, pp. 93-241; DAVID ROWE, *Segre, Klein, and the Theory of Quadratic Line Complexes*, pp. 243-263; ALDO BRIGAGLIA, *Segre and the Foundations of Geometry: from Complex Projective Geometry to Dual Numbers*, pp. 265-288; PAOLA GARIO, *Segre, Castelnuovo, Enriques: Missing Links*, pp. 289-323; LIVIA GIACARDI, *Corrado Segre: Biographical Timeline*, pp. 325-348; LIVIA GIACARDI, ERIKA LUCIANO, CHIARA PIZZARELLI, C. SILVIA ROERO, *Corrado Segre's Archives at the University of Turin*, pp. 717-730. Pubblicazioni meno recenti verranno citate quando necessario.

[7]CORRADO SEGRE *Étude des différentes surfaces du 4^e ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions*, Mathematische Annalen, 24, 1884, pp. 313-444 (*Opere* 3, pp. 339-484).

e indipendentemente da Veronese e costituisce il germe della nozione di *varietà normale*.

Per gli importanti risultati ottenuti e per il campo nuovissimo di ricerche cui aprivano la via, nel 1884 Segre ottenne il Premio delle Matematiche dell'Accademia dei XL. In essi spicca il tratto peculiare di tutta la sua opera, vale a dire il carattere "geometrico" e l'abile intreccio di procedimenti sintetici e di metodi analitici: «Per Veronese, per Segre, per Bertini [...] - scrive Francesco Severi - lo spazio lineare a n dimensioni per loro è come se realmente esistesse. Non ridotto cioè alle ombre di una banale finzione del linguaggio.»[8] Altro aspetto che colpisce è lo stile, lo stile geometrico italiano, con canoni di metodo e canoni estetici: modo geometrico di argomentare, eleganza e semplicità nella trattazione, valorizzazione dell'intuizione non disgiunta dall'esigenza di rigore.

A partire dal 1886 i lavori di Segre mostrano un ampliamento dell'orizzonte sotto l'influsso da un lato della nuova impostazione della scuola tedesca di Alexander Brill e Max Nöther e, dall'altro, delle idee esposte da Klein nel suo celebre *Programma di Erlangen*, la cui traduzione italiana fu pubblicata nel 1890, su indicazione di Segre, negli *Annali di matematica pura ed applicata*, a cura dell'allievo Gino Fano.[9] Nei suoi studi si verificò, pertanto, il progressivo distacco da una ristretta visione proiettiva per giungere allo studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. Nell'autunno del 1887, per interessamento di Segre, fu chiamato a Torino, come assistente di D'Ovidio, Guido Castelnuovo e fra i due giovani nacque una fruttuosa collaborazione scientifica destinata a durare anche dopo che nel 1891, vincitore di cattedra, Castelnuovo si trasferì a Roma. Il lavoro culminante e riassuntivo di questo periodo è l'importante memoria del 1894 *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*[10] in cui confluiscono anche le ricerche torinesi di Castelnuovo e che, come scrive Severi, segna «una pietra miliare nella marcia della geometria italiana»[11].
In una breve nota del 1891 Segre definì per la prima volta il prodotto di spazi lineari, ora detto *varietà di Segre*, concetto rilevante negli sviluppi della geometria del XX secolo, e in un lavoro pubblicato nel 1896 introdusse uno fra i più importanti invarianti topologici di una superficie algebrica, oggi noto come *Invariante di Zeuthen-Segre*.[12]

Consapevole dell'importanza di stabilire relazioni con il mondo scientifico europeo, nell'estate del 1891 Segre intraprese un viaggio in Germania allo scopo di visitare i principali istituti e biblioteche di un paese allora all'avanguardia nella ricerca matematica, e di prendere contatti diretti con coloro che avevano influenzato le sue ricerche. Visitò Göttingen, Frankfurt, Nürnberg, Leipzig e München ed ebbe modo di incontrare, fra gli altri, Leopold Kronecker, Weierstrass, Nöther, Theodor

[8]FRANCESCO SEVERI, *Prefazione*, in Corrado Segre, *Opere* 1, 1957, pp. V-XII, alle pp. VII-VIII.

[9]GINO FANO, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti* (traduzione), Annali di matematica pura ed applicata, s. 2, 17, 1890, pp. 307-343.

[10]CORRADO SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica pura ed applicata, s. 2, 22, 1894, pp. 41-142 (*Opere*, 1, pp. 198-304).

[11]SEVERI 1957, p. X.

[12]CORRADO SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 31, 1895-96, pp. 485-501 (*Opere* 1, pp. 312-326).

Reye, Rudolf Sturm, Moritz Cantor e anche Klein con cui aveva intrattenuto fino ad allora rapporti solo epistolari:[13]

> «Chi non è stato qui - scrive a Castelnuovo - non può immaginare che razza d'uomo è Klein e che specie d'organizzazione egli ha saputo, con abilità che nessun altro può avere, imporre agli studi matematici in questa Università: è una cosa che m'ha fatto un'impressione straordinaria. E sì che d'impressioni vivissime da parte degli scienziati ne ho già avute parecchie in questo viaggio!»[14]

Risale ai primi anni novanta un altro indirizzo di ricerche inaugurato da Segre a partire dalla teoria degli immaginari in geometria di Karl von Staudt. Per sua iniziativa, nel 1888 era uscita, a cura di Mario Pieri, la traduzione della *Geometrie der Lage* di Staudt, preceduta da un pregevole studio bio-bibliografico sull'autore di Segre stesso. Estendendo il campo di ricerca del matematico tedesco, egli introdusse nuove corrispondenze che chiamò *antiproiettività*, ne sviluppò una teoria completa, aprendo così la strada a un nuovo campo di ricerche geometriche, quello degli enti iperalgebrici.[15] I suoi risultati furono in seguito ripresi e utilizzati da Elie Cartan.[16]

Segre aveva ormai acquisito notevole fama sia in Italia, sia all'estero[17] tanto che nel Congresso internazionale dei matematici di Zurigo del 1897 fu invitato come vicepresidente della sezione di geometria. L'anno seguente gli fu assegnato, a pari merito con Vito Volterra, il Premio Reale per la matematica dell'Accademia dei Lincei, con una relazione molto lusinghiera. I commissari, accanto alla «novità e alla importanza dei risultati», riconoscevano a Segre, fin da allora, il ruolo di caposcuola[18]. Nel 1904 fu invitato a tenere una conferenza generale al quarto Congresso internazionale dei matematici, in Heidelberg, sugli indirizzi di ricerca più promettenti nel campo della geometria, conferenza che fu subito tradotta in polacco da Samuel Dickstein.[19] Agli inizi del Novecento Segre stesso e i suoi allievi o collaboratori furono invitati a scrivere per la *Encyklopädie der Mathematischen Wis-*

[13]Cfr. LIVIA GIACARDI, *Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola italiana di geometria algebrica*, Annali di storia delle università italiane, 5, 2001, pp. 139-163, in particolare il paragrafo 2.1; ERIKA LUCIANO, C. SILVIA ROERO, *From Turin to Göttingen: Dialogues and Correspondence (1879-1923)*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 32, 1, 2012, pp. 7-232.

[14]C. Segre a G. Castelnuovo, Göttingen 30.6.1891, in ANL-Castelnuovo.

[15]CORRADO SEGRE *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 25, 1889-90, *Nota I*, pp. 180-205, *Nota II*, pp. 290-317, *Nota III*, pp. 376-396; 26, 1890-91, *Nota IV*, pp. 35-71 (*Opere 2*, pp. 237-337).

[16]Cfr. THOMAS HAWKINS, *Lie Groups and Geometry: the Italian Connection*, in ALDO BRIGAGLIA, CIRO CILIBERTO, EDOARDO SERNESI (a cura di), *Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Supplemento, s. 2, 36, 1994, pp. 185-206, alle pp. 200-204; BRIGAGLIA 2016, cit. in nota 6.

[17]Cfr. LUCIANO, ROERO 2016, cit. in nota 6.

[18]*Relazione sul concorso al premio reale per la Matematica, pel 1895*, Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti delle sedute solenni, 1, 1898, pp. 354-374, a p. 367.

[19]CORRADO SEGRE, *La geometria d'oggidì e i suoi legami con l'analisi, in Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1904*, 1905, pp. 109-120 (*Opere*, 4, 456-468); la conferenza fu tradotta in polacco: *Geometrya dzisiejsza i jej związki z Analizą*, Wiadomości Matematyczne, Warszawa, 9, 1905, pp. 7-21.

senschaften ben sette articoli. Quello di Segre *Mehrdimensionale Räume*[20] è dedicato agli spazi a più dimensioni e come scrive, Henry F. Baker, «rimarrà per molti anni un monumento della coltura di quell'uomo».[21]

Agli anni 1907-1913 risale un terzo gruppo di lavori che definiscono un nuovo settore di ricerca, la geometria proiettiva differenziale. È del 1907 il primo studio dedicato espressamente alla geometria proiettiva differenziale degli iperspazi, è però nella memoria del 1910 *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*,[22] che Segre pone le basi per la costruzione sistematica di tale geometria, cui verrà dato grande impulso dall'allievo Alessandro Terracini e da Enrico Bompiani.[23]

Gli anni fra 1891 e il 1912 furono quelli scientificamente più fecondi e furono anche quelli in cui prese l'avvio sotto la guida di Segre la Scuola italiana di geometria algebrica che porterà Torino e l'Italia ad imporsi sulla scena internazionale.[24] Molti erano i giovani che discutevano con lui la tesi di laurea sui temi più avanzati della ricerca: tra essi i più brillanti sono Fano (1892), Beppo Levi (1896), Alberto Tanturri (1899), Severi (1900), G. Zeno Giambelli (1901), Terracini (1911) e Eugenio Togliatti (1912). Numerosi erano anche quei matematici appena laureati, italiani e stranieri, che, attratti dalla sua fama, si recavano a Torino per seguire le sue lezioni e per perfezionarsi quali Castelnuovo (1887-1891), Federico Amodeo (1890-91), Federigo Enriques (11.1892, 11.1893-1.1894), Gaetano Scorza (1899-1900), i coniugi inglesi William H. Young e Grace Chisholm (1898-99), e gli americani Julian Coolidge (1903-04), Clarence Lemuel Moore (3.1908) e Charles Herschel Sisam (1908-09):

> «Se, educati alla sua Scuola, - scrive Berzolari - numerosi discepoli suoi, di cui taluni hanno ora un bel nome nella scienza, salirono poi una cattedra universitaria od occuparono posti onorevoli nell'insegnamento medio, la fama della sua valentia di Maestro varcò di molto i confini del nostro paese, e pressoché ogni anno accorsero ad ascoltarne la parola studiosi di altre nazioni, specialmente dell'Inghilterra e dell'America del Nord, i quali dagl'insegnamenti avuti in Italia trassero sovente l'ispirazione a pregevoli pubblicazioni.»[25]

Nel 1923, Franz Meyer e Hans Mohrmann, nell'introduzione al volume della *Encyklopädie der mathematischen Wissenshaften* dedicato alla geometria, rilevavano come in pochi anni alla fine del secolo l'Italia fosse arrivata alla posizione di comando (*führende Stellung*, III.I_1, p. VI) nel settore della ricerca geometrica. Segre fu, senza alcun dubbio, uno dei matematici che vi contribuirono in modo significativo.

[20] CORRADO SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III.2.2 C7, Hälfte A, Leipzig 1921, pp. 769-972.

[21] HENRY FREDERICK BAKER, *Corrado Segre*, Journal of the London Mathematical Society, 1, 1926, pp. 263-271. La citazione è tratta dalla traduzione italiana di Gino Loria nel Bollettino della Unione Matematica Italiana, 6, 1927, pp. 276-284, alla p. 284.

[22] CORRADO SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 30, pp. 87-121 (*Opere*, 2, pp. 71-114).

[23] Cfr. CIRO CILIBERTO, EMMA SALLENT DEL COLOMBO, *Enrico Bompiani: The Years in Bologna*, in SALVATORE COEN (ed.), *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Basel, Springer, 2012, pp. 143-177.

[24] Sul formarsi a Torino della Scuola italiana di geometria algebrica cfr. GIACARDI 2001 e CONTE, GIACARDI 2016, cit. in nota 6.

[25] LUIGI BERZOLARI, *Corrado Segre*, R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti, s. 2, 57, 1924, pp. 528-532, alla p. 532.

Nel corso della sua vita egli ricoprì molte cariche. In particolare dal 1909-10 al 1915-16 fu preside della facoltà di scienze dell'Università di Torino e dal 1907 fino alla morte ebbe la direzione della Biblioteca speciale di matematica, l'attuale Biblioteca Giuseppe Peano. Dal 1904, per vent'anni, fu uno dei direttori degli *Annali di Matematica pura ed applicata*. Socio nazionale dell'Accademia delle Scienze di Torino dal 1889 e di quella dei Lincei dal 1901, Segre fu membro delle principali accademie italiane e straniere.

Morì a Torino il 18 maggio 1924, lasciando una grande eredità umana e scientifica:

> «Io me ne andrò calmo e sereno - era solito dire - perché il padre deve far posto ai figli, perché bisogna che ogni giorno il passato muoia affinché altri mattini si alzino trionfanti».[26]

2. Il quaderno manoscritto sulla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti (1890-1891): Segre caposcuola.[27]

> «Nell'anno scolastico 1890-91 Segre ripetette con D'Ovidio a Torino la eccellente prova fatta da Brioschi, Casorati e Cremona nel 1869 a Milano. Mentre D'Ovidio faceva un corso di lezioni sulle *Funzioni di variabile complessa e sugli integrali abeliani*, egli [Segre] esponeva la Geometria su di una varietà algebrica semplicemente infinita sotto il triplice aspetto iperspaziale, algebrico e funzionale.»[28]

Così scriveva Federico Amodeo ricordando il corso di Segre dell'anno accademico 1890-1891, un corso destinato a lasciare un segno nella storia della geometria algebrica italiana.

La geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, fondata da Bernard Riemann (*Theorie der Abel'schen Functionen*, 1857) si sviluppò secondo tre importanti indirizzi, quello funzionale che deriva da Riemann, quello algebrico geometrico, opera soprattutto di Alexander Brill e di Max Nöther (*Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, 1874) e quello algebrico-aritmetico dovuto a Leopold Kronecker, Richard Dedekind e Heinrich M. Weber.

Quando Segre muoveva i primi passi nella ricerca la Scuola geometrica italiana era così fortemente dominata dalla corrente proiettiva da non comprendere l'importanza dei problemi affrontati e in parte risolti da Nöther: «Era necessario - scrive Castelnuovo - che quei problemi li ritrovassimo noi stessi sotto una forma più adatta alla nostra mentalità.»[29]

Una corrente di pensiero che, attraverso Klein si diffuse in Italia, condusse ad estendere la geometria proiettiva agli iperspazi; merito di Segre è quello di aver

[26] *Discorso del Rettore della R. Università di Torino, Prof. Comm. Alfredo Pochettino*, in *Corrado Segre (20 agosto 1863 - 18 maggio 1924)*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XV, Anno 1926-1928, p. 42.

[27] Questo paragrafo si deve ad Alberto Conte.

[28] FEDERICO AMODEO, *Sintesi storico-critica della geometria delle curve algebriche*, Napoli, Conte, 1945, p. 245.

[29] GUIDO CASTELNUOVO, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, Atti del Congresso internazionale dei matematici, Zanichelli, Bologna, 1929, I, pp. 191-201, a p. 192.

subito intravisto le applicazioni che si potevano fare della geometria iperspaziale alla teoria delle curve algebriche. Nell'introduzione alla fondamentale memoria del 1894 Segre scrive:

> «Ora, nel fare, son già vari anni, delle ricerche sulle rigate algebriche, e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella Memoria BRILL-NOETHER, mi accorsi come ricorrendo invece alle rigate ed alle dette varietà di spazi, e rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali nel senso già accennato, si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema del NOETHER fondamentale per quella Memoria.»[30]

È precisamente il metodo geometrico che Segre espone nel corso del 1890-1891, metodo che non ha bisogno di «considerazioni funzionali, né sviluppi algebrici: unico modo con cui compare l'algebricità degli enti è con il principio di corrispondenza per le forme semplici razionali».[31] In questo corso egli fa precedere la trattazione vera e propria da una rapida introduzione agli iperspazi secondo il metodo puramente analitico (Cap. 2), dove, fra l'altro, sottolinea il duplice ordine di vantaggi che si ottiene dall'uso dei medesimi. Innanzitutto la massima generalità «in quanto si può dire che tutti gli enti geometrici e vari analitici (algebrici) vi rientrano. E non solo i sistemi o varietà lineari, ma ogni specie di varietà. Così la varietà delle rette dello spazio ord.º è una M_4^2 di S_5».[32] In secondo luogo la duttilità come strumento di ricerca per le varie applicazioni che essi possono ricevere nella geometria.

Nel terzo capitolo del quaderno Segre, dopo aver definito il punto di vista che utilizzerà per lo studio delle curve, cioè quello delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, introduce le serie lineari sottolineando che il loro studio equivale a quello delle curve che rappresentano:

> «I gruppi neutri della serie corrispondono ai punti multipli e spazi secanti della curva. I gruppi con punti variamente coincidenti ai punti ed iperpiani singolari della curva. Ed anche le varietà di un sist. lineare variamente tang.i alla curva. Come la dimens. della serie dà il numero delle varierà contenenti la curva.»[33]

Il capitolo si chiude con un rapido excursus storico e bibliografico sulla geometria sull'ente algebrico da Riemann agli ultimi lavori di Castelnuovo. Nelle sezioni successive del quaderno Segre procede poi, a sviluppare la geometria delle serie lineari sopra una curva secondo il metodo iperspaziale, che esporrà in modo magistrale nella memoria del 1894, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico*

[30] CORRADO SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica pura ed applicata, s. 2, 22, 1894, pp. 41-142 (*Opere*, 1, pp. 198-304, citazione a p. 199).

[31] *Ibidem*, p. 200.

[32] CORRADO SEGRE, *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti*, 1890-1891, BMP-Segre, Quaderni. 3, pp. 16-17.

[33] *Ibidem*, p. 64. D'ora in avanti le pagine del quaderno di Segre verranno inserite direttamente nel testo.

semplicemente infinito.[34] Accanto al metodo geometrico Segre svolge nel suo corso anche quello algebrico di Brill e Nöther (p. 144) e quello funzionale riemanniano (p. 157) animato dalla convinzione più volte espressa che tutti i metodi meritano di essere studiati perché ciascuno permette di vedere il problema da punti di vista diversi.

Nell'estate del 1890 Eugenio Bertini, che si era accostato ai metodi di Segre e di Castelnuovo nei giorni che trascorse a Torino in compagnia di Segre,[35] gli suggerì di pubblicare la litografia del suo corso. In seguito alle sue amichevoli insistenze, Segre aveva pensato, in un primo tempo, di utilizzare gli appunti presi da Fano durante le sue lezioni e ne aveva iniziato la revisione, ma essendo questi «molto trascurati», aveva successivamente abbandonato l'idea.[36]

Solo tre anni dopo, nel 1894 Segre si decise a pubblicare l'ampia e importante memoria *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* che, come scrive Severi, contiene 'le radici' della geometria algebrica italiana e in cui «la sintesi in questo terreno ha raggiunto la sua efficienza massima. Mirabili ad esempio le dimostrazioni del teorema di Riemann-Roch e del principio di corrispondenza di Cayley-Brill».[37]

L'allievo Terracini ricordando il maestro a molti anni di distanza scriverà in proposito:

> «La sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* pubblicata nel 1894 sugli *Annali di Matematica* [...] è stata come la magna charta che ha fatto testo per la geometria sulla curva secondo le idee di Segre. Quell'*Introduzione* è il frutto di un corso tenuto da Segre qua a Torino nell'anno accademico 1890-91, nel quale - Segre ci teneva a dirlo - egli aveva esposto non solo il metodo geometrico, dovuto a lui e a Castelnuovo, ma anche quelli preesistenti: segnatamente il metodo algebrico di Brill e Noether e quello trascendente di Riemann.»[38]

Nella memoria del 1894 Segre espone unicamente il metodo geometrico, ma precisa:

> «L'argomento in fatti è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che a mio avviso si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni, in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso degli altri.»[39]

Se è vero che qui Segre si limitava a presentare unicamente il metodo geometrico, tuttavia per suo espresso desiderio, sullo stesso volume degli Annali di matematica pura ed applicata usciva anche il lavoro di Eugenio Bertini, *La geometria delle*

[34] SEGRE 1894.

[35] C. Segre a G. Castelnuovo, 28.7.1890, ANL-Castelnuovo.

[36] C. Segre a G. Castelnuovo, Torino 8.8.1891, ANL-Castelnuovo.

[37] SEVERI 1957, in SEGRE *Opere*, I, p. X.

[38] ALESSANDRO TERRACINI, *Parole del Prof. Terracini*, in Atti del Convegno internazionale di geometria algebrica, Torino, 24-27.5.1961, Torino, Rattero, 1962, p. 12.

[39] SEGRE 1894, *Opere* I, p. 200.

serie lineari secondo il metodo algebrico,[40] dove l'autore espone il metodo algebrico di Brill e Nöther, offrendo così un punto di vista diverso rispetto a quello presentato dall'amico. Alcuni anni più tardi, nella prefazione al trattato *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), Bertini renderà omaggio a Segre scrivendo di aver utilizzato ampiamente 'gli estesi sunti manoscritti' delle sue lezioni.

Nella memoria del 1894, e in alcuni casi già nel corso, Segre oltre a presentare con mirabile chiarezza un metodo ancora poco diffuso, coglie l'occasione per puntualizzare alcuni concetti fondamentali come quello di varietà algebrica e di corrispondenza algebrica fra due varietà (pp. 48-49). In particolare quest'ultima è considerata come una varietà algebrica contenuta nella varietà delle coppie ordinate di elementi delle due date;[41] definizione a partire dalla quale una decina di anni dopo l'allievo Severi costruirà una teoria sintetica delle corrispondenze algebriche fra curve e successivamente una teoria generale delle corrispondenze fra varietà. Segre inoltre predispone, come egli stesso sottolinea nell'introduzione alla memoria del 1894, le basi e gli strumenti di ricerca per la creazione della geometria sopra una superficie algebrica che sarà portata avanti nella sua Scuola, con grande slancio creativo, da Castelnuovo e da Enriques.
A seguire il corso del 1890-1891 vi erano fra gli altri oltre all'allievo Gino Fano anche Federico Amodeo, venuto da Napoli appositamente per lavorare con Segre, già ritenuto all'epoca, come si è detto, il caposcuola della geometria italiana. Entrambi si cimentarono nella soluzione del problema proposto da Segre a lezione:

> «Definire lo spazio S_r non già mediante coordinate, ma con una serie di proprietà dalle quali la rappresentazione con coordinate si possa dedurre come conseguenza.»[42]

Nonostante l'invito di Segre a lavorare insieme, ciascuno pubblicherà un articolo per conto proprio. Fano nel suo lavoro del 1892, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, si preoccupa, fra l'altro, di dimostrare l'indipendenza dei postulati tramite la ricerca di modelli adeguati e perviene così alla creazione di nuove geometrie (finite) che una decina di anni più tardi saranno sviluppate da Oswald Veblen.[43]

L'importanza del corso del 1890/1891 non sta dunque solo nella rilevanza scientifica dell'approccio di Segre allo studio della geometria sulla curva, ma anche nel fatto che si consolidava da quel momento il suo ruolo di caposcuola: Segre suggeriva letture e temi di ricerca a Castelnuovo, Fano, Amodeo e illustrava a Bertini i nuovi metodi, ma soprattutto era ben chiara in lui la consapevolezza dell'importanza del nuovo indirizzo di ricerca e dell'esistenza di un gruppo di studiosi che lo

[40]EUGENIO BERTINI, *La geometria delle serie lineari secondo il metodo algebrico*, Annali di matematica pura ed applicata, s.2, 22, 1894, pp. 1-40.

[41]SEGRE 1894, §2, n. 6.

[42]GINO FANO, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche, 30, 1892, pp. 106-132, a p. 106.

[43]Cfr. MAURIZIO AVELLONE, ALDO BRIGAGLIA, CARMELA ZAPPULLA, 2002, *The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, Archive for History of Exact Sciences 56, 2002, 5, pp. 363-425, a p. 391.

condivideva, come pure il desiderio di divulgare le proprie idee.

3. Il quaderno manoscritto delle lezioni per la Scuola di Magistero: Segre educatore.[44]
3.1. Il corso di Segre: aspetti istituzionali

Oltre al corso di Geometria superiore Corrado Segre tenne anche il corso di Matematica presso la Scuola di Magistero dell'Università di Torino dal 1887-88 al 1890-1891 e dal 1907-1908 al 1920-1921 e, nel 1921-1923, impartì il corso di Matematiche complementari per la laurea mista in scienze fisiche e matematiche dopo che le Scuole di Magistero furono soppresse.[45]

Queste Scuole erano state istituite dal ministro Ruggero Bonghi (R.D. dell'11 ottobre 1875, GU 1875, N. 255, pp. 6833-6836) per rispondere all'esigenza di formare i futuri insegnanti e di garantire in tal modo un più alto livello della scuola secondaria e sopravvissero con successive modifiche fino al 1920 quando ne fu decretata la soppressione dal ministro Benedetto Croce.[46] Nel 1875-1876 solo otto su ventuno università, le attivarono e solo tre accesero i corsi di matematica: Pavia, Pisa e Roma. I direttori delle Scuole erano rispettivamente Giovanni Cantoni, Enrico Betti e Eugenio Beltrami e i corsi di matematica erano tenuti da Felice Casorati, Cesare Finzi, e Giuseppe Battaglini (BUMPI 1876, II, pp. 372-373). Presso le Scuole di Magistero dell'Università di Torino, la sezione di matematica fu attivata nel 1876-1877: i corsi furono tenuti da vari professori, Enrico D'Ovidio, Francesco Faà di Bruno, Francesco Siacci, Giuseppe Basso e, successivamente dal solo Segre.

I quarantacinque anni di vita delle Scuole di Magistero preposte alla formazione degli insegnanti furono particolarmente difficili come mostra il gran numero di decreti ad esse relativi e, nella maggior parte dei casi, si rivelarono inadeguate ad affrontare in modo serio il loro compito.[47] Le ragioni sono molteplici: i professori che vi insegnavano erano gli stessi dei corsi istituzionali ed erano, in genere, poco preparati su questioni pedagogiche e di metodo: per esempio a Torino, prima di Segre solo i corsi di D'Ovidio affrontavano questioni di geometria e di aritmetica collegate con l'insegnamento secondario. Inoltre le strutture (biblioteche, laboratori, ecc.) e il materiale didattico erano spesso inesistenti, il numero delle ore previste era insufficiente e i finanziamenti scarsi.

Il corso di Segre costituisce una felice eccezione a questa situazione generale come mostra il quaderno manoscritto di cui presentiamo l'edizione critica [*Appunti*

[44] Questo paragrafo si deve a Livia Giacardi e a Maria Anna Raspanti.

[45] Sui corsi di Segre sulla formazione degli insegnanti, si veda LIVIA GIACARDI, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero*, Bollettino della Unione Matematica Italiana. La Matematica nella società e nella cultura, (8), VI-A, 2003, pp. 141-164; MARIA ANNA RASPANTI, *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17). *Un corso di Corrado Segre rivolto agli insegnanti*, conferenza tenuta a Torino il 20.4.2017.

[46] Sulla formazione degli insegnanti in Italia, si veda LIVIA GIACARDI, *I matematici e la formazione degli insegnanti in Italia nel primo Novecento*, in FRANCO GHIONE (a cura di), *La formazione degli insegnanti di matematica. L'esperienza italiana a confronto con alcune esperienze europee*, PRISTEM STORIA 36-37, Milano, Università Bocconi, 2013, pp. 61-106. I principali decreti che riguardano le Scuole di Magistero sono accessibili nella sezione sulla formazione degli insegnanti a cura di LIVIA GIACARDI nel sito: http://www.associazionesubalpinamathesis.it/storia-insegnamento/formazione-degli-insegnanti/.

[47] Cfr. FULVIA FURINGHETTI, LIVIA GIACARDI, *Training of secondary school teachers in pre- and post-unity Italy (1810-1920)*, ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 44, 4, 2012, pp. 537-550.

relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero][48] e quello ad esso collegato *Vedute superiori sulla geometria elementare (1916-17)*.[49] Il primo è dedicato soprattutto a questioni metodologiche e didattiche¸ è privo di titolo e non è datato, ma reca evidenza di successive aggiunte fino al 1924. Il secondo è in realtà relativo al corso di Geometria superiore del 1916-17, ma come afferma Segre stesso nell'introduzione e in vari punti del quaderno, è strettamente collegato con le lezioni di Magistero e tratta, con attenzione sia al punto di vista storico, sia agli sviluppi più recenti, temi di geometria elementare che possono rivestire un particolare interesse per il futuro insegnante.

Dai Quaderni 38 e 39 di Segre[50] e dalla documentazione d'archivio[51] possiamo anche avere informazioni sulla frequenza dei corsi di matematica che integrano i dati riportati dall'Annuario[52]: 1887-1888: 9 uomini; 1888-1889: 12 uomini, 1 donna; 1889-1890: 12 uomini, 2 donne; 1890-1891: 12 uomini, 1 donna; 1907-1908: 4 uomini, 13 donne; 1921-1922: 2 uomini, 11 donne.
Il registro degli esami di matematica sostenuti presso la Scuola di Magistero, che copre l'arco temporale 1907-1922, ci offre i seguenti dati:
1907: 1 donna; 1908: 2 uomini, 5 donne; 1909: 1 uomo, 5 donne; 1910: 5 uomini, 1 donna; 1911: 2 donne; 1912: 2 uomini; 1913: 1 uomo, 6 donne;1914: 6 uomini, 12 donne; 1915: 1 uomo, 2 donne; 1916: 13 donne; 1917: 1 uomo, 4 donne; 1918: 3 donne; 1919: 11 uomini, 8 donne; 1920: 6 uomini, 9 donne; 1921: 1 uomo, 4 donne; 1922: 1 donna.[53]
Oltre a fornirci informazioni su chi effettivamente sostenne l'esame di matematica, il registro sopra citato mette in evidenza altri aspetti significativi: il progressivo aumento della presenza femminile, in gran parte dovuto all'influenza della guerra sulla frequenza maschile; l'ammissione di candidati all'esame anche dopo la soppressione delle Scuole di Magistero; il carattere pratico della prova - si chiedeva infatti ai candidati di preparare una lezione; la varietà delle scuole interessate - dalle scuole normali per la formazione dei maestri alle scuole tecniche e istituti tecnici, dai ginnasi e licei al liceo moderno (a partire dal 1914); e infine il tipo di argomenti che spaziano dall'aritmetica all'analisi indeterminata, dalla geometria all'algebra, dalla trigonometria ai primi concetti dell'analisi infinitesimale.

3.2. Le lezioni di Segre: i temi

In apertura al quaderno [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] Segre fa riferimento al Regolamento del 6 dicembre 1903 emanato dal ministro Emanuele Orlando e ne trascrive gli articoli 1 e 7 dove si sottolinea che lo scopo

[48]BMP-Segre, Quaderni. 40.

[49]BMP-Segre, Quaderni. 30.

[50]Cfr. http://www.corradosegre.unito.it/I31_40.php.

[51]ASUT, *Conferenze della Scuola di Magistero di Scienze*, VII 84; cfr. anche i verbali di laurea in *Facoltà di scienze MFN. Verbali degli esami di laurea e di Magistero dal 27.10.1902 al 16 11.1925*, pp. 19- 131. Cfr. anche CONTE, GIACARDI, NOVARIA 2013, pp. 92-94.

[52]Dagli *Annuari* si ricavano i seguenti dati: 1908-1909: 1 uomo, 5 donne; 1909-1910: 5 uomini, 1 donna; 1910-1911: 2 donne; 1911-1912: 2 uomini; 1912-1913: 1 uomo, 7 donne; 1913-1914: 5 uomini, 12 donne; 1914-1915: 1 uomo, 1 donna; 1915-1921: nessun dato.

[53]Cfr. *Appendice* 1.

principale di tali scuole è quello di «rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline filosofiche, letterarie e scientifiche nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negl'istituti tecnici», e si precisa che le lezioni avrebbero dovuto trattare i metodi di insegnamento delle singole materie in relazione ai programmi delle scuole secondarie. (GU, 1904, 24, p. 410). Immediatamente dopo, però, Segre riporta l'art 1 del Regolamento della Facoltà di scienze dove se ne indica il fine di «mantenere e di estendere la coltura scientifica della Nazione». Questa duplice citazione a inizio corso è significativa dell'importanza che egli attribuiva, per la formazione degli insegnanti, tanto agli aspetti metodologici e pedagogici, quanto alle conoscenze strettamente scientifiche. I due quaderni citati precedentemente [*Appunti e bibliografia per il corso di Magistero di Matematica*] e *Vedute superiori sulla geometria elementare (1916-17)* rappresentano questi due aspetti complementari del suo insegnamento.

Il primo si articola nelle seguenti sezioni:

> «La Matematica e l'esperienza; La Matematica in relaz.[e] colle applicazioni; La Matematica come scienza esclusivamente logica; Scopo dell'insegnamento matematico nelle scuole secondarie; L'intuizione e i postulati; Il rigore; Sul metodo; Sugli esercizî; La riforma; Trattati generali; Bibliografia sulla Didattica; Didattica algebrica; Storie. Varia; Numeri frazionari, negativi, irraz.[li]; Costruzioni; Didattica geometrica; Complementi di Mat. elem.; Trigonometria; Trattati di Aritmetica ed Algebra; Trattati di Geometria elem.[e] e scritti vari sui fondamenti; Esercizi; Indice per Bibliogr[a]».

Il secondo *Vedute superiori sulla geometria elementare (1916-17)* si suddivide nei seguenti capitoli:

> «Cenni su i fondamenti delle Matematiche, in partic.[e] della Geom.[a]; Geometria elem.[e] e geom.[a] projettiva; Geom. Elementare e geom.[a] delle trasform.[i] circolari; Cenni sull'Analysis situs; Sulle costruzioni geometriche; Costruzioni con meccanismi articolati; I problemi risolubili colla sola riga; I problemi risolubili colla riga e col compasso, o strum.[i] equiv.[i]; Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici; Applicazioni ai problemi classici di 3° grado; Le curve, le cui intersezioni con rette generiche si ottengono con riga e compasso; Il problema della divisione della circonferenza; Il problema della quadratura del cerchio; Principî di Geom.[a] non-euclidea.»

Questo secondo quaderno, che sviluppa alcuni degli argomenti che Segre riteneva importanti per la formazione degli insegnanti, è preceduto da considerazioni sui fondamenti della matematica su cui ci soffermiamo brevemente perché utili a comprendere l'approccio didattico e metodologico a questa disciplina illustrato nel primo quaderno.

Nelle matematiche, scrive Segre le idee e le proposizioni primitive «son suggerite dall'*esperienza* o dall'*intuizione*, insieme coll'*astrazione*» (p. 8). Rispetto alle altre parti delle matematiche, in geometria occorre «ricorrere all'astrazione in grado ben maggiore. Si considerano *superficie, linee, punti*, che non s'incontrano in natura!» (p. 9). I nostri sensi, egli osserva, «non sono mai esatti, non possono fornire che dati *approssimativi*; mentre per la trattazione matematica si assumono *esatti*» (p. 10). Dunque anziché prendere i dati sperimentali quali sono, «li alteriamo coll'astrazione» perché intendiamo fare della matematica di precisione. Naturalmente, aggiunge Segre, «se, dopo aver fatto della matematica di precisione vogliamo applicarne i risultati al mondo reale, dobbiamo tener conto delle ipotesi semplificatrici che s'erano fatte» (p. 13). Egli osserva però che si può anche presentare la geometria come «un sistema puramente logico-deduttivo, che esclude ogni possibilità di considerarla come scienza fisica» (p. 22) e che questo approccio offre un duplice vantaggio: conferisce alla geometria un valore scientifico indipendente dal fatto che si verifichi o meno nel mondo fisico, e rende possibili diverse applicazioni. Se si considera la geometria in modo astratto, allora è sufficiente che i postulati siano fra loro compatibili, ed è auspicabile che siano anche indipendenti. Segre precisa tuttavia che, dal punto di vista didattico, conviene che essi concordino il più possibile con l'esperienza, in modo da risultare evidenti.

3.3. Aspetti epistemologici, metodologici e didattici

Nel quaderno [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] Segre, dopo aver presentato alcune riflessioni sulla natura della matematica, sugli scopi dell'insegnamento, sull'importanza dell'intuizione e sul rigore, tratta esclusivamente questioni di carattere didattico e metodologico e offre ai futuri insegnanti suggerimenti di didattica pratica. Il suo approccio risente apertamente del suo modo peculiare di concepire la ricerca scientifica, ma è frutto anche dell'esperienza di docente e di un'attenta disamina delle problematiche didattiche che si dibattevano all'epoca nei vari paesi europei. Per esempio, dopo la creazione nel 1908 dell'International Commission on the Teaching of Mathematics (poi ICMI), Segre è particolarmente attento alle questioni discusse nel suo ambito e inoltre dimostra un'ampia conoscenza della letteratura internazionale in didattica generale e speciale, e non solo, come emerge dall'ampia bibliografia ragionata che correda il quaderno in questione.

I problemi connessi con l'insegnamento gli stavano molto a cuore. Ne è una testimonianza luminosa il celebre articolo del 1891 *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*,[54] dove insiste soprattutto sui seguenti punti: il vero maestro deve invitare i suoi allievi a occuparsi solo di problemi «importanti» e insegnare loro a distinguere le questioni rilevanti da quelle sterili e inutili; spingerli a studiare, accanto alla teoria, le sue applicazioni; esortarli a non essere «schiavi del metodo», a non restringere la propria attività scientifica a un campo troppo limitato, in modo da poter considerare «le cose più dall'alto»; deve inoltre tenere in debito conto le esigenze didattiche e suggerire ai propri studenti di leggere le opere dei grandi maestri. Questo articolo attrasse l'attenzione di matematici e pedagogisti all'estero e nel 1904 fu tradotto in inglese con il titolo *On some tendencies in geometric investigations* e pubblicato sul *Bulletin of the American*

[54] CORRADO SEGRE, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, Rivista di Matematica 1, 1891, pp. 42-66 (*Opere* 4, pp. 387-412).

Mathematical Society[55] da John Wesley Young (1879-1932), matematico molto interessato a questioni didattiche e futuro presidente della Mathematical Association of America. Nelle lezioni che quest'ultimo impartì alcuni anni dopo nell'University of Illinois, raccolte nel volume *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry* (1911),[56] egli definisce la matematica come «any body of propositions which is capable of an abstract formulation and arrangement»[57] e osserva che il metodo puramente logico non è il solo che può essere impiegato nelle ricerche matematiche:

> «Imagination, geometric intuition, experimentation, analogies sometimes of the vaguest sort, and judicious guessing, these are the instruments continually employed in mathematical research».[58]

Questo aspetto, come pure il fatto di insistere sulla rilevanza scientifica dei sistemi astratti, ma di affermare che le applicazioni concrete di tali sistemi costituiscono di gran lunga la parte più importante della matematica,[59] e quello di sottolineare l'importanza dell'approccio storico e delle matematiche elementari affrontate da un punto di vista superiore, costituiscono altri tratti comuni con la visione di Segre.

Gli stessi suggerimenti, che compaiono nell'articolo del 1891 rivolti agli studenti universitari, si ripresentano contestualizzati rispetto all'insegnamento secondario, nelle lezioni di magistero di cui trattiamo. Come appare dal registro delle lezioni[60] e dagli appunti manoscritti, Segre intendeva il suo corso come una specie di laboratorio, dove gli studenti venivano preparati tenere una lezione chiara e documentata su argomenti rilevanti per l'insegnamento secondario. Infatti, attenendosi scrupolosamente alle direttive del decreto ministeriale, oltre ad affrontare questioni di tipo metodologico, egli invitava gli allievi a sviluppare temi di matematica quali problemi di massimi e minimi, divisibilità dei numeri, analisi indeterminata di primo grado, approssimazioni numeriche, equazioni irrazionali, o, ancora, il concetto di dimensione, le costruzioni geometriche mediante la retta e un cerchio fisso, ecc. e li stimolava a leggere e a commentare alcuni testi elementari.

Prima di illustrare gli assunti metodologici e didattici di Segre quali emergono da questo quaderno, è utile premettere qualche considerazione sulla sua visione epistemologica della matematica. Secondo Segre due sono i modi di accostarsi alla matematica, o considerarla in relazione alle sue applicazioni come fa Klein, oppure affrontarla dal punto di vista esclusivamente logico in accordo con le vedute di Peano e di Hilbert. Segre illustra ai suoi allievi la differenza fra i due approcci osservando che, per esempio, «nel 1° indirizzo il numero *irrazionale* trova la sua origine ad es. in Geometria, grazie alla continuità della retta, o a costruzioni di

[55] Corrado Segre, *On some tendencies in geometric investigations*, Bulletin of the American Mathematical Society, 10, 1904, pp. 442-468.

[56] Nell'ampia bibliografia del quaderno, Segre cita la traduzione italiana del 1919 di questo libro, *I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria.*

[57] John Wesley Young, *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, New York, The MacMillan Company, 1911, p. 222.

[58] *Ibidem*, p. 221.

[59] *Ibidem*, p. 224.

[60] Conte, Giacardi, Novaria 2013, pp. 47-53 e qui in *Appendice* 2.

ipotenuse, ecc.; nel 2° si deve ricorrere a separazione dei numeri razionali, o al limite superiore di una classe di razionali, ecc.» (p. 13).[61]

Fra i due a riscuotere il suo favore è il primo approccio, che è caratterizzato da tre fasi: si parte dai dati dell'esperienza, si traducono in forma matematica, si procede alla trattazione puramente matematica del problema; e infine si traducono i risultati matematici nella forma più adatta all'applicazione. Per quanto riguarda il secondo approccio Segre osserva:

> Diciamo subito che questo 2° indirizzo ha una grande importanza, anche filosofica. Esso ha messo bene in evidenza che cosa è la matematica pura; ed ha contribuito molto a porre il *rigore* in varie parti della matematica. Ma, collo staccarsi dalla *realtà*, vi è il pericolo di finire con costruzioni, che pur essendo logiche, hanno troppa artificiosità, non possono avere importanza scientifica duratura.» (pp. 13-14)

Egli era infatti convinto che lo scopo della matematica fosse quello di insegnare «a ragionar bene; a non contentarsi di parole vacue; a trarre conseguenze dalle premesse, a riflettere e scoprire da sé; [...] a parlare con precisione» (p. 42), ma riteneva anche che nell'insegnamento secondario la matematica non dovesse essere considerata come fine a se stessa: essa, invece «deve nascere dal mondo esterno e poi a quello applicarsi» (p. 15). Il primo approccio alla matematica dovrebbe essere, pertanto, sperimentale e intuitivo, in modo che l'allievo impari «non solo a *dimostrare* le verità già note, ma anche a fare le scoperte, a risolvere da sé i *problemi*» (p. 16), mentre «al rigore perfetto in certe cose si può giungere *più avanti*. Può la gioventù procedere *per gradi*, come l'umanità» (pp. 25-26). Inoltre, per motivare lo studio della disciplina e rendere la materia più vicina al mondo reale, l'insegnante dovrebbe presentare alcune applicazioni della matematica alle altre scienze quali la fisica, l'astronomia, l'economia politica, la matematica finanziaria e la geografia (pp. 41, 42, 119).

È quindi naturale che per Segre scopo primario dell'insegnamento della matematica sia quello di sviluppare tanto le capacità di ragionamento quanto l'intuizione e non a caso, per quanto riguarda il metodo da seguire nel presentare ai giovani di scuola secondaria questa disciplina, le sue preferenze vanno a quello *euristico* nell'esposizione della materia, a quello *analitico* nelle dimostrazioni, a quello *genetico* nello svolgimento delle teorie. Il primo, il metodo socratico, permette all'allievo di scoprire da solo le verità matematiche, il secondo gli consente di entrare nell'officina matematica e di capire il perché di ogni passo di una dimostrazione, il terzo, sviluppando una teoria seguendo il modo in cui si è formata, costituisce un buon avviamento alla ricerca scientifica. Tuttavia Segre non manca di sottolineare ai futuri insegnanti l'importanza di variare i metodi e soprattutto di sceglierli in base «all'argomento, la scolaresca e il tempo disponibile» (p. 44), così come faceva con i suoi studenti universitari, riferendosi in quel caso alla ricerca scientifica.

Per quanto riguarda il delicato rapporto fra intuizione e rigore nell'insegnamento, Segre esorta i futuri insegnanti a trovare un giusto equilibrio tra i due approcci.

[61] Le pagine indicate fra parentesi nel testo si riferiscono al quaderno in esame.

Che cosa questo significhi e come si possa conquistare questo equilibrio, risulta evidente dai suggerimenti che egli fornisce ai suoi allievi riguardo ai postulati, alle definizioni e alle dimostrazioni.
I postulati su cui si basa lo sviluppo di una teoria devono, a suo avviso, essere intuitivi, non è necessario che siano indipendenti (p. 17) e devono essere introdotti solo quando si rendano necessari in un ragionamento, senza bisogno di enunciarli tutti insieme fin dall'inizio della trattazione. Segre osserva anche che nelle moderne opere sui fondamenti se ne elencano alcuni «tanto ovvî» - cita gli assiomi di ordinamento di Hilbert - che «non può un ragazzo capire lo scopo di una serie di tali enunciati!» (p. 20).
Per quanto riguarda la definizione, ispirandosi alle regole fornite da Blaise Pascal in *De l'art de persuader*, Segre sostiene che «definire al ragazzo con un lungo discorso delle cose che egli crede già di conoscere è annojarlo» e mette in guardia i futuri insegnanti da un eccesso di rigore:

> «Stando al punto di vista esclusivamente logico si dovrebbe bandire nell'insegnamento elementare la parola *linea* o *curva* perché non si hanno gli strumenti per definirla. Ma ciò è assurdo!» (pp. 18-19).

> «Non definizioni rigorose, ma schiarimenti, quando la definiz^{e} (di linea o di area, ...) sarebbe troppo difficile.» (p. 46)

Nell'affrontare il tema della dimostrazione Segre precisa subito che dimostrare proposizioni che sono intuitivamente evidenti è doppiamente dannoso perché sminuisce tanto il ruolo del ragionamento, quanto quello dell'intuizione. Può essere invece utile, a suo parere, presentare abbozzi di dimostrazioni, piuttosto che dimostrazioni rigorose, ma lunghe e pesanti, perché così l'insegnante potrà mostrare «in che modo si fanno le scoperte, come si lavora coll'intuizione; oppure [...] dare un'idea più sintetica, più facile da ricordare, della dimostrazione rigorosa che poi verrà esposta [...] basta che si avvertano gli scolari che la dimostrazione esposta è incompleta» (p. 25). Per questo Segre accoglie, per quanto concerne la geometria, la proposta di Giovanni Vailati di un insegnamento di tipo sperimentale operativo che utilizzi come sussidi didattici la carta millimetrata, il disegno o i modelli geometrici che consentono di «vedere certe proprietà che con il solo ragionamento deduttivo non si sanno ottenere»[62]. Non è un caso che egli abbia invitato la sua allieva Luisa Viriglio a tradurre[63] il libretto di Grace e William Young *A First Book of Geometry* (1905), ispirato proprio a questo metodo, dove compare un ampio uso di modellini di solidi costruiti con la carta. L'allievo costruendo e manipolando i modelli con la guida dell'insegnante scopre da sé le varie proprietà e i primi teoremi. A questo proposito sono significativi anche i riferimenti nella bibliografia ai libretti di Karl Giebel e Alfonso Rivelli su costruzione e uso dei modelli geometrici e all'articolo del 1921 dove Marcolongo presenta il suo laboratorio ideale di matematica.[64]

[62] SEGRE 1891, p. 54.
[63] GRACE CHISHOLM, WILLIAM YOUNG, *Geometria per i piccoli* (traduzione di L. Viriglio), Torino, Paravia, 1911.
[64] Si veda più avanti nell'edizione di questo quaderno, la sezione *Costruzioni*, della bibliografia.

Se è vero che Segre assegna un ruolo significativo all'intuizione e all'esperienza per «interessare e facilitare», tuttavia per lui è altrettanto importante che l'insegnante metta in guardia gli allievi dagli inganni dell'intuizione stessa e ne mostri l'insufficienza per concepire taluni enti quali, per esempio, una curva senza tangenti (p. 43). Inoltre egli raccomanda di far osservare agli allievi «la differenza fra l'esattezza teorica e l'approssimazione pratica» (pp. 5, 29).

Quanto Segre fosse attento agli errori, alle cattive abitudini, ai punti deboli e alle idiosincrasie degli allievi, emerge a chiare lettere nei consigli pratici che non esita a offrire qua e là ai futuri insegnanti:

> «Bisogna evitar di *annojare*! (p. 24)
> Si cerchi di stimolare l'*attività* di mente dello scolare, piuttosto che la *passività* (p. 27)
> Si soddisfi qualche volta la domanda di una dimostraz. che non si sarebbe data, ma che un giovane più intelligente possa capire. (p. 27)
> Si varino le notazioni e le figure. Non accada che il giovane non sappia risolvere un'equaz. solo perché l'incognita non si chiama x. o una dimostraz. geom.^{a} solo perché è cambiata la disposiz.^{e} della fig.^{a}. (p. 28)
> I calcoli non sian troppo lunghi, non essendovi scopo a stancare la pazienza dei giovanetti (p. 32)
> *Preparazione perfetta* alla lez.^{e}... *Non dettare*: usare un libro di testo [...] *Pazienza* con gli scolari; ripetere se non han capito; non scandalizzarsi per errori; cercar di persuadere gli scolari che tutti posson fare, che non occorre un'inclinazione speciale. (p. 42)
> Un triangolo qual.^{e} si faccia scaleno. Gli scolari han la tendenza a preferire le orizzontali e verticali (fatto fisiologico). Si abituino a segnare triang.^{i}, ang.^{i} retti, ecc. senza tale particolarità. Un quadrangolo non sia un rettangolo. Due parall.^{e} non siano orizz.^{li}. Ecc. Le figure non sian sempre disposte nello stesso modo». (p. 44)

L'attenzione su questo quaderno manoscritto fu richiamata per la prima volta da Francesco Tricomi, professore di analisi infinitesimale presso l'Università di Torino, in una conferenza tenuta nell'ambito del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino il 22 febbraio 1940, fatto di rilievo non solo perché un contributo poco noto di Segre veniva reso pubblico, ma anche perché questo accadeva dopo le famigerate leggi razziali del 1938 contro gli ebrei, e assumeva quindi un significato altamente simbolico. La trascrizione del quaderno con una breve prefazione a cura di Tricomi stesso fu poi pubblicata sui Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino.[65] Tricomi però tralasciava la ricchissima bibliografia ragionata che è significativa delle ampie letture di Segre che spaziavano da testi dedicati espressamente alla didattica generale e a quella della matematica a testi sui fondamenti e sulla storia della matematica, dalle raccolte di esercizi ai manuali di aritmetica, algebra, geometria e trigonometria, da libri dedicati alle costruzioni geometriche a quelli su complementi relativi ai vari settori della matematica elementare, e altro ancora. L'indicazione bibliografica dei

[65] Francesco Tricomi, *Essenza e didattica delle Matematiche in un manoscritto inedito di Corrado Segre*, Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino, 7, 1938-40, pp. 101-117.

vari testi e articoli, inoltre, è di tanto in tanto accompagnata da commenti personali di Segre e dalla collocazione dei volumi nella Biblioteca matematica torinese, utile certamente per lui stesso, ma anche per i suoi allievi.
Il particolare approccio metodologico, le citazioni e la bibliografia stessa, mostrano come punto di riferimento di Segre fossero soprattutto i francesi H. Poincarè, C. A. Laisant, E. Borel, J. Hadamard e i tedeschi P. Treutlein, M. Simon e F. Klein, matematici impegnati a valorizzare nell'insegnamento secondario il ruolo dell'intuizione e dell'esperienza a fronte di un approccio troppo improntato al rigore logico.

In buona sostanza, come emerge da quanto detto, Segre condivideva gli assunti metodologici e pedagogici di Klein: riteneva importante colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario introducendo precocemente i concetti di funzione e di trasformazione; preferiva il metodo genetico nell'insegnamento di una teoria perché costituisce un buon avviamento alla ricerca scientifica; riteneva che il primo approccio alla matematica dovesse essere sperimentale e intuitivo, in modo da indurre l'allievo a fare le scoperte e a risolvere i problemi da sé; attribuiva importanza didattica alle applicazioni della matematica alle altre scienze per collegare maggiormente l'insegnamento con il mondo reale e sosteneva l'importanza di un approccio storico. Infine, come Klein, riteneva che nella formazione degli insegnanti le matematiche elementari considerate da un punto di vista superiore dovessero avere un posto di particolare rilievo.[66]

Il significato che Segre attribuiva alla locuzione 'matematiche elementari da un punto di vista superiore' è analogo a quello di Klein e deriva dall'idea che non vi sia separazione fra la matematica scolare e quella accademica e che si debbano evidenziare le mutue connessioni fra i problemi delle varie discipline in modo che gli insegnanti acquisiscano una comprensione più profonda dei concetti base della matematica e una più ampia visione del paesaggio matematico nel suo complesso:

> «My task - scrive Klein - will always be to show you the *mutual connection between problems in the various disciplines*, these connections use not to be sufficiently considered in the specialised lecture courses, and I want more especially to emphasize the relation of these problems to those of school mathematics. In this way I hope to make it easier for you to acquire that ability which I look upon as the real goal of your academic study: the ability to draw (in ample measure) from the great body of knowledge taught to you here vivid stimuli for your teaching.»[67]

Per esempio queste caratteristiche sono evidenti nella parte, dedicata ai problemi risolubili o non risolubili con riga e compasso, del quaderno sopra citato *Vedute superiori sulla geometria elementare* (1916-17) caratterizzata da un approccio storico e dall'attenzione alle connessioni fra geometria e algebra.

Anche sul concetto di intuizione Segre sembra accogliere il punto di vista di Klein, che distingueva fra intuizione ingenua, importante nella fase di scoperta di

[66]Cfr. su questo argomento JEREMY KILPATRIK, *A Higher Standpoint*, in *Materials from ICME 1*, Regular Lectures, pp. 26-43 2008/2014:
https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kilpatrick.pdf and GERT SCHUBRING, *The Notion of Elementary mathematics*, in FELIX KLEIN, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*, Vol. 1 *Arithmetic, Algebra, Analysis*, pp. v-xii, Berlin, Springer, 2016.

[67]FELIX KLEIN, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*, Berlin, Springer, 2016, vol. I, p. 2.

una teoria, e intuizione raffinata che interviene nell'elaborazione dei dati forniti dalla prima e nello sviluppo logico rigoroso della teoria stessa.[68]

Nel già citato articolo del 1891, che sta all'origine di una celebre polemica con Peano,[69] egli scrive:

> «Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo dopo la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione [...] Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non possa sostituirli meglio: poiché la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto [...]. Ora nel fare uso di simili mezzi d'investigazione il giovane deve badare che qui, come nelle salite difficili su erte pericolose, per non cadere nell'abisso o nell'errore ci vuol destrezza, prudenza e pratica. E dopo essersi valso colla massima cautela di quei mezzi per le sue scoperte deve cercare se non gli riesce di sostituirli con dimostrazioni sicure.»[70]

Qui egli si riferisce alla ricerca scientifica, mentre nelle lezioni di magistero pensa soprattutto al metodo di insegnamento in cui il ricorso a una forma di intuizione ingenua può essere utile: «[Intuire] significa - egli scrive - lo scorgere una verità spontaneamente, senza ragionamenti e senza esperienze, ma è frutto d'incoscienti ragionamenti od esperienze» (p. 15), basati su conoscenze precedenti che vengono scelte a livello inconsapevole e combinate in nuovi modi o che suggeriscono analogie.[71] Tuttavia, come si è detto, se per Segre era importante sollecitare l'intuizione dei ragazzi, era altrettanto importante evidenziarne gli inganni e arrivare gradualmente alla sistemazione logica della materia studiata.

Questo genere di riflessioni non costituiva un fatto isolato: l'intuizione, messa in crisi dalla potente opera di rigorizzazione nella matematica (Weierstrass, Cantor, Peano), attraversava nel primo Novecento un momento particolarmente vitale tanto in ambito filosofico, quanto nel campo della ricerca scientifica e diventava argomento di dibattito anche fra coloro che si occupavano di problemi dell'insegnamento.

Non essendo questa la sede per approfondire questo aspetto ci limitiamo solo a osservare che è sintomatico che la International Commission on the Teaching of Math-

[68] FELIX KLEIN, *On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences* (1893), in *Lectures on mathematics delivered from Aug. 28 to Sept.9, 1893 ... at Northwestern University Evanston, Ill. by F. Klein, reported by A. Ziwet*. New York, Macmillan and C., 1894, pp. 41-50, a p. 42.

[69] Cfr. in merito GIACARDI 2001 e C. SILVIA ROERO, *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro*, in RENATA ALLIO (a cura di) *Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento*, Torino, Centro Studi per la Storia dell'Università di Torino, Sesto Centenario, Torino 2004, pp. 115-144. ERIKA LUCIANO, *At the Origins of Functional Analysis: G. Peano and M. Gramegna on ordinary differential Equations*, Revue d'histoire des mathématiques, 12, 2006, pp. 35-79.

[70] SEGRE 1891, p. 53, 54.

[71] La definizione di Segre richiama immediatamente alla mente quella di Poincaré: «Qu'est-ce, en effet, que l'invention mathématique? Elle en consiste pas à faire de nouvelles combinaisons avec des êtres mathématiques déjà connus [...] Inventer c'est discerner, c'est choisir [...] deviner des harmonies et des relations cachées [...] ce travail inconscient n'est fécond que s'il est, d'une part, précédé, et, d'autre part, suivi d'une période de travail conscient.» (HENRI POINCARÉ, *L'invention mathématique*, L'Enseignement Mathématique, 10, 1908, pp. 357-371, alle pp. 360-36).

ematics lanciasse nel 1911 un'inchiesta internazionale sul ruolo del rigore, dell'intuizione e dell'esperienza nell'insegnamento medio. Dal rapporto, presentato l'anno seguente da David E. Smith sulla rivista L'Enseignement mathématique,[72] emerge come l'intuizione fosse maggiormente valorizzata in Austria, Germania e Svizzera piuttosto che in Inghilterra, Francia e Stati Uniti e come i temi più dibattuti fossero soprattutto l'insegnamento della geometria e l'introduzione o meno del concetto di funzione. Inoltre uscivano in quegli anni numerosi libri e articoli dove si affrontava il tema dell'intuizione tanto nella ricerca, quanto nell'insegnamento da parte di autori quali Poincaré, Hadamard, Laisant, Borel, Simon, Treutlein, e Klein, autori ben noti a Segre come si è già rilevato.
In Italia il tema era spesso oggetto di discussione nei convegni dell'Associazione Mathesis, associazione nazionale degli insegnanti di matematica fondata a Torino da Rodolfo Bettazzi nel 1895-1896, in articoli, recensioni e dibattiti sulle principali riviste rivolte agli insegnanti, ed anche la legislazione scolastica era influenzata dalle discussioni sul tema come mostrano i diversi provvedimenti legislativi circa l'insegnamento della geometria intuitiva.[73]

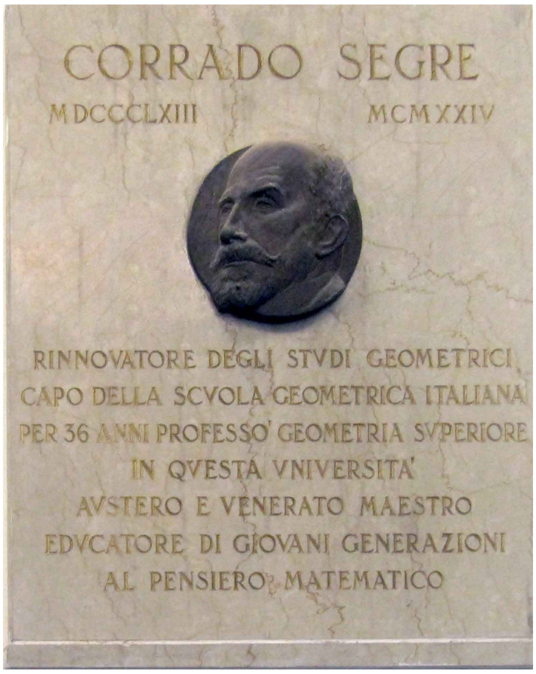
Il contributo di Segre nel campo della didattica della matematica rimase limitato alle lezioni presso la Scuola di Magistero, egli tuttavia per diciotto anni formò tutti gli insegnanti di matematica che uscirono dall'Università di Torino, favorì la diffusione della visione metodologica e didattica di Klein fra i suoi allievi e con il suo esempio trasmise anche un certo modo di insegnare la matematica, che sia a livello universitario, sia a livello secondario, valorizza l'intuizione, incoraggia la creatività, si avvale di più metodi, e stabilisce collegamenti fra settori diversi in una visione unitaria della matematica. Anche in questo aspetto fu un caposcuola, per quanto i suoi discepoli, pur condividendone i principali assunti metodologici e epistemologici, li abbiano interpretati, approfonditi e declinati in accordo alla propria personalità e alle differenti esperienze individuali.[74]

[72]DAVID E. SMITH, *Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools*, L'Enseignement mathématique, 1912, pp. 507-534, tradotto in parte da Guido Castelnuovo sul Bollettino della Mathesis, 1912, pp. 134-139.

[73]Cfr. per esempio i saggi di Aldo Brigaglia, Paola Gario, Simonetta Di Sieno e Livia Giacardi in LIVIA GIACARDI (a cura di), *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, La Spezia, Agorà Edizioni, 2006 e MARTA MENGHINI, *La geometria intuitiva nella scuola media italiana del '900*, La Matematica nella Società e nella Cultura, s. I, III, 2010, pp. 399-429.

[74]Cfr. LIVIA GIACARDI, *The Italian School of Algebraic Geometry and the Teaching of Mathematics in Secondary Schools: Motivations, Assumptions and Strategies*, in *Geometria delle varietà algebriche, Convegno in occasione del settantesimo compleanno di Alberto Conte*, Rendiconti del seminario matematico. Università e Politecnico di Torino, Vol. 71, 3-4, 2015, pp. 421 - 461.

4. Corrado Segre e la moglie Olga Michelli (UTo-ACS)



5. Lapide in onore di Corrado Segre
(Dipartimento di Matematica, via C. Alberto, 10 Torino)

Ringraziamenti

La pubblicazione di questo volume è stata possibile grazie al sostegno del Centro Studi di Storia dell'Università di Torino, cui va la nostra più viva gratitudine. In particolare esprimiamo la nostra riconoscenza al Comitato scientifico che lo ha accolto nella collana Lezioni e Inediti di "Maestri" dell'Ateneo Torinese. Il nostro grazie più sentito va ai due referee per gli utili suggerimenti e ai colleghi e amici che in vario modo ci hanno aiutati nelle nostre ricerche, Aldo Brigaglia, Silvia Capuzzo, Claudio Fontanari, Paola Gario, Erika Luciano, C. Silvia Roero e Antonio Salmeri.

Un grazie particolare a Clara Silvia Roero per l'attenta rilettura del manoscritto.

La nostra più viva riconoscenza va inoltre al direttore Marino Badiale e a tutto il personale della Biblioteca Speciale di Matematica "Giuseppe Peano" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino - Laura Garbolino, Orietta Piccini, Antonella Taragna, Giulia Scarcia, Giuseppe Semeraro, Silvia Oddone - a Paola Novaria e a Giuliana Borghino Sinleber dell'Archivio Storico dell'Università di Torino per l'interesse e l'efficienza con cui hanno coadiuvato le nostre ricerche bibliografiche e archivistiche.

Un grazie particolare ai Fratelli Fuà, Daniele e Silvano, per aver donato all'Università di Torino il cospicuo fondo di documenti inediti di Corrado Segre da cui sono tratte alcune delle fotografie riprodotte nel volume.

Infine desideriamo ringraziare Micaela Amplatz per aver trascritto in TeX il quaderno di Segre del 1890-91 e soprattutto a Silvia Capuzzo per la pazienza e la perizia con cui ha curato la trascrizione in TeX e la composizione del volume.

I Quaderni manoscritti

Nota editoriale

I due quaderni manoscritti, autografi, che qui si pubblicano provengono dal *Fondo Segre* della Biblioteca Speciale di Matematica "Giuseppe Peano", del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino. Tale fondo è in gran parte accessibile sul sito curato da Livia Giacardi:
http://www.corradosegre.unito.it/.
Il primo dei due quaderni, *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti* (1890-91), consta di 218 pagine (158 $\times$ 108 mm) più 1 carta incollata nella pagina successiva al frontespizio del quaderno riportante l'Indice. La segnatura nel *Fondo Segre* è Quaderni. 3.
Il secondo [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*], non datato e privo di titolo, consta di 126 pagine (148 $\times$ 103 mm), più 1 carta incollata alla pagina 29 la cui numerazione 41-42 appare esterna a quella del quaderno stesso. Il quaderno reca sulla copertina l'indicazione "II". La segnatura nel *Fondo Segre* è Quaderni. 40.
I criteri adottati per la trascrizione mirano a rispettare il più possibile il testo originale. In tale ottica si sono mantenute le abbreviazioni tranne in rari casi in cui, risultando la comprensione difficoltosa, si è completata, tra parentesi tonde, la parola abbreviata. Si è intervenuti soltanto là dove erano presenti errori ortografici o refusi. Tutte le parole sottolineate nel testo originale sono state riportate in carattere corsivo. Il cambio di pagina è segnalato con il simbolo //. A margine del testo, fra parentesi quadre, sono stati indicati i numeri delle pagine originali di ciascun quaderno perché l'Autore nel corso della trattazione spesso rimanda a temi trattati in sezioni precedenti. I salti nella numerazione delle pagine segnalano la presenza di una o più pagine bianche nel quaderno.
Per quanto riguarda le note al testo, è stato necessario distinguere quelle dell'Autore da quelle dei curatori: le prime sono indicate con le cifre arabiche, le seconde con i numeri romani. Ogni integrazione delle note dell'Autore è posta fra parentesi quadre. Le note dei curatori hanno lo scopo di fornire le indicazioni bibliografiche degli articoli e delle opere citate e cenni biografici sugli autori menzionati meno familiari ai lettori non specialisti; di quelli più noti si è ritenuto sufficiente indicare le date di nascita e di morte essendo ormai disponibili in rete ottimi repertori biografici. Un terzo tipo di note, contrassegnate dall'indicazione *Nota del curatore*, contiene informazioni di carattere generale sul testo.

CORRADO SEGRE

Lezioni di
Geometria superiore
1890-91

Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti

6. Gino Loria (in centro) e Corrado Segre (secondo da destra) con Luisa Pochintesta, Adelina Pochintesta, Sofia Rolandi-Meroni, Rachele Meroni, Pierino Meroni, Teresa Lorenzi-Galante, Guicciardini-Vaj e Carla Marchesi-Taddei.

Indice

[1]

Introduzione alla geometria sulle ∞^1 algebriche

Cap. 1°. Preliminari

Considerazioni generali sui legami e le coincidenze fra la Geometria e l'Analisi. Metodo delle coordinate. Due modi di fondare l'edifizio geometrico, o partendo dai postulati relativi allo spazio, a punti, rette, piani, ecc., ovvero introducendo per via puramente analitica questi elementi, come gruppi di numeri (coordinate), ecc. Conseguenze che ne derivano. Elementi complessi: ragione della loro introduzione.

Cenno sulle coordinate projettive omogenee. Altri enti che si posson determinare // con coordinate sono quelli dati da un'equazione, cioè le curve piane, **[2]** superficie, ecc., che ora accenniamo.

Curve piane algebriche. Luoghi ed inviluppi. Ordine e classe. Punti multipli e tangenti multiple. Cenno sulle polari. Definizione di curve *aggiunte* ad una data. Le prime polari sono aggiunte. Le multiplicità $s_1, s_2, \ldots$ dei punti singolari di una curva irriduttibile d'ord. n sono tali che $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1) \geq 0$. Invero si potrà condurre (almeno) una curva aggiunta d'ordine $n-1$ per $\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1)$ punti semplici della curva [numero che è positivo, perché uguale ad $n-1$ aumentato della metà di $n(n-1) - \sum s(s-1)$, e questa differenza si vede
[3] esser positiva considerando[1] le // intersezioni della curva con una curva aggiunta d'ordine $n-1$, ad es. la prima polare di un punto qual.] ed il numero complessivo delle intersezioni che così si avranno $\sum s(s-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1)$ dovrà essere $\leqslant n(n-1)$. *Genere* di una curva piana dotata di sole singolarità ordinarie $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1)$. Caso che vi siano solo punti doppi. Cuspidi e flessi. Cenno sulla deduzione delle formole di Plücker[i] dalla teoria delle polari. Dalla I^{a} formola si trae $\nu + r - 2n = 2p - 2$, espressione utile del genere. Il genere corrisponde per dualità a se stesso [perché da $\rho - r = 3(\nu - n)$ si trae $\nu + r - 2n = n + \rho - 2\nu$].

Superficie d'ordine n: numero dei coefficienti o dei punti che le determinano. Classe, rango, punti e linee multiple.

[4] Complessi di rette; grado. Numero // dei coefficienti; alterabilità dell'equazione; non si può alterare se si tien conto della generazione del complesso, della polarità rispetto a questo (cioè all'equazione) ecc. Complessi speciali. Complessi lineari: cenno sulle loro proprietà; caso dei complessi lineari speciali.

Connessi in generale di elementi qualunque tolti a forme fondamentali qualunque: esempi particolari. Coefficienti.

Per tutte le specie di enti enumerate abbiamo nei coeff[i] delle loro equazioni delle *coordinate* nello stesso senso che per gli elementi. La specie più vasta è quella dei

[1]Cfr. Bertini [si tratta del matematico Eugenio Bertini (Forlì 1846 - Pisa 1933)], Rendiconti Ist. Lomb. 1888 [si tratta di: BERTINI, E. 1888, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche*, Rend. Ist. Lombardo Scienze Lett., 2, 21, pp. 326-333 e 413-423]. Del resto la considerazione che quel numero è positivo non è necessaria: in caso opposto la disuguaglianza si avrebbe a fortiori.

[i]Julius Plücker (Elberfeld 1801 - Bonn 1868).

connessi: essa abbraccia le preced$^{\text{i}}$, anche i gruppi di n elem$^{\text{i}}$ di una forma fond. 1$^{\text{a}}$ sp., coll'equaz. $f(x) = 0$. Anche le determinaz$^{\text{i}}$ degli elem$^{\text{i}}$ rientrano in questa, poiché le loro coord. sono i // coeff.$^{\text{i}}$ delle loro equaz$^{\text{i}}$. [5]

Diremo che queste varietà (ed altre che si vedranno in seguito) sono *lineari*, e di *dimensione* data dal numero delle coord. non omogenee. Entro una varietà lineare stanno altre varietà che possiamo definire[2] in due modi diversi. Le coord. $x, y, \ldots$ sian funz$^{\text{i}}$ date di r parametri indip$^{\text{i}}$ $t, u, \ldots$ sicché $x = f(t, u, \ldots), y = g(t, u, \ldots)$, $\ldots$, funz$^{\text{i}}$ le quali mutino in generale valore mutando $t, u, \ldots$, e più precisamente assumano dati valori solo per una serie discreta di gruppi di valori di $t, u, \ldots$; la varietà si dice ∞^{r} se corrisponde ai valori *reali* di $t, u, \ldots$ e per questi le funz$^{\text{i}}$ sono definite ed hanno in generale le derivate prime. Ma noi diremo la varietà ∞^{r} quando corrisponde ai valori *complessi* di $t, u, \ldots$ pei quali quelle // funz$^{\text{i}}$ s'intendono [6] definite e funz$^{\text{i}}$ nel senso di Riemann[ii] (monogene di Cauchy[iii]), cioè aventi in generale le prime derivate. - Esempi: curve, superficie, rigate, sistemi e complessi di rette.

Definiz$^{\text{e}}$ di funz$^{\text{i}}$ algebriche e di irriduttibilità: le funz$^{\text{i}}$ ad un sol valore son razionali. *Varietà algebriche:* quando le $f, g, \ldots$ son funz$^{\text{i}}$ algebriche[3]; varietà *riduttibili*.

Da una o più equaz$^{\text{i}}$ algebriche fra $x, y, \ldots$ è definita una varietà algebrica: ma questa definizione non vale per tutte[4]. Una varietà algebrica $\infty^{\text{k-1}}$ entro la varietà lineare ∞^{k} è però sempre data da un'equaz. alg. fra le coord. $x, y, \ldots$ (eliminando i param$^{\text{i}}$ $t, u, \ldots$): così le curve piane, le superf. ecc. *Varietà razionali*: quando le $f, g, \ldots$ son funz$^{\text{i}}$ alg$^{\text{e}}$ ad un sol valore, cioè razionali, ed // un elemento della [7]

[2]riguardo alla *dimensione*.

[ii]Bernhard Riemann (Breselenz, Hannover, 1826 - Selasca, presso Intra, 1866).

[iii]Augustin Louis Cauchy (Parigi 1789 - Sceaux, Seine, 1857).

[3]legate eventualmente da una o più equaz$^{\text{i}}$ date.

[4]se con sole $k - r$ equaz$^{\text{i}}$ si vuol definire una ∞^{r}. Ma con un numero conveniente di equaz$^{\text{i}}$ si definisce ogni varietà. Kronecker [si tratta del matematico tedesco Leopold Kronecker (Liegnitz 1823 - Berlino 1891)] Festschrift p. 30 [si tratta dell'opera: KRONECKER, L. 1882, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen (Abdruck einer Festschrift zu Hervin Ernst Eduard Kummer's Doctor-Jubiläum)*, Jour. für die reine und angewandte Math., 92, pp. 1-122]. V. anche Wahlen [si tratta del matematico austriaco Karl Theodor Valhen (Vienna 1869 - Praga 1945) professore presso l'Università di Greifswald dal 1904. Fu sostenitore del nazismo. Diede contributi alla Teoria dei numeri e alla matematica applicata.] nel Crelle 108 p. 346 [si tratta di: VAHLEN, K. TH. 1891, *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven*, Jour. für die reine und angewandte Math., 108, pp. 346 -347].

varietà corrisponde in generale ad un sol gruppo di valori dei param$^{\mathrm{i}}$ $t, u, \ldots$ Vedremo poi che per le ∞^1 razionali questa 2$^{\mathrm{a}}$ condiz$^{\mathrm{e}}$ non occorre. Curve, superf., ecc. razionali: come il loro studio si riduca per varie questioni a quello delle varietà *lineari* in cui $t, u, \ldots$ son le coord.$^{\mathrm{e}}$

Varietà lineari o *sistemi lineari* di forme si hanno, più in particolare, quando le coord $x, y, \ldots$ son funz$^{\mathrm{i}}$ *lineari* (fratte col denom. comune) di $t, u, \ldots$, ossia quando le equaz$^{\mathrm{i}}$ degli enti si posson scrivere: $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$ ove le λ sono i param.$^{\mathrm{i}}$ Se le forme f sono linearm$^{\mathrm{e}}$ indip$^{\mathrm{i}}$, cioè non legate da alcuna relaz. $a_0 f_0 + \cdots + a_r f_r \equiv 0$ lineare a coeff$^{\mathrm{i}}$ costanti non tutti nulli, allora la varietà è ∞^{r} poiché l'ente
[8] $\sum \lambda_i f_i = 0$ coincide con l'ente $\sum \mu_i f_i = 0$ solo quando le λ sian pro//porzionali alle μ. (i rapporti delle λ soddisfano alla condiz. posta sui param$^{\mathrm{i}}$ $t, u, \ldots$ a pag. 5 nella definiz$^{\mathrm{e}}$ generale di ∞^{r}).

L'indipendenza lineare delle f significa non stare in un sistema lineare di dimens. $< r$, cioè che non accade che il sistema determ.$^{\mathrm{o}}$ da alcune di esse contenga pure le altre (da cui si potrebbe quindi prescindere). Se $\varphi_i \equiv \sum a_{ik} f_k = 0$ sono forme qualunque del sist., il sistema lineare da esse determinato $\sum \mu_i \varphi_i = 0$ ossia $\sum_k f_k \sum a_{ik} \mu_i = 0$ è tutto contenuto in quello. Se le φ sono $r+1$ cioè $\varphi_0, \ldots, \varphi_r$, si può porre $\sum \mu_i \varphi_i \equiv \sum \lambda_k f_k$, cioè $\sum_i a_{ik} \mu_i = \lambda_k$ sempre che non sia $|a_{ik}| = 0$[5], il che esigerebbe che esistessero delle μ non tutte nulle per cui $\sum_i a_{ik} \mu_i = 0$, ossia
[9] $\sum \mu_i \varphi_i \equiv 0$, cioè che le φ fossero legate linearm$^{\mathrm{e}}$. Se dunque queste // sono indip$^{\mathrm{i}}$ linearm$^{\mathrm{e}}$ il sistema lineare ∞^r da esse determ$^{\mathrm{o}}$ coincide con quello determ$^{\mathrm{o}}$ dalle f: ciò mostra che le f son forme *qualunque* linearm$^{\mathrm{e}}$ indip$^{\mathrm{i}}$ del sistema. -

Dal fatto che se un sist.$^{\mathrm{a}}$ lin.$^{\mathrm{e}}$ contiene alcune forme, continene pure il sist$^{\mathrm{a}}$ lin$^{\mathrm{e}}$ determ$^{\mathrm{o}}$ da queste si traggono conseguenze importanti. L'intersez. di due sist$^{\mathrm{i}}$ lin$^{\mathrm{i}}$ è pure un sist$^{\mathrm{a}}$ lineare (ove esista). Due sist$^{\mathrm{i}}$ lin$^{\mathrm{i}}$ ∞^k, $\infty^{k'}$ che non abbiano alcuna forma comune stanno in un sist$^{\mathrm{a}}$ lin$^{\mathrm{e}}$ $\infty^{k+k'+1}$ tale che ogni sist$^{\mathrm{a}}$ l$^{\mathrm{e}}$ che contenga quei due deve pur contenere questo (se i due sist$^{\mathrm{i}}$ sono determ. dalle forme $f_0, f_1, \ldots f_k$; $f'_0, f'_1, \ldots f'_{k'}$, queste saran tutte linearm. indip.$^{\mathrm{i}}$ poiché se fosse $a_0 f_0 + \cdots + a_k f_k + a'_0 f'_0 + \cdots + a'_k f'_k \equiv 0$ ne seguirebbe che i 2 sist$^{\mathrm{i}}$ avrebbero una

[5]In altri termini si posson ricavare dalle $\varphi_i \equiv \sum a_{ik} f_k$ le f come combinaz$^{\mathrm{i}}$ lineari delle φ.

forma comune; ora tutte quelle $k + k' + 2$ forme // determinano appunto il sist$^\text{a}$ **[10]**
$\infty^{k+k'+1}$).
Due tali sist$^\text{i}$ ∞^k, $\infty^{k'}$ si dicono linearm. indip$^\text{i}$; entro un sist$^\text{a}$ lin. $\infty^{k+k'+1}$ si determinano facilm. due tali sist$^\text{i}$ indip$^\text{i}$ ecc. Due sist$^\text{i}$ lin$^\text{i}$ ∞^k, $\infty^{k'}$, A e A' abbiano comune uno $\infty^i B$; entro A' prendiamo un sist$^\text{a}$ l.$^\text{e}$ $\infty^{k'-i-1}$ C linearm. indip. da B: esso determinerà con A da cui sarà indip. un sist$^\text{a}$ l.$^\text{e}$ $\infty^{k+k'-i}$ contenente A e A', e contenuto in ogni sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$ passante per A, A', cioè il *minimo* sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$ in cui quei due stiano insieme. In altri termini entro un sist$^\text{a}$ ∞^r due sist$^\text{i}$ ∞^k, $\infty^{k'}$, che non stiano in un sist$^\text{a}$ minore, si tagliano in un sist$^\text{a}$ $\infty^{k+k'-r}$ (in uno super$^\text{e}$ se stanno in un sist$^\text{a}$ infer.).
Caso di $k' = r - 1$; caso di $k' = r - 1$ e $k = 1$: se ne trae la costruzione di un //
sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$ ∞^r mediante uno ∞^{r-1} ed una forma esterna (che si congiunge a quello **[11]**
con fasci); esempi.

Considerazioni speciali relative ai sistemi lineari di gruppi di n p$^\text{i}$ di una retta (involuzioni), di curve piane e sup. d'ord. n. Se in un tal sistema ∞^r si fissan più punti con date multiplicità (ed anche con qualche tangente) si hanno, ove esistano, le forme di un sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$: poiché quelle condiz$^\text{i}$ son lineari nelle λ. Caso che si diano r punti semplici. Caso che il sist$^\text{a}$ dato si componga di *tutte* le curve o sup. d'ord. n. - Nel sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$ determ$^\text{o}$ da più forme ogni p. s-plo per queste sarà s-plo per tutte; e se una retta è tang. ivi a quelle, sarà tg. a tutte[6]. - Punti base o
fondamentali di un sist$^\text{a}$; // ordinari e straordinari. I fasci di curve o sup. d'ord. **[12]**
n e le reti di sup. hanno sempre punti base: proprietà che vi si collegano*. - Ogni sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$ $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$ è segato da una retta o da un piano in un sist$^\text{a}$ lin$^\text{e}$ $\lambda_0 {f_0}^{(0)} + \cdots + \lambda_r {f_r}^{(0)} = 0$, il quale però può esser di dimens$^\text{e}$ minore, e cioè sarà ∞^{r-h-1} se la retta od il piano fan parte di un sist$^\text{a}$ ∞^h contenuto nel dato. //

[6]Se le forme che determinano il sistema hanno una parte comune, questa si stacca da tutto il sist$^\text{a}$, e la parte rimanente descrive un sist$^\text{a}$ lineare. Sistemi degeneri.

***Nota del curatore*: L'asterisco inserito da Segre a questo punto non corrisponde a nulla.

[13] Cap. 2°. Degl'iperspazi

Il nostro non essendo un corso sugl'iperspazi, ma un corso che si varrà di questi sia per raggiungere la massima generalità, sia come strumento di ricerca, ci limiteremo a dire intorno ad essi le cose fondamentali.

Concetto d'iperspazio. - Ricordiamo (pag. 1) la via puram^e analitica d'introdurre i punti come gruppi di 3 numeri, i piani ecc. come equazioni ecc.: perché fermarsi a 3 numeri? D'altra parte le varietà lineari considerate nel Cap. preced., i sist^i lin^i in cui le forme eran determ^e dai param^i omog^i $\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_r$ ci conducevano ad enti geometrici determinabili ... con gruppi non solo di 3 ma più coord.^{e} E si poteva continuare, considerando entro ad un sist. lineare di forme ∞^r la varietà ∞^{r-1} data da
[14] un'equ. di // grado n fra le $\lambda_0\ldots\lambda_r$: i coeff. si posson assumere come coord. della varietà ∞^{r-1} entro al sistema di tutte ...; e così via. Si complica l'ente geometrico, ma la rappresentaz. analit^a è sempre un gruppo di numeri, variabili ad arbitrio. A questa stessa rappresentaz^e anal. si giunge se nello spazio si conservano tutti i postulati, come quello che per 2 punti passa *una* retta, ecc., ma si toglie quello delle 3 dimensioni: allora i punti della retta (che son determ. da 1 numero) congiunti ad un punto esterno danno il piano (i cui p^i saran determ. da 2 numeri), e congiungendo i p^i di questo ad uno esterno si ha uno spazio a 3 dimens^i, e congiungendo ad 1 p. esterno (supposto esistere) si ha uno spazio a 4 dimens^i; ecc. ecc. e si giunge allo
[15] spazio a r dimens^i definito // da r numeri. Valore matematico che avrebbe lo studio dello spazio con tali postulati, quand'anche contraddicessero all'esperienza. - Queste consideraz^i ci suggeriscono un'estensione del significato delle parole *spazio* e *punto*. Il *punto* sarà per noi: 1^o un gruppo di valori di r numeri; 2^o un elemento di una varietà lineare ∞^r qualunque in cui quei numeri son le coord^e; 3^o un punto ordinario nell'ipotesi che lo spazio effettivo sia ad r dimensioni. Il 1^o significato è puramente analitico; il 2^o ed il 3^o son geometrici, ma il 3^o più vincolato a postulati (più fisico) che il 2.^{o} Noi non facciamo però distinzione alcuna: il *punto* è un ente *matematico*; lo *spazio* è la varietà di tutti i punti. Ponendo $r = 3$ ed attenendosi al 3^o
[16] significato si avrà lo spa//zio *ordinario*.[7]

I vantaggi che si ottengono dall'introduz. degli'iperspazi sono appunto i due di cui si fe' cenno al principio di questo Cap^{o}. Anzitutto la massima generalità, in quanto si può dire che tutti gli enti geometrici e vari analitici (algebrici) vi rientrano. E non solo i sistemi o varietà lineari, ma ogni altra specie di varietà. Così la varietà delle rette // dello spazio ord^{o} è una M_4^2 di S_5; i complessi, sistemi, rigate, ne sono **[17]**
le M_3, le superf., le curve, ecc.; il punto di S_5 fuori della M_4^2 non ha un'interpretaz. (solo anal^{a}) e non occorre. Così si potrebbero studiare le rappres^{i} in iperspazi della varietà delle coppie di punti tolti da due rette o piani, ecc. - L'altra classe di vantaggi degli'iperspazi si ha nelle varie applicaz^{i} che essi posson ricevere dalla geometria; alcune ne vedremo; una è quella del considerare gli enti di uno spazio, ad es. quello ordinario, come proiezioni di enti di spazi superiori. Già nella geom. ordinaria si hanno esempi in cui uscendo dalla forma fontam^{le} di cui si tratta la si studia più facilmente: così le involuz^{i} di 2^{o} (e 3^{o}) grado di una retta, ricorrendo alla conica (o alla cubica sghemba); // il teor. di Desargues[iv] sui triangoli omologici; le coniche **[18]**
studiate, a mo' degli antichi, come sezioni del cono circolare; ecc.

Qui però si può obbiettare che se per studiare una figura dello spazio ordinario lo si considera come contenuto in un iperspazio, s'introduce con ciò un nuovo postulato: l'essere lo spazio ordinario contenuto in uno superiore, cioè l'esistenza di punti fuori dello spazio ordinario, ecc. Ma così non è: poiché basta sostituire al punto dello spazio ord^{o} il gruppo delle coordinate, e poi aumentare questo gruppo con nuovi numeri, e così si avrà l'iperspazio che occorre. - Si può replicare che questo procedimento è puramente analitico. Quantunque noi non diamo una grande importanza all'attenersi piuttosto a concetti geo//metrici che ad analitici, **[19]**
pure possiamo tradurre geometricamente ciò che ora s'e' detto, in due modi diversi. Noi possiam riferire univocamente e linearmente lo spazio ordinario ad un sistema lineare di forme ∞^3, ad es^{o} ad una invol. di grado n e di 3^{a} specie di una forma fondam^{e} semplice. Questa invol. è contenuta, per n abbastanza grande, in una di

[7] Le definiz^{i} di pag. 5, 6 delle varietà ∞^k, in partic. di quelle algebriche e razionali si conservano per le varietà contenute nello spazio di dim. r, che s'indicherà con S_r. Notazioni per le varietà stesse: le M_{r-1} algebr. son date da equaz^{i}; varietà lineari o spazi entro l'S_r: s'indicano con S_k. L'analogia porta ai nomi di *curva*, *superf.*,…, *retta*, *piano*, entro l'S_r. Punti reali e complessi.

[iv] Girard Desargues (Lione 1591 - Lione 1661).

quella dimensione che si vuole, e che occorre per i ragionamenti che si voglion fare.
Dopo, si ritorna dal sistema lineare ∞^3 di forme allo spazio ordinario, mediante la
corrispondenza. Oppure, possiamo direttamente considerare lo spazio ordinario,
ai cui punti, come inviluppi di 1$^{\rm a}$ classe, s'aggiunga una superf. fissa di classe $n-1$,
[20] come contenuto in uno spazio lineare superiore // i cui *punti* sarebbero superf. di
classe n; le rette ed i piani ordinari sarebbero (sempre aggiungendo a tutti i loro
punti la superf. fissa) pure rette S_1 e piani S_2 di quell'iperspazio (v. pag. 11, sist$^{\rm i}$
lin$^{\rm i}$ degeneri).

Cenno storico e bibliografico sulla geometria, specialmente projettiva, degl'iperspazi. In quali direzioni convenga coltivarla, e quali siano quelle facili ricerche che posson servire come esercizi, ma non come lavori scientifici.

Spazi contenuti in un iperspazio.

Definizione degli spazi contenuti in S_r (definiz. tale che se questo è un sistema
lineare quelli siano appunto i sist$^{\rm i}$ lin$^{\rm i}$ contenuti in esso) mediante le $x_i = \lambda_0 x_i^0 +$
[21] $\lambda_1 x_i^1 + \cdots + \lambda_k x_i^{(k)}$. // Questo spazio, determinato dai p$^{\rm i}$ $x^0 x^1 \ldots x^{(k)}$, è un S_k,
cioè dalle $\sum_l \lambda_l x_i^{(l)} \equiv \sum_l \mu_l x_i^{(l)}$ segue la proporzionalità delle λ alle μ, se non vi
son valori (non tutti nulli) delle λ per cui quelle espressioni s'annullino, cioè se
$k \leq r$ e i determinanti... delle coord$^{\rm e}$ di $x^0 x^1 \ldots x^{(k)}$ non son tutti nulli, cioè quei p$^{\rm i}$
linearm$^{\rm e}$ indipendenti. Se fossero legati linearm$^{\rm e}$, starebbero in uno spazio minore.
Lo spazio determ$^{\rm o}$ dai punti $\sum \lambda_l x^{(\mathrm{l})}, \sum \mu_l x^{(\mathrm{l})}, \ldots$ sta tutto su quell'S_k. Sicché questo
contiene infiniti spazi, e se *su esso* si chiamano coordianate i param$^{\rm i}$ λ, si ha che
anche su esso gli spazi minori son rappres$^{\rm i}$ mediante combinaz$^{\rm i}$ lineari delle coord.
dei p$^{\rm i}$ che li determinano, ossia con forme lineari. - La proposiz. preced. significa
[22] che se uno spazio passa per 2 o più punti, passa pure per lo spazio // che questi
determinano. Ne segue che l'intersez. di due spazi, se esiste, è un punto oppure
uno spazio. Tutto ciò è analogo, anzi identico a cose viste sui sist$^{\rm i}$ lineari (pag. 7
e segu$^{\rm i}$). Così si ha che due spazi S_k, $S_{k'}$ con un S_i comune stanno in un S_r ove

$r \leq k + k' - i$: questo S_r è determ^{o} da $i+1$ p^{i} dell'S_i ed altri $k-i$, $k'-i$ risp. di S_k, $S_{k'}$.

Dalla rappresentaz. param^{a} di un S_{r-1} od iperpiano si trae che esso è pur rappresentabile con un'equaz. $\sum \xi_i x_i = 0$; e viceversa; e si trae insieme la condiz. perché $r+1$ punti stiano in un'iperpiano. Dualità fra punti ed iperpiani. Sistemi lineari (fasci, reti, ecc.) d'iperpiani determinati da h indipendenti (cioè coi determ^{i} delle coord. non tutti nulli) $\sum \xi_i x_i = 0$, $\sum \eta_i x_i = 0, \ldots$; da queste equaz^{i} si traggono h delle x // come forme lineari delle altre, onde la base di quel sistema lineare ∞^{h-1} **[23]**
ossia l'inters. di h iperpiani indip^{i} sarà un S_{r-h}. Viceversa un S_k si può considerare come l'inters. di $r-k$ iperpiani indip., ossia la base di un sist. lineare ∞^{r-k-1}. Così gli spazi entro S_r godono di proprietà duali; spazi duali S_k ed S_{r-k-1}. Considerando un S_k e un $S_{k'}$ come inters^{i} di $r-k$, $r-k'$ iperpiani, si ha che si tagliano in un S_i ove $i \geq k + k' - r$. Se dunque non stanno in uno spazio inferiore ad S_r sicché (p. 22) $r \leq k + k' - i$, varrà il segno d'uguaglianza. Se $k + k' < r$ non vi è in generale intersez., a meno che i due spazi, i quali stanno sempre in $S_{k+k'+1}$, stiano in uno spazio minore. Se $k + k' \geq r$ essi si tagliano in generale in un $S_{k+k'-r}$; ma si ta//gliano in uno spazio maggiore S_i quando stanno in uno spazio $S_{k+k'-i}$ **[24]**
inferiore ad S_r. Esempi: due spazi duali; uno spazio qualunque ed un iperpiano; ecc.

Rappresentazione degli S_k di S_r con coordinate. Considerandone i p^{i} d'incontro con $k+1$ S_{r-k} si trovano $(k+1)(r-k)$ coord^{e} indip^{i}, cioè che gli S_k di S_r sono $\infty^{(k+1)(r-k)}$. Ma coord^{e} più simmetriche e che non danno eccezioni si hanno nei determin^{i} della matrice delle coord. dei p^{i} o degl'iperpiani da cui l'S_k è determ^{o}: v. Clebsch[v] Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Abhandl. kön. Ges. d. W. zu Göttingen Bd 17, 1872)[vi], e poi D'Ovidio[vii] Le funzioni metriche fondamentali negli spazi ecc. (Memorie Acc. Lincei, ser. 3^{a} vol. 1^{o}, 1877)[viii]. Così gli

[v] Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (Königsberg 1833 - Göttingen 1872).

[vi] CLEBSCH, R. A. 1872, *Über eine Fundamentalaufgabe der Invarianten Theorie*, Abhandl. K. Gesell. der Wissen. zu Göttingen, Math. Classe, pp. 3-62.

[vii] Enrico D'Ovidio (Campobasso 1843 - Torino 1933).

[viii] D'OVIDIO, E. 1876-77, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante*, Atti R. Acc. Lincei, Memorie Cl. Sci. FMN, 3, 1, pp. 929-986.

[25] S_k di S_r ap//paiono come formanti una varietà *razionale* di dimens. $(k+1)(r-k)$ nello spazio di dimens. $\binom{r+1}{k+1}-1$. La condizione d'incidenza di due spazi duali S_k, $S_(r-k-1)$ viene bilineare nelle coord[e] dei due spazi.

Elementi fondamentali; punti, iperpiani, ecc. aventi tutte le coordinate nulle meno una.

Projezione e sezione entro S_r; forme geometriche fondamentali di questo spazio. Come quelle operazioni servano a riferire fra loro queste forme. Proiettività. Definizione diretta della *corrispondenza lineare* o *projettiva* fra due S_r mediante le equazioni $x_i' = \sum_k a_{ik}x_k$ ove $|a_{ik}| \neq 0$. Ponendo per le x_k delle forme lineari si vede che gli spazi subordinati dei due S_r si corrispondono pure linearmente. [Collineazione e
[26] reciprocità. // Punti e iperpiani della collineazione generale entro S_r. Caso particolare dell'omologia e in genere delle collineaz[i] (assiali) $x_0' = \rho x_0 \ldots x_k' = \rho x_k$, $x_{k+1}' = \sigma x_{k+1}, \ldots x_r' = \sigma x_r$, che hanno due spazi fondamentali S_k, S_{r-k-1} di p[i] uniti.]

La corrispondenza lineare fra due forme lascia inalterati i *birapporti* delle forme semplici omologhe, (definiti analiticam. $(abcd) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$).
Posto $P(x_0 \ldots x_r)$, $U(1, \ldots 1)$, nel fascio d'iperpiani $\lambda x_0 + \mu x_1 = 0$ si trova che il gruppo che projetta $(01UP)$ ha per birapporto $x_0 : x_1$; e così le coord. in S_r si posson definire come birapporti. Le formule $x_i' = \sum a_{ik}x_k$ possono anche servire per una trasformazione di coordinate; e si trova come dianzi che le x_i' si possono ancora considerare come birapporti rispetto ad un nuovo sistema di riferimento.
[27] Qui conviene osservare che i birapporti furon // da noi definiti ammettendo già le coord.
Ma nello spazio ordinario essi si posson definire, grazie a Staudt[ix], senza coord. o misure, in modo puramente grafico. Analogamente si potrà fare in S_r quando questo si definisca sinteticamente con alcune proprietà (postulati) relative agli S_k subordinati: con ciò si stabiliranno poi le coord[e] in S_r e l'equazione lineare per gl'iperpiani. Trovare quali sono quei postulati che caratterizzano sinteticamente l'S_r (cioè le varietà *lineari* di enti qualunque).

[ix] Karl Georg Christian von Staudt (Rothenburg ob der Tauber 1798 - Erlangen 1867).

Ritornando alle projettività, se gli elem$^{\text{i}}$ fondam$^{\text{li}}$ si corrispondono le equaz$^{\text{i}}$ diventano $x_i' = a_i x_i$, e se inoltre si corrispondono i p$^{\text{i}}$ uniti $x_i' = x_i$. La proj$^{\text{à}}$ è determ. da $r+2$ coppie p$^{\text{i}}$ omol.$^{\text{i}}$ Proj$^{\text{à}}$ degeneri: si riducono a proj$^{\text{à}}$ tra forme minori. Proj$^{\text{à}}$ fra spazi sovrapposti. Collineazione. [pag. 25, 26] Cenno sulle omografie involutorie.[8] - Reciprocità in S_r $\xi_i' = \sum a_{ik} x_k$, // ossia $\sum a_{ik} x_i' x_k = 0$, $\xi_i = \sum a_{ki} x_k'$. Punti uniti **[28]**
$\sum a_{ik} x_i x_k = 0$. Polarità (elementi involutori $\sum a_{ik} x_k = \rho \sum a_{ki} x_k$; tutti se questa vale qualunque sia x, ossia $a_{ik} = \rho a_{ki} = \rho^2 a_{ik}$, onde $a_{ik} = a_{ki}$ oppure $a_{ik} = -a_{ki}$): polarità ordinaria e sistema nullo; questo è sempre degenere quando r è pari: definisce un complesso lineare di rette $\sum a_{ik} r_{ik} = 0$. Quadriche di S_r: la generaz. come luogo dei p$^{\text{i}}$ uniti di una reciprocità si riduce, se questa è degenere di 1$^{\text{a}}$, 2$^{\text{a}}$, ... specie alla generazione con forme inferiori reciproche: i sostegni di queste stanno sulla quadrica; se s'incontrano questa è un cono. //

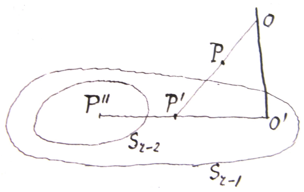
Varietà di dim. $r-1$ *di* S_r. Le chiamiamo brevemente *varietà*. Varietà $f(x) = 0$ **[29]**
d'ord. n: numero dei coeff$^{\text{i}}$= $\binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r}$, onde tante sono le variet$^{\text{à}}$ d'ord. n di S_r quante quelle d'ord. r di S_n. Conseguenza dello sviluppo $f(\lambda x + \mu y) = \lambda^n f(x) + \lambda^{n-1} \mu \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \lambda^{n-2} \mu^2 \sum y_i y_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \cdots + \mu^n f(y)$.
Punto semplice ed iperpiano tang; punto doppio, ..., punto s-plo e varietà-cono d'ord. s tang. Se il punto è quello fondamentale 0, l'equ. sarà $a_s x_0^{n-s} + a_{s+1} + x_0^{n-s-1} + \cdots + a_n = 0$. Casi di $s = n-1$ ed $s = n$. - Polarità: definiz. e proprietà delle varietà polari.

Intersez$^{\text{i}}$ di varietà: r varietà d'ord. $n, n_1, \ldots, n_r$ si tagliano in $n_1 n_2 \ldots n_r$ punti. Un num. minore i di varietà si tagliano in una M_{r-i} che è incontrata in generale //
da un S_i in $n_1 n_2 \ldots n_i$ punti. **[30]**

Sistemi lineari $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_k f_k = 0$ di varietà d'ord. n. Si estendono senz'altro le cose viste a pag. 7-11. Danno una nuova specie di varietà lineari o spazi. Così pure si ha che un p. s-plo per le f è tale per tutto il sistema; se le f hanno una parte comune questa si stacca da tutte e rimane un sist. lineare. Le forme del sistema che passan per dati p$^{\text{i}}$ con date multipl$^{\text{à}}$ formano, ove esistano, un sist$^{\text{a}}$ lin$^{\text{e}}$; ecc. ecc. Quest'ultima proprietà vale anche se i p$^{\text{i}}$ dati sono ∞ e ad esempio si dà una curva,

[8]V. Bertini, Rendic$^{\text{i}}$ Ist. Lomb 1886 [si tratta di: BERTINI, E. 1886, *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni*, Rend. Ist. Lombardo Scienze Lett., 2, 19, pp. 176-183].

o sup., ... per cui le varietà debban passare con una certa multiplicità: poiché se ne passa più di una, passa tutto il fascio determ. da due, la rete determ. da tre, ecc
[31] ... Riguardo // poi alla dimens. del sistema che rimane, si noti che un p. s-plo impone $\frac{s(s+1)\dots(s+r-1)}{r^1}$ condiz^{i} lineari, e se si ha un num. finito di passaggi imposti, sommando tutti i num^{i} di condiz. si avrà un limite super. del numero delle condiz^{i} complessive.



Le varietà alg. M_k di dim. $k < r-1$, rappres. da equaz^{i} $F_1(x_1 tu\dots) = 0\,,\quad F_2(x_2 tu\dots) = 0\,,\ \dots$ $F_r(x_r tu\dots) = 0$, per projez^{i} in spazi infer^{i} danno var^{à} algebr. Si noti, anche pel seguito, che una proj. su un S_i da un S_{r-i-1} si può scindere in più projezioni centrali da centri $O, O' \dots$ dell'S_{r-i-1} (così per la projezione di P dalla retta OO' sopra l'S_{r-2}). Ora la proj. centrale della M_k dal p. fondam. 1 si ha
[32] ponendo $x_1 = 0$ e conservan//do $x_2 \dots x_r$. A ciò si può obbiettare che il p. fondam. 1 è particolare in quanto che da esso la M_k si projetta più volte, quanto è il grado di F_1 risp. ad x_1; ma si faccia una trasformaz. di coord. e le equaz^{i} (più generali) che si avranno per la M_k proveranno di nuovo l'asserto. - Che la proj. della M_k da 1 p., ... da un S_{r-k-2} sia in generale univoca si vede segando la M_k con un S_{r-k} in un certo num. finito di p^{i} (dalle equaz^{i} lineari che danno l'S_{r-k}) e tirando le rette che congiungono questi: se il p. non sta su queste, ..., se l'S_{r-k-2} non le incontra (ma stanno sull'S_{r-k}), la projez. è univoca. - Due S_{r-k} incontrano in generale la M_k lo stesso num. di volte: se $r = k+1$ è già noto; se $r > k+1$ si diminuisce r projettando
[33] la M_k da 1 p. comune ai due S_{r-k} // (p. che si può sempre ammettere): *ordine* di una M_k. Ogni projez. da p^{i} esterni ha lo stesso ordine ...

Rappresentaz^{e} analitica delle varietà algebriche più semplice che quella di definiz. Sia una curva e l'$S_{r-3}(34\dots r)$ la projetti univocam. in $f(x_1x_2) = 0$. Su ogni S_{r-2} projettante le x_1x_2 son fisse e le $x_3 \dots x_r$ relative ai p^{i} della curva devono essere individuate. E precisamente dalle equaz^{i} analoghe $g(x_1x_3) = 0$, $h(x_2x_3) = 0$ si trae la soluz. comune in x_3 razionalmente in x_1x_2 cioè $x_3 = f_3(x_1x_2), \dots x_r = f_r(x_1x_2)$. Analogamente in generale per una M_k si ha $f(x_1 \dots x_{k+1}) = 0$, $x_{k+2} =$

$f_{k+2}(x_1 \dots x_{k+1}) \dots x_r = f_r(x_1 \dots x_{k+1})$. In seguito a trasformaz. di coord., che può esser stata necessaria per render univoca la projez. quando le // equaz^{i} erano [34] $F_1(x_1 tu \dots) = 0$, $\dots F_r(x_2 tu \dots) = 0$, oppure semplicem. per simmetria si può dire che questa M_k si può sempre rappresentare così: $x_1 = f_1(y_1 \dots y_{k+1})$, $\dots x_r = f_r(y_1 \dots y_{k+1})$ ove $f(y_1 \dots y_{k+1}) = 0$, essendo le f_i razionali e tali che assumono ogni gruppo di valori solo per *una* soluz. della $f(y) = 0$. Così le r irrazionalità o funz^{i} algebriche di $tu \dots$ che prima s'avevano son ridotte ad una sola, ad es. alla y_{k+1} come funz. algebr. di $y_1 \dots y_k$. Si può dire che una M_k di S_r quando $r > k+1$ si può sempre riferire razionalmente ad una M_k di S_{k+1}[9]. Alle formule di trasformaz. si può introducendo l'omogeneità dar la forma $x_0 : x_1 : \dots : x_r = \varphi_0(y) : \varphi_1(y) : \dots : \varphi_r(y)$, con $f(y_0 \dots y_{k+1})$, ove le φ e f son forme nelle y. //

Intersez. di due M_k^n, $M_{k'}^{n'}$: se $k + k' \geq r$ è una $M_{k+k'-r}$ d'ord. prodotto. Basta [35] dimostrare per $k' = r - k$. Se la $M_{k'}$ si spezza in tanti $S_{k'}$. Principio dell'invarianza del numero. Pel caso di una curva e di una $M_{r-1}^{n'}$ l'invariabilità di quel numero seguirà da ciò che alla curva se ne può riferire univocam. un'altra su cui i relativi iperpiani danno la serie corrisp. a quella data sulla prima delle $M_{r-1}^{n'}$. Pel caso generale v. dimostraz^{i} che non ricorrono a quel principio in Halphen[x], (Bulletin soc. math. de France t. II[xi]) ed in Pieri[xii] (1888, Giornale di mat. vol. XXVI[xiii]). - Intersez^{i} di più varietà.

Varietà luogo di una ∞^k algebrica di S_i: è una M_{k+i} se ... Casi particolari. Coni di varie specie e dimensioni.

Curve e loro caratteri. Tangenti, piani // e spazi osculatori. Classe e ranghi [36] diversi. Cenno sulle formule di Cayley[xiv] e di Veronese[xv]. Punti multipli.

Cenno sulle varietà superiori, superficie, ecc. di S_r rispetto alle tangenti nei punti semplici e multipli (v. Del Pezzo[xvi], Sugli spazi tangenti ecc. Rendic^{i} Accad.

[9]Kronecker, Festschrift p. 31 [vedi nota 4].

[x]Georges Halphen (Rouen 1844 - Versailles 1889).

[xi]HALPHEN, G. 1874, *Recherches de géométrie à n dimensions*, Bull. Soc. Math. de France, 2, pp. 34-52.

[xii]Mario Pieri (Lucca 1860 - S. Andrea di Compito, Lucca, 1913).

[xiii]PIERI, M. 1888, *Sopra un teorema di geometria ad n dimensioni*, Giornale di Mat., 26, pp. 251-254.

[xiv]Arthur Cayley (Richmond, Surrey, 1821 - Cambridge 1895).

[xv]Giuseppe Veronese (Chioggia 1854 - Padova 1917).

[xvi]Pasquale Del Pezzo (Berlino 1859 - Napoli 1936).

Napoli 1886[xvii]).

Quando è che diciamo che una varietà *appartiene* ad S_r, e quando che è *normale* per questo spazio.

Una curva d'ordine n non può appartenere ad uno spazio superiore ad S_n, se è irriduttibile[10]. E similmente una M_k^n non può appartenere a spazi super$^{\text{i}}$ di S_{n+k-1} senza spezzarsi. - Ne segue che le M_k^n di S_{n+k-1} sono normali. - Caso di $n = 2$

[37] Per vedere l'esistenza e le prime proprietà osserviamo che segando // una C^n di S_n cogl'iperpiani per $n-1$ punti fissi risulta la C^n razionale; e due tali fasci d'iperpiani risultano riferiti projettivamente (l'una e l'altra cosa per principii su cui ritorneremo nel Cap. 3$^{\text{o}}$). Ne segue la generaz. con fasci proj$^{\text{i}}$ $\lambda A_1 + \mu B_1 = 0$, $\dots, \lambda A_n + \mu B_n = 0$ e se queste equ$^{\text{i}}$ s'immaginano risolte risp. alle coord., queste vengono forme di grado n in λ, μ sicché la curva è d'ord. n.[11] La si può anche generare colle stelle collineari $\rho_1 A_1 + \cdots + \rho_n A_n = 0$, $\rho_1 B_1 + \cdots + \rho_n B_n = 0$ i cui centri son presi ad arbitrio sulla curva e così, segandole con un iperpiano e considerando i p$^{\text{i}}$ uniti dalla collineazione che si avrà su questo, si scorge di nuovo che la curva è d'ord. n; e similmente si vede che ogni S_{n-2} intersez. di due iperpiani
[38] omologhi incon//tra C^{n} in $n-1$ p.$^{\text{i}}$ La C^n è individuata da $n+3$ p.$^{\text{i}}$

Similmente $n-1$ fasci proj. d'iperpiani in S_n generano una sup. rigata che è pur generabile mediante due forme aventi per sostegni due gener$^{\text{i}}$ qual., e collineari: ne segue che essa è d'ord. $n-1$ e gli S_{n-2} intersez$^{\text{i}}$ degli'iperpiani omologhi e quindi quelli base di quei fasci segano la rigata secondo delle C^{n-2}[12]. - E in generale $n-i$ fasci proj. d'iperpiani in S_n generano una M_{i+1}^{n-i} luogo di una ∞^1 razionale di S_i, la quale si può pure generare mediante due forme collineari aventi per sostegni due qualunque di quegli S_i: gli S_{n-2} intersez$^{\text{i}}$ degli'iperpiani omologhi e quindi quelli base dei fasci segano le varietà secondo delle M_i^{n-i-1} luoghi di ∞^1 S_{i-1}. Ogni //
[39] M_{i+1}^{n-i} di S_n luogo di ∞^1 S_i si può generare così, poiché un iperpiano per S_i dà

[xvii] DEL PEZZO, P. 1886, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, 25, pp. 176-180.

[10] Clifford [si tratta del matematico inglese William Clifford (Exeter 1845- Madera 1879)], On the Classification of Loci 1878 [si tratta di: CLIFFORD, W. 1878, *On the Classification of Loci*, Philos. Transactions, 169, pp. 663-681].

[11] Una curva raz$^{\text{le}}$ così rappresentata appartiene ad S_n se non è nullo il determ. dei coeff$^{\text{i}}$ delle forme.

[12] Ogni rigata d'ord. $n-1$ di S_n si genera in tal modo.

ancora una M_i^{n-i-1} che dovrà stare in un S_{n-2} (non essendo in generale riduttibile) ed allora il fascio d'iperpiani per questo determina gli ∞^1 S_i, ecc.

Applicazioni delle cose dette in generale sugl'iperspazi ad alcune varietà.
1° Alla geometria della retta, cioè di una M_4^2 di S_5: come su questa si rappresentino i complessi e le congruenze lineari, i fasci di rette e le stelle ed i piani di rette; le rigate. Applicazione del teorema di Clifford alle rigate di 3° e 4° grado. - 2° alla geometria dei sistemi lineari di forme (involuzioni su una forma semplice, sistemi lineari di varietà in un S_r). *Indice* di una ∞^k // di forme: è il numero di quelle che **[40]**
passano per k punti, ed è l'ordine della M_k che rappresenta coi suoi punti quella varietà. Un sistema ∞^k d'indice n sta in un sistema lineare di dimens. $\leq n+k-1$; e se appartiene per $k=1$ ad un sist. lineare ∞^n, esso è razionale, cioè rappresentabile con ... Due sist$^{\text{i}}$ ∞^k, $\infty^{k'}$ di forme, d'indici n, n', contenuti in una ∞^r lineare per $k+k' \geq r$ hanno comune una $\infty^{k+k'-r}$ d'indice nn'. E così altre proposizioni, ad esempio quella che una F^3 o appartiene ad S_4 ed è rigata, o sta in S_3 e contiene in generale 27 rette, si traducono per sist$^{\text{i}}$ lin$^{\text{i}}$ [13]. //

Un altro modo di rappresentare e studiare i sist$^{\text{i}}$ lin$^{\text{i}}$ di forme mediante gl'i- **[41]**
perspazi, il quale coincide poi in sostanza con quello, consiste nel rappresentare le forme del sistema ∞^r $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$ cogl'iperpiani (di coord. λ) di S_r invece che coi punti. Sia S_k lo spazio di quelle forme (varietà M_{k-1}). Supporremo $r \geq k$. Alle forme passanti per un p. x di S_k corrisponderanno gl'iperpiani passanti pel p. $y_i = f_i(x)$ di S_r. Il p. y può così corrispondere ad un solo p. x od anche a parecchi: quest'ultimo caso quando il passaggio di una forma del sistema per un p. tragga il passaggio per altri $\mu - 1$ p$^{\text{i}}$. Noi supporremo che μ sia finito, cioè che ad un p. y non corrispondano ∞ p$^{\text{i}}$ x. Allora la varietà descritta dal p. $y_i = f_i(x)$ di S_r sarà una M_k, in corrispondenza $(1, \mu)$ coll'S_k. Così ogni varietà M_k // riferibile razionalmente all'S_k ha le sue sezioni cogl'iperpiani rappresentate da **[42]**
un sist. lineare di forme. - Nel caso $k=1$ se $\mu > 1$ i gruppi associati di μ punti formano un'involuzione ∞^1, (pel teor. che vedremo poi, che una ∞^1 di gruppi di p$^{\text{i}}$ tale che ogni p. individui un gruppo è un'involuz.$^{\text{e}}$) e detti φ, ψ due gruppi di

[13] È appunto per questi che il Cayley introduce gl'iperspazi.

questa, le $f_0, f_1, \ldots, f_r$ saranno forme di grado $\frac{n}{\mu}$ (n essendo il loro ordine) nelle φ, ψ; viceversa partendo da tali forme si avrà un'involuz. ∞^r in cui ogni gruppo di n p^{i} si spezza in $\frac{n}{\mu}$ gruppi di un'invol. ∞^1 di grado μ, sicché il passaggio per un p. trae il passaggio per $\mu - 1$. - Analogam. in S_k si hanno delle *involuz^{i}* di gruppi di μ punti, e datane una si formano subito i sist^{i} lineari ∞^r corrisp^{i}. - Un caso ovvio
[43] in cui $\mu > 1$ si ha in ge//nerale quando $r = k$: allora si ha la rappresentaz. di due S_k descritti da x, y l'uno sull'altro mediante le $y_i = f_i(x)$. La corrispondenza sarà univoca in ambi i sensi quando $\mu = 1$, cioè k varietà del sistema lin. abbiano solo 1 inters. variab. : sistema *omaloidico*; le x sono pure funz^{i} raz^{li} delle y. Senza fermarci su queste corrisp. biraz^{li} fra due S_k, ci limitiamo a ricordare che per $k = 2$ esse si posson considerare come prodotti di trasformaz^{i} *quadratiche* (proposiz. che non si sa estendere a $k > 2$ in modo opportuno), e che in generale si posson costruire i sistemi omaloidici di S_k partendo dalla rappresentazione di una varietà razionale di questo sull'S_{k-1} corrisp., come Cremona[xviii] mostrò per $k = 3$. -

[44] Ordine della M_k rappresentativa di un // sist. lin. ∞^r di S_k: per $k = 1$ si ha una curva il cui ord. è l'ordine dell'invol., astraendo dai p^{i} fissi che questa può avere; e per $k > 1$ è il numero delle inters^{i} variab^{i} di k forme qual. del sistema. Però nel caso che $\mu > 1$ bisogna dividere per μ. Si può togliere questa condiz. contando allora μ volte ogni p. y della M_k, cioè considerando una M_k μ-pla. Questa convenzione rende univoche le corrispondenze multiple; è importante in tutta la matematica ed ha condotto ad es^{o}, come vedremo, alla rappresentaz. di una funz. algebr. di 1 variab. mediante la sup. di Riemann.

Teor.: se un sist lin ∞^r di forme $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_2 f_2 = 0$ è contenuto in uno $\infty^{r'}$ $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_{r'} f_{r'} = 0$ $(r' > r)$, la M_k rappresentaz. di quello, cioè $y_0 =$
[45] $f_0(x) \ldots y_r = f_r(x)$, // è proj. della M_k rappres. di questo, cioè $y'_0 = f_0(x), \ldots y'_{r'} = f_{r'}(x)$. - Così potendo sulla retta ogni involuz. di grado $\leq n$, completata con punti fissi, considerarsi come contenuta in quella di tutti i gruppi n p^{i}, ogni curva raz^{le} d'ord. $\leq n$ sarà proj. di quella $y_0 = \lambda^n$, $y_1 = \lambda^{n-1}\mu, \ldots y_n = \mu^n$, raz^{le} norm^{le} di S_n. Solo queste dunque son le curve raz^{li} normali; e se ne ha una rappres^{e} canonica

[xviii] Luigi Cremona (Pavia 1830 - Roma 1903).

che servirà poi e che si dedurrebbe anche dalla rappres. gener. con forme binarie di grado n risolvendole risp. a $\lambda^n, \lambda^{n-1}\mu, \dots \mu^n$ e trasformando le coord. Segue che due C^n di S_n son projettive. - Analogam. le superf. rappresentate sul piano da sist^{i} lin^{i} d'ord. n o minore sono proj. di una F^{n^2} di $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$. Caso di $n = 2$ (v. Veronese, La sup. omal. normale del 4^{o} ord. ecc. Mem. Acc. Lincei 1883-84[xix]): si ha una F^4 // con ∞^r coniche, ecc., che, con le rigate razionali già considerate, dà tutte le F^{n-1} **[46]**
di S_n (v. Del Pezzo, Sulle sup. d'ord. n immerse in S_n Rendic^{i} Acc. Napoli 1885[xx]; Sulle projezioni di una sup. e di una varietà di S_n. Rendic^{i} Acc. Napoli 1886[xxi]; Sulle sup. d'ord. n immerse in S_n, Rendic^{i} Circ. Palermo t. I 1887[xxii]); essa ha per projez. su S_3 la sup. di Steiner[xxiii]. //

Cap. 3°. Oggetto della Geometria su una ∞^1 algebrica. Corrispondenze algebr^{e}. Serie lineari. **[47]**

Gli enti che studieremo: le ∞^1 algebriche, cioè le curve. Ma il punto di vista, cioè la specie delle proprietà, va ancor definita. Cenno sulle trasformazioni come caratterizzanti gl'indirizzi (Klein[xxiv], Vergl. Betrachtungen[xxv]...): geom. elem^{e}; geom. projettiva. Così la *geom. su una M_k* è la geom. delle trasformaz^{i} birazionali di questa. Le trasformaz^{i} che caratterizzano gl'indirizzi servono a sostituire agli enti dati dei trasformati più semplici. Così alla M_k qual. nella geom. *sulla* varietà si può sostituire una M_k di S_{k+1}. La definiz. data conduce alle corrisp. // algebriche: **[48]**
del resto lo studio di una corrisp. su una M_k fa già parte di quest'indirizzo. Se fra due M_k alg. si ha una corrisp. (α, α') sì che le coord. dei p^{i} dell'una sian date funz^{i}

[xix] VERONESE, G. 1883-84, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario*, Atti R. Acc. Naz. Lincei, 3, 19, pp. 344-371.

[xx] DEL PEZZO, P. 1885, *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n+1 dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, 24, pp. 212-216.

[xxi] DEL PEZZO, P. 1886, *Sulle projezioni di una superficie e di una varietà ad n dimensioni*, Rend. Acc. Napoli, 25, pp. 205-213.

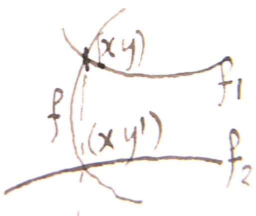
[xxii] DEL PEZZO, P. 1887, *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, Rend. Circolo Mat. Palermo, 1, pp. 241-247.

[xxiii] Jacob Steiner (Utzenstorf 1796 - Berna 1863).

[xxiv] Felix Klein (Düsseldorf 1849 - Göttingen 1925).

[xxv] KLEIN, F. 1872, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Deichert, Erlangen.

algebr. di quelle dell'omologo dell'altra (sì che tutti i p^{i} della prima M_k aventi per coord. quei valori si considerino come omologhi al p. della seconda) la corrisp. si dice *algebrica*. Corrisp. *birazionale* (funz^{i} razionali, indici = 1). Se due varietà sono in corrisp. algebr. o birazionale con una 3^{a}, anche fra loro. - Le definiz. di corrisp. algebr. produce equaz^{i} algebr. fra le coord. $xy\ldots, x'y'\ldots$ di p^{i} omologhi. Dato un numero qual. di tali equaz^{i}, e quindi un sistema qual. di legami geo-
[49] metrici o costruzioni, traducibili algebricamente, e tali da definire una corrisp. // (α, α') fra le due M_k, si posson sempre ricavare $x, y\ldots$ come funz^{i} algebr. *ad α valori* di $x', y', \ldots$, e viceversa … Dimostriamolo per le curve: possiamo supporle piane $f(xy) = 0$, $f'(x'y') = 0$, e le relaz^{i} $F(xyx'y') = 0$, $G(xyx'y') = 0, \ldots$ Osserviamo che quando più equaz^{i} in x hanno α soluz^{i} comuni, queste si hanno da un'equ. di grado α razionale nei coeff. di quelle. Se si hanno poi tre o più equaz^{i} in xy con α soluz^{i} com^{i} $f(xy) = 0$, $f_1(xy) = 0$, $f_2(xy) = 0\ldots$ dalle 1^{a} e 2^{a}, 1^{a} e 3^{a} … si hanno eliminando y equaz^{i} $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$ con le α soluz^{i} comuni e non di più, perché se vi fosse una x tale che $f(xy) = 0, f_1(xy) = 0$ ed in pari tempo $f(xy') = 0$, $f_2(xy') = 0$, ove $y \neq y'$, l'asse delle y sarebbe parallelo alla congiungente di un p.
[50] ff_1 // con un p. ff_2, il che si può evitare.



Dunque le x, y son radici di equaz. di grado α raz^{li} nei coeff^{i} delle $f(xy) = 0$, $f_1(xy) = 0$, $f_2(xy) = 0$, … Applicando ciò alle equaz^{i} della corrispondenza oltre la $f(xy) = 0$ si ha il teorema.

In partic^{e} una corrisp. algebr. *univoca* fra due M_k è biraz^{le} e quindi, introducendo l'omogeneità si rappresenta con $y_i = \varphi_i(x)$, e similmente $x_l = \psi_l(y)$. Si noti una differenza fra il caso delle trasformaz^{i} univoche di un S_k e quello delle trasformaz. univoche di una M_k di uno spazio super.: se le $y_i = \varphi_i(x)$ devon trasformare univocam. tutto lo spazio descritto da x, vedemmo che il sist. lineare di varietà $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ dev'essere omaloidico
[51] (pag. 43). Invece se devon trasformare univocam. solo una varietà // minore di quello spazio basta che questa non corrisponda a se stessa nell'*involuz.* (pag. 42) determinata da quel sist. lineare. Se gli spazi di x e y hanno la stessa dim., si vede

che la corrisp. univoca fra le due M_k si può considerare contenuta in corrisp. $(1, \mu)$ fra i due spazi: non in corrisp. univoche in generale.

Varietà razionali. Una M_k in corrisp. univoca con una razionale è razionale. Due M_k razionali si posson sempre riferire univocam. La geom. su una M_k razionale è la geom. sull'S_k, cioè la geom. delle trasformaz$^{\text{i}}$ biraz$^{\text{li}}$ di questo. Caso di due ∞^1 razionali in corrisp. (α, α'): se x e x' sono param$^{\text{i}}$ omologhi, la corrisp. sarà data (p. 49, 50) da un'equ. $f\binom{\alpha,\alpha'}{x,x'} = 0$, che è in sostanza il principio di corrisp.
di // Chasles[xxvi]. Per la corrisp. univoca si ha una relaz. bilineare, e quindi una **[52]**
projettività se si tratta di forme fondam$^{\text{li}}$ (principio di corrisp. *univoca* di Chasles); e sempre, se diciamo *projettive* due ∞^1 razionali riferite univocam.$^{\text{e}}$ La geom. su una ∞^1 raz$^{\text{le}}$ si riduce alla geom. projettiva su una forma sempl. fondam$^{\text{le}}$, ad es. sulla retta.

La corrisp. univoca fra due curve γ, γ' data da $y_i = \varphi_i(x)$ ci conduce alle *serie lineari*, poiché muta la serie data su γ' dagl'iperpiani $\sum \lambda_i y_i = 0$ nella $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$.

In un S_k data una γ e un sist. lineare $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ di varietà, dicesi *serie lineari* di gruppi di p$^{\text{i}}$ di γ quella segata da quella varietà, togliendo o no quanti si vogliono
fra i punti fissi. Serie lineari su una ∞ algebrica qualunque. // Per trasformaz$^{\text{i}}$ **[53]**
univoche $x_l = f_l(y)$ la serie lineare diventa $\sum \lambda_i \phi_i(y) = 0, \ldots$, rimane una serie lineare. Ordine della serie. Dimensione: la serie composta di un sol gruppo si dice di dimensione 0. In generale poi si osservi che se un gruppo della serie è dato da più di una varietà del sistema, vi sono in questo delle varietà contenenti γ. Se per γ passano ∞^t (ove $t \geq 0$) varietà del sist., le quali formeranno pure un sist. lineare (pag. 30), un'altra var$^{\text{à}}$ determinerà con questo il sist. ∞^{t+1} di *tutte* quelle passanti pel gruppo G dato da quella (poiché ogni var$^{\text{à}}$ per G da con quella un fascio che contiene una var$^{\text{à}}$ dell'∞^t). Se dunque il sist. dato è ∞^d si può prendere entro esso
un sist. ∞^r, ove $r = d - t - 1$, che non incontri l'∞^t: ed esso darà da se tutta // la **[54]**
serie, ogni gruppo una volta sola. La serie sarà ∞^r, e se n è il suo ord. s'indicherà con g_n^r. Da r p$^{\text{i}}$ sarà in generale individuato un gruppo: basterà prendere il 1$^{\text{o}}$

[xxvi] Michel Chasles (Épernon 1793 - Parigi 1880).

punto fuori dei p$^{\mathrm{i}}$ base del sist. ∞^r, e così il 2$^{\mathrm{o}}$ dei p$^{\mathrm{i}}$ base del sist. ∞^{r-1} ottenuto, ... Sarà $r \leq n$. Se $r = n$, siccome fissati $r-1$ punti si avrebbe un fascio di varietà che staccherebbe da γ i singoli punti, γ sarebbe razionale. Se γ non è razionale, è sempre $r < n$, e quindi da alcune (r) tra le inters. di γ con una varietà di un dato sist. lin. son sempre individuate le rimanenti $(n-r)$[14]. Nello studio delle serie lineari una delle principali questioni sarà la determinaz. di n (dei punti mobili fra gli n) e specialmente di r: la relaz. $r = d - t - 1$ darà poi t se in una ∞^d che dia
[55] quella serie si cercano le varietà // passanti per γ.

Come esempi di serie lineari consideriamo quelle staccate su una γ^{m} piana da tutte le curve aggiunte d'ord $\nu = m - 3 + \alpha$. Tutte le serie lineari su γ si posson considerare come date da tali curve (aggiungendo una curva agg$^{\mathrm{ta}}$ fissa). La dimens. del sistema di tutte le curve agg$^{\mathrm{te}}$ d'ord. ν è

$$d \geq \frac{\nu(\nu+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2},$$

ossia, introducendo il genere (pag. 3)

$$p = \frac{m-1 \cdot m-2}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{\nu(\nu+3)}{2} - \frac{(m^2-1)(m-2)}{2} + p \\ d &\geq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1 \end{aligned}$$

Se $\nu < m$ sarà $d = r$ dimensione della serie. Ma se $\nu \geq m$ vi saranno delle curve agg$^{\mathrm{te}}$ d'ord. ν contenenti γ, e saranno ∞^t ove $t = \frac{\nu - m \cdot \nu - m + 3}{2} = \frac{\alpha(\alpha-3)}{2}$, sicché (pag. 54)

$$r = d - t - 1 \quad \geq \quad m\alpha + p - 2 \; //$$

[56] Per $\alpha = 1, 2$ questa formola vale ancora. Si ha poi sempre per l'ordine della serie

[14] In tutto si può intendere che n siano i p$^{\mathrm{i}}$ *variab^i*.

$$n = m\nu - \sum s(s-1) = m\alpha + 2p - 2.$$

Si ha dunque

$$n - r \quad \leq \quad p \text{ se } \nu > m - 3$$

e per le curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3$ si ha $d = r \geq p-1$, $n = 2p-2$, e in generale per $\nu < m-3$ si ha $n - r < p$. Noi vedremo più tardi che per $\nu \geq m-3$ si ha proprio $d =$ al valore trovato (sicché i passaggi pei p$^{\text{i}}$ multipli di γ^{m} son condiz$^{\text{i}}$ indip$^{\text{i}}$ per le curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. $\geq m-3$) e che gli n punti di ogni gruppo son variabili tutti. Ossrviamo fin d'ora che per $\nu \geq m-3$ è sempre $d > 0$, tranne per $p = 0$ nel qual caso non esistono curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3$ (n è negativo) e per $p = 1$ ne esiste una sola ($n = 0$). Per $p = 0$ abbiamo $n = m\alpha - 2$ // e $r \geq m\alpha - 2$: varrà dunque **[57]**
(pag. 54) il segno inferiore, tutti gli n p$^{\text{i}}$ saranno mobili e concludiamo che *le curve di genere 0 son razionali*. Invertiremo più tardi questa proposizione.

Ritornando alle serie lineari si è già notato (pag. 52) come si presentino nello studio della trasformaz. univoca di una curva γ di S_k. Viceversa abbiasi su questa una g_n^r, ove n sono i punti *variabili* di ogni gruppo (oltre ai quali ve ne posson essere dei fissi), sicché $r > 0$, e sia data $\sum_0^r \lambda_i \varphi_i(x) = 0$.
Riferendo linearmente le varietà di questo sistema agl'iperpiani (di coord. λ_i) di un S_r, i punti di questo corrisponderanno ai sist$^{\text{i}}$ lin$^{\text{i}}$ ∞^{r-1} contenuti in quello; e così ai p$^{\text{i}}$ x di γ fuori dei p$^{\text{i}}$ base, cioè ai sist$^{\text{i}}$ ∞^{r-1} di varietà per essi corrisponderanno in S_r punti y // formanti una curva C sì che $y_i = \varphi_i(x)$. Questa C appartiene ad **[58]**
S_r perché non vi è nel sistema ∞^r alcuna varietà che contenga γ. - Noi supporremo anzitutto che per la g_n^r il passaggio per un punto non tragga sempre il passaggio per altri, onde $r > 1$. La corrispondenza fra γ e C sarà univoca e la g_n^r sarà segata su C dagl'iperpiani. Inoltre si potranno avere su γ e quindi su C dei punti fissi. Se le φ di un sist. ∞^{r-1} hanno s punti comuni su γ, sicché il passaggio di un gruppo dalla g_n^r per uno di quelli trae il passaggio per gli altri, il p. y omologo conterrà s volte fra le n inters. di un iperpiano di S_k con C, cioè sarà s-plo. Questo accade in

particolare se γ ha un p. s-plo x che non sia p. base per le φ: darà in C un p. y
[59] s-plo (almeno). Ma se il p. s-plo x // di γ è p. base per le φ, per veder come si muta, consideriamo le φ passanti per un p. di γ che s'avvicina indefinitamente ad x e si vede che in generale ai vari rami di γ per x corrispondono altrettanti punti su C, semplici in generale, ma che si vede anche quando saranno multipli. - Esempio: trasformazione di una curva piana in una piana[15]; il punto doppio, nodo o cuspide, si scioglie mediante una rete di φ passanti per esso, ma il tacnodo no. Per la geom. su una curva siam condotti a considerare un p. s-plo di una γ come la riunione di s punti distinti che possono anche essere ∞^1 vicini se le tg$^{\mathrm{i}}$ non son distinte ... Questo dà una prima spiegazione della scelta delle curve *aggiunte* per la geom. sulla curva
[60] γ^{m}. Se su questa si vuol dare una serie lineare di dimens. abbas//tanza elevata con un sist. di curve che nel punto s-plo x di γ non siano aggiunte, cioè non l'abbiano almeno per $(s-1)$plo, il passaggio per gli s punti che cadono in x importerà solo 1 condiz., o 2, o 3, ..., o $(s-1)$ secondo che x non è p. base, od è semplice, doppio ... $(s-2)$-plo. Per le curve con sole singolarità ordinarie le curve agg$^{\mathrm{te}}$ danno serie non particolari risp. ai p$^{\mathrm{i}}$ multipli.

Se la g_n^r è tale che il passaggio per 1 punto tragga *sempre* il passaggio per $\mu - 1$, allora C sarà in corrisp. $(1, \mu)$ con γ e sarà solo d'ord. $\frac{n}{\mu}$: così per $r = 1$. Poiché C appartiene ad S_r segue $\frac{n}{\mu} \leq r$, $\mu \leq \frac{n}{r}$. Esempio di una tal serie si ha su una curva che incontri in μ punti variab$^{\mathrm{i}}$ le gener. di un cono: allora con un sistema d'iperpiani o di coni aventi comune il vertice con quello vi si sega una tal serie. //
[61] Del resto quando su γ si ha la ∞^1 di gruppi di μ punti tale che da 1 p. è individuato il gruppo, ogni serie lineare *composta* con quella si rappresenterà con una curva C in corrisp. univoca con quella ∞^1 di gruppi e quindi basta prendere una tal curva C e le serie lineari su questa avranno per corrispondenti su γ tutte le serie composte con quella ∞^1 (che' le $y_i = \varphi_i(x)$ mutano le serie lineari di C in serie lineari di γ; e due C diverse essendo in corrisp. univoca, alle serie lineari dell'una corrispondono le serie lineari dell'altra). - Quando una g_n^r è così composta con una ∞^1 di gruppi di μ punti, sicché si rappresenta con una C d'ordine $\frac{n}{\mu}$, conviene dire che ancora

[15] Colla rete delle 1$^{\mathrm{e}}$ polari si muta la curva nella reciproca.

C, contando ogni suo p. come μ-plo, è d'ord. n: così per $r = 1$ la retta n-pla (cfr. pag. 44). E così, anche quando fra due curve γ, γ' // si ha una corrisp. (μ, μ'), si [62] può, contando i p$^{\text{i}}$ di γ μ' volte e quelli di γ' μ volte parlare di corrisp. *univoca*; la cosa si rende sensibile con la rigata delle congiungenti i p$^{\text{i}}$ omologhi (o con una sua sezione piana).

La definiz. di una g_n^r su γ mediante il sistema ∞^r delle φ mostra che entro quella serie stanno delle serie di minor dimens. e dello stesso ordine; e fissando dei p$^{\text{i}}$ su γ, anche delle serie d'ord. minore. Per $r > 1$ si ha un'immagine conveniente di ciò sulla C^n di S_r.
E *non vi son altre* serie lineari d'ord. n nella g_n^r; e più precisamente: se una serie di gruppi di n p$^{\text{i}}$ presi tra i gruppi di una g_n^r è tale che per r' punti di γ e quindi di C, passi un sol gruppo, allora gl'iperpiani $\infty^{r'}$ che la determinano su C formeranno un inviluppo di 1$^{\text{a}}$ classe, cioè una forma fondam$^{\text{le}}$, // e però quella serie sarà [63] *lineare* e di quelle già considerate entro la g_n^r (per le forme razionali ne trarremo poi una conseguenza speciale). - Segue che due C^n rappresentanti una stessa g_n^r sono projettive, poiché ad una forma fondam. d'iperpiani di un S_r corrisponde idem ...

Segue inoltre che se mutano le φ con cui si determina una g_n^r su γ, non mutano però le serie lineari minori contenute in quella. - Se una $g_n^{r'}$ è contenuta nella g_n^r si può supporre che le due serie sian date risp. da $\sum_0^{r'} \lambda_i \varphi_i = 0$ e $\sum_0^{r} \lambda_i \varphi_i = 0$, e quindi le curve che le rappresentano da $y_i = \varphi_i \ (i = 0 \dots r')$; $y_i = \varphi_i \ (i = 0 \dots r)$, sicché saranno projezioni l'una dell'altra[16]; viceversa se C' è proj. di C, la serie rappres. da C' è segata su C dalla forma fondam. d'iperpiani projettanti ecc. - Osservando che $r \leq n$ // dicesi *completa* (o normale) una g_n^r quando non sta in una d'ugual n [64] ..., *parziale* in caso contrario: vedremo poi che è unica la serie completa d'ord. n in cui sta una data g_n^r. La curva che rappresenta una serie è normale o no secondo che la serie è completa o parziale.

Importanza delle serie lineari di gruppi di punti. La loro determinazione ed il loro studio equivalgono a quelli delle curve che le rappresentano. I gruppi *neutri*

[16] Risulta anche dal teor. di pag. 44, 45, se ad es. γ si assume piana sicché le $y_i = \varphi_i(x)$ rappresentano superf. se x si lascia libero nel piano. Così si vengono a considerare per le curve delle superf. rappresentabili che le contengono.

della serie corrispondono ai punti multipli e spazi secanti della curva. I gruppi con punti variamente coincidenti ai punti ed iperpiani singolari della curva. Ed anche alle varietà di un sist. lineare variamente tang^{i} alla curva. Come (pag. 54) la dimens. della serie da il numero delle varietà contenenti la curva.

[65] Cenno storico. La nozione di geometria // sull'ente algebrico è dovuta a Riemann (Theorie der Abel'schen Functionen[xxvii]), che riunisce in una *classe* (§ 12) tutte le equaz^{i} algebr. fra due variab^{i} che si equivalgono birazionalm^{e}, dimostra l'invariabilità del *genere*, determina il numero dei *moduli*, e considera delle serie lineari, specialmente ∞^1, valendosene per ridurre l'equaz. ai minimi gradi, ecc. Clebsch (Crelle 63[xxviii], 64[xxix]), Clebsch e Gordan[xxx] (Th. d. Ab'sch. F.[xxxi]) adoperano più geometricam. le serie lineari. Brill[xxxii] e Nöther[xxxiii] (Math. Ann. VII[xxxiv]) fanno una teoria completa senza trascendenti basandosi su un teorema fondam^{le} ($Af + B\varphi$, Restsatz); e special^{e} Nöther vi ritorna, particolarm^{e} nella Mem^{a} sulle curve sghembe (Zur Grundlegung der Theorie der alg. Raumcurven, Berl. Abhandl. 1882[xxxv]). Segre da studi sulle rigate condotto a questioni di geom. sulla
[66] curva, prima per $p = 1$, poi per // p qual. (Math. Ann. XXX[xxxvi], Rendic^{i} Lincei 1887[xxxvii]. Rendic^{i} Ist. Lomb. 1888[xxxviii]) si vale di curve di ogni spazio, e di

[xxvii] RIEMANN, B. 1876, *Theorie der Abel'schen Functionen*, in *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, pp. 81-135.

[xxviii] CLEBSCH, R. A. 1864, *Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie*, Jour. für die reine und angewandte Math. 63, pp. 189-243.

[xxix] CLEBSCH, R. A. 1865, *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind*, Jour. für die reine und angewandte Math., 64, pp. 43-65; *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen*, Ibidem, pp. 210-270.

[xxx] Paul Gordan (Breslavia 1837 - Erlangen 1912).

[xxxi] CLEBSCH, R. A., GORDAN, P. 1866, *Theorie der Abelschen Functionen*, Teubner, Leipzig.

[xxxii] Alexander Wilhelm von Brill (Darmstadt, 1842 – Tubinga, 1935).

[xxxiii] Max Nöther (Mannheim 1844 - Erlangen 1921).

[xxxiv] BRILL, A., NÖTHER, M. 1874, *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Annalen, 7, pp. 269-310.

[xxxv] NÖTHER, M. 1882, *Zur Grundlegung Theorie der algebraischen Raumcurven*, Abhandlungen der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1882 (1883), mathematische Abhandlungen, pp. 1-120.

[xxxvi] SEGRE, C. 1887, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (I partie courbes algébriques)*, Math. Annalen, 30, pp. 203-226; *Opere*, 1, 80-104.

[xxxvii] SEGRE, C. 1887, *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 4, 3, pp. 3-6; Opere, 1, 110-113.

[xxxviii] SEGRE, C. 1888, *Sulle curve normali di genere p dei vari spazi*, Rend. R. Ist. Lombardo Scienze Lett., 2, 21, pp. 523-528; *Opere*, 1, 119-124.

rigate ... Castelnuovo[xxxix] (Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio ad n dimensioni, Ist. Ven^{o} 1886[xl]; Geometria sulle curve ellittiche, Atti Torino 1888 vol.24[xli]; e specialmente Ricerche di geometria sulle curve algebriche, 1889 stesso vol^{e}[xlii]) prosegue e risolve nuove questioni importanti; così determina i gruppi neutri di una serie o spazi secanti di una curva in due casi molto generali (Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, Rend^{i} Palermo III 1889[xliii]) ed il numero delle serie lineari su un ente (Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere, Rend^{i} Lincei 1889[xliv]). Del resto le curve degl'iperspazi furon // usate altre **[67]** volte da altri, benché non così metodicamente. Klein (e Fricke[xlv]) nelle Vorles. ü. ell., Modulfunctionen Bd I[xlvi] rappresenta le serie lineari con tali curve. - È opportuno studiare le serie lineari coi 3 metodi e così noi faremo a suo tempo. Si noti poi che la geom. sulla curva comprende anche altri argomenti: le serie non lineari; le corrispondenze; ecc.; e si posson considerare corrispondenze fra due o più curve, ecc. ecc. Cenno sul programma ulteriore del corso. //

Cap. 4°. Geometria sugli enti razionali **[68]**

Gli enti razionali ∞^1; le loro rappresentazioni sulle forme fondam^{li}, p. e. sulla retta; le loro rappresentaz^{i} con coord. omogenee o no sugli enti stessi. Come ad essi si estanda tutta la geom. projettiva della retta, il birapporto, ecc. Come si estenda in partic. la definiz. di involuzione $\sum \lambda_i \psi_i(t) = 0$, ove $t_1 t_2$ son le due coord. omog^{e},

...

[xxxix] Guido Castelnuovo (Venezia 1865 - Roma 1952).

[xl] CASTELNUOVO, G. 1886, *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio ad n dimensioni*, Atti Ist. Veneto, 6, 4, pp. 1167-1200.

[xli] CASTELNUOVO, G. 1888 - 89, *Geometria sulle curve ellittiche*, Atti Acc. Scienze Torino, 24, pp. 4-22.

[xlii] CASTELNUOVO, G. 1888 - 89, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Atti Acc. Scienze Torino, 24, pp. 346-373.

[xliii] CASTELNUOVO, G. 1889, *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, Rend. Circolo Mat. Palermo, 3, pp. 27-37.

[xliv] CASTELNUOVO, G. 1889, *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 4, 5, pp. 130-133.

[xlv] Robert Fricke (Helmstedt 1861 - Bad Harzburg 1930).

[xlvi] KLEIN, F., FRICKE, R. 1892, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Teubner, Leipzig.

Una serie lineare g_n^r sull'ente razionale $x_l = f_l(t)$, data da $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ non è che un'involuzione $\sum \lambda_i \varphi_i(ft) = 0$. Viceversa dalla definizione di g_n^r (sulla retta) è evidente che un'involuzione I_n^r è una g_n^r. Se una serie alg[a] di gruppi di n elem[i] è
[69] tale che da r qualunque è in generale indivi//duato il gruppo, essa è una I_n^r: poiché essa sta nella I_n^w costituita da tutti i gruppi di n elem[i] della forma e quindi (pag. 62, 63) segue ecc. - In particolare se le coord. degli elementi di una varietà qual. son funz[i] raz[li] di t e ad ogni elem. corrispondono μ valori di t, questi genereranno una I_μ^1; e poiché questa è raz[le], sarà pur tale la varietà (e questa si potrà riferire univocam[e] al parametro λ della I_μ^1).[17]

Principio di corrispondenza (α, α'). è attribuito a Chasles che primo lo formulò in generale nel 1864; però già nel 1861 Jonquières[xlvii] e Cremona lo applicavano ripetutamente alla determinazione degli ordini di luoghi geometrici. La corrisp.
[70] (α, α') su un ente raz[le] è // (pag. 51) data da $\sum_0^{\alpha,\alpha'} a_{ii'} x^i y^{i'} = 0$; e però vi sono $\alpha + \alpha'$ elem[i] uniti $\sum a_{ii'} x^{i+i'} = 0$. Soluzioni multiple: se $x = 0$ è unito $(a_{00} = 0)$ e *due* omologhi cadono in esso, e ciò in ambi i modi ($a_{01} = a_{10} = 0$), esso conta due volte; questa condiz[e] è anzi necessaria quando la corrisp. è simmetrica od involutoria ($a_{01} = a_{10}$). Come in molti casi si riconosca la multiplicità di una soluz.[e] Enunciato generale dovuto a *Zeuthen*[18]: "il numero delle coincidenze di x e y che hanno luogo in un punto o della retta su cui si considera la corrisp[a] è uguale alla somma degli ordini dei segmenti infinitesimi xy fra un punto x la cui distanza da 0 sia infinitesima di 1[o] ordine ed i corrispondenti punti y (l'ordine di una distanza
[71] finita essendo uguale a zero)". Legame // colla singolarità di una curva piana, immagine della corrispondenza.

Applicazioni del principio di corrispondenza. - In una corrisp. (α, α') vi sono $2\alpha(\alpha' - 1)$ elem[i] di diramazione della 1[a] forma (ed altrettanti elem[i] doppi corrisp[i] nella 2[a]). Due corrisp. (α, α'), (β, β') tra due forme hanno $\alpha\beta' + \beta\alpha'$ coppie comuni;

[17] V. Lüroth [si tratta del matematico tedesco Jacob Lüroth (Mannheim 1844 - Monaco 1910)], Beweis eines Satzes über rationale Curven (Math. Ann. IX) [si tratta di: LÜROTH, J. 1886, *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Annalen, 9, pp. 163-165].

[xlvii] Jean-Philippe-Ernest de Jonquières (Carpentras 1820 - Mouans-Sartoux, Grasse, 1901).

[18] Note sur le principe de correspondance (Bulletin des sciences math. V, 1873 p. 186) [si tratta dell'articolo del matematico Hieronymus Georg Zeuthen (Grimstrup, Jütland, 1839 - Copenaghen 1920): ZEUTHEN, J. 1873, *Note sur le principe de correspondance*, Bull. des Sciences Math., 5, pp. 186-190].

se sono involutorie, la metà. Una corrisp. (α, α') su una forma ha $\frac{\alpha \cdot \alpha - 1}{2} + \frac{\alpha' \cdot \alpha' - 1}{2}$ coppie involutorie.

Curva generata da due fasci di rette di un piano in corrisp. (α, α'); proposiz. inversa. Due $\gamma^{\mathrm{n}}, \gamma^{\mathrm{n}'}$ (di spazi qual.) in corrisp. (α, α') generano una rigata d'ord. $\alpha n' + \alpha' n - x$ (se x sono i p$^{\mathrm{i}}$ uniti): caso di $\alpha = \alpha' = 1$ (a cui ogni altro si può ridurre). Se le curve son sovrapposte $(\alpha + \alpha')n - x$; // e se la corrisp. è simmetrica, **[72]**
la metà $\alpha n - \frac{x}{2}$ (onde x pari). Gli elementi doppi di una I_n^1 sono $2(n-1)$ (Jacobiano). Elementi multipli di un'involuzione qual.: imponendo un punto ν-plo ad un gruppo si danno in generale ν condiz$^{\mathrm{i}}$ o $\nu - 1$ secondo che il punto è dato o no. Elementi $(r+1)$pli di una I_n^r: dicendone $[n, r]$ il numero, si ha dal principio di corrisp. : $[n, r] = [n-1, r-1] + (n-r) = [n-2, r-2] + 2(n-r) = \cdots = [n-r+1, 1] + (r-1)(n-r) = (r+1)(n-r)$. In generale *formola di Jonquières*[19]: in una I_n^r il numero dei gruppi con elem$^{\mathrm{i}}$ multipli secondo $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t$, ove $r = \sum \nu_i - t$[20] è uguale a

$$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t (n-r)(n-r-1) \dots (n-r-t+1) \; //$$

diviso per $\alpha' \beta' \dots \delta'$ se fra le ν ve ne sono α uguali, β uguali, $\dots \delta$ uguali. Infatti, **[73]**
supposte le ν in ordine decrescente di grandezza, considerando gli ∞^1 gruppi con elementi multipli secondo $\nu_1 \dots \nu_{t-1}, \nu_t - 1$ e la corrispondenza ha quest'ultimo e gli $n - r - t + 1$ elem$^{\mathrm{i}}$ semplici, si ha, indicando con $\{n; r; \nu_1 \dots \nu_t\}$ il numero cercato la formola ricorrente:

per $\nu_t > 2$

$\{n; r; \nu_1 \dots \nu_t\} = \frac{1}{\delta}[\{n-1; r-1; \nu_1 \dots \nu_{t-1} \nu_t - 1\} + (n-r-t+1)\{n - \nu_t + 1; r - \nu_t + 1; \nu_1 \dots \nu_{t-1}\}]$

e per $\nu_t = 2$

$\{n; r; \nu_1 \dots \nu_t\} = \frac{1}{\delta} 2(n-r-t+1)\{n-1; r-1; \nu_1 \dots \nu_{t-1}\}$

[19] Crelle 66 (1866): Mémoire sur les contacts multiples des courbes de degré r avec une courbe. . . [si tratta di: JONQUIERES, E. DE 1866, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données avec une courbe fixe du degré m*, Jour. für die reine und angewandte Math., 66, pp. 289-321].

[20] e $n \geq \sum \nu_i$, cioè $n \geq r + t$. La formola di Jonquières si ritrova in un lavoro di Lerch [si tratta del matematico ceco Mathias Lerch (Milínov, Boemia, 1860 - Sušice, Boemia, 1922)] (Sitzb. k. Böhm. Ges. d. W. 1885) [si tratta di: LERCH, M. 1885, *Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n^{ter} Ordnung k^{ter} Stufe*, Sitzungsb. K. Böhm. Gesell. der Wissenschaften, pp. 597-600].

Ora queste formole sono appunto verificate da quell'espressione generale. Ne segue che questa è vera se ha luogo diminuendo successivamente la multiplicità ν di nu-
[74] mero e di grandezza. Ma per $t = 1$ si riduce alla preced.: dunque è // vera sempre.
- Caso particolare:

$$\{n; r; 2, 2, \ldots 2\} = \frac{2^r (n-r) \ldots (n-2r+1)}{r!}$$

- Applicazioni della formola di Jonquières. La $[n, r] = (r+1)(n-r)$ ci dà il num. degl'iperpiani stazionari di una γ^{n} raz$^{\mathrm{le}}$ di S_r; e in generale che quel rango che è dato dal num. degl'iperpiani a contatto $(\rho+1)$-punto passanti per una $S_{r-\rho-1}$, cioè dall'ordine della $M_{\rho+1}$ luogo degli S_ρ osculatori, è $(\rho+1)(n-\rho)$[21]. Altri caratteri della curva dati dagl'iperpiani tangenti multipli[22]. Altre applicaz$^{\mathrm{i}}$ alle varietà di un sist. lineare aventi dati contatti con una curva razionale; cerchi osculatori o sfere
[75] osculatrici per un punto o a contatto quadri- o // 5-punto o tang$^{\mathrm{i}}$ altrove; i punti sestattici di una curva piana raz$^{\mathrm{le}}$ (si devon togliere i flessi); ecc.

Per lo studio[23] dei gruppi ed invol. *armoniche* od *apolari* e teor. della *polarità* convien ricorrere alla C^n raz$^{\mathrm{le}}$ norm. (pag. 45)

$$x_0 = \lambda^n, \ldots x_i = \lambda^{n-i}, \ldots x_n = 1.$$

L'iperpiano osculatore in x sarà $\sum \xi_i y_i = 0$ ove $\sum \xi_i \sigma^{n-i} = 0$ abbia $\sigma = \lambda$ per soluz. n-pla, sicché $\xi_0 = 1 \ldots \xi_i = (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i, \ldots \xi_n = (-1)^n \lambda_0^n$ ossia confrontando: $\xi_i = (-1)^i \binom{n}{i} x_{n-i}$.

Questa è una reciprocità involutoria in cui il coniugio di due punti od iperpiani è dato da

$$\sum (-1)^i \binom{n}{i} x_i y_{n-i} = 0$$

[21] Se l'$S_{r-\rho-1}$ incontra γ in un punto, quel numero si riduce a $(\rho+1)(n-\rho-1)$, cioè diminuisce di $\rho+1$; γ è dunque $(\rho+1)$pla per la varietà degli S_ρ osculatori. Ciò vale sempre.

[22] I caratteri si modificano per curve particolari.

[23] V. fra gli altri Castelnuovo, Studio dell'involuz$^{\mathrm{e}}$ ecc. e poi Deruyts [si tratta del matematico belga François Deruyts (Liegi 1864 - Liegi 1902) che tenne dal 1896 il corso di geometria superiore presso l'Università di Liegi e si distinse soprattutto per i suoi studi sulle involuzioni.], Bulletin Acad. Belgique 1887 [si tratta di: DERUYTS, F. 1887, *Sur la théorie de l'involution*, Bull. Acad. Belgique, 3, 14, pp. 650-664.].

$$\sum(-1)^i i!(n-i)!\xi_i n_{n-i} = 0.$$

Polarità rispetto a una quadrica, o sistema nullo[24], secondo che n è pari o dispari (Clif//ford). Dicendo *coniugate* od *armoniche* due n-ple quando l'una sta nella I_n^{n-1} **[76]** determinata dagli n elem$^{\text{i}}$ n-pli presi nell'altra, la polarità rispetto alla C^n mostra che quella relaz. è reciproca; che se n è impari ogni n-pla è coniugata a se stessa; se n è pari solo se s'annulla un invariante quadratico. Le n-ple coniugate ad una o più date formano un'involuz.; involuz$^{\text{i}}$ I_n^ρ, $I_n^{n-\rho-1}$ coniugate (quando i loro assi $S_{n-\rho-1}$, S_ρ sono polari): gli stessi $(\rho+1)(n-\rho)$ elem$^{\text{i}}$ sono $(\rho+1)$pli per l'una, $(n-\rho)$-pli per l'altra, giacché ad un S_ρ osculatore a C^n è polare l'$S_{n-\rho-1}$ osculatore nello stesso punto.

Al coniugio od *apolarità* fra n-ple di elementi si collega la *polarità* risp. ad una n-pla fissa $a_1 \dots a_n$ (rappres. dall'iperpiano α o // dal punto A). Se due elem$^{\text{i}}$, uno **[77]** x r-plo, l'altro y $(n-r)$plo fanno una n-pla coniugata alla A, dicesi che y è polo o centro armonico r-esimo, o d'ordine $n-r$ di x; viceversa sarà $x\dots$ Se i param$^{\text{i}}$ di x e y sono risp. 0 e ∞, l'equaz. di questa n-pla sarà $\lambda^{\text{r}} = 0$ e la condiz. di coniugio colla data $\sum\alpha_i\lambda^{\text{n-i}} = 0$ diventa $\alpha_r = 0$: il che mostra la coincidenza dell'ordinaria definiz$^{\text{e}}$ dei centri armonici. Una teoria più generale si ha ponendo in luogo di x r p$^{\text{i}}$ distinti $X_1 \dots X_r$: gli $n-r$ p$^{\text{i}}$ y $(n-r)$-pli in n-ple coniugate alla A e contenenti quegli rX formano il gruppo *polare misto* di questi r p$^{\text{i}}$. Si hanno pure prendendo il 1$^{\text{o}}$ gruppo polare di X_1 risp. ad A; poi il 1$^{\text{o}}$ polare di X_2 risp. a quello, ecc.; caso di $r = n-1$. - Si può domandare un gruppo di r elem$^{\text{i}}$ X *apolare* ad A, cioè tale che ogni // elem. ne sia polo. Dovrà A giacere sull'S_{r-1} congiungente gli **[78]** X, sicché l'equaz. del gruppo A sarà $\sum\lambda_i X_i^n = 0$ o $\sum X_i^n = 0$, forma *canonica*, e viceversa. Allora *ogni* n-pla contenete tali r elem$^{\text{i}}$ sarà coniugata alla A. Perché ciò accada basta che per l'S_{r-1} passino non solo $n-r$ ma $n-r+1$ iperpiani con contatti $(n-r)$-punti altrove. Assunto un elem. y come $(n-r)$-plo in una n-pla coniugata ad A, i G_r residui fanno una I_r^{r-1}. Si hanno così $n-r+1$ I_r^{r-1} le quali avranno in comune un'involuz. che sarà in generale (considerando la C_r^r di S_r) di dimens. $r-(n-r+1) = 2r-n-1$. Dunque se $2r \geq n+1$ i gruppi di r elem$^{\text{i}}$ *apolari* ad

[24] Gli n p$^{\text{i}}$ singolari della C^n di S_{n-1} per n dispari.

un gruppo di n formano in generale una I_r^{2r-n-1}. In partic. se n è impari vi è in
[79] generale un determ. gruppo apolare // di $\frac{n+1}{2}$ elem$^{\text{i}}$: e se n è pari ∞^1 di $\frac{n}{2}+1$ elem. La questione in ogni caso coincide con quella degli S_{r-1} r-secanti passanti per A: si potrebbe anche risolvere projettando da A e ricorrendo alle rigate F^{n-2} contenenti la C^n di S_{n-1} ed alle loro direttrici minime; inoltre quella consideraz. degli spazi secanti pone un limite infer. all'ordine dei gruppi apolari tolto quello d'ordine minimo. - Cfr. per la riduzione di una forma binaria a somma di potenze il Cap. sulle forme canoniche nella Algebra del *Salmon*[xlviii].

Le involuzioni d'ordine $n+1$ sulla C^n conducono a notevoli proprietà di questa. I gruppi di una tale involuz. danno i vertici di piramidi iscritte: le facce di queste (iperpiani) formano per la I_{n+1}^r un inviluppo ∞^r di classe $n-r+1$ (perché r punti
[80] // della C^n individuano la piramide e quindi $n+1-r$ facce). E poiché la I_{n+1}^r è individuata da $r+1$ gruppi, segue che le facce $(r+1)(n+1)$ di $r+1$ piramidi iscritte nella C^n sono in un inviluppo ∞^r di classe $n-r+1$ (che contiene ∞^r tali piramidi iscritte nella C^n). - Caso di $r=1$: si ha un'altra C^n a cui le ∞^1 piramidi sono circoscritte. Se ad ogni vertice si fa corrispondere la faccia opposta, si ha fra le due C^n una corrisp. univoca: reciprocità; e poiché vi sono piramidi tali che ai vertici corrisp. le facce opposte sarà una polarità risp. ad una quadrica: ecc. ecc. - Caso di $r=n-1$. - Esempi: coniche e cubiche sghembe.

Cenno sulla questione della determinaz. di un'I_n^r mediante gruppi di $i>r$ elem$^{\text{i}}$
[81] // contenuti in essa: vale a dire determinaz. di spazi S_{n-r-1} incidenti a spazi dati S_{i-1}. Così Schubert[xlix] (Math. Ann. 26 p. 47)[l] dimostra che gli S_{n-2} incidenti a $2n-2$ rette sono $\frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n-2}$ e ne segue che tante sono appunte le I_n^1 con un dato Jacobiano: proposizione già enunciata dal Meyer[li] (loc. cit. e Math. Ann. 21 p. 132)[lii] e trovata pure dallo Stephanos[liii]. Altri casi furon determinati da Schubert e

[xlviii] George Salmon (Cork 1819 - Dublino 1904).

[xlix] Hermann Schubert (Potsdam 1848 - Amburgo 1911).

[l] SCHUBERT, H. 1886, *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen unseres Raums*, Math. Annalen, 26, pp. 26-51.

[li] Friedrich Wilhelm Franz Meyer (Magdeburg 1856 - Königsberg, Ostpreußen, 1934).

[lii] MEYER, W. F. 1883, *Über Apolarität und rationale Curven*, Math. Annalen, 21, pp. 125-137.

[liii] Cyparissos Stéphanos (Kea 1857 - Atene 1917).

Castelnuovo: non si ha però ancora quello generale.[25] //

Cap. 5°. Serie lineari ∞^1. Genere degli enti algebrici. [82]

Importanza delle serie lineari ∞^1. Sono caratterizzate dalle due proprietà: 1$^{\rm o}$ di esser razionali, 2$^{\rm o}$ che un elemento individua un gruppo. Invero dalla 1$^{\rm a}$ segue che i gruppi corrispondono algebr. ad un param. λ; e dalla 2$^{\rm a}$ che (pag. 49, 50) se x è l'elemento dell'ente la corrisp. fra i gruppi e gli elem$^{\rm i}$ che li compongono è data da $\lambda = f(x)$ ove f è funz. raz$^{\rm le}$, ossia $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x) - \lambda\psi(x) = 0$ che prova che la serie è lineare. Si vede inoltre come le *funz^{i} razionali dell'ente algebrico*[26], cioè delle coord. di elem$^{\rm i}$ dell'ente, corrispondono alle g_n^1, essendo i gruppi di una tal serie i gruppi di elem$^{\rm i}$ in cui una // funz. raz$^{\rm le}$ assume uno stesso valore: il numero n degli elem$^{\rm i}$ [83] variab$^{\rm i}$ (che non annullano φ e ψ), cioè il numero degli zeri o degl'infiniti della funz., dicesi *grado* od *ordine* di questa. Dire che due gruppi di n elem$^{\rm i}$ stanno in una stessa serie lin. (g_n^r e quindi in una g_n^1) equivale a dire che sono gli zeri e gl'infiniti di una stessa funz. raz$^{\rm le}$. Ecc. ecc. (V. pag. 94)

Su un ente algebr. γ si considerino due serie g_n^1 $g_{n'}^1$ e siano S, S': abbiamo risp. ν, ν' gruppi od elem$^{\rm i}$ di diramaz. cioè coincidenze di 2 elem$^{\rm i}$ di un gruppo. Considerando nella serie S come omologhi due gruppi quando contengono due elem$^{\rm i}$ x, y di un gruppo di S', si ha:

$$2n(n'-1) = \nu' + 2z,$$ [27]

ove z è il numero delle coppie comuni ad // S, S'. Similmente ... e sottraendo [84]

$$\nu - 2n = \nu' - 2n',$$

[25] Per le I_n^1, cioè per gli S_{n-2}, v. i Beiträge zur Liniengeom. in n Dimens. (Hamb. Mitth. III 1892) [si tratta di: SCHUBERT, H. 1892, *Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen*, Mitteilungen der Math. Gesell in Hamburg, 3, pp. 86-97], ove la questione è risolta completam.$^{\rm e}$ per le rette.

[26] Cfr. Weierstrass [si tratta del matematico tedesco Karl Weierstrass (Ostenfelde 1815 - Berlino 1897)], Vorl. u. Abel'sche Functionen p. 22 [l'opera pubblicata, WEIERSTRASS, K. 1902, *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten*, in Mathematische Werke, 4, Berlin, Mayer & Müller, si basa sulle lezioni del 1875-76, che Segre poteva conoscere verosimilmente su una copia manoscritta].

[27] Cfr. Riemann pag. 105 lin. 3 da sotto [v. RIEMANN 1876, cit.].

sicché sull'ente è costante la differenza fra il numero degli elem[i] di diramaz. e il doppio dell'ordine di una ser. lin. ∞^1. Dalla 1[a] uguaglianza segue che ν è pari (v. anche pag. 72). L'espressione $\frac{\nu}{2} - n + 1$ dicesi *genere* dell'ente algebrico: chiamandolo p si ha

$$\frac{\nu}{2} - n + 1 = p$$

$$\nu - 2n = 2p - 2$$

$$\nu = 2(n + p - 1).$$

In questa definiz. di genere, come nel ragionamente preced., si noti che vi posson essere p[i] di diramaz. da contar più volte nel numero ν: e precisamente se in un gruppo della g^1_n vi sono i elem[i] coinc[i] come in uno, questo conta $i - 1$ volte fra gli
[85] elem[i] di diramaz., è $(i-1)$-plo come elem[o] diram. (ciò si // vede approssimativam.[e] se si considerano i elem[i] consecutivi, come una retta a contatto i-punto conta come $i - 1$ tang[i] da un suo punto: analiticam. si può vedere in modo completo; se l'ente è raz[le], si vede subito sul Jacobiano).

Gli enti razionali hanno $(\nu = 2(n-1))$ il genere $p = 0$.

È evidente che due enti in corrisp. univoca hanno lo stesso genere: donde l'importanza di questo nella geom. delle trasformaz[i] biraz[li]. Cenno sui *moduli* ($3p - 3$ se $p > 1$ ecc.). Il genere e i moduli di una curva, rigata, ∞^1 di S_i non mutano per projez., per sezione, ecc.: così il genere ed i moduli di una ∞^1 di curve o superf. per sezione ecc. ecc.

[86] L'ente algebrico potendosi sempre ri//ferire ad una γ^n piana, vediamo come il genere di questa dipenda dai suoi caratteri. Per g^1_n si prende quella determinata su γ da un fascio di rette. Se i punti multipli son tutti ordinari, le ν rette di diramaz. sono quanto la classe: $\nu = n(n-1) - \sum s(s-1)$, e quindi $p = \frac{\nu}{2} - n + 1 = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - \sum \frac{s \cdot s-1}{2}$ che coincide colla definiz. di pag. 3. Se poi si ha una singolarità superiore, Nöther ha dimostrato (Math. Ann. IX)[liv] che essa si può considerare come la riunione di p[i] multipli ordinari e di *p[i] di diramaz.* della curva. E precisa-

[liv] NÖTHER, M. 1876, *Über die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve*, Math. Annalen, 9, pp. 166-182.

mente si dice che in un p. P di γ cadono $i-1$ p$^{\rm i}$ di diramaz., quando, qualunque sia S, la retta SP conta $i-1$ volte fra le rette di diramaz. della g_n^1, cioè i punti di un gruppo di questa cadono in P (sicché $i \leq$ multiplicità di P). Allora Nö//ther **[87]**
dimostra che la classe è $n(n-1) - \sum s(s-1) - x$, ove la somma va estesa a tutte le singolarità *ordinarie* che equivalgono alle singolarità di γ, e χ è il numero complessivo dei p$^{\rm i}$ di diramaz. di γ. Ne segue $\nu =$ classe $+ \chi$, cioè $\nu = n(n-1) - \sum s(s-1)$, sicché rimane valida in ogni caso la formola

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \frac{1}{2}s(s-1).$$

Caso di soli p$^{\rm i}$ doppi: nodi e cuspidi. Il caso di soli d nodi è il più generale per una γ^n piana di gen. p (in questo senso che un p. s-plo impone $\frac{s \cdot s+1}{2} - 2$ condiz$^{\rm i}$ che sono più che le $\frac{s \cdot s-1}{2}$ condiz. imposte da altrettanti p$^{\rm i}$ doppi). Si ha allora

$$d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$$

come numero delle *coppie neutre* di una g_n^2 sull'ente di genere p. E dalle formole di Plücker pel numero dei flessi e delle // tg$^{\rm i}$ doppie **[88]**

$$\rho = 3(n + 2p - 2)$$

$$\delta = 2(n + p - 2)(n + p - 3) - 4p$$

si hanno in una g_n^2 $3(n + 2p - 2)$ elem$^{\rm i}$ tripli ecc.
Questo risultato si estende: in una g_n^r su un ente di genere p vi sono

$$(r+1)(n + rp - r)$$

gruppi dotati di elementi $(r+1)$-pli (v. per gli enti razionali pag. 72). Rappresentando la g_n^r con una C^n di gen. p. di S_r si tratta di trovarne gl'iperpiani stazionari od iperpsculatori. Essi son dati da una delle formole di Veronese (Math. Ann. XIX,

pag. 201[lv], quella che dà $w^{(\text{n-2})}$, ponendovi $R = w_1 = w_1^{(1)} = \cdots = w_1^{(n-3)} = 0$); che però possiamo ricavare direttamente seguendo la via del Castelnuovo (Ricerche, n. 7). Seghiamo un piano π cogli spazi osculatori alla C^n: se ricordiamo che S_{r-2}
[89] osculatore è intersez. di due iperpiani oscul$^{\text{i}}$ inf. vicini, ossia // un iperpiano oscul. $123\ldots r$ congiunge S_{r-2} oscul$^{\text{i}}$ inf. vicini $123\ldots(r-1)$ e $23\ldots r$; e che un iperpiano iperoscul. $123\ldots r(r+1)$ congiunge tre S_{r-2} consecutivi $12\ldots(r-1), 23\ldots r, 34\ldots(r+1)$; ed un S_{r-3} oscul. è l'intersez. di tre iperpiani oscul$^{\text{i}}$ consecutivi, vediamo che su π si avrà una curva luogo delle traccie degli S_{r-2} oscul$^{\text{i}}$ e inviluppo degl'iperpiani oscul$^{\text{i}}$, la quale avrà per tang$^{\text{i}}$ staz$^{\text{e}}$ le traccie degli spazi iperoscul$^{\text{i}}$ e per punti staz$^{\text{i}}$ le traccie degli S_{r-3} oscul$^{\text{i}}$ incidenti a π. Indicando dunque con N_r il numero dei gruppi con elem$^{\text{i}}$ $(r+1)$-pli in una g_n^r sull'ente di gen. p, una nota formola di Plücker darà:

$$N_r - N_{r-3} = 3N_{r-1} - 3N_{r-2}$$

Di qui si trae appunto $N_r = (r+1)(n+rp-r)$, poiché questa formola verifica
[90] quella relazione ricorrente e vale per $r = 1$ ed $r = 2$ (sicché // si può già applicare ad $r = 3$, poiché $N_0 = n$ è il numero dei p$^{\text{i}}$ d'incontro di π con C).[28] - Applicaz$^{\text{i}}$ di
[91] questa formola a//naloghe a quelle di pag. 74.

[lv]VERONESE, G. 1882, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Mathematische Annalen 19, pp. 161 - 234.

[28]Se la g_n^r è una serie composta mediante i gruppi di μ elem$^{\text{i}}$ di una ∞^1, sicché $n = \mu m$, la curva C che la rappresenta in S_r sarà d'ord. m (da contare μ volte) e di un certo genere π (il genere di quella ∞^1) ed essendo col dato ente algebr. in corrisp$^{\text{a}}$ $(1,\mu)$, avrà per una formola che vedremo in seguito $y = 2(p-1) - 2\mu(\pi-1)$ elem$^{\text{i}}$ di diramaz. Gl'iperpiani stazionari a C rappresentano ognuno un gruppo della g_n^r dotato di μ elem$^{\text{i}}$ $(r+1)$-pli e sono $(r+1)(m+r\pi-r)$. Ogni iperpiano poi che in un p. di diramaz. abbia con la C contatto i-punto rappresenta un gruppo della g_n^r dotato di elem$^{\text{o}}$ $(2i)$plo. Ogni p. di diramaz. viene così ad assorbire $\frac{r(r+1)}{2}$ elem$^{\text{i}}$ $(r+1)$pli della g_n^r composta, se vogliamo che anche per questa rimanga valida l'espressione trovata del numero degli elem$^{\text{i}}$ $(r+1)$-pli: giacché questi verranno così ad essere

$$\mu(r+1)(m+r\pi-r) + \frac{r(r+1)}{2}[2(p-1) - 2\mu(\pi-1)]$$
$$= \mu m(r+1) + r(r+1)(p-1) = (r+1)(n+rp-r).$$

Ritornando alla curva piana come imagine dell'ente algebrico, si può sempre con trasf. biraz. del piano ridurla a sole singolarità ordinarie: v. Nöther, Math. Ann. IX e XXIII[lvi], e Bertini, Rend[i] Ist. Lomb. 1888[lvii]. Anzi si può sempre riferire univocam. a curva con soli p[i] doppi (v. ad es. Bertini, Rivista di mat. t. I)[lviii]. Noi ci varremo solo della prima riduzione.
Rappresentando così l'ente algebrico segue subito che (pag. 2) $p \geq 0$, e che (pag. 57) se $p = 0$ l'ente è razionale.
Sulla γ^m piana una serie lineare g_n^r si // determina (pag. 55) mediante un sist. di **[92]** curve agg[te] ψ^ν. Considerando tutte le ψ^ν agg. passanti per gli stessi p[i] residui di γ^m si ha una g_n che contiene quella. Ora, posto $\nu = m - 3 + \alpha$, tutte le ψ^ν segano una serie d'ord. $m\alpha + 2p - 2$ e dimens. $\geq m\alpha + p - 2$. Fissando quegli $m\alpha + 2p - 2 - n$ p[i] residui si ha dunque una g_n di dimens. $\geq n - p$.[29] Segue che per una g_n^r completa si ha $r \geq n - p$, ossia $n - r \leq p$. In caso contrario la serie è parziale; una γ^n di uno S_r ove $r < n - p$ non è normale: è proj. di una di S_{n-p}. Una g_n^r per cui $n - r < p$ dicesi *speciale*: così pure una serie contentuta in una dello stesso ordine, la quale sia speciale. Dunque per le g_n^r complete e le γ_n di S_r normali, quando non son speciali è $n - r = p$; altrimenti $n - r < p$. Se $p = 0$, o $p = 1$, non vi possono essere serie speciali (pag. 54). Se // $p > 1$ si ottengono serie speciali segandole con curve agg[te] **[93]** d'ord. $m - 3$ su γ^m (curve agg[te] di ord. minore si completano con una curva fissa in tali): poiché quelle danno una g_{2p-2} di dimens. $\geq p - 1$ (pag. 56) e facendole passare per $2p - 2 - n$ p[i] si ha una g_n^r ove $r \geq n - p + 1$. Vedremo poi che viceversa tutte le serie speciali si possono tenere così, sicché il loro ordine è sempre $\leq 2p - 2$; e che vi è una sola g_{2p-2}^{p-1} (la quale non ha elem[i] fissi).[30]

Si può sempre rappresentare l'ente di gen. p in ∞ modi (nota a pag. 92) con una curva appartenente ad S_r e d'ordine $n \leq p + r$; o, se appartiene ad S_{p-1}, d'ordine

[lvi] NÖTHER, M. 1884, *Rationale Ausführung der operationen in der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Annalen, 23, pp. 311-358.
[lvii] Cfr. BERTINI 1888, cit.
[lviii] BERTINI, E. 1891, *Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche*, Rivista di Matematica, 1, pp. 22-24.
[29] Se $n > p$ si ha sempre per tal modo una g_n^r ove $r \geq n - p$ che contiene un gruppo dato qualunque di n elem[i].
[30] È opportuno notare che se una serie speciale ha elementi fissi, la serie che rimane astraendo da questi sarà pure speciale.

$\leq 2p-2$. In particolare con una curva piana d'ordine $\leq p+2$. Così per $p=1$ si ha la cubica; e per $p=2$ la quartica con 1 punto doppio o la conica doppia (in ambi
[94] // i casi la g_2^1 speciale è evidente). Per $p=3$ la quartica piana generale o la conica doppia.

In queste rappres^{i} piane dell'ente algebrico si cercava su questo una g^2: la g^2 del minimo ordine dava la curva piana del minimo ord. rappres^{e} dell'ente. - Si può invece ricorrere a due g^1 cioè a due funz^{i} raz^{li} dell'ente (v. pag. 82).

Ricordiamo (ivi) che una funz. raz^{le} $z=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ dell'ente definisce una g_n^1 ove n è il *grado* (secondo Weierstrass) della funz.[31]. Viceversa data una g_n^1 $\varphi(x)-z\psi(x)=0$ si avranno ∞ funz^{i} raz^{li} $\frac{a\varphi(x)+b\psi(x)}{c\varphi(x)+d\psi(x)}$, cioè le trasformaz^{i} lineari $\frac{az+b}{cz+d}$ di una $z=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. E non se ne avranno altre, poiché se $\phi(x)-Z\Psi(x)=0$ dà la stessa g_n^1, fra le z e Z che corrispondono ad uno stesso elem. x dell'ente vi sarà corrisp. univoca, sicché
[95] // Z sarà funz. lin. fratta di z.

Siano $z=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $s=\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ due funz^{i} raz^{i} dell'ente, risp. di gradi n, m tali che non ogni gruppo di dato z abbia *più* elem^{i} com^{i} con un gruppo di dato s, cioè che le g_n^1, g_m^1 ... non abbiano ∞ coppie comuni. Fra z ed s vi sarà una corrispondenza (m,n), cioè un'equ. $F\binom{n\ m}{s,\,z}=0$, che si avrebbe per eliminaz^{e}, ed i gruppi (s,z) saranno in corrisp. univoca coll'ente; le coord. x di questo saranno viceversa funz^{i} raz^{li} si s, z: quella equaz. rappresenta l'ente. Così a rappres. un ente alg. si può prendere in generale la equaz. che lega due sue funz^{i} raz^{li} qual. Assumendo per una od entrambe le funz^{i} di grado minimo dell'ente si riduce la $F=0$ a gradi minimi m, n.
[96] Notiamo ancora che se sull'ente vi è una g_n^1 (n elem^{i} variab^{i}) // le coord. dell'ente saranno funz^{i} raz^{li} di un parametro z e della radice s di un'equaz. di grado n a coeff^{i} raz^{li} in z (z sarebbe la funz. raz^{le} di grado n rappres^{e} la g_n^1).

Considerando la $F\binom{n\ m}{s,\,z}=0$ come equ. di una curva piana si cade nella seguente rappres.^{e} Due g_n^1, g_m^1 si rappresentino con due fasci di raggi S, S': questi saranno in corrisp. (m,n) e genereranno in generale una γ^{m+n} su cui il fascio S stacca la g_n^1 ... Di qui seguirebbe di nuovo il teor. del principio di questo Cap^{o} (pag. 82), assumendo ad arbitrio una g_m^1 ausiliaria. - Un p. s-plo di γ fuori di S, S' corrisponde

[31] Qui e nelle prime pag. seg^{i} si considerano solo serie non degeneri.

ad s elem$^{\mathrm{i}}$ dell'ente, comuni a due gruppi delle g^1_m, g^1_n, e viceversa. Uguagliando a p il genere di γ si ha la relaz. $p = (m-1)(n-1) - \sum \frac{s \cdot s-1}{2}$ che si trova in sostanza alla fine del n. 7 (p. 107) del//la memoria di Riemann; v. anche Castelnuovo n. 4. - [97]
Se due g^1_n hanno un G_n comune, stanno in una g^2_n (coniche pei 3 p$^{\mathrm{i}}$ n-pli della γ^{2n}). Se hanno un G_n ed un G_{n-1} comuni, l'ente è razionale. Se hanno due G_n comuni, coincidono. Vedremo poi proposizioni più generali.

Facendo corrisp. la r. SS' a se stessa, γ si riduce all'ordine $m+n-1$; e in generale se le g^1_m, g^1_n hanno un G_t comune, si può ridurre γ all'ord. $m+n-t$ (osservaz. di Bertini): com'e' evidente per $t = 2$. Basandosi su ciò la rappres. di un ente con una g^1_n mediante una curva piana ed un fascio di raggi S si può semplificare, ottenendo una γ^{p+2} col p. S $(p+2-n)$-plo $(n \leq p+1)$: basta per $n-1$ p$^{\mathrm{i}}$ di un G_n della serie ed altri $p+1-(n-1) = p+2-n$ tra cui non vi sia l'n-esimo con//durre una g^1_{p+1} ecc. (Bertini) [98]

Enti dotati di una g^1_2. Valendosi di una g^1_m ove $m \leq p+1$, che contenga un gruppo in cui non vi sia alcuna coppia della g^1_2 (nota a pag. 92), si ottiene una γ^{m+1} con p. $(m-1)$-plo, ove si può supporre $m+1 \leq p+2$; ma sarà precisamente = poiché il gen. è p (e *0* p$^{\mathrm{i}}$ doppi). Se $p = 0$ è evidente che vi sono ∞^2 g^1_2 (nella g^2_2) e che due qualunque hanno una coppia comune. Se $p = 1$ ogni coppia determina (nota a p. 92) una g^1_2; si ritrova per imagine la cubica valendosi di due g^1_2 e $p = 0$ o $p = 1$ (p. doppio o no) secondo che vi è o no una coppia comune: sicché per $p = 1$ ogni coppia *individua* la g^1_2. Se $p = 2$ si ha sempre la quartica con p. doppio. E sempre se $p > 1$ non vi può essere una sola g^1_2.

Gli enti con una g^1_2, valendosi di una // funz. raz$^{\mathrm{le}}$ di 2$^{\mathrm{o}}$ grado z si posson [99]
rappresentare (v. il principio di p. 96) così: $x_i = f_i(z,s)$ ove le f_i son raz$^{\mathrm{li}}$ ed $s^2 = R(z)$ è un polinomio in z. La g^1_2 ha i gruppi corrisp$^{\mathrm{i}}$ ai vari valori di z, per ognun dei quali se ne hanno due di s: elem$^{\mathrm{i}}$ di diramaz$^{\mathrm{e}}$ son dunque quelli per cui $R(z) = 0$. Ma sono (p. 84) $2p+2$: dunque questo è il grado di $R(z)$. Elem$^{\mathrm{i}}$ di diramaz. multipli non ve ne possono essere (fine di p. 84); sicché al più potrà accadere che $R(z)$ si abbassi al grado $2p+1$ per essere $z = \infty$ elem. di diramaz. Cenno sugl'integrali ellittici ed iperellittici. Gli enti $p = 1$ si dicono anche *ellittici* e

quelli ... *iperellittici*. Noi però usiamo questo nome per tutti gli enti con una g_2^1. Per questi enti particolari cominciamo a risolvere certe questioni che poi tratteremo in generale. //

[100] *Moduli degli enti iperellittici* $p > 0$. Osserviamo anzitutto che $R(z)$ è un polinomio *arbitrario* (senza radici doppie) di grado $2p + 2$. Dato un altro ente iperell. di gen. p rappres^o^ da $s'^2 = R'(z')$, se mediante una trasformaz. lin. $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ si ha $R'(z') = \frac{R(z)}{(cz+d)^{2p+2}}$ aggiungendo $s' = \frac{s}{(cz+d)^{p+1}}$ oppure $s' = \frac{-s}{(cz+d)^{p+1}}$ si muterà in $s^2 = R(z)$. Dunque *basta* che i due gruppi $2p + 2$ elem^i^ diram^i^ siano projettivi perché i due enti iperell^i^ si equivalgano biraz.^e^ Ma ciò è anche necessario se $p > 1$, poiché allora le due uniche g_2^1 devono corrispondersi ... Dunque $2p - 1$ *moduli*[32] (birapporti).

Rimane il caso $p = 1$: allora vi sono ∞ g_2^1 tali che da una coppia, e in partic. da un elem. diram., è individuata la serie. Ma allora se A, A' sono elem. di di-
[101] ram. di due g_2^1, la corrisp. // univoca determinata dalla g_2^1 che contiene la coppia A, A' muterà l'una nell'altra quelle due g_2^1, e però i birapporti delle due quaterne di elem^i^ di diramaz. saranno uguali: notevole teorema del *birapporto di un ente ellittico*. Segue poi che anche per $p = 1$ il birapporto di due enti in corrisp. univoca è lo stesso: esso è il *modulo*. - Le g_2^1 sulla γ^m ellittica si hanno con fasci di curve agg^te^ d'ord. $m - 3 + \alpha$ per $m\alpha - 2$ p^i^ semplici: così sulla cubica piana da fasci d'ord. α per $3\alpha - 2$ p^i^; in partic. da fasci di rette coi centri sulla cubica. Segue che tutte le coppie di una g_2^1 ottenuta ad es. da un fascio d'ord. α sono allineate con 1 p. fisso. Che in una corrisp. univoca fra due cubiche alle coppie allineate con 1 p. corrispondano coppie allineate con 1 p., ecc.

[102] *Serie speciali sugli enti iperellittici* $p > 1$. // Lasciamo da parte gli elem. fissi. Abbiasi una g_n^r che *non* sia composta colla g_2^1: rappres. una γ^n di S_r, semplice o multipla, ma in cui le coppie della g_2^1 sono elem^i^ distinti. La rigata (p. 72) delle congiung^i^ sarà d'ord. $n - \frac{x}{2}$ ossia $n - p - 1$, onde (p. 36) $n - p - 1 \geq r - 1$, $n - p \geq r$. Segue che una g_n^r *speciale* è necessariamente composta con la g_2^1, e però non è altro che un'*invol.* nella serie raz^le^ che ha per elem^i^ le coppie della g_2^1 (cfr. pag. 61);

[32] Segue che la geom. proj. della r. doppia con $2p + 2$ p^i^ diram. che rappresenta l'ente iperell. equivale completamente alla geom. su quest'ente. - Resta anche risolta la questione delle *corrispondenze univoche sull'ente iperellittico*.

per una serie *completa* così composta è $n = 2r$: sarà speciale se $n - r < p$ cioè $r \leq p - 1$ e quindi $n \leq 2p - 2$ (Se poi $r > p$ per una serie così composta non può più essere completa poiché $n - r > p$). Si vede ora che (nel caso iperellittico) le curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m - 3$ di una γ^m piana sono *precisamente* ∞^{p-1} e che la g_{2p-2}^{p-1} che esse staccano // non ha p$^{\text{i}}$ fissi. Segue pure che vi è una sola g_{2p-2}^{p-1} e che per ogni [103]
g_{2r}^{r} speciale vi è una $g_{2p-2-2r}^{p-1-r}$ *residua* tale che ogni gruppo dell'una con ogni gruppo dell'altra dà un gruppo della g_{2p-2}^{p-1}, ecc. - Di passaggio si ha che una γ^n semplice di gen. p del piano se $n - p < 2$, $n < p + 2$, non può esser iperellitt. (e se $n = p + 2$ la curva iperell. ha un p. p-plo), cioè non può esser iperell. una γ^n con d p$^{\text{i}}$ doppi se $d < \frac{n-2 \cdot n-3}{2}$: esempi $n = 4, 5$. //

Cap. 6°. Formola di Zeuthen. Varietà ∞^1 di spazi e loro applicazioni. Le serie speciali [104]

Dati due enti γ_p, $\gamma'_{p'}$ in corrisp. $(1, \mu)$ ad una g_n^1 di γ con ν elem$^{\text{i}}$ di diram. corrisponde su γ' una $g_{\mu n}^1$ composta che ha per elem$^{\text{i}}$ diram. i $\mu\nu$ che corrisp. a quei ν, e poi gli y elem$^{\text{i}}$ doppi corrisp. agli y elem$^{\text{i}}$ di diram. di γ nella corrispondenza. Segue (p. 84)

$$\nu = 2n + 2(p - 1)$$

$$y + \mu\nu = 2\mu n + 2(p' - 1),$$

donde:

$$y = 2(p' - 1) - 2\mu(p - 1).$$

Importanza di questa formola. Ne segue $\mu(p - 1) \leq p' - 1$. Quindi se $p = p' > 1$ sarà $\mu = 1$, la corrisp. è necessariam. univoca (per // $p = p' = 1$ ciò non varrebbe [105]
più). Se $p' = 0$ anche $p = 0$, donde segue di nuovo che sull'ente raz$^{\text{le}}$ una ∞^1 di gruppi di μ elem$^{\text{i}}$ tale che ogni elem. stia in un sol gruppo è raz$^{\text{le}}$ (cfr. p. 69).

Prima di passare alle applicazioni alle rigate ecc. osserviamo che quella formola si può generalizzare. Siano γ_p, $\gamma'_{p'}$ in corrisp. (x, x') con (y, y') elem$^{\text{i}}$ diram. e consideriamo l'ente Γ_π costituito dalle coppie di elem$^{\mathrm{i}}$ omol$^{\mathrm{i}}$ di γ, γ' (rappres$^{\mathrm{o}}$ ad es. dalla rigata generata da γ, γ' se questi son curve). Sarà γ con Γ in corrisp. $(1, x')$ onde

$$y = 2(\pi - 1) - 2x'(p - 1).$$

Similmente

$$y' = 2(\pi - 1) - 2x(p' - 1),$$

e sottraendo

$$y - y' = 2x(p' - 1) - 2x'(p - 1),$$

formola di Zeuthen (Math. Ann. III)[lix]. La si può anche avere direttam. senza passare
[106] per // quel caso partic. assumendo su γ e γ' due g^1_n, g^1_n risp. con ν, ν' elem$^{\mathrm{i}}$ diram.: si avranno così su Γ due $g^1_{nx'}$, $g^1_{n'x}$, risp. con $y + \nu x'$ e $y' + \nu' x$ elem$^{\mathrm{i}}$ diram., onde (p. 84)

$$y + \nu x' - 2nx' = y' + \nu' x - 2n' x$$

che, sostituendo $\nu - 2n = 2(p - 1)$, $\nu' - 2n' = 2(p' - 1)$ dà appunto la formola di Zeuthen. Del resto da quell'uguaglianza, ponendo $x = x' = 1$ e quindi $y = y' = 0$ si trae la $\nu - 2n = \nu' - 2n'$: ora essa si può dimostrare direttamente come si dimostrò questo suo caso particolare, cioè cercando il numero z delle coppie della g^1_n di γ a cui corrispondono su γ' coppie della $g^1_{n'}$ (mediante il princ. di corrispondenza sulla g^1_n) ed uguagliandolo a quello ottenuto analogam. colla $g^1_{n'}$.

Data su una curva γ di gen. p una ∞^1 di gen. π di gruppi di m p$^{\mathrm{i}}$ sì che ogni //
[107] p. stia in un sol gruppo, da pag. 104 abbiamo

$$(1) \qquad y = 2(p - 1) - 2m(\pi - 1),$$

che vale anche se γ è *multipla* di gen. p ...

In particolare se si è in S_r e gli spazi S_k cui appartengono i gruppi sono infer$^{\mathrm{i}}$ ad S_r ...; caso di $k = r - 1$; in generale si hanno le curve tracciate sulla rigata di gen. π,

[lix] ZEUTHEN, J. 1871, *Nouvelle démonstration des théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes*, Math. Annalen, 3, pp. 150-156.

sulla ∞^1 di piani, ... E anche qui si ha (cfr. p. 105) che se $p = 0$ anche $\pi = 0$, sicché una rigata o varietà ... non razionale non può contenere alcuna curva direttrice razionale, e più in generale il genere delle curve dev'essere $p > m(\pi - 1)$, ecc.

Il num. y si può esprimere, anzi che coi generi, cogli ordini n di γ e ν della rigata o varietà e qualche altro carattere (ν cessa di aver senso quando $k = r$). Così poi eliminendo y si ha una relazione importante // fra i caratteri di γ e, se $k \leq r - 1$, **[108]**
quelli della M_{k+1} luogo degli ∞^1 S_k.

Se $k = 1$ si ha, per la rigata, applicando il princ. di corrisp. ad un fascio d'iperpiani projettanti la corrisp. su γ in cui si considerano come omologhi due p$^{\text{i}}$ A, A' quando sono in una stessa gener.

$$(2) \qquad y = 2(m-1)n - m(m-1)\nu - 2z,$$

ove z è il num. di quei p$^{\text{i}}$ doppi di γ che riuniscono coppie A A' (esempi). Dalle (1) e (2) segue

$$(3) \qquad (m-1)n - p = \frac{m \cdot m - 1}{2}\nu - m\pi + m - 1 + z$$

formola da me data nella nota "Intorno alla geometria su una rigata algebrica (Rendic$^{\text{i}}$ Lincei, 1887, 2$^{\text{o}}$ sem$^{\text{e}}$ pag. 3), e poi nelle "Recherches générales sur les curbes et surfaces règlèes algèbriques, 1$^{\text{e}}$ P$^{\text{e}}$ (Math. Ann. t. 30). Notiamo che essa vale anche se γ è multi//pla, cioè una curva d'ord. $\frac{n}{\mu}$ da contarsi μ volte, poiché allora vale **[109]**
ancora la (2), senza modificazioni.

Sia k qualunque, $k \leq r$. Introdurremo gli ordini $x_1, x_2, \ldots x_i \ldots$ delle varietà costituite dalle rette, piani, ... S_i ... congiungenti $2, 3, \ldots i+1, \ldots$ punti di un gruppo. L'ultimo di questi numeri si ha per $i = k$ se $k \leq r - 1$, ed è $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Si ha anzitutto, similmente alla (2):

$$2(m-1)n = 2x_1 + y;$$

però se vi son dei p$^{\text{i}}$ doppi di γ che contino due volte in gruppi della ∞^1, il loro numero raddoppiato si deve aggiungere al 2$^{\text{o}}$ membro. Ora da x_1 si passerebbe analogam. ad x_2 e da questo ad $x_3, \ldots$ considerando similmente su un S_{r-i} la curva
[110] luogo delle tracce degli ∞^1 S_i e la rigata luogo di quelle degli ∞^1 S_{i+1}. // Ciò equivale ad applicare ancora il princ$^{\text{o}}$ di corrisp., considerando nella nostra figura come omologhi due S_i che congiungano gli stessi i p$^{\text{i}}$ P di un gruppo risp. a 2 p$^{\text{i}}$ A, A' di questo; ed in un fascio di S_{r-i-1} di quell'S_{r-i} considerando come omologhi due spazi incidenti a due tali S_i. Si va fino ad $i = k-1$, cioè a segare con un S_{r-k+1}; se $k = r$, il fascio si riduce ad una retta punteggiata nel caso estremo. - La corrisp. nella ∞^1 di S_i è simmetrica d'indice $(i+1)(m-i-1)$; onde nel fascio si avranno $2(i+1)(m-i-1)x_i$ coincidenze. Queste si hanno: *1*$^{\text{o}}$ essendo i due S_i distinti ma incidenti all'S_{r-i} nello stesso p., che sarà dunque sull'S_{i-1} dei P: sono così $(m-i)(m-i-1)x_{i-1}$ coincidenze; *2*$^{\text{o}}$ essendo i due S_i distinti ed incidenti
[111] all'S_{r-i} in due p$^{\text{i}}$ distinti: questi essendo in un S_{r-i-1} del fascio, // la loro retta incontra il sostegno S_{r-i-2}, onde l'S_{i+1} di quei due S_i è incidente a questo: sono $(i+1)(i+2)x_{i+1}$; e per $i = k-1$ bisogna mettere $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Però questo caso estremo non ammette questa 2$^{\text{a}}$ specie di coincidenze se $k = r$; dovremo dunque allora mettere $\nu = 0$. *3*$^{\text{o}}$ coincidendo i due S_i nel coincidere di A, A': ciò dà $\binom{m-2}{i}y$ coincidenze. *4*$^{\text{o}}$ coincidendo i due S_i senza che coincidano A, A', cioè essendovi un S_i con $i+2$ p$^{\text{i}}$ di un gruppo (ogni tal S_i darebbe $(i+1)(i+2)$ coincidenze): l'esistenza di un gruppo siffatto impone a questo $k-i$ condiz$^{\text{i}}$ e quindi si può dire che in generale ha luogo solo nel caso estremo $i = k-1$, cioè che vi sono solo dei gruppi di $k+1$ p$^{\text{i}}$ appartenenti ad S_{k-1}, e siano z. Però nel seguito c'importerà solo
[112] di sapere (tranne per $k = r$) che i primi mem//bri delle uguaglianze seguenti sono *almeno* uguali ai 2$^{\text{i}}$, sicché non escluderemo neppure quelle particolarità eccezionali. Abbiamo dunque:

$$
\begin{aligned}
2(m-1)n &= 1 \cdot 2x_1 + y \\
2 \cdot 2(m-2)x_1 &= (m-1)(m-2)n + 2 \cdot 3x_2 + (m-2)y
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
2\cdot 3(m-3)x_2 &= (m-2)(m-3)x_1 + 3\cdot 4x_3 + \binom{m-2}{2}y \\
&\dots \\
2\cdot i(m-i)x_{i-1} &= (m-i+1)(m-i)x_{i-2} + i(i+1)x_i + \binom{m-2}{i-1}y \\
2(i+1)(m-i-1)x_i &= (m-i)(m-i-1)x_{i-1} + (i+1)(i+2)x_{i+1} + \binom{m-2}{i}y \\
2(i+2)(m-i-2)x_{i+1} &= (m-i-1)(m-i-2)x_i + (i+2)(i+3)x_{i+2} + \binom{m-2}{i+1}y \\
&\dots \\
2(k-1)(m-k+1)x_{k-2} &= (m-k+2)(m-k+1)x_{k-3} + (k-1)kx_{k-1} + \binom{m-2}{k-2}y \\
2k(m-k)x_{k-1} &= (m-k+1)(m-k)x_{k-2} + k(k+1)[\binom{m}{k+1}\nu + z] + \binom{m-2}{k-1}y
\end{aligned}$$

Moltiplicando queste equaz$^{\text{i}}$ risp. per fattori:

$$k(m-2)\dots(m-k), (k-1)(m-3)\dots(m-k), \dots, (k-1)!$$

e quella generica intermedia per $(k-i)i!(m-i-z)\dots(m-k)$ e sommando si vede dalle tre di mezzo che scompare x_i, dalle due ultime scompare anche // x_{k-1} e, **[113]** riducendo, rimane

$$(4) \qquad y = 2\frac{m-1}{k}n - 2\frac{m(m-1)}{k(k+1)}\nu - 2z : \binom{m-2}{k-1},$$

che dà l'espressione cercata del numero y ...; essa (con quel calcolo) è dovuta a Schubert.

Se $k=r$ bisogna porvi $\nu = 0$. Confrontando poi con la (1) (pag. 107) si ha:

$$(5) \qquad \frac{m-1}{k}n - p = \frac{m\cdot m-1}{k\cdot k+1}\nu - m\pi + m - 1 + z : \binom{m-2}{k-1},$$

formola generale della mia Nota "Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi" (Rendic$^{\text{i}}$ Lincei 1887, 2$^{\text{o}}$ sem.)[33], in cui si trova an-

[33] SEGRE, C. 1887, *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 4, 3, pp. 149-153; *Opere*, 1, 114-118.

che quel calcolo di Schubert. Essa vale anche se γ è multipla ...

Nel caso estremo $k = r$ si ha dalla (5)

$$(6) \qquad z = \binom{m-2}{r-1}\{\frac{m-1}{r}n - p + m\pi - m + 1\}$$

come numero dei gruppi di $r + 1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una involuz^e ∞^1 di ordine m e genere π, sopra un ente di genere p. Se $\pi = 0$ sicché l'invol. è una g_m^1 si

[114] ha //

$$(7) \qquad z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p,$$

che Castelnuovo trova direttam. nel suo n. 8 senza notare che rientra nella (5). Il Castelnuovo ha del resto risolta la questione più generale di trovare il numero dei gruppi di $r + r'$ elem^i comuni ad una g_n^r ed una $g_{n'}^{r'}$ (nel lavoro cit^o a pag. 66, Rend. Pal. III).

Si noti che il teor. contenuto nella (6) abbraccia a sua volta la (5): basta applicarlo sostituendo alla g_n^r la g_n^k che su γ è data dagl'iperpiani passanti per un S_{r-k-1}; allora il numero dei gruppi di $k + 1$ p^i comuni a quella g_n^k ed alla serie ∞^1 ... dato da $\binom{m}{k+1} + z$, ecc.

Il caso particolare della (5) che più importa nel seguito è quello in cui i gruppi di m punti della ∞^1 si compongano in generale di p^i indip^i, cioè $k = m - 1$; diventa:

[115] //

$$(8) \qquad n - p = \nu - m\pi + m - 1 + z,$$

ossia

$$(8') \qquad n - p = \nu - (k+1)\pi + k + z.$$

Una prima applicazione si fa subito per le rigate e varietà M_{k+1} di ∞^1 S_k di gen. π. Su esse si posson tracciare ∞ curve che incontrino ogni S_k in $k + 1$ p^i indip^i, sicché $z = 0$; così segando la rigata con quadriche non tang^i e la M_{k+1} con un cono di dim. $r - k$ projettante da un S_{r-k-2} una C^{k+1} raz^{le} norm^{le}. Se una tal γ è proj. di una γ dello stesso ord. di uno spazio super^e, la M_{k+1} di questo altro spazio

sarà con questa nuova curva nella stessa relaz. $z = 0$, e non sarà incontrata dallo spazio centrale di projez., perché altrimenti sulla γ primitiva si avrebbero gruppi di p$^{\text{i}}$ *non* indip., o perché sempre vale la (8′) con $z = 0$. In base dunque alla pag. 92 si ha: una ∞^1 di gen π e d'ord. ν di S_k ha per spazio // normale quello di **[116]**
dim. $\nu - (k+1)\pi + k$, od uno super.; secondo che le γ suddette tracciate su essa son tutte non speciali, o tutte speciali. Nel 2$^{\text{o}}$ caso si potrebbe chiamare *speciale* la varietà, come io ho già fatto per le rigate. In partic. per $\pi = 0$ si ha che le varietà ∞^1 raz$^{\text{li}}$ d'ord. ν di S_k son normali per $S_{\nu+k}$ (cfr. pag. 38): il che si poteva vedere anche altrimenti. - Si noti che tutto ciò vale anche se la varietà è in S_{k+1}. Applicazioni che così si avrebbero del problema delle curve *direttrici*, quando fosse risolto per le varietà normali.

Applicando la (8) ad una g^1_m, $\pi = 0$, si ha

$$n - p = \nu + m - 1 + z$$

nell'ipotesi che i gruppi di m p$^{\text{i}}$ appartengano in generale ad S_{m-1}. Ora se $m - 1 = r$ il 2$^{\text{o}}$ membro è $\geq r$; e se $m - 1 < r$, siccome // il massimo spazio per una M_m d'ord. **[117]**
ν è appunto $S_{\nu+m-1}$ sarà pure quel 2$^{\text{o}}$ membro $\geq r$. Dunque sempre $n - p \geq r$. Segue che *quando $n - r < p$ i gruppi di m p^{i} di una g^1_m sulla γ^n di S_r appartengono a spazi di dim. $\leq m - 2$.*

Abbiasi ora sulla stessa curva e nella stessa ipotesi $n - r < p$ una g^q_Q: dico che i suoi gruppi G_Q stanno in spazi di dim. $Q - q - 1$ (Castelnuovo n. 14). Invero se in un G_Q si fissano $q - 1$ p$^{\text{i}}$ qual. i rimanenti $Q - q + 1$ formano un gruppo di una serie ∞^1 e quindi per la propos. preced. appartengono ad un $S_{Q-q-1-\delta}$. Potrà forse in ogni G_Q il numero δ mutare a seconda della scelta dei $q - 1$ p$^{\text{i}}$: in tal caso si prenda il minimo, e $Q - q$ p$^{\text{i}}$ dell'$S_{Q-q-1-\delta}$ tali che lo determinino; ogni altro p. di G_Q insieme con quei $Q - q$ ne darà $Q - q + 1$ che dovranno stare in quello spazio. Dunque tutti // i Q punti gli appartengono. **[118]**

Poiché una γ^n speciale è sempre proj. di una per cui $n - r < p$, segue che su ogni curva speciale i gruppi di una g^q_Q stanno in S_{Q-q-1}. Evidentemente ciò si estende anche al caso che la g_Q^q abbia dei punti fissi.

Applichiamo questo teorema anzitutto alla g_n^r *speciale* segata sulla γ^n speciale dagl'iperpiani. I suoi gruppi staranno in S_{n-r-1} e però $n-r-1 \geq r-1$, ossia

$$n \geq 2r,$$

teorema dovuto a Clifford, per le g_n^r speciali (per Clifford, le γ^n di S_r per cui $n-p < r$). Da esso segue subito che la serie segata su una γ^m piana dalle φ^{m-3} agg^te^ è precisamente ∞^{p-1}, completa e coi $2p-2$ p^i^ tutti variabili: poiché se, astraendo da x p^i^ fissi si riducesse ad una g_{2p-2-x}^{p-1+y}, $2p-2-x \geq 2(p-1+y)$, $x = y = 0$. //

[119] La relazione $n \geq 2r$ per le g_n^r speciali varrà anche se vi sono elem^i^ fissi, poiché astraendo da questi rimane una serie speciale. Ora se si considera una serie completa speciale, od almeno una per cui $n-r \leq p-1$, sommando questa (tal quale, o raddoppiata) colla $2r \leq n$ si ha

$$r \leq p-1, n \leq 2p-2.$$

Segue che una g_n^r per cui $r > p-1$, o per cui $n > 2p-2$ è certo non speciale; una curva d'ordine $> 2p-2$ non è certo speciale, come pure se appartiene ad uno spazio superiore ad S_{p-1}: e però non potrà appartenere ad uno spazio super. ad S_{n-p} (teor. di Clifford, almeno in parte). Le serie complete d'ordine $n > 2p-2$ sono di dim. $n-p$; le curve normali d'ordine $n > 2p-2$ appartengono ad S_{n-p}. //

[120] Segue che una sup. a sezioni spaziali di gen. p, d'ord. $n > 2p-2$ può appartenere al più ad S_{n-p+1}; e similmente una $M_k^n \ldots$ ad $S_{n-p+k-1}$.

Il numero $n-r$ è quello degli elem^i^ di un gruppo di una g_n^r che son determ^i^ da r arbitrari. Se $r > p-1$, od $n > 2p-2$, abbiamo dunque che $n-r \geq p$, ossia *almeno* p elem^i^ di un gruppo son conseguenza dei rimanenti. Quindi nel problema di trovare quante fra le varietà di una ∞^d lineare contengono una data γ, se le intersez. sono $n > 2p-2$, basta fissare $n-p+1$ punti di γ e però saranno almeno $\infty^{d-n+p-1}$ quelle varietà (del resto da pag. 53 si ha, essendo $r \leq n-p$, $t \geq d-n+p-1$).

Applicando il lemma di Castelnuovo (pag. 117) ad una g_{2p-2}^{p-1} su una C^{2p-2} di S_{p-1} si ha // che i suoi gruppi dovranno stare in S_{p-2}, e però saranno quelli segati [121] su C dagl'iperpiani. Segue che *esiste una sola* g_{2p-2}^{p-1}. In altri termini le C^{2p-2} di S_{p-1} rappresentanti uno stesso ente, cioè riferite univocam. fra loro, sono projettive: si posson chiamare *curve canoniche* di genere p. La geom. sull'ente si riduce alla geom. projettiva della curva canonica che lo rappresenta. Questa curva sarebbe data da $y_0 : y_1 : \cdots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \cdots : \varphi_{p-1}(x)$, ove $f(x) = 0$ è una curva piana d'ord. m di cui le φ sono agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3$. La curva canonica si riduce ad una curva razionale normale doppia d'ord. $p-1$ nel caso iperellittico (pag. 102); tolto questo caso, la curva canonica e quindi la g_{2p-2}^{p-1} è semplice, cioè le curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3\ldots$[34]

Il lemma di Castelnuovo conduce più // in generale al *teorema di Riemann e* [122] *Roch*[lx]. Applicandolo in fatti alla curva canonica e ad una g_n^r speciale su questa, si ha che i gruppi di questa stanno in S_{n-r-1}, sicché se $n-r \leq p-1$ (come accade certo se la serie speciale è completa), per ogni gruppo passano almeno ∞^R S_{p-2}, ove $R = p-n+r-1$.

Chiamando *speciale* un gruppo di n elem$^{\text{i}}$ quando fa parte di una serie lineare speciale di dim. > 0, abbiamo che la posiz. di tali elem$^{\text{i}}$ è veramente speciale. Mentre n elem$^{\text{i}}$ qualunque, quando $n > p$, formano sempre un gruppo di una serie di dim > 0 (nota a pag. 92), sono sempre gl'infiniti (o gli zeri) di funzioni razionali dell'ente, per $n \leq p$ ciò non accade più in generale, ed n elem$^{\text{i}}$ qualunque stanno solo nella g_n^0 da essi costituita, non sono più gl'infiniti di alcuna funz. // raz$^{\text{le}}$ di grado [123] n dell'ente. Perché essi sian tali, stiano in una g_n^r ove $r > 0$, occorre che gli n p$^{\text{i}}$ imagini sulla curva canonica C stiano in un S_{n-r-1} (anzi che in un S_{n-1}), stiano in ∞^R gruppi della g_{2p-2}^{p-1}, anzi che in soli ∞^{p-n-1}; presentino cioè *al più* $n-r$ condizioni, anzi che n, a quei gruppi cioè sulla curva piana d'ord. m alle agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3$. In altri termini degli n p$^{\text{i}}$ di un gruppo speciale, quando esso faccia parte di una g_n^r speciale non data, si posson prendere ad arbitrio *al più* $n-r$ punti, gi-

[34]Intorno alle curve canoniche v. la mia nota "Sulle curve normali di genere p dei vari spazi" (Rend. Ist. Lomb. 1888) [Cfr. SEGRE 1888, cit.], nella quale si trova anche la dimostraz. del teor. di Clifford ecc.

[lx]Gustav Roch (Dresda 1839 - Venezia 1866).

acché l'S_{n-r-1} congiungente di questi dovrà contenere gli altri. - Questo teor. per $r = 1$ si trova in sostanza nel n. 5 della memoria di Riemann, e per r qual. nella Nota di Roch (Crelle 64, 1864) "Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in
[124] algebraischen Func//tionen"[lxi]; lo completeremo in seguito precisandolo meglio sì da ottenere anche il risultato di Roch enunciato in quel libro (pel confronto si osservi che Riemann e Roch rappresentando l'ente con $F\binom{n\ m}{s,\ z} = 0$ hanno per agg^{te} le $\varphi\binom{n-2\ m-2}{s,\ z}$)).

Intanto il teor. ci dà già la ragione del nome di serie *speciali*. Esso abbraccia tutti i risultati precedenti sulle serie speciali. Così, poiché per un gruppo di una g_n^r speciale si posson prendere al più $n - r$ elem^i, mentre quando è data se ne posson prendere r, segue $n - r \geq r$, $n \geq 2r$ (pag. 118). Osserviamo poi che se si prendono appunto $n - r$ p^i ad arbitrio su C l'S_{n-r-1} che li congiunge non incontra più in generale in r punti C, se si toglie il caso che esso sia un iperpiano S_{p-2}, cioè $n - r =$
[125] $p - 1$; oppure che C sia doppia, cioè l'ente iperellittico.[35] Tolto dunque questo // caso e supposto $n - r < p - 1$, sono *meno* di $n - r$ gli elem^i arbitrari di un gruppo di una g_n^r speciale non data, e si ha quindi $n > 2r$. Segue che sopra un ente che non sia iperell^o la sola g_n^r speciale con $n = 2r$ è la g_{2p-2}^{p-1}.

Terminiamo questo Cap^o con un'applicazione delle proprietà viste delle serie lineari alle *rigate speciali*.[36] Abbiamo visto (pag. 116) che una rigata d'ord. n gen. p non speciale ha S_{n-2p+1} per spazio normale; mentre una speciale ha per normale uno spazio superiore. Se $n > 2p - 2$ si può andare solo fino ad S_{n-p+1} (pag. 120).

Dico anzitutto che la rigata F di gen. $p > 0$ e d'ord. $n \geq 2p$ di S_{n-p+1} è una
[126] cono. // Poiché un iperpiano per una gener. dovà contenere altre gener., altrimenti la γ^{n-1} d'inters. residua starebbe in un S_{n-p-1} (anche se si riducesse ad una curva multipla) e gl'iperpiani per questo mostrano che F sarebbe razionale. Projettando F su S_3 comunque ogni piano per una gener. ne conterrebbe altre, cioè le gener. si

[lxi] ROCH, G. 1865, *Über die Anzhal der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen*, Jour. für die reine und angewandte Math., 64, pp. 372-376.

[35] Cfr. Noether, Raumcurven teor. III^{II} alla fine di p. 10 [cfr. NÖTHER 1882, cit.].

[36] V. specialmente il mio lavoro sulle curve e rigate algebriche, 2^a P^e (Math. Ann. t. 34) [si tratta di: SEGRE, C. 1889, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (II partie Surfaces réglées algebriques)*, Math. Annalen, 34, pp. 1-25; *Opere*, 1, 125-151].

tagliano a due a due: cono. Ecc. Del resto più tardi ritroveremo questa proposiz. con minori restrizioni. (pag. 133)

Sia ora F una rigata irriduttibile non conica di $S_{n-p-i+1}$, ove $1 \leq i \leq p-1$. Un iperpiano per $i+1$ gener. - che si può sempre tirare se (1) $n \geq p+3i+1$, taglia ancora F in una γ^{n-i-1}, che non può stare in un $S_{n-p-i-1}$, altrimenti gl'iperpiani per questo darebbero su F una g^1_{i+1} di cui farebbe parte il gruppo di $i+1$ gener. // che s'era scelto ad arbitrio, il che contraddirebbe al teor. di Riemann. Quindi **[127]** supposto che essa si spezzi in una γ^m direttrice irriduttibile, semplice o multipla, ed in $n-m-i-1$ (≥ 0) gener[i], dovrà lo spazio S_h a cui appartiene γ^m essere di dim. $h > m-p$; altrimenti con $n-m-i-1$ gener. qual. darebbe un $S_{n+h-m-i-1}$ e quindi un $S_{n-p-i-1}$ con una γ^{n-i-1}. Segue che nella ipotesi (1) vi è certo su F una *curva direttrice speciale*.

Si posson assegnare dei limiti superiori ad m ed h considerando la $g^{n-p-i-h}_{n-m}$ che su F è segata dagl'iperpiani per S_h, e supponendo che quella serie *non* sia speciale. Basta perciò imporre ad es[o] la condizione $n-m > 2p-2$, cioè (2) $n \geq 2p+m-1$. Allora sarà $(n-m)-(n-p-i-h) \geq p$, ossia $m \leq h+i$. Questa poi con la $2h \leq m$ // che segue dalla g^h_m rappres[a] da γ^m trae $h \leq i$. Abbiamo dunque nelle ipotesi (1), **[128]** (2):

$$(3) \qquad h \leq i, 2h \leq m \leq h+i.$$

Per $h = i$ si ha $m = 2h$. In ogni caso se $m = 2h$ (v. pag. 124, 125) la γ^m si riduce ad una γ^h razionale normale doppia e la rigata è iperellittica: tolto solo il caso di $h = p-1$ e quindi anche $i = p-1$, cioè rigata di S_{n-2p+2}, ché allora la γ^m può anche essere una curva canonica non degenere.

Poiché $m \leq 2p-2$, la condiz. (2) è certo soddisfatta se

$$n \geq 4p-3;$$

ma volendo abbracciare anche la (1), contemplando anche il caso estremo $i = p-1$, si deve porre

$$(4) \qquad n \geq 4p-2.$$

Con questa sola ipotesi varranno le (3) ecc. In particolare, rigate di $S_{n-p} (p > 1)$, di
[129] S_{n-p-1} $(p > 2)$, di // $S_{n-p-2} (p > 3)$. (v. loc. cit°).

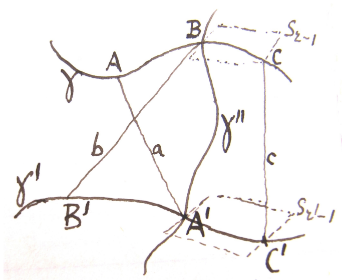
Cap. 7°. Serie complete. Serie residue. Curve aggiunte. Applicazioni

Come nel Cap° preced. abbiamo derivato tutto da un teor. fondam.: la formola di Zeuthen, o la mia formola; così nel presente Cap° sarà fondam[le] il teor. segu.

Se due serie l[i] d'ord. n su un ente algebrico hanno un gruppo comune, esse son contenute in una stessa serie l[e] d'ord. n.

Per dimostrarlo consider. anzitutto il caso di 2 serie non degeneri g_n^r, $g_n^{r'}$. Saran
[130] // rappres[e] da una γ^n di S_r e una γ'^n di $S_{r'}$, e questi 2 spazi li supporremo indip[i], cioè congiunti da $S_{r+r'+1}$. Condotto per gli S_{r-1}, $S_{r'-1}$ conten[i] i due gruppi omologhi di γ, γ', un iperpiano, questo sega la rigata d'ord. $2n$ delle congiungenti i p[i] omologhi di γ, γ' in n gener. ed in una curva direttr. irriduttib. γ'' d'ord. n. Sulla rigata le due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ son date dagl'iperpiani passanti per $S_{r'}$, S_r, e su γ'' da sez[i] con iperpiani, onde quelle serie saran contenute in quella rappres[a] da γ''.

Se le due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ hanno degli elem[i] fissi comuni, basta dimostrare il teor. pelle serie che rimangono togliendo questi elem. Possiamo dunque supporre che



i k elem[i] fissi della g_n^r sian diversi dai k' elem[i] fissi della $g_n^{r'}$. Queste due serie saran rappres. da curve γ, γ' di S_r, $S_{r'}$ d'ord.
[131] $n-k$, $n-k'$ con k // p[i] fissi A su γ, e k' p[i] fissi B' su γ': gli omologhi A' degli A su γ' saran distinti dai B' e così gli omol[i] B su γ ai B' saran distinti dagli A; e l'ipotesi che vi sia un gruppo comune alle due serie significa che un S_{r-1} taglia γ oltre che nei k' p[i] B in $n-k-k' (\geq 0)$ p[i] C, ed un $S_{r'-1}$ taglia γ' oltre che nei k p[i] A' in

$n-k-k'$ p$^{\text{i}}$ C' sì che i C ed i C' si corrispondono. Sulla rigata d'ord. $2n-k-k'$ generata da γ, γ' le due serie son date: dalle gener. a fisse insieme colle sez. fatte dagl'iperpiani per $S_{r'}$, e dalle b fisse colle sez. ... Un iperpiano pei due S_{r-1}, $S_{r'-1}$ sega quella rigata nelle $n-k-k'$ gener. c ed in una γ''^{n} irriduttib. E su questa quelle due serie saran // segate appunto da quegl'iperpiani, poiché essa contiene i **[132]**
p$^{\text{i}}$ A' e B.

Il teor. fondam$^{\text{le}}$ si completa subito aggiungendo (pag. 10 e 23) che se una g_n^r ed una $g_n^{r'}$ hanno comune precisamente una $g_n^i (i \geq 0)$, esse stanno in una $g_n^{r+r'-i}$, e non in una serie minore.

Ma per le nostre applicaz$^{\text{i}}$ basta il teor. fondam$^{\text{le}}$. Esso prova che se due g_n hanno 1 gruppo comune, o l'una sta nell'altra, oppure entrambe stanno in una superiore. Questo 2$^{\text{o}}$ caso non si può rappresentare se l'una almeno delle due g_n è *completa*: l'altra vi starà.

Dunque: due g_n complete aventi 1 gruppo comune coincidono. Da un gruppo di n elem$^{\text{i}}$ qualunque è individuata la g_n completa che lo contiene (e così una g_n qual. sta in una sola g_n completa): che può ridursi ad una g_n^0 (e vi si ridurrà certo
se // $n \leq p$ e gli n elem$^{\text{i}}$ si assumono ad arbitrio). - Quindi se due curve *normali* **[133]**
d'ord. n sono in corrisp. univoca sì che ad un particolare gruppo di n p$^{\text{i}}$ dell'una, sez. con un iperpiano, corrisponda un analogo gruppo nell'altra, la corrisp$^{\text{a}}$ è una collineazione. - Segue che una rigata d'ord. n e gen. $p > 0$ a sezioni spaziali non speciali (per es. di ordine $n \geq 2p-1$) appartenente ad S_{n-p+1} è un cono (cfr. pag. 125); poiché due sezioni spaziali saranno in collineaz. con n p$^{\text{i}}$ uniti su un S_{n-p-1} ed $n > n-p$, quindi omologia.

Se una g_n^r è completa, è tale anche la $g_{n-h}^{\rho} (\rho \geq r-h)$ dei gruppi residui di h elem$^{\text{i}}$ fissi risp. ad essa. Poiché se questa g_{n-h}^{ρ} stesse in una $g_{n-h}^{\rho'}$, questa cogli h elem$^{\text{i}}$ fissi darebbe una $g_n^{\rho'}$ avente comune con la g_n^r completa una g_n^{ρ} e però con-
tenuta nella g_n^r // e coincidente quindi colla g_n^{ρ}. - Quest'osservazione ha per con- **[134]**
seguenza che projettando una curva normale da h suoi punti qualunque si ottiene ancora una curva normale.

- *Applicazione alle curve agg*^{te} *di una* γ^m *piana*. Le agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3+\alpha > m-3$ segano una $g_{m\alpha+2p-2}$ di dim. $\geq m\alpha + p - 2$ (pag. 56); poiché l'ordine è $> 2p-2$, la serie non è speciale e la differenza fra l'ordine e la dim. sarà $\geq p$. Segue che la dim. è precisamente $m\alpha + p - 2$, cioè (loc. cit.) i passaggi pei p$^{\text{i}}$ multipli di γ impongono condiz$^{\text{i}}$ indip$^{\text{i}}$ a quelle agg$^{\text{te}}$; ed inoltre quella serie è completa. è pure completa (pag. 118) quella segata dalle agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-3$. E vedremo subito anche quella segata dalle agg$^{\text{te}}$ d'ord. minore. - È dunque (pel teor. preced., pag. 133, 134)
[135] completa la serie segata su γ da tutte le agg$^{\text{te}}$ d'ord. ν // assoggettate a passare per p$^{\text{i}}$ semplici dati ad arbitrio su γ.

Poiché le agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-1$ segano su γ una serie completa, lo stesso sarà per le agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-1-a$ (se esistono): poiché una curva irriduttib. d'ord. a non passante per p$^{\text{i}}$ multipli di γ le completa in agg$^{\text{te}}$ d'ord. $m-1$, sicché la serie da esse segata è completata dagli am p$^{\text{i}}$ d'inters. di γ con quella curva ausiliaria in serie data da φ^{m-1} agg$^{\text{te}}$; e viceversa ogni φ^{m-1} agg$^{\text{ta}}$ passante per quegli am p$^{\text{i}}$ d'incontro conterrà tutta la curva d'ord. $a \ldots$: dunque la serie data dalle φ^{m-1-a}, resto degli am p$^{\text{i}}$ risp. a quella completa data dalle φ^{m-1}, sarà pure completa.

Dal fatto che le agg$^{\text{te}}$ di un ord. *qual.* passanti per dati p$^{\text{i}}$ di γ vi segano, fuori di
[136] questi e dei p$^{\text{i}}$ multipli, una serie completa, // segue un modo semplice di costruire la serie completa che è individuata su γ da un dato gruppo qual. G_n. Si conduca per questo una curva agg$^{\text{ta}}$ (il che si può sempre, prendendola d'ord. abbastanza elevato) e sia G_N il resto: le agg$^{\text{te}}$ dello stesso ord. passanti per G_N daranno la g_n completa. Mutando quella prima curva agg$^{\text{ta}}$ muterà G_N (anche N se muta l'ord.); ma si avrà sempre la stessa g_n; si ha così (almeno in parte) il *teor. del resto* (Brill e Nöther, pag. 273): se due G_n son *resti* o *corresiduali* risp. ad un gruppo, son pure tali risp. ad ogni resto dell'uno dei due.

Se il sist. delle agg$^{\text{te}}$ d'ord. ν sega su γ^m una serie completa, lo stesso non varrebbe pel sistema di tutte le curve d'ord. ν: si verifica subito che la condiz.
[137] più naturale che si presenti per render completa la serie è di as//soggettare quelle curve ad avere in ogni p. s-plo di γ un p. $(s-1)$-plo: donde una nuova ragione dell'uso delle curve agg$^{\text{te}}$. Ma anche se s'impone la stessa multiplicità di γ si ha,

fuori dei p$^{\mathrm{i}}$ multipli, una serie completa: poiché per le φ^n agg$^{\mathrm{te}}$ l'avere in un p. s-plo di γ un p. s-plo equivale al passaggio per gli s p$^{\mathrm{i}}$ di γ che cadono in quel p. s-plo, sicché si può applicare il teor. di pag. 133.

Segue che in un *sist. lineare di* ∞^k γ^m *gen.* p *determinato dai* p^{i} *base*, su ogni curva le altre danno una *serie caratteristica* g_n^{k-1} *completa*, onde $n-k+1 \leq p, k \geq n-p+1$; ed ha sempre luogo il segno = se la serie non è speciale, ad es$^{\mathrm{o}}$ se $n > 2p-2$, oppure $k > p$; il segno di ineguaglianza se la serie è speciale. // In altri termini una sup. **[138]** razionale d'ord. n a sez. spaziali di gen. p, la quale sia normale, ha per sezioni spaziali delle curve normali, ed appartiene ad S_{n-p+1}, o a spazi super$^{\mathrm{i}}$ se quelle sez. sono speciali. Così per $p = 0, 1$ si hanno delle F^n di S_{n+1} o di S_n; e poiché queste superf. son note (Del Pezzo), e son note le loro rappresentazioni piane, così se ne trae la riducibilità di tutti i sistemi lineari di genere 0 ed 1, tolti i fasci, a certi tipi.

- *Serie residue*. Data una g_ν^ρ completa, i *resti* o *residui* di un G_n rispetto ad essa formano una $g_{n'}^{r'}$ completa (pag. 133), ove $n + n' = \nu$. E similmente i residui di qualunque gruppo $G'_{n'}$ di questa formano una g_n^r completa: quella determinata da G_n. Segue che ogni gruppo // della g_n^r ed ogni gruppo della $g_{n'}^{r'}$ sono i residui risp. **[139]** alla g_ν^ρ: le due serie son *residue* risp. a questa; per *ogni* gruppo della g_n^r passano *precisamente* $\infty^{r'}$ gruppi della g_ν^ρ, ecc. Rappres$^{\mathrm{o}}$ la g_ν^ρ con una C^ν normale di S_ρ, abbiamo che su questa la g_n^r ha i suoi gruppi in spazi $S_{\rho-r'-1}$ e la $g_{n'}^{r'}$ in spazi $S_{\rho-r-1}$.

Applichiamo ciò in partic. alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1} ed alle *serie speciali residue* (rispetto a questa); con che completeremo il teor. di Riemann-Roch. Questo diceva che se un gruppo G_n determina una g_n^r completa *speciale*, sicché $n - r \leq p - 1$, per esso passano $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica sì che $r' \geq p - n + r - 1$: vedremo che ha luogo il segno = nell'ipotesi che la g_n^r sia // completa. Invero la $g_{n'}^{r'}$ residua, ove **[140]** $n' = 2p - 2 - n$, avrà ogni gruppo in ∞^r gruppi della serie canonica, e però sarà similmente $r \geq p - n' + r' - 1$; sicché sommando con la disuguaglianza preced. si trae che deve aver luogo il segno = in entrambe le relaz.$^{\mathrm{i}}$ Così si precisa meglio il teor. di R. e R.: se un gruppo G_n determina una serie *completa* di dim. r, e sta in $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica, si ha $r' = p - n + r - 1$, ossia $r = n - p + 1 + r'$; od in

altri termini, esso impone *precisamente* $n - r$ condiz^{i} ai gruppi della serie canonica che devon contenerlo. In pari tempo si ha il teorema di reciprocità con cui Brill e Nöther completano il teor. di Riemann e Roch: se due gruppi G_n, $G'_{n'}$ son residui
[141] risp. alla serie canonica (sicché $n + n' = 2p - 2$) // e per G' passano ∞^r gruppi della serie canonica, i quali così danno come resti di G' la g_n^r completa che contiene G, e similmente per G passano $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica ..., si ha $r' = p - n + r - 1$, ecc.; o raddoppiando $n' - n = 2(r' - r)$.

Veramente Riemann e Roch non parlano della g_n^r completa determinata da G_n: essi considerano il *numero delle costanti da cui dipende una funz. raz^{le} dell'ente* che abbia tutti i suoi infiniti (semplici) fra gli elementi di G_n. Se la g_n^r completa è data sull'ente da: $\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0$, ed il gruppo G_n da $\varphi_0 = 0$, quelle funz^{i} raz^{li} dell'ente si avranno dividendo quella forma generale per φ_0, cioè saranno $\lambda_0 + \lambda_1\frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \cdots + \lambda_r\frac{\varphi_r}{\varphi_0}$ sicché contengono *linearmente* $r + 1$ costanti. Il teor. di R. e R. si
[142] enuncia allora così: le // funz^{i} raz^{li} dell'ente i cui infiniti sono fra gli n elem^{i} di un dato gruppo G_n pel quale passano $\infty^{r'}$ gruppi della serie canonica, dipendono (lineram.) da $n - p + 2 + r'$ costanti. - Si noti che il teor. vale anche quando G_n non sta in alcun gruppo della serie canonica, se si mette $r' = -1$, poiché allora è $r = n - p$.

Rappres^{o} l'ente con la curva canonica o con una γ^m piana si hanno enunciati speciali ...

Applichiamo il teor. Riemann-Roch alla questione: *se una γ_p^n piana data sia projez. di una C^n appartenente ad S_r*. Se $n \geq p + r$, certamente, poiché la dim. di una ser. g_n completa è $\geq n - p$ e quindi $\geq r$; e la questione consiste appunto nel veder se la g_n^2
[143] segata su γ dalle rette // del piano è contenuta in una g_n^r, cioè determina una serie completa di dim. $\geq r$.

Se $n < p + r$, la g_n^r, e quindi la g_n^2, sarà speciale. Per un G_n dato su γ da una retta qual. dovranno passare $\infty^{p-n+r-1}$ curve agg^{te} d'ord. $n - 3$, cioè γ dovrà ammettere altrettante curve agg^{te} d'ord. $n - 4$, e ciò è anche sufficiente. Ora contando le costanti si avrebbe che le agg^{te} d'ord. $n - 4$ sono ∞^{p-n+1} in generale: nel caso attuale dunque essendo $\infty^{p-n+r-1}$ devono $r - 2$ delle condiz^{i} imposte alle curve agg^{te}

d'ord. $n-4$ dai passaggi pei p$^{\text{i}}$ multipli di γ esser conseguenza delle rimanenti.//

Cap. 8°. Il metodo algebrico di Brill e Nöther [144]

Teor. algebrico fondamentale di Nöther[37]. Nel caso che a noi importa dice perché una curva piana F si possa rappresenatare con $A\varphi + B\psi \equiv F$, ove φ e ψ son curve date tali che in ogni punto P comune, s-plo per φ, s'-plo per ψ cadano solo ss' intersez$^{\text{i}}$, cioè non vi sian tang$^{\text{i}}$ com$^{\text{i}}$, *basta* che F abbia ivi la multiplicità $s+s'-1$; ed allora A e B avranno la multipl$^{\text{à}}$ $s'-1$, $s-1$.

Ciò posto, sulla f_m piana abbiasi una g_n^r data dal sist. lineare $\psi = 0$ di curve *qualun//que* e pel gruppo G_n dato da $\psi_0 = 0$ si tiri una curva *agg*^{ta} $\varphi_0 = 0$ d'ord. [145] ν. Si avrà $\varphi_0\psi \equiv Af + \psi_0\varphi$, poiché $\varphi_0\psi$ in un p. comune ad $f=0$, $\psi_0 = 0$ che sia risp. s-plo, s'-plo, ha multipl$^{\text{à}}$ $s+s'-1$. Inoltre se le tg$^{\text{i}}$ in quei p$^{\text{i}}$ a f e ψ_0 son distinte, φ vi avrà multipl$^{\text{à}}$ $s-1$ cioè sarà *agg*^{ta}. Dunque ogni gruppo della g_n^r cioè dato da $f=0$, $\psi=0$ fuori di $\psi_0 = 0$ dà $\varphi = 0$: la g_n^r è segata da un sist. lin. di curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. ν. Un esame speciale completerebbe il caso che la g_n^r abbia p$^{\text{i}}$ fissi. - Se il sistema primitivo ψ era già di curve agg$^{\text{te}}$, lo si sarà sostituito con un altro φ (E supponendo che ψ_0 e ψ fossero due curve agg$^{\text{te}}$, anche di ord$^{\text{i}}$ diversi, si ottiene il Restsatz sotto la sua forma più generale; v. Brill e Nöther pag. 273). - In conclusione, tirata per G la φ_0 agg$^{\text{ta}}$ d'ord. ν che dia un // resto Γ, la g_n^r sta in [146] quella segata dalle φ^ν agg$^{\text{te}}$ per Γ. Si noti che il carattere di curva *agg*^{ta} ci servì nella dimostraz.

Segue che se la g_n^r è completa essa è segata da *tutte* le φ^ν agg$^{\text{te}}$ per Γ, e viceversa. Una serie completa è individuata da un suo gruppo G. Due serie con un gruppo comune stanno nella serie completa determinata da questo, ecc.[38]

[37] Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, Math. Ann. VI p. 351 [si tratta di: NÖTHER, M. 1873, *Über eine Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Annalen, 6, pp. 351-359]; v. anche (per dimostrazioni algebriche) Voss [si tratta del matematico tedesco Aurel Edmund Voss (Altona 1845 - Monaco 1931)] Math. Ann. 27 [si tratta di: VOSS, A. 1886, *Über einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Annalen, 27, pp. 527-536], Stickelberger [si tratta del matematico svizzero Ludwig Stickelberger (Buch 1850 - Basilea 1936) allievo di Weierstrass e professore all'Università di Freiburg. Collaborò scientificamente con F. G. Frobenius.] e Nöther Math. Ann. XXX [si tratta di: STICKELBERGER, L. 1887, *Über einen Satz des Hernn Nöther*, Math. Annalen, 30, pp. 400-409].

[38] Per quanto precede v. Nöther, M. A. 23 p. 348 [cfr. NÖTHER 1884, cit.]. E così per l'ordinamento di quanto segue si tien conto, oltre che della mem. Brill e Nöther [cfr. BRILL e NÖTHER 1874, cit.], di un passo di una lettera di Nöther a Bertini (26 Marzo 1889).

Le serie complete essendo così ridotte a curve agg$^{\text{te}}$ d'ord. $\nu \ldots$ ricordiamo (pag. 55, 56), che si ottiene $n - r \leq p$ e se $\nu = m - 3$ una g_{2p-2} di dim. $\geq p - 1$, la quale dà delle g_n^r per cui $n - r < p$. Il numero $n - r$ dice, quando è data la g_n^r, quanti
[147] sono i p$^{\text{i}}$ determinati dai rimanenti, sicché se // la serie è completa sono al più p. - Vedremo che se $n - r < p$ la serie è sempre segata da $\varphi^{\text{m-3}}$ agg$^{\text{te}}$ (supposto, a partir *di qui, f irriduttibile*).

Premettiamo il *teor. di riduzione* (Reductionssatz) di Nöther[39]: Se un gruppo G_n di una g_n^r completa sta su φ^{m-3} agg$^{\text{te}}$ ed il p. P non è su tutte queste φ^{m-3} passanti per G, la g_{n+1} completa determinata da $G_n + P$ ha P per p. *fisso*, ossia non è altro che la g_{n+1}^r ottenuta aggiungendo ad ogni gruppo della g_n^r il p. P. - Invero per determinare la g_{n+1} completa contenente $G_n + P$ conduciamo per questo una φ^{m-2} agg$^{\text{ta}}$, composta di una φ^{m-3} per G_n e di una retta r per P: il resto Γ non conterrà P, ma gli $m - 1$ p$^{\text{i}}$ residui di d'inters di f con $r, \ldots$; le φ^{m-2} agg$^{\text{te}}$ per Γ cioè per //
[148] quegli $m - 1$ p$^{\text{i}}, \ldots$ si spezzeranno in r e φ^{m-3} e però conterranno tutte P.

Se $n < p$, per n p$^{\text{i}}$ passano certo delle φ^{m-3}. Per dimostrare che se $n - r < p$, per ogni gruppo di una g_n^r passano delle φ_{m-3} basterà dunque provare, che se ciò è vero, è pur vero pei gruppi di una g_{n+1}^{r+1}. Invero se P è un p. non fisso per questa, i suoi residui formano una g_n^r; per un G_n di questa passano per ipotesi delle φ^{m-3}: e queste conterranno anche P, altrimenti pel teor. di riduzione, la serie completa g_{n+1} determ. da $G_n + P$ avrebbe P fisso, mentre la g_{n+1}^{r+1} non ha P fisso. Dunque per 1 gruppo $G_n + P$ della g_{n+1}^{r+1} passano delle φ^{m-3}.

Così il concetto di G_n o di g_n^r dati da φ^{m-3} agg$^{\text{te}}$ coincide con quello di gruppi o
[149] serie per le cui g_n^r *complete* è $n - r < p$. Li diciamo // gruppi o serie *speciali*. Sarà dunque $n \leq 2p - 2$. Inoltre $r \leq p - 1$, cioè le φ^{m-3} non possono essere più di ∞^{p-1}, altrimenti darebbero una g_{2p-2}^p a cui aggiungendo 1 punto si avrebbe una g_{2p-1}^p speciale poiché $n - r < p$, e sarebbe $n > 2p - 2$, assurdo. Di più nessun punto A può esser fisso per la g_{2p-2}^{p-1} data dalle φ^{m-3}, altrimenti astraendo da esso si avrebbe

[39]Crelle's J. 97 p. 224 [si tratta di: NÖTHER, M. 1884, *Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionen-theoretischen Satzes des Hernn Weierstrass*, Jour. für die reine und angewandte Math., 97, pp. 224-229], M. A. 37 p. 424 [si tratta di: NÖTHER, M. 1890, *Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen*, Math. Annalen, 37, pp. 417-499]; e la lettera citata a Bertini.

una g_{2p-3}^{p-1} ed aggiungendo a questa 1 punto P diverso da A una nuova g_{2p-2}^{p-1}, ed i gruppi di questa dovrebbero stare su φ^{m-3} che così avrebbero su f $2p-1$ punti, assurdo.

Le serie complete d'ord. n non speciali, ad es[o] quelle per cui $n > 2p-2$ sono di dim. $n-p$. Questo basterebbe per provare che se curve di gen[i] p, p' sono in corrisp. univoca si ha $p = p'$: considerando cioè due g_n complete omologhe con $n > 2p-2, 2p'-2$. //

Dal teor. di riduzione segue subito il teor. di Riemann e Roch. Supposto il **[150]**
gruppo G_n speciale, cioè sito (precisamente) in $\infty^{r'}$ φ, o determinante una serie completa g_n^r (ove $n-r < p$), si vuole una relazione fra n, r, r'. Presi successivam. i punti $P_1, P_2, \dots P_{r'+1}$ in guisa da rappresentare altrettante condiz[i] distinte per le φ che contengono G_n, il teor. di riduz[e] dice che la serie completa determ[a] da $G_n + P_1$, poi quella determ. da $G_n + P_1 + P_2, \dots$ ed infine quella determ. da $G_n + P_1 + \cdots + P_{r'+1}$ sono ∞^r (la g_n^r con aggiunti i p[i] P). Ma quest'ultima non è speciale, poiché per quel suo gruppo non passa più alcuna φ. Dunque $r = n - p + 1 + r'$: che è appunto il teor. di Riemann-Roch. - Da esso si passa subito al teor. di reciprocità di Brill e Nöther, poiché le φ per G_n daranno la $g_{n'}^{r'}$ residua // della g_n^r. - Inoltre **[151]**
poiché a determinare un gruppo nella g_n^r si posson prendere ad arbitrio r punti, e poi altri r' punti arbitrari si posson prendere per una φ contenente quel gruppo, segue $r + r' \leq p - 1$, e sommando con la relaz. preced.: $2r \leq n$, cioè il teor. di pag. 118; dal quale s'è pure dedotto che le φ^{m-3} danno una g_{2p-2}^{p-1} senza p[i] fissi.

Il teor. di riduzione di Nöther ed il suo inverso, che trarremo subito dal teor. Riemann-Roch, stabiliscono le condizioni perché una g_{n+1}^r con un punto fisso P sia completa. Osserviamo che la g_n^r residua di P deve pur essere completa. E speciale, perché se non fosse speciale sarebbe $n - r = p$, e quindi $(n+1) - r > p$, sicché la g_{n+1}^r non sarebbe certo completa. - Tutto si riduce dun//que a vedere quando è **[152]**
che aggiungendo ad una g_n^r speciale completa un punto P si ha una g_{n+1}^r completa. Il teor. di riduz[e] dice che *basta* che P non stia su tutte le φ passanti per un gruppo G_n della g_n^r, cioè non sia un p. fisso della serie residua di questa. Viceversa questa condiz. *è necessaria*, perché se P stesse su tutte quelle φ, nella formola $r = n -$

$p + 1 + r'$, dal gruppo G_n al $G_n + P$ non muterebbe r', mentre n aumenterebbe di 1, sicché anche la dimens^e da r dovrebbe diventare $r + 1$ per la g_{n+1} completa determinata da $G_n + P$.

Rappresentando la g^r_n con una C^n di S_r, si ha che la g^r_{n+1} è completa cioè non contenuta in una g^{r+1}_{n+1} se la C^n non è projez. di una C^{n+1} da 1 suo p^o. Ed abbiamo
[153] // che una C^n normale *non* speciale è sempre proj. di una C^{n+1}. Ma se la C^n è normale speciale, essa si può ottenere come proj. di una C^{n+1} di S_{r+1} solo quando la residua della g^r_n risp. alla serie canonica ha almeno 1 p^o P fisso (e questo p^o sarà imag^e del centro di proj. della C^{n+1}).

Il teor. di riduz^e con l'inverso si può enunciare sotto forma analitica così (v. Nöther nel Crelle 97): affinché le funz^i raz^{li} dell'ente algebr^o i cui infiniti (semplici) sono fra gli $n + 1$ elem^i $P, P_1, \dots P_n$ siano tutte finite in P è necessario e sufficiente che esista un gruppo della serie canonica (od una φ) che contenga $P_1, \dots, P_n$ ma non P (v. anche Math. Ann. 37 p. 424). Poiché quelle funz^i raz^{li} restan finite in
[154] P appunto quando // le g'_{n+1} che esse rappresentano e che son determinate dal gruppo $PP_1 \dots P_n$ hanno P fisso.

Abbiansi n p^i di f formanti un G_n in cui non s'annulli alcuna φ. Siano anzitutto $P_1 \dots P_\mu P_{\mu+1}$ tali che formino un gruppo $G_{\mu+1}$ di una $g'_{\mu+1}$, mentre μ qual. fra essi non formino ancora un gruppo di una serie infinita. S'indichino con $P_{\mu+2}, \dots$ i punti di G_n per cui passano tutte le φ che contengono $G_{\mu+1}$. Poi con P_{μ_1+1} un nuovo p^o di G_n e con $P_{\mu_1+2}, \dots$ i p^i per cui passano le φ che contengono $P_1 \dots P_{\mu_1+1}$; ecc. Il teor. di riduzione con l'inverso mostrano che delle serie di gruppi di m p^i *mobili* ottenibili da $G_m = (P_1 \dots P_m)$ ove $m = 1, 2, \dots n$, mancheranno quelle corrisp^i ai
[155] valori segu^i di m: $1, 2, \dots \mu, \mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \dots$, in tutto pre//cisamente p, cioè p saranno le funz^i raz^{li} dell'ente mancanti fra quelle che hanno per infiniti i gruppi G_m. - Questo teorema è una estensione dovuta al Nöther (Crelle 97) di un teorema che Weierstrass dà nelle sue Lezioni sulle funz^i abeliane (Lückensatz). Anzitutto in un cap^o sulle funz^i raz^{li} dell'ente che hanno un solo infinito (multiplo, s'intende) il Weierstrass mostra che se questo p^o non ha una posizione *particolare*, l'ordine d'infinità, cioè il grado della funz^e, dev'essere $> p$ e per ogni val. $> p$ esistono funz^i

siffatte. Considerando il p. m-plo come la riunione di m p$^{\text{i}}$ inf. vicini, ciò si può derivare dal teor. Riemann-Roch (v. la fine della pag. 122); bisogna cioè che il p$^{\text{o}}$ che si vuol sia infinito m-plo per funz. raz$^{\text{li}}$ di grado m, ove $m \leq p$, sia tale che le φ che vi hanno // contatto $(m-1)$-punto con f vengano in conseguenza ad avervi contatto **[156]** m-punto: il che non accade che per punti *particolari*[40]. Ma considerando poi un p$^{\text{o}}$ *qualunque* si ha (Lückensatz) che fra i numeri 1,2,3, ... ve ne sono *precisamente* p che non si possono assumere come gradi di funz$^{\text{i}}$ raz$^{\text{li}}$ aventi tutti gli infiniti coincidenti in quel p. $^{\text{o}}$ Questa proposiz. ha anche servito (qualche volta) al Weierstrass per definire il *rango* (genere) dell'ente algebr.$^{\text{o}}$ E serve pure elegantemente per ottenere equaz$^{\text{i}}$ particolari dei vari enti di gen. p (v. le Lez$^{\text{i}}$ di Weierstrass).//

Cap. 9°. Rappresentazioni reali dell'ente algebrico. Il metodo funzionale di Riemann **[157]**

L'ente algebrico come varietà ∞^2 (v. pag. 5) di elem$^{\text{i}}$; ad es$^{\text{o}}$ la varietà delle coppie di numeri complessi (s, z) soddisfacienti alla $F(s, z) = 0$. Questa varietà è *continua*, chiusa e tale che da ogni elem$^{\text{o}}$ si può andare in ∞ direz.$^{\text{i}}$ Un'imagine reale si ha in una *superficie* (reale): si tratta di rappresentarlo effettivam$^{\text{e}}$ su una superf. in guisa che la corrispondenza sia univoca e continua. Alle superf. si potranno dunque far subire (per ora) deformaz$^{\text{i}}$ continue qual.; essendo equivalenti le superf. che sono in corrisp. univoca continua. Converrà che le sup. siano *chiuse*, come l'ente alg.$^{\text{o}}$ //

Per l'ente razionale si ha subito la rappres$^{\text{e}}$ distendendo il parametro $z = x + iy$ **[158]** da cui esso dipende sul piano di Argand[lxii] e Gauss[lxiii] (con 1 sol p$^{\text{o}}$ all'∞), o sulla sfera (di Riemann).

In generale per l'ente $F\binom{n\ m}{s\ z} = 0$, fissato un p. z_0 sul piano o sulla sfera, a cui corrisp. i valori $s_0' \dots s_0^{(n)}$ di s, si faccia muovere con continuità ma senza attraversare un taglio che passa per tutti i p$^{\text{i}}$ di diram$^{\text{e}}$, o i tagli che congiungono 1 p. fisso

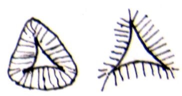
[40] Per una dimostraz. dettagliata v. Nöther Crelle 92 p. 301 [si tratta di: NÖTHER, M. 1882, *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Jour. für die reine und angewandte Math., 92, pp. 301-303].

[lxii] Jean Robert Argand (Ginevra 1768 - Parigi 1822).

[lxiii] Carl Friedrich Gauss (Braunschweig 1777 - Gottinga 1855).

a questi p^{i} diram^{e}; allora congiungendo i valori delle varie radici che si hanno dai due lati di ogni taglio si ottiene la superf. di Riemann n-pla, connessa o no secondo che l'ente è o no irriduttibile. Si noti che così si mette in evidenza una g_n^1 qual. ad elem^{i} tutti mobili (v. pag. 95). Caso dell'ente iperell^{o}, $n = 2$.

[159] Superf. di Klein: dei p^{i} reali delle tg^{i} // imag. della curva piana che rappresenta l'ente (Klein, Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Ann. VII e X[lxiv]): la connessione fra i vari piani sovrapposti si fa nei p^{i} reali della curva, lungo le tg^{i} reali isolate o di flesso (e nei p^{i} reali delle tg^{i} di flesso imag^{e} se la curva è imag^{a}).



Esempi: la conica, da cui si ritorna alla sfera (ellissoide); le curve reali di 3^{a} classe che conducono all'anello.

Si posson avere direttam^{e}, senza l'astrazione delle sup. multiple, superf. semplici che rappresentino l'ente. Così prendendo per questo una curva imag. che non stia in un piano reale, le rette reali che ne contengono i vari p^{i}, cioè li congiungono ai coniugati, formano una congruenza reale che rappres^{a} l'ente (nel caso di una r^a imag^{a} di
[160] 2^{a} sp. si ha // la rappres^{e} di Staudt) e che si può sostituire con la sup. luogo dei p^{i} medi fra le coppie di p^{i} coniugati. O si ricorre ad S_4 ed al cono che projetta da 1 r^a imag^{a} la curva: il luogo dei p^{i} reali dei vari piani generatori sarà una sup. imagine dell'ente.

Con tagli da una sup. chiusa si può passare ad una con orli o ad un aggregato di superf. Viceversa una tal sup. od un aggregato si considererà come una superf. chiusa, purche' sia fissata una corrispondenza univoca fra i punti degli orli, fra loro accoppiati in un determinato modo. (Esempio: un poligono piano curvilineo, un parallelogrammo che si muta in un anello, ecc.); così che si abbia ancora *in abstracto* una varietà chiusa. E se la superf. è *unilatera* o *doppia* (esempi, di Mobius[lxv] ecc.), si
[161] può pure usare considerandola // come una sup. bilatera chiusa, purche' in ogni

[lxiv] KLEIN, F. 1874, *Über eine neue Art der Riemann'schen Flächen*, Math Annalen, 7, pp. 558-566 e 10, 1876, pp. 398-416.

[lxv] August Ferdinand Möbius (Schulpforta 1790 - Lipsia 1868).

suo p$^{\text{o}}$ se ne considerino *due*; lo stesso artifizio si può usare per una sup. qualunque aperta, considerando gli orli come linee di passaggio dall'uno all'altro foglio[41].

Lo studio delle proprietà di una sup. che non mutano per trasformaz$^{\text{i}}$ continue costituisce l'Analysis situs o Topologia (Leibniz[lxvi], Riemann). In essa compaiono i tagli *trasversi* (Querschnitte) e *chiusi* o rientranti (Rückkehrschnitte). Definiz$^{\text{e}}$ di superf. connessa, semplicem. connessa. In una superf. chiusa (connessa) si posson fare un certo numero N di tagli, chiuso il 1$^{\text{o}}$ e trasversi gli altri, che non la spezzano
ma la rendono semplicem. connessa, mentre $N + 1$ // tagli la spezzerebbero. Il **[162]**
num. (*fondam*$^{\text{le}}$) N è pari, = $2p$ ove p è il massimo numero di tagli chiusi che non spezzano la superf. e dicesi *genere* di questa. La sup. secondo Riemann è $N + 1 = 2p + 1$ volte connessa (mentre Klein e Neumann[lxvii] dicono $N = 2p$ la *connessione*). Si dimostra, con pure cosideraz$^{\text{i}}$ di posiz$^{\text{e}}$ (v. Neumann p. 168-171), che per una sup. sferica di Riemann d'ord. n con ν p$^{\text{i}}$ di diram., o ν per somma degli ord$^{\text{i}}$ di questi p$^{\text{i}}$ si ha per quel num. $N = 2p$ di tagli $\nu - 2n + 2$: dunque p è il genere dell'ente algebr.$^{\text{o}}$ Per trasformaz$^{\text{i}}$ univoche continue non muta il genere di una sup. : ne segue di nuovo che due enti algebr$^{\text{i}}$ in corrisp. univoca hanno lo stesso genere. Anzi con analoghe consideraz$^{\text{i}}$ di Analysis situs si dimostra che se 2 sup. chiuse di
gen. p, p' in corrisp. univoca continua (x, x') // hanno y, y' punti uniti …, si ha **[163]**
$y - y' = 2x(p' - 1) - 2x'(p - r1)$[42]; e se ne trae in particolare la formola di Zeuthen per una corrisp. fra 2 enti algebrici.

L'uguaglianza del genere non è solo necessaria, ma anche sufficiente perché due sup. chiuse si possan riferire univocam. con continuità[43]. Ne segue che a rappre-

[41] V., anche per altre cose del seguito, Klein Ueber Riemann's Theorie der alg. Functionen und ihrer Integrale [si tratta di KLEIN, F. 1882, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig]; e i Neue Beiträge …nei Math. Ann. XXI [si tratta di: KLEIN, F. 1883, *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Math. Annalen, 21, pp. 141-218].

[lxvi] Gottfried Wilhelm Leibniz (Lipsia 1646 - Hannover 1716).

[lxvii] Carl Gottfried Neumann (Königsberg 1832 - Lipsia 1925).

[42] V. De Paolis [Riccardo De Paolis (Roma 1854 - Roma 1892) autore di pregevoli lavori nell'indirizzo cremoniano, fu in corrispondenza con Segre, che ne scrisse il necrologio: SEGRE C., *Riccardo De Paolis*, Rend. del Circolo Mat. Palermo, 6, pp. 208-224; *Opere* 4, pp. 413-427.], Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze ecc. Mem. soc$^{\text{à}}$ XL, t. VII ser. 3$^{\text{a}}$ 1890 [si tratta di: DE PAOLIS, R. 1890, *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi*, Mem. Soc. It. Scienze detta dei XL, 3, 7, pp. 1-167].

[43] V. ivi, e Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaft (*Werke*, B. II) [si tratta di: MÖBIUS, A. 1863, *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte über die Verhand. K. Sächsischen Gesell. der

sentare un ente alg° di gen. p si posson assumere certe sup. *normali* di gen. p, ad es° una sfera con p manichi (per $p = 1$ l'anello), come fa Klein (op. cit).

Funzioni complesse del punto sulla sup. *Dato un sistema qual. di param^i o coord.*
[164] *curvilinee // p, q* sulla sup., non conviene prendere per funz$^{\text{i}}$ compl. del p. *ogni* funz. di p, q; ma conviene far sì che due qual. funz$^{\text{i}}$ siano funzioni l'una dell'altra nel senso di Riemann (funz$^{\text{i}}$ monogene di Cauchy). Ciò si ottiene se, assunta ad arbitrio una $z = x + iy$ come funz. compl. del punto, si assume poi come tale ogni funz. $w = u + iv$ di z, cioè ogni funz. delle 2 variab$^{\text{i}}$ reali x, y tale che

$$(1) \qquad i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

ossia

$$(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 = 0$$

cioè

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ora queste condiz$^{\text{i}}$ si posson anche esprimere in altro modo; poiché si sa che esse equivalgono a dire che $\frac{du+idv}{dx+idy}$ non dipende da dx, dy, è una funz. di x, y; e quindi anche $\frac{du-idv}{dx-idy}$; e moltiplicando si ha

$$(3) \qquad du^2 + dv^2 = E(dx^2 + dy^2)$$

ove E è funz. di x, y [si trova $E = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$], la qual identità equivale alle (2)
[165] purche' si aggiunga che $du + idv$ // deve mutarsi (a meno di un fattore) in $dx + idy$ e non in $dx - idy$. Così allorquando si assume una certa $z = x + iy$ come funz. completa del punto sulla sup., le altre devono esser quelle $w = u + iv$ tali che la equaz. $dx^2 + dy^2 = 0$ si muti (con la detta restrizione) nella $du^2 + dv^2 = 0$, cioè non cambi.

Wissens. zu Leipzig, 15, pp. 18-57, *Werke*, Hirzel, Leipzig II, 1886, pp. 433-472]; Jordan [si tratta del matematico francese Camille Jordan (Lione 1838 - Parigi 1922).], Sur la déformation des surfaces, J. de Lionville, 11_2 (1866) [si tratta di: JORDAN, C. 1866, *Sur la déformation des surfaces*, Jour. de Math. pures et appliquées, 2, 11, pp. 105-109].

Sia ora data ad arbitrio nelle coord. curvilinee p, q una forma differenz^{le} quadratica *definita* $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ di discriminante $H^2 = EG - F^2 > 0$. Avremo, spezzandola in due fattori lineari, complessi coniugati: $ds^2 \equiv (Adp + Bdq)(\bar{A}dp + \bar{B}dq)$ (ove il segno $\equiv$ indica uguaglianza, a meno di un fattore, funz. di p, q); e supposto $\lambda(p, q)$ un fattore integrante di $Adp + Bdq$, sicché

$$\lambda(Adp + Bdq) = dx + idy$$

e quindi $\bar{\lambda}(\bar{A}dp + \bar{B}dq) = dx - iy$, // sarà $ds^2 \equiv (dx + idy)(dx - idy) \equiv dx^2 + dy^2$. **[166]**
Se dunque si assume $z = x + iy$ come funz. complessa del luogo, sarà la forma $ds^2 = 0$ data, quella che da tutte le funz^i complesse del luogo sarà ridotta alla forma $du^2 + dv^2$. Fissato il sistema di coord. p, q, per ogni forma differ. (o meglio equaz. differ^{le}) $ds^2 = 0$, si ha un sistema di funz^i complesse del luogo. Si hanno subito le condiz^i caratteristiche di queste mediante E, F, G. Pongasi

$$\begin{aligned}
\Delta_1 u &= \frac{1}{H^2}\{E(\frac{\partial u}{\partial q})^2 - 2F\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} + G(\frac{\partial u}{\partial p})^2\} \\
\Delta_2 u &= \frac{1}{H}\{\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{H}(G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}) + \frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{H}(E\frac{\partial u}{\partial q} - F\frac{\partial u}{\partial p})\};
\end{aligned}$$

quando la forma ds^2 si riduce a $dx^2 + dy^2$ si ha $\Delta_1 u = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$, $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$: e nel caso che ds indichi l'elem^o lineare essi sono quelli che Lamé[lxviii] chiamò param^i differenz^{li} di 1^o e 2^o ord. della funz. u (v. ad es^o le Leçons sur les coord. curvil.[lxix]; veramente Lamé // chiama param. differ^{le} di 1^o ord. $\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2)}$ **[167]**
Beltrami[44] conserva questi nomi alle espress^i che corrispondono all'espressione generale dell'elem^o lineare ds e dimostra che queste $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$ (ed un param. differ^{le} intermedio, relativo a due funz^i) sono invariab^{li} per trasformaz^i di coord., cioè che

[lxviii] Gabriel Lamé (Tours 1795 - Parigi 1870).

[lxix] LAME, G. 1859, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris, Mallet-Bachelier

[44] [Si tratta del matematico Eugenio Beltrami (Cremona 1835 - Roma 1900)] Ricerche di Analisi applicata alla Geometria, Giornale di mat. t. II (1864) e III (1865) [si tratta di: BELTRAMI, E. 1864 - 1865 *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, Giornale di Mat., 2, 1864, pp. 267-282, 279-306, 331-339, 355-375; 3, 1865, pp.15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314]; e più specialmente Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque, Annali di mat., ser. 2 t. I (1867-8) [si tratta di: BELTRAMI, E. 1867, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*, Annali di Mat. pura ed applicata, 2, 1, pp. 329-366].

se si passa ad altre coord. p', q', sicché $ds^2 = E'dp'^2 + \dots$, le $\Delta_1 u, \Delta_2 u$ diventano uguali alle analoghe espressioni fatte con $p', q', E', \dots$. Ciò vale all'infuori del significato speciale geometrico che egli dà al ds^2. Ne segue dunque che l'equ. caratteristica (1) (pag. 164) di una funz. w del luogo diventa $\Delta_1 w = 0$; e le equaz$^{\text{i}}$
[168] differ$^{\text{li}}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a cui // soddisfano u e v diventano $\Delta_2 u = 0$, $\Delta_2 v = 0$ (onde $\Delta_2 w = 0$). Si trova poi che le (2) (pag. 164) diventano

$$(2') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{1}{H}\Big(F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}\Big) \\ \frac{\partial v}{\partial q} &= \frac{1}{H}\Big(G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}\Big), \end{aligned}$$

e queste caratterizzano la $w = u + iv$ (e sono compatibili se $\Delta_2 u = 0$ ossia $\Delta_2 v = 0$). Due funz$^{\text{i}}$ qual. w soddisfacienti a quelle equ$^{\text{i}}$ son funz$^{\text{i}}$ l'una dell'altra, e viceversa; ecc.

La forma $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ uguagliata a 0, è rappresentata geometricam. da coppie di direz$^{\text{i}}$ imag. uscenti da ogni p$^{\text{o}}$ della sup., e quindi da un sist. ∞ di 2$^{\text{o}}$ grado (o da due sist$^{\text{i}}$ di 1$^{\text{o}}$) di linee imag$^{\text{e}}$, integrali dell'equ. di $ds^2 = 0$. Se $u + iv$ è funz. complessa risp. a quella ds^2 poiché sarà $ds^2 \equiv du^2 + dv^2$, le direz$^{\text{i}}$ $du = 0$, $dv = 0$, ossia $u =$ cost., $v =$ cost. saranno coniugate armoniche risp. a
[169] $du \pm idv = 0$, cioè a quelle due. // E variando la funz. $u + iv$ che si sceglie, le direz$^{\text{i}}$ delle $u =$ cost., $v =$ cost. passanti per 1 dato p$^{\text{o}}$ rimarranno sempre coniug. arm. risp. a quelle, formeranno un'invol. I sistemi $u =$ cost., $v =$ cost. saranno *ortogonali* se ds è l'elem. lineare; saranno *coniugati* se $ds^2 = 0$ è l'equaz. delle asintotiche. Quando ds è l'elem. lineare, il sist$^{\text{a}}$ $u =$ cost. per cui $\Delta_2 u = 0$ dicesi di curve *isoterme*. Esso col suo ortogonale rende $ds^2 = \lambda(Udu^2 + Vdv^2)$, ove U e V sono risp. funz$^{\text{i}}$ di u e v. Ma sostituendo ad u e v delle funz$^{\text{i}}$, il che non muta i due sistemi ortog$^{\text{li}}$ di curve isoterme si rende subito $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$; ed allora i param$^{\text{i}}$ u, v si dicono *isometrici* (*isometrico* dicesi il sistema di curve $u =$ cost., ed il suo ortog$^{\text{le}}$
[170] $v =$ cost., perché insieme con questo divide la sup. in // quadrati infinitesimi). Le equaz. (2′) caratterizzano i param$^{\text{i}}$ isometrici ortogonali u, v. E l'artifizio usato a pag. 165 è quello noto per dedurre da una data espressione dell'elemento lineare

di una sup. un sistema isotermo. - (Si passi a pag. 172)

[Queste cose si collegano strettamente colla *fisica matematica*. Abbiasi un fluido che scorre sulla superficie con un potenziale di velocità (Geschwindigkeitspotential secondo Helmholtz[lxx]) u funz. del punto, ma non del tempo t, cioè un fluido tale che le componenti della sua veloc$^{\text{à}}$ in un punto qual. $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sian date da $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. In un dato intervallo di tempo dt l'incremento di fluido nell'aria $dxdy$ sarà dato da $\Delta_2 u.dxdy.dt$ sicché affinche' esso sia sempre nullo occorre // e basta che $\Delta_2 u =$ **[171]**
0. Quest'equaz. caratterizza dunque il fluido *incompressibile*, e coll'indipendenza di u da t il flusso *stazionario*. Così nel caso della propagazione del calore u è la temperatura, e si ha l'equilibrio calorifico; mentre nel caso del fluido elettrico u è il potenziale elettrostatico, e si ha un flusso elettrico stazionario. In ogni caso le curve per cui $u =$ cost. sono *curve di livello*, o curve isoterme, ecc.; mentre quelle $v =$ cost. (ad esse ortog$^{\text{li}}$) sono le *linee di flusso*. E passando su una di queste, cioè sulla normale n, da una curva di livello u alla $u + du$, siccome per significato geometrico del param$^{\text{o}}$ differ$^{\text{le}}$ di 1$^{\text{o}}$ ord. si ha $\Delta_1 = (\frac{du}{dn})^2$, si conchiude che $\frac{du}{dn} = \sqrt{\Delta_1 u}$ è la *velocità* del fluido in quel punto. // Si hanno così dei mezzi fisici, ad es$^{\text{o}}$ l'elettricità, **[172]**
per generare delle funz$^{\text{i}}$ complesse su una superf. Si costruisce infatti il potenziale u, ed allora dalle equ$^{\text{i}}$ (2') (pag. 168) è determinata v, e quindi $u + iv$, a meno di una cost$^{\text{e}}$ additiva complessa.]

Se su 2 superf. si considerano come omologhi due p$^{\text{i}}$ (p, q), (p', q'), quando due funz$^{\text{i}}$ complesse risp. delle 2 sup. vi hanno lo stesso valore $u + iv$, funz$^{\text{i}}$ relative risp. alle forme definite $ds^2 \equiv Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$, $ds'^2 \equiv E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2$, allora nei p$^{\text{i}}$ omologhi sarà $ds^2 \equiv ds'^2 (\equiv du^2 + dv^2)$, le equaz$^{\text{i}}$ differ$^{\text{li}}$ $ds^2 = 0$, $ds'^2 = 0$ si muteranno l'una nell'altra, cioè si corrisponderanno i loro sist$^{\text{i}}$ di curve integrali. E viceversa se si ha fra le 2 sup. una corrispondenza per cui $ds^2 \equiv ds'^2$, le funz$^{\text{i}}$ complesse sull'una // risp. a ds^2 si muteranno funz$^{\text{i}}$ complesse dell'altra risp. **[173]**
a ds'^2. In partic$^{\text{e}}$ su una stessa sup. si hanno ∞ corrisp$^{\text{e}}$ risp. ad una data forma $ds^2 = 0$ mediante le ∞ funz$^{\text{i}}$ complesse relative a queste. - Nella rappres$^{\text{e}}$ di Gauss di $x + iy$ sul piano, la relativa forma differ$^{\text{le}}$ quadratica $ds^2 = dx^2 + dy^2$ dà l'ele-

[lxx] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (Potsdam 1821 - Berlino 1894).

mento lineare. In generale quando per ds, ds' si prendon gli elem$^{\mathrm{i}}$ lin$^{\mathrm{i}}$ delle superf., le rappresentazioni in cui essi si corrispondono (a meno di un fattore) diventano le rappres$^{\mathrm{i}}$ *conformi* (se invece $ds^2 = 0$ è l'equaz. delle asintotiche si hanno rappres$^{\mathrm{i}}$ pure notevoli.-). Abbiamo così il modo di riferire 2 superf. qual. in corrispondenza
[174] conforme od isogonale[45], in // partic. una sup. qual. ad un piano. Però in ciò bisogna limitarsi a parti delle superf. in cui quelle funz$^{\mathrm{i}}$ complesse del luogo non abbiano infiniti, ed inoltre, se si suol che la corrisp$^{\mathrm{a}}$ sia univoca, siano monovalenti ecc. Nel seguito ci atteniamo a quel ds^2 per definire le funz$^{\mathrm{i}}$ complesse: quindi due sup. chiuse saranno atte a rappres. le stesse funz$^{\mathrm{i}}$ complesse quando, e solo quando siano in corrisp$^{\mathrm{a}}$ univoca conforme. Così se su una sup. si ha una funz. complessa $x + iy$ che prenda ogni valore in n p$^{\mathrm{i}}$, essa si rappresenta conform$^{\mathrm{e}}$ su un piano n-plo di Riemann. (Seguo il tratto fra [ ] a pag. 170-2)

Premesse queste generalità intorno alle funzioni complesse su di una superficie,
[175] veniamo a quelle funzioni che posson ser//vire per lo studio dell'ente algebrico. Le funz$^{\mathrm{i}}$ razionali dell'ente, che ci han dato analiticam. le serie lineari su queste, con funz$^{\mathrm{i}}$ univoche degli elem$^{\mathrm{i}}$, legate algebricam$^{\mathrm{e}}$ fra loro, continue, all'infuori di un certo numero di poli (infiniti algebrici), numero che è il *grado* della funzione (*Werthigkeit* secondo Klein) (valenza). Orbene abbiasi viceversa su una sup. chiusa qual. una funz. complessa sì fatta, cioè univoca e continua all'infuori di n poli, e che prenda ogni val. in n p.$^{\mathrm{i}}$ Distendendola sul piano complesso z, si ha (pag. 174) un piano n-plo di Riemann in corrispondenza univoca conforme con la superf. Un'altra funz. complessa s univoca e continua all'infuori di poli, sulla sup. si rap-
[176] presenterà sul piano in una simile funz. di z e però per un noto teor. (v. ad // es$^{\mathrm{o}}$ Neumann pag. 119[lxxi]) sarà una funz. algebrica di z, cioè $F(s, z) = 0$. Se s prende in gener$^{\mathrm{e}}$ valori diversi dove z ne prende uno stesso, la sup. rappresenterà univocam. l'ente algebr$^{\mathrm{o}}$ $F(s, z) = 0$. Ogni altra funz. s' univoca sulla sup. e con soli poli sarà

[45]Questo modo coincide con quello dato da *Gauss* "Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una sup. data su un'altra sup. data in guisa che la rappresentaz. riesca nelle sue parti infinitesime simile alla figura rappresentata" (trad. da Beltrami, Annali di Mat. t. IV, 1861) [si tratta di: GAUSS, C. F. 1825, *Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*, (trad. di E. Beltrami), Annali di Mat. pura ed applicata, 4, 1861, pp. 214-232].

[lxxi]NEUMANN, C. 1884, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, Teubner, Leipzig.

similmente algebrica in z; ma siccome la corrispondenza è tale che ad ogni coppia (s, z) corrisponde una sola coppia (s', z), così s' sarà funz. raz$^{\rm le}$ di s, z (v. pag. 50). Cioè le funz$^{\rm i}$ univoche sulla sup. con soli poli sono precisamente le funz$^{\rm i}$ raz$^{\rm li}$ di s, z, cioè le funz$^{\rm i}$ raz$^{\rm li}$ dell'ente[46]. // È appunto quel carattere che nella teoria funzionale **[177]**
di Riemann si sostituisce all'espressione razionale, come in generale (seguendo le orme di Dirichlet[lxxii]) nella definiz. delle funzioni di Riemann ricorre a caratteri …anzi che ad espress$^{\rm i}$ analitiche.

Ma per costruire e studiare quelle funz$^{\rm i}$ algebriche univoche della sup. (invece che *univoche* Riemann dice *diramate come la superficie*) occorrono nella teor. di Riemann anche i loro integrali, cioè quelle funz$^{\rm i}$ w la cui derivata $\frac{dw}{dz}$ è funz. univoca con soli inf$^{\rm i}$ algebrici (cioè senza singolarità essen//ziali), sicché $w = \int_{s_0 z_0}^{sz} R(s, z) dz$ **[178]**
hanno per sole discontinuità sulla sup. dei poli e degli inf$^{\rm i}$ logaritmici: poiché in prossimità di un p. qual. z' la funz. R si può rappres. con $\frac{a_y}{(z-z')^\nu} + \cdots + \frac{a_1}{z-z'} + a_0$ ed integrando verrà un termine $a_1 log(z - z')$, [a_1 dicesi *residuo* (logaritmico) della funz. R nel punto z': Cauchy] e gli altri algebrici. (Se $z' = \infty$ in luogo di $z - z'$ si scriva $\frac{1}{z}$, e se z' è p$^{\rm o}$ di diramaz$^{\rm e}$ ν-plo in luogo di $z - z'$ si scriva $(z - z')^{\frac{1}{\nu}}$). Integrali Abeliani. Distinzione in 3 specie. Loro moduli di periodicità. Sistema normale di tagli (Riemann n. 19, Neumann p. 182, Klein-Fricke p. 495): sulla sup. normale son rappresent$^{\rm i}$ dai meridiani a dei manichi e dai paralleli b. Gli integr$^{\rm i}$ Abel$^{\rm i}$ son caratterizzati dall'avere solo discontinuità al//gebr. o logaritmiche e dall'essere de- **[179]**

term. a meno di periodi, oppure dall'esser univoci sulla sup. *tagliata* e con differenze costanti lungo i tagli: poiché la derivata di una funz. siffatta sarà algebrica. Assumeremo questo carattere come definiz. degl'integr$^{\rm i}$ (cfr. p. 177).

Ciò posto, data *ad arbitrio* una sup. chiusa, ad es. una sup. di Riemann, esistono su essa delle funz$^{\rm i}$ complesse che presentino i detti caratteri, cioè funz$^{\rm i}$ algebr$^{\rm e}$ ed

[46] Questo teor. è di Riemann che al n. 8 vi giunge mostrando algebricamente che le funz$^{\rm i}$ raz$^{\rm li}$ di s, z con m' poli dipendono linearmente da $m' - p + 1$ cost$^{\rm i}$ (con un calcolo che coincide con quello con cui, mediante le curve agg$^{\rm te}$ di $F(s, z) = 0$ si prova che un $G_{m'}$ sta (almeno) in una $g_{m'}^{m'-p}$); mentre al n. 5 aveva stabilito che appunto da tante cost$^{\rm i}$ dipendono le funz$^{\rm i}$ univoche con dati m' poli. In tutto però vi è la lacuna relativa alle serie speciali. Per un'altra dimostraz. v. Klein-Fricke pag. 499.

[lxxii] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren 1805 - Gottinga 1859).

integrali? È un risultato capitale della teoria di Riemann, che la distingue da tutte le altre, quello dell'esistenza di tali funz[i], cioè (Riemann, n. 3): su qual. superf. (di Riemann) di gen. p è determinata a meno di una costante complessa addittiva una funz. che 1[o] nei $2p$ tagli a e b abbia moduli di periodic[à] costanti le cui parti
[180] reali siano // date ad arbitrio, 2[o] in dati punti abbia date discontinuità algebrico-logaritmiche, 3[o] dal lato positivo di linee, che (entro la sup. tagliata) congiungano un p. fisso O ai p[i] per cui il residuo logaritmico a_k (pag. 178) non è nullo, superi di $-2\pi i a_k$ il valore che ha dall'altro lato; e del resto sia univoca e continua. - La risoluz. di questo problema si può ridurre alla costruz. della parte reale u della funz. complessa $u + iv$, cioè di un *potenziale* con date discontinuità e dati valori nei contorni. E perciò Riemann ricorre ad un principio che Dirichlet (completando un analogo ragionam[o] della mem. di Gauss "Allgemeine Lehrsätze..."[lxxiii]) dava
[181] nelle sue Lezioni pei potenziali (continui in ogni punto)[47], e che // egli estende al caso di discontinuità. Lacune nelle dimostraz[i] del principio di Dirichlet (rilevate da Weierstrass, Kronecker ecc.). Come furono colmate da Schwarz[lxxiv] e Neumann (Cap.[i] 16-18 delle Vorlesungen; v. anche in Klein-Fricke pag. 508 e segu[i] un abbozzo del metodo di combinazione di Neumann). Metodo fisico per costruire i potenziali e quindi (p. 172) le funzioni cercate su qualunque superficie chiusa: il Klein (op[o] citato) ricorre ad una batteria elettrica: i due poli messi a contatto colla superficie danno due inf[i] logaritmici pel potenziale, sorgenti di elettr[à] di copia $2a\pi$ (se a è il residuo di u nell'un punto), e facendoli coincidere darebbero un inf[o] algebrico; un tratto di curva, od una curva chiusa che non spezzi la sup. e sia sede di una forza elettromotrice costante. //

[182] Le funz[i] di cui il *teor. d'esistenza* di Riemann (pag. 179-180) stabilisce l'esistenza si diranno integrali (Abeliani) di 1[a], 2[a], 3[a] specie a seconda dei casi. Se $w_1, w_2, \ldots w_p$ sono integr[i] di 1[a] sp., le $2p$ costanti reali disponibili nel teor. d'esistenza per tali integr[i] mostrano, che quelli si possono assumere linearmente indip[i], e che allora

[lxxiii] GAUSS, C. F. 1840 *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkendenAnziehungs- und Abstossungs-Kräfte*, in *Werke*, V, pp. 197-242.

[47] V. Vorlesungen di Dirichlet, 2[e] Auflage, § 32, p. 127 [si tratta di: DIRICHLET, G. L. 1876, *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, Leipzig, Teubner].

[lxxiv] Karl Hermann Amandus Schwarz (Hermsdorf, Slesia, 1843 - Berlino 1921).

ogni altro è dato da $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{cost}$. Si vede pure che si possono scegliere in modo che w_k abbia moduli di periodicità nulli in tutte le a tranne a_k ove il mod$^{\text{o}}$ sia πi (così Riemann al n. 20, per introdurre le w come argomenti nelle Θ; e Neumann. - Clebsch e Gordan, e quindi Lindemann[lxxv], prendono $2\pi i$. - Klein-Fricke ed altri prendono 1): integrali *normali*. Fra gl'int. 2$^{\text{a}}$ sp. si considerano quelli *ele-*
mentari t_c con un sol polo c: son determ$^{\text{i}}$ // a meno di un fattore e di un int. 1$^{\text{a}}$ sp. [183]
additivo. Il fattore si determina fissando che il coeffic. di $\frac{1}{z-z_0}$ nello sviluppo in prossimità di $c(z_0, s_0)$ sia 1; l'int. di 1$^{\text{a}}$ sp. può servire ad annullare i mod$^{\text{i}}$ di per$^{\text{à}}$ lungo tutte le a, e si ha così l'int. *normale* di 2$^{\text{a}}$ sp., determinato a meno di 1 cost. add.. Indicando con t integr$^{\text{i}}$ normali, avremo che ogni integr. di 2$^{\text{a}}$ sp. coi poli $c_1 \ldots c_n$ sarà rappres. da

$$\beta_1 t_{c_1} + \cdots + \beta_n t_{c_n} + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{cost.}$$

In partic. ogni funz. univoca s che non abbia altre discontinuità che quei poli, e quindi non abbia differenze nelle a sarà

$$s = \beta_1 t_{c_1} + \cdots + \beta_n t_{c_n} + \text{cost.}$$

ove le β dovranno ancora esser tali da annullare i periodi lungo le b_k cioè $\tau_c^{(k)}$

$$\begin{aligned} \beta_1 \tau_{c_1}^{(1)} + \cdots + \beta_n \tau_{c_n}^{(1)} &= 0 \\ &\cdots \\ \beta_1 \tau_{c_1}^{(p)} + \cdots + \beta_n \tau_{c_n}^{(p)} &= 0 \; // \end{aligned}$$

Sono p equaz$^{\text{i}}$ lineari omog. fra $\beta_1 \ldots \beta_n$, onde se $n > p$ è possib. in ∞ modi [184]
costruire funz$^{\text{i}}$ siffatte. Due qual. son legate da un'equ. alg. $F(s, z) = 0$ (pag. 176) che si riconduce al punto di vista delle pag. 174 e segu$^{\text{i}}$. Così tutte saran funz$^{\text{i}}$ raz$^{\text{li}}$ di due s, z. In partic. le derivate dei nostri integr$^{\text{i}}$ risp. ad una di esse z saran funz$^{\text{i}}$ siffatte, sicché quegl'integr$^{\text{i}}$ sono effettivam. del tipo $\int R(s, z) dz$. Per gl'integr$^{\text{i}}$ 1$^{\text{a}}$

[lxxv] C. Louis Ferdinand Lindemann (Hannover 1852 - Monaco di Baviera 1939).

sp. si dimostra (v. per es. Riemann n. 9) che si può assumere $w = \int \frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$, ove φ è una funz. di gradi $n-2$, $m-2$ agg^ta ad $F(s,z)$, sicché le $\varphi = 0$ segano su $F = 0$ la g_{2p-2}^{p-1}[48].

Le equaz. lineari fra le β si possono scrivere tenendo conto che (v. Klein-Fricke pag. 532, Lindemann pag. 805, Clebsch e Gordan p. 121)[lxxvi] il periodo $\tau_c^{(k)}$ dell'int.
[185] *normale* di 2^a sp. t_c lungo b_k è $\tau_c^{(k)} = -2(\frac{dw_k}{dz})_c$ // $= -2w'_k(c)$ (v. anche Riemann pag. 131 ultime linee)

$$\begin{array}{rcl} \beta_1 w'_1(c_1) + \cdots + \beta_n w'_1(c_n) & = & 0 \\ & \cdots & \\ \beta_1 w'_p(c_1) + \cdots + \beta_n w'_p(c_n) & = & 0 \end{array}$$

Poniamo per maggiore generalità che queste p equaz^i si riducano a sole $p - \tau$, ove $\tau \geq 0$ siano le identità lineari indip^i che legano, cioè i sistemi di λ linearm^e indip^i tali che

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 w'_1(c_1) + \cdots + \lambda_p w'_p(c_1) & = & 0 \\ & \cdots & \\ \lambda_1 w'_1(c_n) + \cdots + \lambda_p w'_p(c_n) & = & 0. \end{array}$$

Sostituendo $w'_k(c) = \frac{\varphi_k(c)}{(\frac{\partial F}{\partial s})_c}$ diventano

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \varphi_1(c_1) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(c_1) & = & 0 \\ & \cdots & \\ \lambda_1 \varphi_1(c_n) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(c_n) & = & 0, \end{array}$$

[48] Ai p integr^i $w_1 \dots w_p$ corrisp^o le p φ linearm. indip^i.

[lxxvi] KLEIN, F., FRICKE, R. 1890, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, I vol., Teubner, Leipzig; CLEBSCH, R.A.(LINDEMANN, F.) 1876-1891, *Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Ferdinand Lindemann*, 2 voll., Teubner, Leipzig; CLEBSCH, R. A., GORDAN, P. 1866, *Theorie der Abelschen Funktionen*, Teubner, Leipzig.

cioè τ sono le φ linearm. indip$^{\text{i}}$ che contengono tutto il gruppo $c_1 \ldots c_n$. In tale ipotesi abbiamo che le funz$^{\text{i}}$ raz$^{\text{li}}$ dell'ente i cui poli sono fra questi punti dipendono da $n+1-(p-\tau)$ costanti, e ciò è il teor. di Riemann-Roch (v. pag. 141, ove $r' = \tau - 1$), dimostrato appunto // col metodo avviato da Riemann (n. 5) e completato **[186]** da Roch (Crelle 64).

Si può giungere allo stesso risultato col *teorema d'Abel*[lxxvii]. Abbiasi una funz. raz$^{\text{le}}$ qualunque z dell'ente algebr$^{\text{o}}$ e siano $x_1 \ldots x_n$ i p$^{\text{i}}$ in cui essa prende un dato valore qual. z. Sarà $w(x_1) + \cdots + w(x_n)$ una funz. di z univoca e finita per tutti i valori di z (all'infuori di differenze costanti lungo linee corrisp$^{\text{i}}$ alle a e b): e però una costante[49] (Questo è in sostanza il ragionam$^{\text{o}}$ di Riemann n. 14; che si estende subito, com'egli osserva al teor. relativo agl'integr$^{\text{i}}$ di 2$^{\text{a}}$ e 3$^{\text{a}}$ sp. ; e che d'altra parte si può estendere alle corrispondenze algebriche fra due enti: Hurwitz[lxxviii], Math. Ann. 28)[lxxix]. Quindi se $c_1 \ldots c_n$ è un altro gruppo, sarà: // **[187]**

$$w(x_1) + \cdots + w(x_n) \equiv w(c_1) + \cdots + w(c_n)$$

ossia $\int_{c_1}^{x_1} + \int_{c_2}^{x_2} + \cdots + \int_{c_n}^{x_n}$ presi convenientem. danno 0. Viceversa se queste p somme d'$\int$ son nulle $c_1 \ldots c_n$ ed $x_1 \ldots x_n$ son due gruppi di una stessa g_n^1. Supponendo il gruppo $x_1 \ldots x_n$ inf. vicino a $c_1 \ldots c_n$ ed indicando con z una variab. indip. (funz. raz$^{\text{le}}$ dell'ente) diventa

$$\begin{aligned} w_1'(c_1)dz_1 + \cdots + w_1'(c_n)dz_n &= 0 \\ &\cdots \\ w_p'(c_1)dz_1 + \cdots + w_p'(c_n)dz_n &= 0 \end{aligned}$$

e ad ogni soluz. $dz_1 : \cdots : dz_n$ di questo sist$^{\text{a}}$ corrisponderà una g_n^1 contenente il gruppo $c_1 \ldots c_n$, e viceversa; sicché se fra quelle p equaz$^{\text{i}}$ sono $p - \tau$ le indip$^{\text{i}}$, e

[lxxvii] Niels Henrik Abel (Finnøy 1802 - Froland 1829).

[49] a meno di periodi di w.

[lxxviii] Adolf Hurwitz (Hildesheim 1859 - Zurigo 1919).

[lxxix] HURWITZ, A. 1887, *Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*, Math. Annalen, 28, pp. 561-585.

quindi $n-p+\tau-1$ le dz arbitrarie, la g_n completa determinata da quel gruppo conterrà $\infty^{n-p+\tau-1}$ g_n^1, cioè sarà di dim. $r=n-p+\tau$. D'altronde quelle equaz^i
[188] sono appunto le p del principio della // pag. 185; solo che in luogo delle β vi son le dz. Dunque τ ha il significato che ivi si trova, cioè il num. delle φ indip. per $c_1 \dots c_n$. Si ritrova così il teorema di R.-R.

Questo teorema (ed in particolare i gruppi speciali) si collega pure al *problema d'inversione* di Jacobi[lxxx] (v. Neumann, p. 350 e 382): date le p equaz^i $w_k(x_1)+\dots+w_k(x_p) \equiv V_k$ determinare i p^i x mediante le V. Il teor. d'Abel. prova che se vi sono due soluz^i, il problema è indeterm., cioè tutti i gruppi della g_p^1 che congiunge quei due gruppi soddisfano quelle equ.: e si ha (indicando con $d_1 \dots d_{p-2}$ un gruppo residuo di quei gruppi speciali) - $V_k \equiv w_k(d_1)+\dots+w_k(d_{p-2})$. Il problema d'inversione fu risolto da Riemann mediante le funz^i θ. Si esprimono le funz^i //
[189] raz^{li} simmetriche di $z_1 \dots z_p$ mediante prodotti di rapporti del tipo $\frac{\theta(w_k\alpha-V_k)}{\theta(w_k\beta-V_k)}$ ove α e β son costanti date. Ora si dimostra che $\theta(w_1z-V_1, w_2z-V_2 \dots, w_pz-V_p)$ è una funz. di z che s'annulla solo per p punti $\eta_1 \dots \eta_p$ tali che $w_k(\eta_1)+\dots+w_k(\eta_p) \equiv V_k$, e però nel caso detto è identicam. nulla, qual. sia z. E così l'essere $c_1 \dots c_n$ un gruppo di una g_n^1 quando $n<p$ si può esprimere dicendo che $\theta(w_kz-w_k(c_1)-\dots-w_k(c_n)-w_k(\eta_{n+1})-\dots-w_k(\eta_p))$ è identicam. nulla qual. siano z ed $\eta_{n+1} \dots \eta_p$. Dalla consideraz. dell'annullarsi identico delle θ si può ritrovare il teor. R.-R. (v. ad es. Clebsch-Lind. p. 857-62).

Il teor. Riemann-Roch vale anche per $p=0$ e $p=1$: allora è sempre $\tau=0$. La
[190] dimostraz. cogl'integr^i di 2^a sp. vale ancora; av//vertendo che per $p=0$ essi si riducono alle funz^i raz^{li}, $t_c=\frac{1}{z-c}$, non vi son più periodi, ecc.

Dai teor^i d'esistenza di Riemann tragghiamo che assunti ad arbitrio su un piano z (o sfera) $\nu=2(n+p-1)$ punti e costruito un piano n-plo con quei p^i di diram. e quindi di gen. p esistono su esso delle funz^i univoche con soli poli e quindi esistono enti algebr^i in corrisp. univoca con quella sup. e su cui quelle funz. son raz^{li}: ai vari valori di z corrispondono su un tal ente i gruppi di una g_n^1. Dunque: esistono sempre degli enti di gen. p contenenti una g_n^1 per cui i $2(n+p-1)$ gruppi

[lxxx] Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam 1805 - Berlino 1851).

di diram. corrispondono a dati valori della funz. raz$^{\text{le}}$ z che rappresenta quella g_n^1, ossia i birap//porti indip$^{\text{i}}$ di quei $2(n+p-1)$ gruppi singolari abbiano dati **[191]** valori. Tali enti si dividono in un numero finito di sistemi sì che due enti di uno stesso sistema sono in corrisp. univoca (corrispondendosi quelle due g_n^1). Quegli enti si posson tutti rappres$^{\text{e}}$ con curve piane su cui quella g_n^1 è data da un fascio di rette: allora il teor. si riferisce all'eistenza, e alla distinz. in un num. finito di classi, delle curve di gen. p incontranti quelle rette in n p$^{\text{i}}$ variab. e con $\nu = 2(n+p-1)$ rette di diramaz. date ad arbitrio (tang$^{\text{i}}$ e rette che vanno alle cuspidi).

Infine rileviamo ancora un importante risultato che recentemente s'e' dedotto dalla teoria di Riemann. S'e' dimostrato che qualunque ente algebr$^{\text{o}}$ cioè la sup. che lo rappresenta si può riferire univocam. nel senso // solito (conformemente) **[192]** ad un poligono curvilineo piano (o sferico), i cui lati sono fra loro accoppiati (v. pag. 160), sì da dare una sup. idealmente chiusa di gen. p. Introducendo la variab. complessa z al modo solito nel piano, abbiamo che le funz$^{\text{i}}$ raz$^{\text{li}}$ dell'ente son funz$^{\text{i}}$ anal$^{\text{e}}$ uniformi di z, definite però solo nell'interno di quel poligono. Ma si può fare che i p$^{\text{i}}$ omologhi dei dati lati corrispond$^{\text{i}}$ si corrispondano per una trasformaz. lineare di z: allora un principio anal$^{\text{o}}$, quello del proseguimento delle funz$^{\text{i}}$ analitiche, fa sì che per estendere quella funz. al di là di un lato si deve ammettere che si trasformi in se stessa per quella sostituz. lin. Così continuando, perché quella funz. sia univoca e definita in tutto il piano si vede che deve ammettere un gruppo infinito (discontinuo) di sostituz$^{\text{i}}$ lineari. // Casi di $p=0$ (funz$^{\text{i}}$ raz$^{\text{li}}$), $p=1$ (funz$^{\text{i}}$ **[193]** ellittiche biperiodiche). In generale si ha un sistema di funz$^{\text{i}}$ del Poincaré[lxxxi], Fuchsiane o Kleiniane: esse danno in funz$^{\text{i}}$ anal. uniformi di un param. tutte le funz$^{\text{i}}$ raz$^{\text{li}}$ dell'ente, ciò che con le funz$^{\text{i}}$ Abeliane per $p>1$ non si poteva fare. //

Cap. 10°. I moduli. Le serie lineari sugli enti generali **[194]**

La questione della possibilità di corrisp. univoche fra due enti algebrici. - Fra parentesi si osservi che una corrisp. univoca *analitica* fra due enti (∞^1) algebr$^{\text{i}}$ è certo *algebrica*, poiché produce una corrisp. univoca conforme fra le due superf.

[lxxxi] Jules Henri Poincaré (Nancy 1854 - Parigi 1912).

imagini e mediante questa le funz^{i} raz^{li} dell'un ente son funz^{i} raz^{li} dell'altro (funz^{i} univoche e continue sulla sup. a meno di poli). - Se vi sono più corrisp. univoche fra i due enti, vuol dire che ve ne sono altrettante sull'uno; e viceversa.

Caso del genere 0, non vi son moduli, e ∞^3 corrisp^{e} univoche. Caso del genere
[195] 1: un modulo (pag. 100), e ∞^1 corrisp. univoche, // di cui due restano individuate quando, dati 2 p^{i} omol^{i}, nelle g_2^1 che li hanno per elem^{i} doppi si dia la corrisp^{a} proj^{a} che fa corrispondere anche gli altri elem^{i} diram^{i}, sicché due dati elem^{i} sono omologhi in 2,4,6 ecc..

Se $p > 1$ vi sono su 1 ente di gen. p degli elem^{i} *particolari*, a cui si può ricorrere per la questione: ad es^{o} elem^{i} p-pli per g_p^1; cioè sulla curva canonica punti singolari, d'iperosculazione[50]. Per un tal p^{o} sia m il minimo numero tale che esista una g_m^1 di cui esso sia m-plo: allora vi sarà una sola g_m^1 siffatta, altrimenti se vi fosse una g_m^2, il resto di quel p. in questa sarebbe una g_{m-1}^1 di cui quel p. sarebbe $(m-1)$-plo. Insomma vi sia un S_{m-2} iperosculatore (cioè con contatto m-punto) e non uno spazio
[196] infer^{e}; cioè m sia il 1^{o} numero non mancante nel // Lückensatz di Weierstrass (pag. 156). La g_m^1 determinata da quell'elem. m-plo avrà in tutto $2(m+p-1)$ elem^{i} diram^{e}: al più in uno ne posson coincidere $m-1$, come appunto in quello; ma $m \leq p$ e quindi $p > m-1$, sicché $2(m+p-1) > 4(m-1)$, e vi sono più di 4 elem^{i} di diramaz. *distinti*. Ciò posto se fra due enti, distinti o no, γ_p, γ_p^1 vi è una corrisp^{a} univoca alla g_m^1 di γ deve corrisp. un'analoga g_m^1 di γ^1 ed agli elem^{i} di diram. gli elem^{i} di diram., sicché essendo quelli distinti più di due, le projettività possib^{i} fra le due g_m^1 sono in numero finito. Quando poi è fissata la proj^{à} fra le due g_m^1 le corrisp^{e} univoche possibili sono pure in num. finito: ciò risulta ad es^{o} da ciò che il num. delle coppie di elem^{i} omol^{i} comuni a due corrispondenze è necessariam. finito (e
[197] // $\leq 2p+2$). Dunque fra due enti di gen. $p > 1$ o *sopra un ente $p > 1$ non vi può essere che un numero finito di corrisp. univoche*. È di Schwarz (Crelle 87, 1875)[lxxxii] il teor. che un ente di gen. $p > 1$ non può ammettere un'infinità continua (analitica)

[50] Dalla formula pag. 88 per $r = p-1$, $n = 2p-2$ si ha che tali elem^{i} sono $(p-1)p(p+1)$.

[lxxxii] SCHWARZ, H. A. 1879, *Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen*, Jour. für die reine und angewandte Math., 87, pp. 139-145.

di corrisp^{e} univoche. Che non possa neppure ammettere un'infinità discreta fu poi provato dal Klein (in una lettera dell'82 al Poincaré: v. la dimostraz. di quest'ultimo nella Nota Sur un théorème de M. Fuchs Acta math. VII, 1884, p. 1-32; v. pag. 16[lxxxiii]); ma la 2^{a} dimostraz. che Nöther (Math. Ann. 21 p. 138 1882)[lxxxiv] dava del teor. di Schwarz vale pure se la serie infinita è discontinua: su essa è ricalcata quella ora esposta. - Segue in partic. che ogni corrispondenza univoca sopra un ente $p > 1$ è periodica. V. anche la Nota di Hurwitz sulle corrisp^{e} univoche Math. Ann. 32[lxxxv] e quella dei Math. Ann. 41 p. 403 (1892)[lxxxvi]. //

Segue anche subito il num. dei moduli. Dei $2(m + p - 1)$ elem^{i} diram. della g_m^1 **[198]**
abbiamo $m - 1$ coinc^{i}; dunque in tutto $2p + m$; e però $2p + m - 3$ birapporti. Dati questi ad arb^{o} è determ. in un num. finito di modi la classe di enti (pel teor. pag. 190-1): sicché quelli sono i moduli. Nel caso generale $m = p$, e però $3p - 3$ moduli. Nel caso partic^{e} $m = 2$ l'ente è iperell^{o} e si ritrova il num. $2p - 1$ di moduli.

Il num. $3p - 3$ di moduli $(p > 1)$ è dovuto a Riemann, che lo ottiene come segue (n. 12). Sopra un dato ente il num. delle costanti da cui dipende una funz. raz^{le} di grado $n > 2p - 2$ è $2n - p + 1$, mentre sono $2(n + p - 1)$ i valori di z di diram^{e} per quella funz. *Ammesso* che questi val^{i} di diram. siano funz^{i} indip^{i} di quelle $2n - p +$
1 cost^{i}, // si potrà disporre di queste in modo che altrettanti di quelli assumano **[199]**
valori fissati ad arbitrio, ed allora saran determ^{i} i rimanenti $3p - 3$. Viceversa se oltre a quei val^{i} fissi si prendono questi $3p - 3$ ad arbitrio esiste una classe di enti con funz^{i} raz^{li} aventi quei p^{i} diram. Onde $3p - 3$ moduli. - Ma volendo assicurarsi di quanto sopra si è ammesso si hanno difficoltà, e per toglierle Riemann ricorre poi, invece che alle funz^{i} raz^{li} dell'ente, agl'integrali di 1^{a} specie. - Se $p = 0, 1$ alle ∞^{ρ} trasformaz. univoche ($\rho = 3, 1$) corrisponde il fatto che sono ∞^{ρ} le funz^{i} raz^{li} cogli stessi val^{i} z di diram.; quelle con val^{i} distinti rimangono $\infty^{2n-p+1-\rho}$, e fissati $2n - p + 1 - \rho$ val^{i} diram^{e} di z ne rimangono $3p - 1 + \rho$. Quindi per $p = 0, 1$ si

[lxxxiii] POINCARE, H. 1885, *Sur un théorème de M. Fuchs*, Acta Math. 7, pp.1-32.

[lxxxiv] NÖTHER, M. 1883, *Nachtrag zur "Note über die algebraischen Curven mit einer Schaar eindeutiger Transformationen in sich"*, Math. Annalen, 21, pp. 138-140.

[lxxxv] HURWITZ, A. 1888, *Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Math. Annalen, 32, pp. 290-308.

[lxxxvi] HURWITZ, A. 1892, *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Annalen, 41, pp. 403-442.

[200] hanno risp. 0,1 mod.^{o} (v. anche l'opuscolo di Klein p. 65). - Natural//mente in tutto il ragionam^{o} di Riemann in luogo della funz. raz^{le} si può parlare di g_n^1 e in luogo di val^{i}, di birapporti.

I risultati preced^{i} danno (op^{o} di Klein) notevoli proposiz^{i} sulle *rappres^{i} conformi delle superf. chiuse*. Due sup. $p = 0$ si posson sempre riferire univoc. conform^{e} sì che a 3 dati p^{i} corrisp^{o} 3 dati p^{i}; due sup. $p = 1$ solo se ...; e per $p > 1$ si hanno $6p - 6$ cost^{i} reali (i $3p - 3$ moduli compl^{i}) da cui dipende la *classe* di sup. Sulle sup. $p = 0, 1$ vi sono infinite rappres^{i} conformi di 1^{a} specie (cioè che non mutano il segno agli angoli); sulle sup. $p > 1$ non ve ne può essere che un num. finito.

Infine rivolgiamoci alla questione delle serie lineari g_n^r esistenti sopra un ente
[201] di gen. p. // Basta determinare le serie complete. Quelle non speciali ($n > p$, $r = n - p$) son determ. da un gruppo qual. di n elem^{i}, di cui $r = n - p$ fissi e i riman^{i} p variab^{i} ad arbitrio; onde sono ∞^p per ogni n. Quelle speciali si compongono di gruppi di n p^{i} $x^1 \dots x^n$ sulla curva piana $f_m(x) = 0$ che impongono solo $n - r$ condiz^{i} alle φ_{m-3} agg^{te}, cioè $\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_p \varphi_p = 0$; sicché per un tal gruppo, oltre alle $f(x^1) = 0, \dots f(x^n) = 0$, devono le equ^{i}

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_1(x^1) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(x^1) &= 0 \\ &\cdots \\ \lambda_1 \varphi_1(x^n) + \cdots + \lambda_p \varphi_p(x^n) &= 0 \end{aligned}$$

ridursi a sole $n - r$, cioè nella matrice $\begin{bmatrix} \varphi_1(x^1) & \dots & \varphi_p(x^1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x^n) & \dots & \varphi_p(x^n) \end{bmatrix}$ devono annullarsi tutti i determ^{i} d'ord. $n - r + 1$, ed in partic^{e}

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x^1) & \dots & \varphi_{n-r}(x^1) & \varphi_i(x^1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x^{n-r}) & \dots & \varphi_{n-2}(x^{n-r}) & \varphi_i(x^{n-r}) \\ \varphi_1(x^k) & \dots & \varphi_{n-r}(x^k) & \varphi_i(x^k) \end{bmatrix}$$

$i = n - r + 1, \dots, p$; $k = n - r + 1, \dots, n$. // In tutto sono $r(p - n + r)$ condiz$^{\mathrm{i}}$ [202]
indip$^{\mathrm{i}}$ (dal complesso delle loro soluz$^{\mathrm{i}}$ si devon però togliere delle soluz$^{\mathrm{i}}$ estranee) per gli n p$^{\mathrm{i}}$; sicché tali gruppi sono in gener. $\infty^{n-r(p-n+r)}$. [Lo stesso si vede sulla curva canonica ove si tratta di determinare $n - r$ p$^{\mathrm{i}}$ tali che l'S_{n-r-1} che li congiunge la incontri in altri r p$^{\mathrm{i}}$, il che importa $r(p - n + r - 1)$ condiz$^{\mathrm{i}}$, onde il num. $\infty^{n-r-r(p-n+r-1)}$]. Ciò posto le g_n^r saranno $\infty^{n-r-r(p-n+r)} = \infty^{(r+1)(n-r)-rp}$, ove

$$(1) \qquad (r+1)(n-r) - rp \geq 0$$
$$n \geq r + \frac{rp}{r+1}; \quad p \leq \frac{(r+1)(n-r)}{r}.$$

Il num. $(r+1)(n-r) - rp$ dà *la dimens. del sistema di tutte le g_n^r se i moduli son generali*. Se son speciali, il caso più generale è che sian complete[51]. Se non son speciali le // g_n^r stanno in g_n^{n-p} e per ognuna di queste sono $\infty^{(r+1)(n-p-r)}$, sicché in [203]
tutto $\infty^{p+(r+1)(n-p-r)} = \infty^{(r+1)(n-r)-rp}$. Allora la condiz. (1) è soddisfatta sempre, poiché $n - r \geq p$.

Se ne trae il num. delle γ_p^n di S_r; perché abbian moduli generali deve aver luogo la (1); ed allora (v. pag. 63) al num. dei moduli e poi delle g_n^r vi sarà solo da aggiungere il num. delle collineaz$^{\mathrm{i}}$ di S_r, sicché in tutto si avrà per dimens. di tutte le γ_p^n di una dato S_r

$$(2) \qquad 3p - 3 + (r+1)(n-r) - rp + (r+1)^2 - 1$$
$$= (r+1)n - (r-3)(p-1).$$

Per $p = 0, 1$ in luogo di $3p - 3$ moduli si deve scrivere $3p - 3 + \rho$ (v. pag. 199), ma allora le ∞^{ρ} trasformaz$^{\mathrm{i}}$ univoche dell'ente diminuiscono di ρ il num. d'inf. delle serie non equivalenti, che danno origine a curve distinte; sicché la formola (2) vale sempre. Per modu//li partic$^{\mathrm{i}}$ può accadere che senza la (1) esistano delle g_n^r, γ_p^n di [204]
S_r: allora si trova che la dimens. di queste curve è ≥ 0 all'espress. (2). Per $r = 3$ si hanno ∞^{4n} γ_p^n di S_3 ecc.

[51] Se la g_n^r sta in una $g_n^{r'}$, la dimens$^{\mathrm{e}}$ di tutte le g_n^r siffatte è $(r'+1)(n-r') - r'p + (r'-r)(r+1)$, che è $< (r+1)(n-r) - rp$ poiché $n - r' < p$.

La (1) da sull'ente generale le serie di minimo ord. n per una data dimens. r. Così per $r = 1$ abbiamo, se p è pari un num. finito di $g^1_{\frac{p}{2}+1}$, se p è impari ∞^1 $g^1_{\frac{p+3}{2}}$. Ciò fu già notato da Riemann, che ne profitta per ridurre l'equaz. $F(s, z) = 0$ ai minimi gradi risp. ad s, z (n. 13); v. pag. 96. Escluso $p = 2$ per cui si ha una sola g^1_2, si può ricorrere a due g^1_n minime. Anzi, siccome il num. delle coppie comuni a queste è (pag. 96) $(n-1)^2 - p$, ossia, a seconda che p è pari od impari, $\frac{p \cdot p-4}{4}$ o $(\frac{p-1}{2})^2$, così esclusi i casi $p = 1, 2, 4$ si può profittare della coppia comune che
[205] sempre esiste in ogni // altro caso per ridurre la $F\binom{n\ n}{s,\ z} = 0$ all'ordine ($2n-2$, cioè) p con due punti $(\frac{p}{2}-1)^{\text{pli}}$, oppure $p+1$ con due punti $(\frac{p-1}{2})^{\text{pli}}$. La g^1_n minima coi suoi $2(n+p-1)$ ossia $3p$ se p è pari, $3p+1$ se p è impari, gruppi diram$^{\text{e}}$ serve a ritrovare i $3p-3$ moduli come birapp$^{\text{i}}$ di quei gruppi (ove nel 2$^{\text{o}}$ caso fra le ∞^1 g^1_n si scelga ad es. una con un elem$^{\text{o}}$ diram. doppio).[52]

Per $r = 2$ la (1) da $p \leq \frac{3(n-2)}{2}$, e quindi dicendo d il num. dei p$^{\text{i}}$ doppi della γ^n_p piana $d = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - p \geq \frac{n-2 \cdot n-4}{2}$, cioè: perché una curva piana d'ord. n rappresenti un ente di moduli generali, deve avere almeno $\frac{n-2 \cdot n-4}{2}$ punti doppi. Si ha poi per g^2_n minime $n = \frac{2p+6}{3}, \frac{2p+7}{3}, \frac{2p+8}{3}$, in num. finito, o ∞^1, o ∞^2. Questo sarà l'ordine
[206] minimo delle γ^n piane. // E poiché il num. degl'invarianti assoluti di una γ^n_p piana è $\frac{n \cdot n+3}{2} - \frac{n-1 \cdot n-2}{2} + p - 8 = 3n + p - 9$, così si trae di nuovo il numero $3p-3$ di moduli.

Analogam. per ogni valor di r si ha dalla (1) qual è il minimo ord. n di g^r_n, cioè di una γ^n_p, per moduli generali. E la (1) mostra che queste serie minime o curve di minimo ord. son sempre speciali, tolti al più alcuni valori di p.

Va notato però che l'esistenza di g^r_n con la condizione (1) fu provata coll'enumeraz. delle costanti. Per assicurarsi della validità di questo ragionam$^{\text{o}}$ ed anzi trovare il numero delle g^r_n minime nel caso estremo che sia finito, si può procedere come segue. Si consideri una C^{n+p} normale di gen. p di S_n. Un gruppo di una g^r_n dà
[207] un iperpiano S_{n-1} // con un resto di p punti, e se quella g^r_n è completa, per questi p punti passeranno precisamente ∞^r iperpiani (pag. 138), cioè un S_{n-r-1}. Trovare le

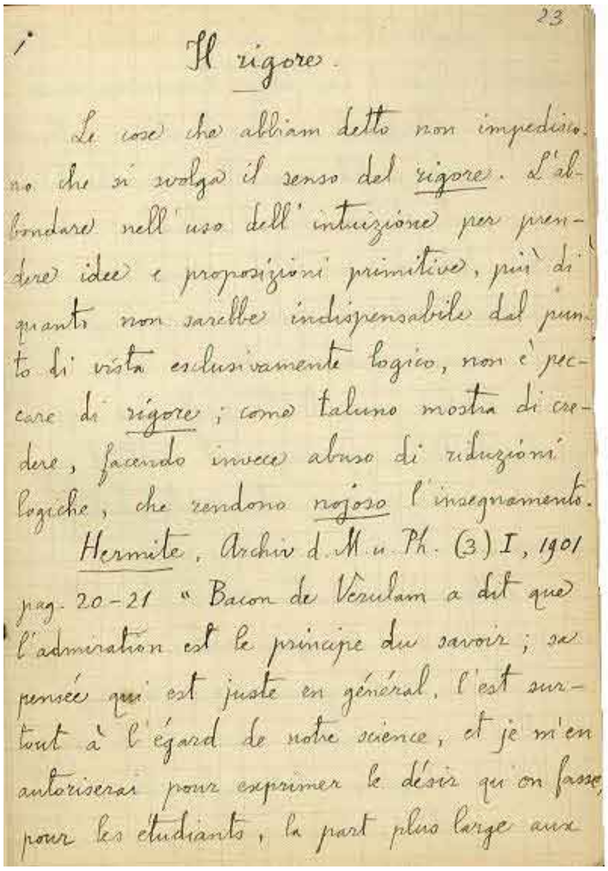
[52]Se vi è una g^1_n, ove $n < \frac{p}{2} + 1$, si avranno similmente $2n + 2p - 5$ moduli, cioè $p - 2n + 2$ di meno che in generale. Tante son dunque le condizioni per l'esistenza di g^1_n.

serie speciali d'ord. n significa dunque trovare gli spazi p-secanti di quella C^{n+p}, e tante sono quelle serie in generale quanti sono questi spazi. Il Castelnuovo (v. pag. 66) seguì questo concetto, e come C^{n+p} di gen. p notò che si può prendere una C^n raz^{le} normale con p corde, e che allora gli S_{n-r-1} sono quelli secanti queste p rette. Quando $(r+1)(n-r) = rp$ il numero di tali spazi è in generale finito e, ponendo $r' = p - n + r - 1$, uguale a $\frac{2!3!...r!2!3!...r'!p!}{2!3!...(r+r'+1)!}$. Questo è dunque il numero delle g_n^r nel detto caso (Castelnuovo). - In casi particolari si può trovare altrimenti le serie lineari. Così per $p = 6$ supposto che veramente esista una // g_4^1, la residua sarà **[208]** una g_6^2 e però l'ente si rappresenterà con una sestica piana con 4 punti doppi. Un gruppo qual. di una g_6^2 su questa curva imporrà solo 4 condiz^i alle cubiche pei 4 p^i doppi; onde tali cubiche saranno ∞^1 (e segheranno la g_4^1 residua): ma avendo 10 p^i comuni si spezzeranno in una conica ed una retta. Se è la retta che sta fissa, la g_6^2 è quella data dalle rette del piano; se no si hanno altre 4 g_6^2 date dalle coniche per i 3 p^i doppi: e così 5 g_4^1. //

Indice **[209]**

CORRADO SEGRE

[Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero]



23

Il rigore.

Le cose che abbiam detto non impediscono che si svolga il senso del rigore. L'abbondare nell'uso dell'intuizione per prendere idee e proposizioni primitive, più di quanto non sarebbe indispensabile dal punto di vista esclusivamente logico, non è peccare di rigore; come taluno mostra di credere, facendo invece abuso di riduzioni logiche, che rendono nojoso l'insegnamento.

Hermite, Archiv d. M. u. Ph. (3) I, 1901 pag. 20-21 « Bacon de Verulam a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, la part plus large aux

7. Pagina tratta da [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] (BMP-Segre)

(Dal *Regolamento* delle Scuole di magistero 6 dicembre 1903)

Art. 1. Le scuole di magistero ... hanno per fine di rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline filosofiche, letterarie e scientifiche nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negl'istituti tecnici.

Art. 7. Le conferenze ... verseranno sul metodo da seguirsi nell'insegnamento delle singole materie, a norma e nei limiti dei programmi delle scuole secondarie.

(Dal *Regolamento* per la Fac[à] di scienze ...)

Art. 1. La Facoltà di scienze ... ha per fine:
a) di mantenere e di estendere la coltura scientifica della Nazione;
b) di fornire gl'insegnamenti scientifici, oltre che ai propri studenti, anche a quelli delle altre Facoltà e Scuole speciali;
c) di preparare gli studenti al conseguimento dei diplomi speciali d'insegnamento;
//
d) di abilitare all'ammissione alle Scuole d'applicazione per gl'ingegneri.

R. Decreto 24 nov. 1921, n. 1837 sulle lauree miste "... Gli studenti ... dovranno seguire un corso biennale di magistero di matematica e uno biennale di magistero di fisica, di 3 ore settimanali ciascuno, destinati a conferenze ed esercitazioni didattiche e metodologiche". //

La Matematica e l'esperienza

[1]

Per poter parlare del modo come si deve *insegnare* la matematica, dobbiamo premettere qualcosa su *ciò che è la matem[a]*.

Le scienze tutte si servono di due strumenti: l'*esperienza* ed il *ragionamento*. Fra quelle in cui prevale il 2[o] sono anzitutto *la logica* e *le matematiche*.

La *logica* parte da alcune forme semplicissime di raziocinî (come sarebbe il sillogismo) in numero finito, e combinandole fra loro (anche con calcoli analoghi a quelli dell'algebra) ne trae altri raziocinî. I primi sono ammessi senz'altro; sono *assiomi*
[2] (*postulati*), che hanno per noi un'evidenza assoluta. Gli altri avranno // lo stesso grado di sicurezza! In ogni particolare scienza deduttiva si prendono dall'esperienza certi *postulati*, e si combinano fra loro per mezzo della logica, dimostrando così delle nuove verità.

Le matematiche sono, dopo la logica, le scienze in cui il sistema dei postulati è meno ampio. Possiamo distinguerle, sebbene non nettamente, in *Analisi*, *Geometria* e *Fisica matematica* (incl^{a} la *Meccanica*).

In ognuna vi sono *idee primitive*, che non vengon definite; e *proposizioni primitive* (o *postulati*), che non vengon dimostrate. Vi è libertà di scelta, sotto certe condizioni.

Sì le idee che le proposizioni primitive risultano dall'*esperienza*, congiunta //
[3] coll'*astrazione*.

Così prendiamo l'*Analisi*: le sue basi son quelle dell'*Aritmetica*: ossia i *numeri interi*. Un concetto primitivo è appunto quello di numero intero. Ora adesso si giunge per astrazione, dal considerare delle collezioni di oggetti, per es^{o} di pensieri. Un altro concetto primitivo che si suol prendere è quello di 1; oppure di zero. Poi, quello di *successivo*. Si hanno allora pochi postulati estremamente evidenti, ed uno che ha un aspetto ed uno scopo molto diverso da quelli: il *principio d'induzione matematica*, che tiene il posto d'*infiniti sillogismi*, e quindi non può risultare da un numero finito di esperienze.

[4] In *Geometria*, e così in *Fisica*... si // deve ricorrere all'astrazione in grado ben maggiore. Si considerano *superficie*, *linee*, *punti* che non s'incontrano in natura! Si considerano *corpi solidi*, *invariabili*, *movimenti senza deformazione*: cose che non si hanno mai esattamente. S'introduce la *linea retta*, rappresentandola col filo a piombo, coi raggi luminosi, ecc.; i quali, se si tien conto delle attrazioni, delle rifrazioni, ecc. non possono avere esattamente quei caratteri che noi attribuiamo alla retta. Così pel *piano*. E in relaz. a ciò che si accennò dianzi s'introduce il concetto di *movimento* o di *uguaglianza*, per es. di segmenti *uguali*. - Tanto più questo lavorio di

esperienza e successiva astrazione occorre per stabilire i concetti da cui parte la fisica. Così si deve considerare ciascun fenomeno fisico // come isolato, senza tener **[5]**
conto dei fenomeni concomitanti inevitabili (^{14}) p. 47. Poi vi è il fatto essenziale che gli strumenti fisici, in particolare i nostri sensi, non sono mai *esatti*; sicchè i dati di partenza si avrebbero solo *per approssimazione*, mentre per la trattazione matematica si assumono *esatti*.[1] (12) p. 46 (15) p. 48.

Queste ultime parole si riferiscono anche alle proposizioni primitive o postulati della Fisica. In quelle della Geometria rileviamo pure *l'esperienza*[2] e *l'astrazione*. Così l'esperienza ci dà che per due punti passa un solo segmento rettilineo: ma le nostre esperienze portano solo in una *regione limitata di spazio*. Ammettere che quel fatto // valga in *tutto* lo spazio è cosa arbitraria: come se, sulla terra, dalle esperien- **[6]**
ze fatte in una regione limitata, secondo cui tra due punti passa una sola geodetica, si concludesse che lo stesso vale su tutta la terra: il che non è! - Così ancora si ammette spesso come dato sperimentale che *la retta è infinita*: cioè che se su una retta, in un dato verso, e a partire da un dato punto A, si porta un dato segmento un numero quelunque di volte, si otterranno sempre nuovi punti, non si ritornerà mai al punto di partenza A. Anche ciò non si giustifica pel campo che va al di là di quello a noi accessibile. - Infine citiamo *il post. V* (o assioma 11^o) *d'Euclide*[i]: "Se una retta, incontrando due altre rette [sottint. di uno stesso piano], fa con esse // da una **[7]**
medesima parte angoli interni la cui somma sia minore di due retti, quelle due rette prolungate indefinitamente, si dovranno incontrare da quella parte da cui stanno gli angoli la cui somma è minore di due retti." Anche qui la verifica sperimentale sarà sempre limitata. E così se al postulato stesso si dà l'altra forma: dell'*unicità della parallela*; non potendosi coll'esperienza acquistar la sicurezza che due rette di un piano non s'incontrino mai. Oppure l'altra forma: che *la somma degli angoli di un triangolo rettilineo è due retti*. Nei triangoli finora misurati è infatti due retti nei limiti d'approssimaz. dati dagli strumenti di misura. Ma in triangoli maggiori? //

[1] Parlando di dati *sperimentali*, anche per la Geometria, s'intenderà sempre *approssimativi*, appunto perchè l'esperienza non dà l'esattezza.
[2] In spazio non troppo grande nè troppo piccolo.
[i] Euclide (III secolo a. C.).

La Matematica in relaz^{e} colle applicazioni

[8]

Possiamo concepire, come diremo poi, una matematica che sia fine a se stessa; e possiamo invece badare alle applicazioni.

(Osserviamo di passaggio che quasi tutte le scienze tendono alla forma matematica. Dopo i fatti *qualitativi* si vogliono quelli *quantitativi*!)^{e} [3]

Se si considera la matematica in relaz. colle applicazioni, si trovano *tre stadî* nel processo scientifico. 1^o si assumono dal mondo esterno i dati, di concetti e di proposizioni, sotto forma matematica; e forma matematica si dà al problema. 2^o trattazione puramente matematica. 3^o traduzione dei risultati matematici sotto
[9] forma // adatta all'applicazione.

Un'illustrazione importante di ciò che si fa nel 1^o stadio si vede nei concetti primitivi della Geom^{a} enumerati a p. 4. In realtà il mondo esterno non ci presenta dei punti ma dei corpuscoli. I dati sperimentali si riferirebbero a questi, a nastri, ecc. Ma conviene *raffinare*, passare dal *concreto* all'*astratto*. Perchè? Per *semplificare* la trattazione matematica. (16) p. 49. Così riguardo ai postulati geometrici pag. 6, 7. Noi troviamo ad es. che la somma degli angoli di un triangolo rettilineo è prossima a due retti ... come s'è detto: l'assumiamo esattamente uguale, per *semplificare*. Vediamo i pianeti muoversi come se si attraessero ... $\frac{kmm'}{r^\nu}$ ove $\nu = 2$
[10] approssimativam[4], e // si ammette per semplicità che sia esattamente $\nu = 2$ (legge di Newton[ii]).

Quando poi si è al 3^o stadio, ritorno al mondo esterno, si deve tener conto delle ipotesi semplificatrici che si fecero, e della mancanza di esattezza nelle misurazioni pratiche, ecc. Ad esempio sarà inutile valersi dei risultati numerici irrazionali, bastando sempre in pratica i numeri razionali, e anche solo spingendone l'ap-

[3]Matem^{a} d'*approssimaz^{e}*, e Mat^{a} di *precisione* Klein [si tratta del matematico tedesco Felix Klein (Düsseldorf 1849 - Gottinga 1925)] cit. a p. 66. [si tratta dell'opera citata da Segre in bibliografia a p. 66: KLEIN, F. 1902, *Anwendung der Differential-und-Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig, Teubner].

[4]Secondo le più recenti misure, a meno di 0,00000004 Jahresb. D. M. V. 13, 1904 p. 146. [Si tratta di: SCHWARZSCHILD, K. 1904, *Die naturwissenschaftlichen Ergebnisse und Ziele der neueren Mechanik*, Jahresbericht der D. Math.-Vereinigung, 13, pp. 145-156].

[ii]Isaac Newton (Woolsthorpe 1642 – Londra 1727).

prossimazione fino ad un certo punto, essendo inutile o privo di senso l'andare al di là. Se si è trattato del moto dei gravi nell'aria prescindendo dall'attrito e dalla resistenza dell'aria, bisognerà esser consci che i risultati varranno solo nel vuoto, o approssimat^{e} in gas molto rarefatti: v. ad es. la figura a p. 533 di // Klein- **[11]**
Sommerfeld[iii] Theorie des Kreisels[iv], ove son segnate la trajettoria calcolata in tali ipotesi e quella osservata nell'aria. Così in tutta la Fisica teorica quando si trascura qualche fenomeno nel porre i problemi in equazione. - È pure pel 3^{o} stadio che si procede alla *discussione* dei risultati matematici, introducendo a seconda dei casi la condizione che i numeri trovati sian reali, o positivi, od interi, ecc.

La Matematica come scienza esclusivamente logica

La critica moderna,[5] e in particolare quella di *Peano*[v] e sua scuola, e quella di *Hilbert*[vi] e sua scuola, colle relative costruzioni, han mostrato come si possa // svol- **[12]**
gere la Matematica nel seguente modo, formale, o puramente logico-deduttivo. Si pensano una o più *classi* di oggetti (numeri; punti, rette, piani, ecc.), e delle *relazioni* fra essi (numero *successivo*, *appartenersi* di punto e retta, ecc.). Si ammettono certe proprietà di queste classi e relazioni: proposizioni primitive (due punti appartengono ad una retta, ecc.). Poi, con sole deduzioni logiche si costruisce l'edifizio. Non importano i *nomi* che si danno alle classi: potrebbero anche prendersi fuori dei nomi ordinari. Le interpretazioni possono essere diverse: come si vede nella legge di dualità. Non c'è più da occuparsi del mondo fisico.[6] La differenza coll'indirizzo prima considerato appare ad es. nel modo come // viene esteso il concetto di *nu-* **[13]**
mero. Nel 1^{o} indirizzo il numero *frazionario* si ha spezzando l'unità in parti; nel 2^{o} è

[iii] Arnold Sommerfeld (Königsberg 1868 - Monaco 1951), fisico tedesco.

[iv] KLEIN, F., SOMMERFELD, A. 1897-1910, *Über die Theorie des Kreisels*, Heft III (1903), Teubner, Leipzig.

[5] Weierstrass [si tratta del matematico Karl Weierstrass (Osterfeld, Münster, 1815 - Berlino 1897)], Grassmann [si tratta del matematico Hermann Grassmann (Stettino 1809 - ivi 1877)] Lehrbuch der Arithmetik 1861 [si tratta di: GRASSMANN, H. 1861, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Enslin, Berlin].

[v] Giuseppe Peano (Cuneo 1858 - Torino 1932).

[vi] David Hilbert (Königsberg 1862 - Gottinga 1943).

[6] Niente *figure*! *Aritmetizzazione* dell'Analisi.

invece una coppia di numeri interi, oppure un *operatore* su numeri interi, ecc. Nel 1^o indirizzo il numero *irrazionale* trova la sua origine ad es. in Geometria, grazie alla continuità della retta, o a costruzioni di ipotenuse, ecc.; nel 2^o si deve ricorrere a separazione dei numeri razionali, o a limite superiore di una classe di razionali, ecc. Così il 2^o indirizzo apre senz'altro la porta alla geometria ad n dimensioni, alle geometrie non-euclidea, non-archimedea, ecc., e a tante altre geometrie.

Diciamo subito che questo 2^o indirizzo ha una grande importanza, anche filoso-
[14] // fica. Esso ha messo bene in evidenza che cosa è la matematica pura; ed ha contribuito molto a porre il *rigore* in varie parti della matematica.

Ma, collo staccarsi dalla *realtà*, vi è il pericolo di finire con costruzioni, che pur essendo logiche, hanno troppa artificiosità, non posson avere importanza scientifica duratura. Si sa che tali edifizi si posson moltiplicare: ma spesso non varrà la pena.

Scopo dell'insegnamento matematico nelle scuole secondarie.

[15] Consiste, non solo nel far acquistare // certe *cognizioni* che devon esser di dominio comune, ma anche nello *sviluppare certe facoltà della mente*: il *ragionamento* e la *intuizione*. (1) (p. 42)

Su questo dobbiam fermarci, per avvertire che non si deve bandire l'intuizione. Nell'insegnamento secondario, cioè in quello che non è esclusivo per i futuri matematici, non va considerata la Matematica come fine a se stessa (v. pag. 8). Essa deve nascere dal mondo esterno e poi a quello applicarsi. Quindi dev'essere in stretta connessione coll'*esperienza* e coll'*intuizione* (che significa lo scorgere una verità spontaneamente, senza ragionamenti e senza esperienze, ma è frutto d'incoscienti ragionamenti od esperienze).

[16] Anzi, si sa bene che il primo in//segnamento matematico dev'essere essenzialmente sperimentale od intuitivo. Le menti dei ragazzetti non possono ancora lavorare a lungo colla logica!

A grado a grado si sale a ragionamenti che abbracciano più ampie teorie. Quando si è agli *ultimi anni* dell'insegnamento secondario i giovani possono vedere trattate le varie parti della Matematica elementare *razionalmente*, cioè partendo (come s'è detto a pag. 1 e seg.) da idee e proposiz[i] primitive, ed operando su esse colla logica.

Così s'imparerà non solo a *dimostrare* le verità già note, ma anche a fare le *scoperte*, a risolvere da sè i *problemi*: // il che spesso non si fa con sole trafsormazioni **[17]**
logiche, ma esige anche l'intuizione!

L'intuizione e i postulati.

L'insegnamento secondario della matematica incontra gravi difficoltà. I giovani spesso non capiscono lo scopo, o non s'interessano.

Bisogna stare attenti ai concetti e proposizioni primitive. In un primo insegnamento non occorre enumerarli tutti! In un insegnamento più elevato si potrà anche rilevarli *man mano*. Ma bisognerà badare che sian tutti intuitivi. *Non si esiga l'indipendenza*.[7] //

Fermiamoci anzitutto sulle *idee primitive*. Lo scolaro accetterà subito non solo **[18]**
quella del numero intero, ma anche quella di somma, poi di numero frazionario, e più avanti di numero irrazionale: il tutto traendolo dalla vita pratica o dall'intuizione: v. pag. 13. Definire al ragazzo con lungo discorso delle cose che egli crede già di conoscere è annojarlo. Si aspetti a fare questa riduzione nelle idee primitive quando egli sia più maturo e possa capirne lo scopo. Così, se passiamo alla geometria, si ammetta non solo il concetto di retta ma anche quello di piano. Stando al punto di vista esclusivamente logico si dovrebbe bandire nell'insegnamento ele//mentare la parola *linea* o *curva*, perchè non si hanno gli strumenti per definir- **[19]**
la. Ma ciò è assurdo! Si ammetta il concetto primitivo di *linea*. (11) p. 46. E così non si vieti al giovane di parlar di *lunghezza*[8], di *area*, di *volume*, nozioni di cui egli ha

[7] V. anche *Leoni* [si tratta del matematico Carlo Leoni] pp. 220-221 [si tratta di: LEONI, C. 1915, *La matematica nel suo insegnamento primario e secondario*, Vallardi, Milano].

[8] Tangente.

dall'esperienza un concetto primitivo[9]: sebbene sian solo quei pochi che studieranno poi il calcolo integrale gli eletti che potranno ridurre quei concetti ad altri più semplici.

Veniamo ai *postulati*. Notiamo anzitutto che nelle trattazioni moderne se ne incontrano di quelli che son tanto ovvî da far stupire il giovane che meriti di pren-
[20] derne nota. Così: un numero è uguale a se stesso; il successivo di un // numero è pure un numero. - Oppure (*Hilbert*,[10] 1882. Grundlagen der Geometrie 1899[vii]): Se A, B, C son tre punti di una retta, e B sta fra A e C, B starà pure fra C ed A. - Se A e C son due punti di una retta, vi è sempre sulla retta almeno un punto che sta fra A e C. - Se B sta fra A e C, C non sta fra A e B. - Ecc. Non può un ragazzo capire lo scopo di una serie di tali enunciati! Quando occorrano nei ragionamenti, si adoperino senz'altro.

E d'altra parte il ragazzo non potrà imaginare l'utilità del *dimostrare* proposizioni, per lui evidenti, come queste: La somma di due numeri non muta se // al posto
[21] di uno di essi si mette un numero uguale. La somma di due numeri non è uguale ad uno dei due. Ogni numero diverso da zero è maggior di zero. Ecc. Oppure: Fra due punti di 1 retta ne stanno un numero illimitato. Due segmenti uguali ad un terzo sono uguali fra loro. Ecc. ecc. (Sull'*intuizione* v. p. 43).

Tutte le proposizioni che l'intera classe di scolari ritiene evidenti si potrebbero ammettere come postulati (tranne, se mai, nell'ultimo più alto insegnamento; e salvo ad avvertire che quelle proposizioni si posson dedurre le une dalle altre logicam[e]). "Col dimostrare logicamente ciò che è evidente all'intuizione, si porta
[22] un doppio danno, perchè si scredita insieme il ragionamento, // di cui non è quello l'ufficio, e l'intuizione, di cui si disconosce l'immenso valore. Si ha un bel dire che l'intuizione può condurre all'errore; sarà; ma l'intuizione fornisce pure la principale, se non l'unica, guida alla scoperta della verità. Dovremo forse rinunziare alla

[9]Così Borel [si tratta del matematico Émile Borel (Saint-Affrique, Aveyron 1871 - Paris 1956)] assume *area* e *volume* come concetti primitivi [si tratta di: BOREL, É. 1905, *Géométrie*, Colin, Paris.].

[10]Da *Pasch* [si tratta del matematico Moritz Pasch (Breslavia 1843 - Bad Homburg vor der Höhe 1930).] Vorlesungen ü. neuere Geometrie [si tratta di: PASCH, M. 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.].

[vii]HILBERT, D. 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.

verità per paura dell'errore?"[11] (Castelnuovo[viii] cit[e] p. 63[ix]).

Notiamo poi che vi sono in Geometria delle teorie (Analysis situs, topologia, forma delle curve e superficie) in cui l'osservazione dà direttamente un gran numero di fatti, quantunque si sia ben lungi dal poter fissare un sistema semplice di postulati da cui gli altri fatti si traggano logicamente. //

Il rigore.

[23]

Le cose che abbiam detto non impediscono che si svolga il senso del *rigore*. L'abbondare nell'uso dell'intuizione per prendere idee e proposizioni primitive, più di quanto non sarebbe indispensabile dal punto di vista esclusivamente logico, non è peccare di *rigore*; come taluno mostra di credere, facendo invece abuso di riduzioni logiche, che rendono *noioso* l'insegnamento.

Hermite[x], Archiv. d. M. u. Ph. (3) I, 1901 pag. 20-21[xi] "Bacon de Verulam a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, la part plus large aux // choses simples et belles **[24]**
qu'à l'extrême riguer, aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante, sans grand profit pour le commencant qui n'en peut comprendre l'intérêt." E poco oltre, dopo d'aver citato esempi di cose *interessanti* da insegnare, soggiunge: "Je pourrais invoquer bien d'autres exemples, à l'appui de la préférence, que je donnerais en principe et surtout au début à la science attrayante sur la riguer..."

Tutto ciò va inteso come s'è detto nella pag. preced. Bisogna evitar di *annojare*.

[11] *Borel* (citaz. p. 63) per ragioni d'opportunità suggerisce di scegliere aritmetica e algebra per insegnam[o] *logico*, e geometria per insegnam[o] *intuitivo* [si tratta di: BOREL, É. 1907, *La logique et l'intuition en mathématiques*, Revue de métaph. et de morale, 15, pp. 273-283].

[viii] Guido Castelnuovo (Venezia 1865 - Roma 1952).

[ix] CASTELNUOVO, G. 1907, *Il valore didattico della Matematica e della Fisica*, Rivista di Scienza, 1, pp. 329-337.

[x] Charles Hermite (Dieuze 1822 - Parigi 1901).

[xi] HERMITE, CH. 1901, *Extrait d'une lettre à M. E. Jahnke*, Arch. der Math. und Physik, 3, 1, pp. 20-21.

Ma vi è luogo anche, per ragioni didattiche, a mancare veramente di rigore, a
[25] dare cioè in iscuola degli *abbozzi di ragionamento* invece, oppure prima dei // veri ragionamenti. Un tale abbozzo, o *dimostraz. non rigorosa*, potrà insegnare *in che modo si fanno le scoperte*, come si lavora coll'*intuizione*; oppure servirà a dare un'idea *più sintetica*, più facile a ricordare, della dimostrazione rigorosa che poi verrà esposta; oppure anche, per ragion di brevità, od altra ragione d'opportunità, si darà soltanto l'abbozzo di dimostraz. *Basta che si avvertano gli scolari* che la dimostraz. esposta è incompleta; e talvolta si mostri dov'è la lacuna. - Per esempio: l'area del cerchio, come limite di quella di un poligono regolare iscritto, risulterà subito espressa nel modo noto.

Al rigore perfetto in certe cose si può giungere *più avanti*. Può la gioventù
[26] pro//cedere *per gradi*, come l'umanità. v. pag. 40: *La riforma*

Sul metodo.

(2) a p. 42

Nell'insegnante ci vuole: *affetto* per gli scolari, *affetto* per la scienza, *abnegazione*. La *soddisfazione* dell'insegnante di esporre certe cose, o certi metodi, va postposta allo scopo (p. 14-15) (13) p. 47. Bisogna essere *istruito* per sapere che cosa occorrerà all'allievo di ciò che si va esponendo nel seguito dei suoi studi o nella vita; come pure per evitare certi errori, ecc: ma non per insegnare in scuola *tutto* ciò che si sa.

Non si esiga troppo dalla *memoria*: non è la cosa principale.

[27] (5) p. 44 Si cerchi di stimolare l'*attività* della // mente dello scolare, più che la *passività*. Al posto del tradizionale (e comodo!) metodo *sintetico*, si usi quando si può il metodo *analitico*: sicchè il giovane impari a *far da sè*. Lo si *interessi* coll'eccitare qualche volta la sua curiosità con una parola che gli faccia intravedere campi scientifici più ampî. Si soddisfi qualche volta la domanda di una dimostraz. che non si sarebbe data, ma che un giovane più intelligente possa capire. Pensare anche ai più intelligenti, non solo ai mediocri; e spinger quelli.

Ogni studio si deve porre a *interessare* i giovani. (4) p. 44. Perciò è molto utile far uso continuo dei *legami dell'Algebra colla Geometria*, e di queste colle altre scienze. Rappresentare i numeri su una retta si può fare prestissimo; e allora ogni iden//tità algebrica diventa una proposizione sui punti di una retta (come se ne **[28]** trovano anche in Euclide). La Fisica, l'Astronomia, ecc. forniscono formole o leggi, che opportunamente si riguarderanno come *equazioni*... (8) (p. 45).

Si sia precisi nel discorso, ma non *pedanti*. Si varino le nozioni e le figure (3) (pag. 44). Non accada che il giovane non sappia risolvere un'equaz. solo perchè l'incognita non si chiama x. O una dimostraz. geom^{a}, solo perchè è cambiata la disposiz^{e} della fig^{a}.

Si *colorisca* la trattazione, dando rilievo alle cose essenziali, mettendo in luce al principio o alla fine di una parte quale è stato il concetto che ha guidato, quale lo scopo, ecc. ecc.

I giovani si interessano alle verifiche sperimentali. Così, dopo di aver dimostrato // certi teor^{i} geometrici come il concorrere delle mediane e bisettr^{i} di un trian- **[29]** goli, il teor. dei triangolo omologici, quello sul lato dell'esagono regolare, si faccian verificare colla costruzione grafica.

Tali costruz^{i} grafiche serviranno a mettere in rilievo gli errori strumentali, e quindi la differenza tra l'*esattezza* teorica e l'*approssimazione* pratica.

Mentre non giova, anzi nuoce nell'insegnamento secondario l'eccedere nell'indirizzo logico-deduttivo moderno, può essere molto opportuno vivificare quell'insegnamento con certi concetti un po' moderni. Così è del concetto di *funzione*,[12] coi vari esempi che s'incontrano sì nella Matematica che nella Fisica. Gioverà il//lustrarlo con rappresentazioni *grafiche*, *diagrammi*, .. Così l'allievo s'interesserà **[30]** alla *curva* ($y = x^2$, $y = \sin x$, ...) che può sostituire una tavola di quadrati, o di seni, o di logaritmi. E così pure ad una che segni l'andamento della temperatura nel giorno, o il variare della mortalità nella città, ecc. - In Geometria potrà convenire di

[12] *Klein* dice che il concetto di funzione dev'essere come un fermento che influisca e invada tutto l'insegnam^{o} matem^{o} elem^{e}.

estendere le *corrispondenze* o *trasformazioni*[13] da figure parziali (2 triangoli, 2 cerchi, ...), come una similitudine, omotetia, ecc. a tutto il piano o lo spazio. (6) (p.45).

Non si tenga sempre lo stesso metodo. Si tentino vari modi di trattaz^{e}: non ve n'è solo uno di buono! Ci si interesserà di più all'insegnamento, variandolo. //

Magistero[†]

Diagrammi, rappresentazioni geometriche varie. V. Pareto[xii] "Manuale di economia politica."[xiii] ne fa uso continuo. Si assumano come x y le quantità di certi beni economici X, Y possedute da una persona. Se per lui è *indifferente* possederne $(x_1\ y_1)$, oppure $(x_2\ y_2)$, ... il luogo di questi punti è una certa linea (*linea d'indifferenza*). Il piano è riempito di ∞^1 tali linee $f(xy) = C$. Se C è scelta in modo che cresca quando si passa a linee di maggior soddisfazione, C può assumersi come // misura dell'*ofelimità*. Assumendo poi C come 3^a coordin^{a}, si ha la rappresentazione topografica della superficie o monte dell'ofelimità. V. il libro[xiv] di *Amoroso*[xv].

Si veda in *Hugues*[xvi] "Geografia matematica"[xvii] le applicaz^{i} della geometria della sfera: p. 46 e seg^{i} (successione di giorni e notti ecc.); p. 60-61 (spiegaz. delle stagioni); p. 106 e 120 trattaz. delle eclissi (tangenti comuni a 2 cerchi o sfere); ecc.

Gli attuali programmi assegnano alla 1^a cl^{e} ginnas^{le}, o tecnica, o di scuola complem^{e} quelle nozioni di geografia fisica. La trattazione matematica si può farla bene nel corso di Geometria. //

---

[13] Sull'importanza di queste v. anche p. 36.

[xii] Vilfredo Pareto (Parigi 1848 - Céligny 1923), sociologo ed economista.

[xiii] PARETO, V. 1906, *Manuale di economia politica*, Società Editrice Libraria, Milano.

[xiv] AMOROSO, L. 1921,1923, *Lezioni di matematica finanziaria*, 2 voll., G. Majo, Napoli.

[xv] Luigi Amoroso (Napoli 1886 - Roma 1965), matematico ed economista.

[xvi] Luigi Hugues (Casale Monferrato 1836 - Casale Monferrato 1913) professore di geografia presso l'Università di Torino.

[xvii] HUGUES, L. 1882, *Nozioni di geografia matematica*, Loescher, Torino.

[†] *Nota del curatore.* Questo paragrafo si trova su una pagina incollata fra le pagine 28 e 29 del Quaderno ed è numerata 41 e 42.

Sugli esercizî

[31]

(9) p. 45

Nel primissimo insegnamento matematico non si daranno dimostrazioni, ma *verifiche sperimentali*: v. *Laisant*[xviii] "Initiation Mathématique" Hachette 1906[xix]. Così, riguardo alla Geometria *sperimentale* (meglio, dice *Vailati*[xx] cit[e] p. 63[xxi], che *intuiva*: chè non si tratta solo di cose evidenti all'intuizione), servirà molto la carta millimetrata; si useranno recipienti di cui si possa misurare la capacità, ecc.

Importante sarà in tutti i gradi dell'insegnamento geometrico il *disegno geom*[o], diretto dal prof. di mat[a]. V. pag. 29: a cui si aggiunga l'esercizio di far ricopiare una figura in altra scala (figure simili).

Negli esercizi di problemi da risolvere // si abbia riguardo al *buon senso* che [32] deve aver presente l'allievo, non solo al *tecnicismo* delle operazioni. I *dati* dovranno dunque essere *verosimili*, affinchè verosimili siano i risultati; e quindi si possa far colpa all'alunno di non essersi accorto di un errore dall'inverosomiglianza del risultato. Così Borel insiste sull'importanza da darsi agli *errori di virgola*. E raccomanda i probl[i] *numerici*.

I calcoli non sian troppo lunghi, non essendovi scopo a stancare la pazienza dei giovanetti.

Si abituino presto a tener conto delle approssimazioni; non prendano troppe cifre decimali nei risultati, ecc.

Non siano *schiavi del tecnicismo*, col voler applicare i metodi generali a // casi [33] che si trattano più presto direttamente.

Della *discussione* dei problemi si è già parlato (p. 11). Essa va fatta anche nelle figure geometriche. Non facendola s'incontrano dei paradossi, che possono, divertendo, mostrare la necessità di quelle cautele[14] (come già s'è detto a p. 43).

[xviii]Charles-Ange Laisant (Basse-Indre, Loira Inf., 1841 - Parigi 1920).

[xix]LAISANT, CH.-A. 1906, *Initiation mathématique*, Hachette, Paris.

[xx]Giovanni Vailati (Crema 1863 - Roma 1909).

[xxi]VAILATI, G. 1907, *L'insegnamento della Matematica nel primo triennio della Scuola secondaria*, Boll. di Matematica, 6, pp. 137-146.

[14]Così Enriques [si tratta del matematico Federigo Enriques (Livorno 1871 - Roma 1946).] a p. 26 di "Questioni..." citato qui a p. 67 [si tratta di: ENRIQUES, F. 1900, *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, Zanichelli, Bologna]. V. il cap. II di *Ball* [si tratta del matematico W. William Rouse Ball

Si abituino i giovani a parlare bene, esattemente (è uno dei meriti dell'insegnam^o matematico). V. in Reidt[xxii] p. 62[xxiii] vari esempi di mancanze.

Sui *giudizî dell'insegnante*, e in partic^e sul diverso valore degli errori, v. Leoni Cap. IV. //

[34] *M. Simon*[xxiv] Didaktik u. Methodik... 1908[xxv]

Pag. 60 "Die Forderung, dass *der Schüler denken anschauen soll...*"

Pag 84-85 "Entweder keine komplexen Zahlen, oder im Anschluss an die *Gleichungen 3 ten Grades*" [perchè il caso irriducibile obbliga ad introdurre i numeri complessi anche per problemi reali il che non avviene colle equazioni quadratiche].

Pag. 86 "Ein Kapitel der Arithmetik, das nirgends fehlen darf, ist die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*" V. anche p. 101.

Pag. 88-89. La trattazione moderna dell'Aritmetica differisce dalla antica principalmente per due principii. 1^o) di non usare come *materiale* nichts als die Grundvorstellungen der Einheit, Vielheit und Allheit; und in *formeller* Hinsicht nichts als das allgemein logische Identitätsgesetz samt dessen unmittelbaren Folgerungen... 2^o) in der strengen Beobachtung der Regel, den Resultaten arithm. Operationen auf der einen Seite nie eine ausgedehntere Gültigkeit beizulegen, als sie nach den
[35] gemachten Voraussetzungen besitzen // können; auf der andern Seite sie aber auch nicht für spezieller zu halten, als sie ihrer Natur nach wirklich sind, und namentlich mehrdeutige Resultate nicht als eindeutige zu betrachten. - Subito dopo dice qualcosa che io modificherei così: bisogna *fissare bene che cosa s'intende* col simbolo $\sqrt{x}$, se il solo valor positivo od uno qualunque dei due valori (il che è più pericoloso).

Pag. 91 "Man wird die Schüler allmählich an Aufgaben gewöhnen, bei denen scheinbar eine Angabe fehlt..."

(Hampstead 1850 - Elmside 1925)] Récréations et problèmes mathématiques etc. cit. qui a pag. 76 [si tratta di: ROUSE BALL, W. 1898, *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes*, Hermann, Paris]. *Enr. Amaldi* [si tratta del matematico Amaldi Ugo (Verona 1875 - Roma 1957).] pp. 428-432 [si tratta di: ENRIQUES, F., AMALDI, U. 1903, *Elementi di geometria*, Zanichelli, Bologna].

[xxii] Friedrich Reidt (Neukirchen 1834 - Hamm 1894), matematico tedesco, autore di varie opere concernenti l'insegnamento della matematica.

[xxiii] REIDT, F. 1906, *Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen*, G. Grote, Berlin.

[xxiv] Max Simon (Kolberg 1844 - Straßburg 1918), matematico, insegnante e storico della matematica tedesca.

[xxv] SIMON, M. 1908, *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*, Beck, München.

Pag. 92 Significati (definizioni) di a^0, a^1.

Pag. 117 Dante[xxvi], Paradiso, canto 13^o, versi 101-102
"O se del[15] mezzo cerchio far si puote
Triangol, sì ch'un retto non avesse."
[Ma non è il caso di vedervi geometria non euclidea! Aggiungo dall'ultimo canto 33^o del Paradiso, terzina 45^a:
"Qual è il geometra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
Pensando quel principio ond'egli indige;"
con che allude alla *quadratura*, o rettificazione...] //

Pag. 116 (da *Study*[xxvii]) Per comprendere a fondo le parti, anche più elementari, **[36]**
della *Geom^a euclidea*, occorre conoscere la *Geom^a non-euclidea*.

Pag. 116 L'esistenza di *un rettangolo* basta per concludere la verità della geom^a *euclidea*. Il *rettangolo* è la forma fondamentale della nostra intuizione (Anschauung), non il *triangolo*.

Pag. 120-1 Importanza della *simmetria assiale* nella Geom. elem.: p. e. pel triangolo isoscele, pel parallelogramma.

Pag. 121 Il concetto di *trasformaz^e* o *corrispond^a* ha per la Geometria la stessa importanza che il concetto equivalente di *funzione* ha per l'Aritmetica.

Pag. 179 in principio. Errore frequente di scambiare 0 ed 1.

Pag. 187 fine e seg^i. Storia dei *segni* dell'Aritmetica e Algebra. //

[xxvi] Dante Alighieri (Firenze 1265 - Ravenna 1321).

[15] Forse si deve leggere *nel*.

[xxvii] Eduard Study (Coburg 1862 - Bonn 1930).

Da *Pascal*[xxviii] (1623-1662), Pensées, "De l'art de persuader"[xxix]:

[37]

Regole per le definizioni.

1. Non imprendere a definire alcuna delle cose talmente cognite per se stesse, che non vi siano termini più chiari onde spiegarle.

2. Definire tutti i termini oscuri o equivoci.

3. Nella definizione dei termini impiegare solamente parole perfettamente cognite e già spiegate.

Regole per gli assiomi.

1. Non mettere alcuno dei principi fondamentali senza avere domandato se si accorda, per quanto sia chiaro ed evidente.

[38] 2. Non domandare come assiomi altro che // cose evidenti per se stesse.

Regole per le dimostrazioni.

1. Non imprendere la dimostrazione delle cose che sono talmente evidenti per se stesse, che non vi sia nulla più chiaro per provarle.

2. Provare tutte le proposizioni un poco oscure, e nella loro dimostrazione non impiegare altro che assiomi evidentissimi, o proposizioni già accordate o dimostrate.

3. Sostituire sempre mentalmente le definizioni al posto dei definiti, onde non ingannarsi coll'equivoco dei termini che le definizioni hanno ristretto.

Le prime regole di ciascuna parte possono trascurarsi senza errore.

Possono muoversi tre obiezioni principali. Una, che questo metodo non ha nulla
[39] di // nuovo, l'altra che è facilissimo ad impararsi, e infine che è abbastanza inutile, perchè il suo uso è quasi rinchiuso nelle sole materie geometriche.

[xxviii] Blaise Pascal (Clermont, oggi Clermont-Ferrand, 1623 - Parigi 1662).

[xxix] PASCAL, B. 1783, *Pensées de M. Pascal*, chez Nyon, Paris: *De l'art de persuader*, Supplement, Art. III, pp. 338-357.

Bisogna dunque far vedere che nulla è così sconosciuto, nulla più difficile a porre in pratica, e nulla è più utile e più universale. //

La riforma

[40]

Accostare l'insegnam^{o} della Matem^{a} alla *realtà*: questo il programma. - Prima è svolto in Francia: programmi del 1902 (riportati in Tannery[xxx] Notions de math[xxxi].). *Klein* dal 1900 in poi, in Germania. Programma di Merano del 1905, riprodotto alla fine del vol. Klein-Schimmack[xxxii] (citato qui pag. 64)[xxxiii]. *Perry*[xxxiv] in Inghilterra. V. il discorso di Loria[xxxv] "La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo", inaugur^{e} il congresso di Padova 1909 di "Mathesis"[xxxvi] V. *Marotte*[xxxvii] cit. qui p. 64[xxxviii].

V. i *diagrammi ferroviari* in Borel. V. i *programmi francesi* del 1902 (riforma) in // Tannery Notions de mathém. **[41]**

Esempi dell'indirizzo logistico in confronto a quello realistico: dimostrazione di $ab = ba$ in *Catania*[xxxix] Aritmetica ed Algebra[xl], e in Borel Arithmétique[xli].

Qualche notizia storica. //

[xxx] Jules Tannery (Mantes-la-Jolie 1848 - Parigi 1910).

[xxxi] TANNERY, J. 1903, *Notions de mathématiques, (avec) Notions historiques par P. Tannery*, Ch. Delagrave, Paris.

[xxxii] Si tratta di *Der Meraner Lehrplau für Mathematik* (1905), che è riprodotto nel volume citato nella nota seguente alle pp. 208-220.

[xxxiii] KLEIN, F.-SCHIMMACK, R. 1907, *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen Bearbeitet von R. Schimmack*, Teil I, Teubner, Leipzig.

[xxxiv] John Perry (Garvagh, Irlanda, 1850 - Londra 1920), matematico e ingegnere, presidente della Phisycal Society di Londra, qui ricordato per aver elaborato un metodo di insegnamento noto come "practical mathematics".

[xxxv] Gino Loria (Mantova 1862 - Genova 1954).

[xxxvi] LORIA, G. 1909, *La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo*, Atti del II Congresso della Mathesis, Societá Italiana di Matematica, Premiata Società cooperativa tipografica, Padova, pp. 12-29.

[xxxvii] Francisque Marotte (Clermont-Ferrand 1873 - 1945), matematico e pedagogista, direttore della rivista *La Revue de l'Enseignement des Sciences*.

[xxxviii] MAROTTE, F. 1905, *L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne*, Bull. Sci. Mat., 29, pp. 281-306.

[xxxix] Sebastiano Catania (Catania 1853 - Catania 1946).

[xl] CATANIA, S. 1910, *Trattato di aritmetica ed algebra ad uso degl'Istituti Tecnici*, N. Giannotta, Catania.

[xli] BOREL, E. 1907, *Arithmétique*, Colin, Paris.

[42] ‡(1) (a p. 15) La Matematica insegna a ragionar bene; a non contentarsi di parole vacue; a trarre conseguenze dalle premesse; a riflettere e scoprire da sè; a giudicar giusto; a generalizzare, a lavorare di astrazione; a parlare con precisione. V. (6) p. 45.

(2) (p. 26) Qui metterei anzi tutto "*Doveri dell'insegnante*", e passerei più avanti "*Sul metodo*". I *doveri* sono quelli indicati a pag. 26, 27 prescindendo dal metodo; e inoltre: *Preparazione perfetta* alla lez^{e}. Non consultare libri o appunti, eccezion fatta per cose speciali, come date, ecc. *Non dettare*: usare un libro di testo. Procurare in ogni modo di *catturarsi l'attenzione* (v. pag. 27, 28). *Pazienza* cogli scolari; ripetere se non han capito; non scandalizzarsi per errori; cercar di persuadere gli scolari che tutti posson fare, che non occorre un'inclinazione speciale. Se una dimostraz^{e} presenta difficoltà, non è capita da un allievo, si potrà talvolta farlo passare oltre: dopo qualche tempo, magari un altro anno la capirà. - L'insegnante *disegni bene* (se occorre, con rira e compasso): le figure ben fatte attraggono di più lo scolaro, e gli servono anche d'esempio. E talvolta posson servire i gessi colorati, o le linee punteggiate. Segue nota (3) p. 44.//

[43] (Aggiunta a pag. 21) Riguardo all'esperienza ed *intuizione*, aggiungiamo che sono insufficienti a concepire taluni enti: come la curva senza tangenti, un segmento senza gli estremi, un segmento coi soli punti razionali, ecc.[16]

Riguardo ai postulati d'*ordinamento* (di cui esempi a pag. 20) si osservi col Klein (Elem. Mathem. II[xlii]) che la loro mancanza in Euclide è un vero difetto. Essa rende possibili le dimostrazioni di vari *paradossi geometrici* (v. Klein, ivi) (e Enriques-Amaldi p. 379). //

[44] (3) (a p. 28) Un triangolo qual^{e} si faccia scaleno. Gli scolari han la tendenza

[16] V. anche in *Borel* "L'espace et le temps" p 121-124 [si tratta di: BOREL, E. 1922, *L'Espace et le Temps*, Alcan, Paris.] un altro esempio dell'impossibilità d'*intuire* taluni enti.

[xlii] KLEIN, F. 1909, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil II (Geometrie), Teubner, Leipzig.

‡*Nota del curatore*. Le pp. 42-49 contengono aggiunte di Segre alle pagine precedenti.

a preferire le orizzontali e verticali (fatto fisiologico). Si abituino a segnare triang^{i}, ang^{i} retti ecc. senza tale particolarità. Un quadrangolo non sia un rettangolo. Due parall^{e} non siano orizz^{li}. Ecc. Le figure non sian sempre disposte nello stesso modo.

(4) (p. 27). A ciò può anche servire l'inserzione di *notizie storiche*. Così talvolta può servire a riposare o ad attrarre qualcuna delle curiosità che si trovano nei libri di Matematica dilettevole, p. e. Ghersi[xliii] ecc. Vedi (7).

(5) (p. 26) *Reidt* p. 32 e seg^{i}, contrappone: 1^{o} nella *forma* dell'esposizione il metodo *espositivo* (dozierend) al metodo *euristico* (10) (*interrogativo*, al modo dei dialoghi di Socrate[xliv]): v. esempio in Reidt p. 33 (v. anche qui a pag. 64 citaz. di un passo di Platone[xlv]); 2^{o} nelle dimostrazioni o soluz. di problemi il metodo *sintetico* e il metodo *analitico* (Reidt p. 37 e seg^{i} con esempio); 3^{o} nello svolgimento delle singole teorie e nel loro collegamento, il metodo *euclideo* (o *dogmatico* e il metodo *genetico* (Reidt p. 42 e seg., con esempi, p. e. a p. 46). V. altri esempi in Reidt p. 48 e p. 53. La terna più efficace è: euristico - analitico - genetico; ma non sempre sarà conveniente, anche gli altri metodi han vantaggi. Sarà da alternare, // e da scegliere **[45]**
secondo l'argomento, la scolaresca e il tempo disponibile. - Sul metodo *analitico* e *sintetico* v. anche Sannia[xlvi] e D'Ovidio[xlvii] Elem^{i} di Geom. I p. 128[xlviii].

(6) Come uno degli scopi dell'insegnamento deve essere l'abituare a *pensare funzionalmente*, così un altro sarà quello di *rafforzare l'intuizione spaziale*.[17]

Qui aggiungiamo: I ragazzi han tendenza a ritenere la proporz^{à} diretta come l'unica legge possibile. Bisogna che le *funzioni* mostrino loro che così non è. Tendano a idee *generali*.

[xliii] GHERSI, I. 1913, *Matematica dilettevole e curiosa. Problemi bizzarri, paradossi algebrici*, Hoepli, Milano.
[xliv] Socrate (V sec. a. C).
[xlv] Platone (IV sec. a. C.).
[xlvi] Achille Sannia (Campobasso 1823 - Napoli 1892).
[xlvii] Enrico D'Ovidio (Campobasso 1843 - Torino 1933).
[xlviii] SANNIA, A., D'OVIDIO, E. 1895, *Elementi di geometria*, B. Pellerano, Napoli (I ed. 1869).
[17] V. in Simon p. 182 "Kopfgeometrie". [si tratta di una sezione del libro SIMON, M. 1908, *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*, C. H. Back, München].

Un esempio dell'importanza che ha l'insegnamento della Matematica per imparar a ragionare è dato dalle *proposiz^{i} inverse*. Non sempre è vera l'inversa di una proposiz^{e}: errore che accade di sentire nella vita comune. (Reidt p. 60 e seg.).

(7) Pare che i ragazzi s'interessino agli esercizi combinatori (Herbart[xlix]). V. Leoni p. 126 (con citaz. di Capelli[l] Boll di mat. del Conti[li], anno 5^{o}) e fine pag. 137.

(8) Sul coordinam^{o} degl'insegnanti di Mat. e Fis. v. Leoni, cap^{o} 13^{o}.

[46] (9) A p. 31 *Sui libri di testo*. Un tale libro non // deve esser conciso, per modo che lo scolaro debba prendere appunti e svilupparli poi a casa diffusamente. Per quanto ciò possa costituire un utile esercizio, sarà tempo preso ad altro studio. Senza contare che lo scolaro facilmente sbaglia nei suoi appunti. V. Reidt p. 82-83.

(10) *Metodo euristico* di esposizione della scienza è quello che segue la via in cui le proposizioni sono state effettivamente trovate, o almeno avrebbero potuto esser trovate: cioè esposizione della scienza non com'è, ma come si è formata.

(11) Occorre nell'insegnam^{o} della Fisica parlar di linee in generale, di tangente alla linea, di aree, di volumi. Occorron parabole, ellissi, paraboloidi, ecc. L'insegnante di Matem^{a} deve tener conto di ciò. Non definizioni rigorose, ma schiarimenti, quando la definizione (di linea, o area, ...) sarebbe troppo difficile.

(12) In Fisica ciò che si trae con ragionam^{o} dalle ipotesi, o teorie, o postulati, si sottopone ogni volta che si può al controllo dell'esperienza. In Matematica ciò non occorre di regola, perchè i postulati hanno un tal carattere di evidenza da dar quasi la certezza. - Qui si noti che questa perfetta sicurezza del ragionam^{o} matematico

[xlix] Johann Friedrich Herbart (Oldenburg 1776 - Gottinga 1841), filosofo e pedagogista tedesco.
[l] Alfredo Capelli (Milano 1855 - Napoli 1910).
[li] Alberto Conti (Firenze 1873 - Firenze 1940).

è in contrasto con ciò che accade coi ragionam$^{\text{i}}$ // della vita comune, e delle altre materie di studio nelle scuole. Lì non si hanno ipotesi sicure, o precise: o vi è un po' d'indeterminatezza nei dati, o sono fatti solo probabili; le deduzioni se ne risentono; e potrebbero anche essere errate. Sicchè van sempre confrontate colla realtà, come in Fisica. Perciò un'educazione esclusivamente matematica è incompleta; il ragazzo non deve credere che il ragionamento matematico sia *il solo*. **[47]**

(13) Si danno certe dimostraz$^{\text{i}}$ invece di altre più semplici o più istruttive, per ragione di *metodo* (purezza): cioè per non servirsi di questo o quello strumento, come le parallele, o le proporzioni, o la teoria dell'equivalenza. *Sono cose inutili*, *che gli scolari non possono apprezzare*, ancora. Si badi solo a interessare e a facilitare.

Così è della purezza del metodo geom$^{\text{o}}$, che consiste nell'evitare l'uso dell'aritmetica. - Per es$^{\text{o}}$ il postulato della *continuità della retta* adoperato in Enriques-Amaldi Geometria (p. 356 n. 573) è l'equivalente dell'introduz. dei numeri irraz$^{\text{li}}$ (cfr. ivi p.389-390).

(14) P. e. moto dei gravi prescindendo dall'attrito, dalla resistenza dell'aria. //

(15) L'esperienza dà *approssimaz^{e}*, non *precisione*. Così per le *lunghezze* gli strumenti più perfetti permettono di apprezzare fino all'ordine di grandezza dei diametri degli atomi, $\frac{1}{10}$ di millimicron, $\frac{1}{10}\mu\mu$ in metri 10^{-10}. Così nelle misurazioni in metri possiamo apprezzare fino alla 10^a cifra decimale. L'11^a cifra e seg$^{\text{i}}$ non hanno più senso. - E poichè le altre misure si riducono a lunghezze, possiam dire che la Matem$^{\text{a}}$ del mondo reale, come la Fisica, lavora solo con numeri *approssimati*. Si può andare solo fino a una certa cifra. Bastano i *numeri razionali*. **[48]**

In quest'ord$^{\text{e}}$ d'idee della *realtà*[18], il *punto* diventa un *corpo*, una *linea* un nastro d'estrema sottigliezza. Non diciamo più che 2 p$^{\text{i}}$ individuano una retta: la deter-

[18] *M. Pasch* Vorl. ü neuere Geom. 1882. *Klein* Anwendang... cit. a p. 66. *J. Hjelmslev* [si tratta del matematico danese Johannes Hjelmslev (Horning 1873 - Copenaghen 1950)] Die Geometrie der Wirklichkeit. Acta m. 40 1915-16 p. 35 [si tratta di: HJELMSLEV, J. 1916, *Die Geometrie des Wirklichkeit*, Acta mathematica, 40, pp. 35-60].

minano con tanta maggior precisione quanto più son discosti (il segmento, non i prolungamenti). Due rette che s'incontrino determinano il loro p^{o} com^{e} tanto meglio quanto maggiore è il loro angolo acuto: se questo è piccolo, l'indeterminaz^{e} è grande. - E così, proseguendo, una linea *pratica* si compone, in più modi, di seg-
[49] menti rettilinei. La semitg a destra in P è quella // retta che ha comune colla curva a partir da P il più lungo segmento (Hjelmslev). Ecc.

(16) Così l'ammettere che un punto abbia dimensioni crea una *zona d'indecisione* che non si ha più col punto ideale. È più semplice ammettere che 2 punti individuano una retta, anzi che pensare un pennello sottilissimo di rette pei 2 p^{i}. Ecc. //

Trattati generali§

[61]

(v. anche pag. 63 e seguenti)

[K.] Schwab - [O.] Lesser Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten 1909 e seg. (secondo il programma di Merano)

[C.] Färber, [E.] Netto, [Fr.] Meyer, [H.] Thieme Grundleheren der Mathematik 1909 e seg[i] (Arithmetik von *Färber* 1911; Geometrie I von *Thieme* 1909, molto criticata da S. Medici nel Bollettino di Loria 14, 1912 p. 51

[O.] Behrendsen u. [E.] Götting Lehrbuch d. Mathem. für hörere Mädchen-Bildungsanstal- ten. Teubner 1911.

P. Boutroux Les principes de l'Analyse mathém. [incl. la geom[a]] Exposé *historique* et critique [i *fatti*, poche dim[i]; molte notizie storiche]. Tome 1[er] Hermann 1914; 2[e] 1919. C II 182

[H.] Weber - [J.] Wellstein Encykl. p. 113

J. Tannery p. 79* //

Bibliografia sulla *Didattica*

[63]

C. A. Laisant La Mathématique. Philosophie. Enseignement. Paris, Carré et Naud, 1898. C IV 196

L. Liard Des définitions géométriques et des définitions empiriques Paris, nouv. éd., Alcan 1888

§*Nota del curatore.* Le opere e gli articoli segnalati da Segre in questa bibliografia ragionata, in genere, sono facilmente identificabili poichè le citazioni bibliografiche da lui inserite, per quanto non complete, contengono i dati essenziali. Nei casi in cui ciò non accade le integrazioni sono poste fra parentesi quadre direttamente nel testo. Le sigle presenti al termine di alcune opere indicano la collocazione nella Biblioteca matematica torinese, all'epoca di Segre.

**Nota del curatore.* L'indicazione bibliografica completa si trova alle pagine di questo quaderno indicate da Segre.

[H.] Poincaré[19] La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. L'ens. math. t. I 1899 p. 15

[H.] Poincaré Les définitions générales en mathématiques. L'enseign. math t. VI, 1904 p. 257 ("Science et methode' p. 123)

[G.] Castelnuovo Il valore didattico della Matematica e della Fisica. Rivista di Scienza I 1907 p. 329

E. Borel La logique et l'intuition en mathématiques Revue de métaph. et de morale 15, 1907 p. 273

G. Vailati L'insegnamento della Matem^a^ nel 1^o^ triennio della Scuola secondaria. Boll. di mat^a^ VI, 1907 p. 137

[Ch. - A.] Laisant Initiation mathématique, Hachette 1906 C VI 178

[F.] Klein u. [E.] Riecke Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Teubner 1904

[J. - M.] Duhamel Des méthodes dans les sciences de raisonnement. 4 vol^s^. 1865-68 //

[64] *M. Simon* Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 2^e^ Aufl. München 1908

E. Borel Les exercises pratiques de math. dans l'enseignement secondaire. Revue gén. des sciences 15, 1904 p. 431 (v. anche [M.] *Ascoli* ivi p. 496)

H. Schubert Auslese aus meiner Unterrichts-und Vorlesungspraxis 1905 ... C VI 168 [Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1905-1906.]

F. Marotte L'evolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne Bull. s. m. t. 29, 1905 p. 281 - 306

[19] Vari artic^i^ di *Poincaré* in "Science et méthode" M VI 37, "La science et l'hypothèse" C V 188, "La valeur de la Science" C VI 165, "Dernières pensées" C VI 301.

J. Hadamard Réflexions sur la méthode heuristique. Revue générale des sciences 16, 1905 p. 499-504

Platone Passo del "Menone" riportato da Loria "Le scienze esatte..." Libro I (pre-Euclide) p.109 - 110. (Propedeutica geometrica) 2^{a} ed^{e} (man. Hoepli) 1914 p. 115 M VI 88

F. Klein Vorträge ü. den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von *R. Schimmack*. Teil I Teubner 1907

F. Klein Elementarmathematik von höheren Standpunkte ans. Teil I Vorles. 1907-1908 (Arithmetik, Algebra, Analysis). Teil II 1908 (Geometrie) C V 244

F. Reidt Anleitung zum mathematischen Unterricht 1886; 2^{e} Auflage (da H. Schotten) 1906 [Berlin, G. Grote] //

K. Schwering Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Teubner 1907 **[65]**

R. Schimmack U. die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Zeitschr. f.m.u.n. Unterricht 39 (1908) p. 513 - 527 e biblioteca

R. Bettazzi La risoluzione dei problemi numerici e geometrici, Paravia 1893

E. Bisson-Minio Errori ed inesattezze più comuni di Aritmetica e Geometria Belluno 1908

W. Lietzmann Stoff und Methode in mathematischen Unterricht der Norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. Teubner 1909

W. Killing u. H. Hovestadt Handbuch des mathematischen Unterrichts Teubner 1910 1^{er} Bd. Geometrie. (molto utile), 1913 2^{er} Bd. C IV 268

O. Lesser Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens in Mathematikunterricht unser höheren Schulen Frankfurt a M. [Gebrüder Knauer] 1907 (Op^{li} M. 173)

Sulla riforma v. nel vol. 3^o degli Atti del 4^o congr^{o} intern^{le} dei Matem^{i} (Roma 1908, pubblicato nel 1909) le comunicaz^{i} di *[A.] Gutzmer* p. 441, *[C.] Godfrey* (Inghilterra) p. 449, *[D. E.] Smith* (Amer^{a}) 465, *[R.] Suppantschitsch* (Austria) p. 478, *[G.] Vailati* p. 482, *[H.] Fehr* (Svizzera) 500, *[E.] Beke* (Ungheria) 530. - *[F. S.] Archenhold* p. 510 //

[66] *A. Höfler* Didaktik des mathematischen Unterrichts Teubner 1910 (buono) M III 47

H. Fehr La notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes. L'enseign. math. 7 1905 p. 178

Abhandlungen ü. den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommision, herausgegeben von F. Klein. 1909 e seg^{i} [Berlin, Leipzig, Teubuer]

Abhandlungen ü. die Reform des mathem. Unterrichts in Ungarn 1991 [Leipzig, Teubuer]

Klein Anwendung d. Diff - u. Integralrechnung auf geometrie, eine Revision der Principien. Vorles. 1901 (Leipzig 1902)

Atti della Sottocommisione italiana per l'insegnamento matematico. Nel *Bollettino* della *Mathesis* Anno III 1911 [Supplemento, pp. 1-23, 25-80]

Rapports de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Sous-Commission francaise. Paris, Hachette 1911

The *Teaching* of Mathematics in the United Kingdom (2 vol^{i} 1912) [London, H. Stationery Off.] //

[67] L'enseignement mathématique en Suisse (Rapports de la Sous-Commission Suisse) 1912

J. Jacob Praktische Methodik des mathem. Unterrichts. Wien 1913

Calcolo infin^{le} nelle scuole medie: rapporti. Pubblicati in L'enseignement math. 16, 1914 p. 245

C. Leoni La Matem^{a} nel suo insegnam^{o} primario e secondario 1915 C V 337

R. Bettazzi I probl^{i} di Aritmetica pratica [Paravia Torino, 1900]

Discussione dei problemi (geom^{i}*)* nelle Lezioni di *[G.] Frattini* C II 157 p. 36

Lacroix S.F. Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier 1805 B' 208

J.W. Young I concetti fondamentali dell'Algebra e della Geometria 1911 (vers^{e} ital^{a} 1919) C V 273, C VI 382

Norme riguardanti l'insegnam^{o} delle materie di cultura gener^{e} nelle Scuole medie. Boll. uff. [della Pubblica Istruzione] 23 Ott. 1919 p. 1651.

G. Mannoury Methodologisches u. Philosophisches zur Elementar-Mathematik (Haarlem 1909) M V 60

C. Ciamberlini Saggi di Didattica matem^{a} [Paravia Torino, 1920]

G. Furlani Rapporti fra la mat^{a} e la fis^{a} ecc. Boll. di Mat. [Il Bollettino di Matematica] 16 (1919) p.120

A. Bemporad L'Astronomia nelle scuole medie. Per^{o} di M. [Periodico di matematiche] (4) 2 1922 pag. 261 //

A. De Morgan On the Study and Difficulties of Mathematics [Chicago, 1910] **[68]**

W. Dieck Stoffwahl u. Lehrkunst in math. Unterricht [Leipzig, 1918]

W. Birkemeier U. den Bildungswert der Mathem. 1923

W. Lietzmann Methodik des math. Unterrichts 2er Teil 2^{r} Aufl. 1923. //

Didattica algebrica

[71]

M. Simon Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischen Analysis Teubner 1906

[H.] Weber - [J.] Wellstein Encyklopädie der Elementarmath C III 155

J. Houel Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'ideé de quantité dans l'Analyse mathématique. Suivi de Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie. Paris 1883

H. Schubert†

S. Catania Grandezze e numeri, Catania 1915 Op^{li} C 447

Disuguaglianze, in part. di 1^{o} e 2^{o} gr^{o}. *Bertrand* Alg^{a}, *[C.] Bourlet* [*Leçons d'Algèbre élémentaire*, Paris, 1902] C V 168 p. 158-161, 244-249; *[C.] Arzelà* [*Trattato di algebra elementare*, 3^{a} ed. Firenze, 1908] M VI 15 p. 244-257, 390-392; *[S.] Pincherle* [*Lezioni di algebra elementare*, Bologna, 1911] C III 222 p. 309-317 //

Storie - Varia

[75]

W.R.Ball Breve compendio di storia delle matematiche, 2 vol^{i} 1903-04 C IV 206

Zeuthen Historie des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge 1902

J. Tropfke Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. 2 vol^{i} 1902-03 Leipzeg-Veit C II 93

M. Simon U. die Entwicklung der Elementargeom. im 19. Jahrhundert 1906

S. Günther Geschichte des mathematischen Unterrichts im *deutschen* Mittelalter bis 1525 Berlin 1887

†*Nota del curatore*. Segre non indica alcun titolo. Molto probabilmente intendeva riferirsi a un libro di aritmetica e algebra che nel 1898 inaugurò la *Sammlung Schubert*, raccolta di testi di matematica pura e applicata.

P. Tannery Notions historiques; nel vol$^{\mathrm{e}}$ di *J. Tannery* Notions de mathématiques

G. Loria Le scienze esatte nell'antica Grecia, Modena 1893 - 1902, 2^{a} ed. man. Hoepli 1914 M VI 88

G. Fazzari Breve storia della matematica. Dai tempi antichi al Medio Evo. (Sandron 1907)

G. Libri Histoire des sciences mathém. en Italie depuis La Renaissance jusqu'à la fin du 17^{e} siècle.

A. von Braunmühl Vorl. ü. Geschichte der Trigonometrie. 2 vol$^{\mathrm{i}}$ Teubner 1900, 1903 C VI 57

D. Gambioli Breve sommario della storia della matematica (con numerosi errori) C V 187

[J.] Boyer Histoire des mathém. Paris 1900 C VI 68 //

E. Lucas Récréations mathématiques 1883-1894 4 vol$^{\mathrm{i}}$ **[76]**
L'Arithmétique amusante 1895 (Introduction aux Récréations math.) C IV 135

W. W. R. Ball Récréations et problèmes mathém. des temps anciens et modernes (3^{e} éd. angl. 1898) 2^{e} éd. franc. 1908-09 M VI 45 in 3 vol$^{\mathrm{i}}$

W. Ahrens Mathematische Unterhaltungen und Spiele 1901

H. Schubert Mathematische Mussestunden 1900 3 vol$^{\mathrm{i}}$ C VI 170

I. Ghersi Matematica dilettevole e curiosa. (Manuale Hoepli 1913) C VI 294

[D. E.] Smith and *[L. C.] Karpinski* The Hindu-Arabic Numerals (storia della numeraz. decimale) 1911

W. Lietzmann u. *V. Trier* Wo steckt der Fehler? Math. Bibliothek 10, 1913

P. Maennchen Geheimnisse der Rechenkünstler Math. Bibliothek [Mathematisch-physikalische Bibliothek] 13, 1913

[A.] Witting - [M.] Gebhardt Beispiele z. Geschichte d. Math. Math. Bibliothek [Mathematisch-physikalische Bibliothek] XV, 1913

[H.] Vuibert Les anaglyphes géométriques [Paris, 1912 2^{a} ed] Op^{li} C 422

J. Toisoul Particularités utiles et intéressantes sur les nombres et leurs combinaisons. (Namur 1911)

W. Ahrens Scherz und Ernst in der Mathematik [Leipzig, 1904] C IV 220 //

[77] *[A. - F.] Ozanam* Récréations math. et phys. 3 vol. (nouv. édition 1741)

[C. - G.] Bachet de Méziriac Problèmes plaisants et délectables ... [Lyon, 1624, 2^{a} ed] M VI 29

[A.] Rebière Mathématiques et mathématiciens [Paris, 1898] C V 35

A. Mieli Le scuole ionica, pitagorica ed eleata [Firenze, 1915]

[C.] Perregaux - [A.] Weber Le relief en géom. par les couleurs complémentaires 1914 C I 227

R. E. Moritz Memorabilia Mathematica, New York 1914 C III 287

E. Fourrey Curiosités géometriques 1907 C V 229

Notizie storiche in *[P.] Boutroux* cit^{o} qui a p. 61

E. Fourrey Récréations arithmétiques [Paris, 1899]

F. Cajori A History of elem. mathematics 1917 C V 387

G. A. Miller Historial Introduction to mathematical Literature 1916 C V 389

D'Arcy W. *Thompson* On Growth and form C IV 359 [Cambridge, 1917]

A. Vaccaro I sofismi geometrici

C. Toffoletti Sofismi matematici [Livorno, 1916]

F. Müller Führer durch die math. Literatur. Abh 3 Gesh. d. Math. 27 (1909)

W. Dieck Mathematisches Lesebuch 1921

M. D'Ocagne Vue d'ensemble s. les *machines à calculer* Bull. sciences math. (2) 46, 1922 p. 102 (anche a parte)

S. Günther, *H. Wieleitner* Gesch.[ichte] d. Mathem. (Samml. Schubert) [2 voll. 1908 e 1911-192]

[P. A.] Mac Mahon New Mathematical Pastimes [Cambridge, 1921]

E. Fourrey Procédés originaux de constructions géométr. 1924 //

Numeri *frazionari, negativi, irraz^{li}*

[79]

Ch. Méray Lecons nouv. sur l'Analyse infin. t. I 1894 introduce *i fratti come operatori*; i numeri positivi e *negativi* come quantità con direzioni $\overrightarrow{a}$, $\overleftarrow{a}$.

V. anche *[J.] Hoüel* cit. a pag. 71

Nell'art. 1^o della *Encyklopädie* ([H.] Schubert, Grundlagen der Arithmetik) vi è la storia dei numeri negativi, che vengon definiti con $a - b$ ove $a < b$. Vedere in partic. il rifacimento francese di Tannery J. e Molk [*Enciclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, tome I Arithmétique et Algèbre, Paris, 1904-1909]

J. Tannery Notions de mathématiques, avec Notions historiques par. P. Tannery [Paris, 1905]. Introduce nel miglior modo i numeri frazionari ed i negativi, e ne svolge anche benissimo la teoria.[20]

E. Borel Algèbre 1er Cycle [Paris, 1903]. I numeri negativi nel cap. 2^o, e le applicaz$^{\rm i}$ nel 3^o cap.

[20] Numeri *simmetrici* chiama 2 numeri la cui somma è 0.

G. Mignosi Sui vari modi d'introdurre il concetto di frazione. Boll. di Mat^{a} 7, 1908 p. 6

H. Burkhardt Algebraische Analysis, Leipzig 1903

A. Padoa Introduz. alla teoria delle frazioni (lez^{e} premiata) Bollettino della Mathesis Dicembre 1909

P. Bachmann Vorlesungen ü. die Natur der Frationalzahlen. Teubner 1892 C III 93 //

[80] *E. Maillet* Introd. à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Gauthier-Villars 1906 C III 197

H. Wieleitner Der Begriff der Zahl (Mathem Bibliothek II, Teubner 1911)

A. Natucci Cenni storici e sistematici sui numeri reali (irrazionali) Bollettino della "Mathesis" 6, 1914 , p. 23

C. Mineo Sul concetto di numero reale (irraz^{le}) Per^{o} di mat. (3) 12, 1914 p.1

Irraz^{li} in *[G.] Frattini* cit. a p. 95, e [U.] Amaldi - [F.] Enriques Noz^{i} di mat. 1^{o} vol. cit^{o} ivi.

O. Perron Irrationalzahlen 1921

A. Natucci Il concetto di numero e le sue estensioni 1922

E. Bortolotti Definizioni di Numero. Per^{o} di mat. (4) 2, 1922; Esercit^{i} mat. Catania 2, 1922

L. G. du Pasquier Le développement de la notion de nombre (naturale) 1921 //

Costruzioni

[83]

T. Vahlen Konstruktionen u. Approximationen Teubner 1911 C III 219

A. Adler Theorie der geometrischen Konstruktionen (Samml. Schubert 52) 1906 C VI 157[52]

J. Hjelmslev Geometrische Experimente 1915 Op. C 446

K. Giebel Anfertigung math. *Modelle* [Mathematisch-Physikalische Bibliothek] 16) 1915

A. Rivelli Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e loro costruzione in carta. Man. Hoepli [1897]

F.G. Teixeira S. les problèmes célèbres de la géom. élém. non résolubles avec la règle et le compas. Coîmbre 1915

L. Mascheroni Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni. Pavia 1793 F IV 21

Hilda P. Hudson Ruler and Compasses 1916

A. Kempe How to draw a straight line [London, 1877] M VI 176

R. Marcolongo Materiale didattico ed esperienze nell'insegnamento (conferenza). Giorn. di m. [Giornale di matematiche] 60, 1922, p. 1 //

Didattica geometrica

[89]

P. Treutlein Der geometrische Anschauungsunterricht (als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen) Teubner 1911

H.E.Timerding Die Erziehung der Anschauung Teubner 1912

D.E.Smith The teaching of Geometry 1911

[H.] Vuibert p. 76 e *[C.] Perregaux - [A.] Weber* p. 77[‡]

Th. Moreux Pour comprendre la géométrie 1922

[‡]*Nota del curatore*. Le pagine indicate fanno riferimento a questo quaderno.

H. Poincaré Des fondements de la Géométrie [Paris, 1921] //

Complementi di Mat. elem.

[95]

[G.] Frattini Lezioni di Algebra, Geom. e Trigon^{a} (pel 2^{o} bienno ist. tecn.) 1911, 1913 C II 157

[Guido] Ascoli Complem^{i} di Geom^{a} per gl'ist^{i} tecnici Livorno, Giusti 1913

[D.] Amanzio, *[P.] Cassani* v. p. 105 in fine[§].

M. de Franchis Complementi di Geometria [Palermo, 1911]

G. Scorza Complem^{i} di Geometria, Bari, Laterza 1914

[A.] Socci e [G.] Tolomei Complem^{i} di Matem^{a} pei licei moderni. Le Monnier 1914

G. Veronese Complementi di Algebra e Geom. ad uso dei Licei moderni, Padova 1915

[U.] Amaldi - [F.] Enriques Noz^{i} di Matem^{a} ad uso dei Licei moderni, 2 vol^{i} 1914-15

C. Alasia I complem^{i} di Geom. elem. Manuale Hoepli 1903

G. Arzela' I complem^{i} di Alg^{a} elem.

[S.] Ortu-Carboni " " [Roma, 1920]

G. Garbieri Trattato di Alg^{a} elem^{e} vol I e II (nel vol I applicaz^{i} dell'alg^{a} alla geom^{a}; nel II varie altre teorie complem^{i}) [Voll. I e II, Padova, 1886, 2^{a} ed. Torino, 1905]

G. M. Testi Complem^{i} d'Algebra. [Livorno, 1904] //

[96] *G. Gallucci*. Algebra e Geometria metrica per il 2^{o} corso liceale classico e moder-

[§]*Nota del curatore*. La pagina indicata fa riferimento a questo quaderno.

no 1918

A. Martini Zuccagni Algebra complem^{e} [Livorno, 1919]

R. Marcolongo Corso di Mat^{a} p. 2^{o} biennio ist^{i} tecn^{i} 1920

N. Amici e *S. Medici* Lez^{i} di Aritm^{a} ed Alg^{a} 3^{o} vol. 1921

C. Guichard Traité de Géom. tome II Compléments 5^{a} ed. 1923

[I.] Todhunter Complementi d'algebra [2^{a} ed. Napoli, 1875] //

Trigonometria

[101]

Breve ma chiaro cenno in *[J.] Tannery* Notions de mathém. [Paris, 1905] pag. 90-93. - V. anche *[R.] Baltzer* [*Elemente der Mathematik*, Leipzig, 1870], *[J. A.] Serret* [*Traité de trigonométrie*, Paris, 1900], *[E.] Baroni* [*Trigonometria piana e sferica*, Firenze, 1910] C VI 276, *[J.] Petersen* [*Plane and spherical trigonometry*, 1863]

Per la storia *v. [A.] Braunmühl* (qui p. 75)[✠], *[J.] Tropfke* (ivi, vol. II p. 212)

V. anche *[F.] Klein* Elem - Math. (qui p. 64)[✠], I pag. 360 e seguenti

M. de Franchis Elem^{i} di Trigonometria rettilinea. Op^{li} C 406 [Milano, 1910]

[W.] Killing - [H.] Hovestadt 2er Bd (qui, p. 65)[✠]

G. Pesci Trigonom^{a} piana e sferica (per la R. Acc. Navale) 4^{a} ediz. 1916

G. Frattini v. pag. 95[✠] lin. 1^{a}

Tavole trigonom^{e} dirette, o naturali, cioè anche senza log., in *[D. - F.] Rivard* [*Trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris, 1750] (del 1750) B' 118, in *[J.] Hoüel* C IV 7 e poi (con maggiori approssimaz^{i}) C III 78, *[E.] Mougin* di 10' in 10' [J.] Bottomley, [F.] Castle, [J.] Wrapson and [W.] Gee *J. M. Peirce* idem

[✠]*Nota del curatore*. Le pagine indicate fanno riferimento a questo quaderno.

E. W. Hobson A Treatise on plane trigonometry. (interessante; contiene anche un cap^{o} sulle funz^{i} iperboliche) [Cambridge, 1918]

U. Concina e *A. Neppi-Modona* Trigon^{a} piana e sferica. [Torino, 1925]

Le cose più essenziali negli Elem^{i} di Geom^{a} di Legendre, Méray, Bourlet*. //

Trattati di Aritmetica ed Algebra

[105]

V. pag. segu^{e}

A. Conti Elementi di Aritmetica razionale ad uso delle Scuole Normali 4^{a} ediz. Zanichelli 1909

S. Catania Trattato di Aritmetica ed Algebra ad uso degl'istituti tecnici 3^{a} ediz. 1910 C VI 275

S. Pincherle Lezioni di Algebra elementare ad uso delle scuole medie superiori 1911 (Accurato in genere, ma non nella introduzione, man mano, dei nuovi numeri) C III 222

E. Bortolotti Manuale di Aritmetica generale ed Algebra (p. liceo e ist. tecn.) in 3 vol^{i} 1911 C VI 280

G. Fazzari Elementi di Aritmetica per le scuole medie superiori, *con note storiche e numerose questioni varie* C VI 283 [Palermo, 1918]

F. Palatini Aritmetica ed Algebra ad uso delle Scuole medie superiori, Torino, Petrini C II 147 [Torino, 1910]

Teorie complementari: *[D.] Amanzio* Sette lez^{i} di Alg^{a} ad uso degl'istituti tecnici. Op. M. 182 [Napoli, 1881]

[P.] Cassani Complem^{i} d'Algebra ad uso ist^{i} tecn^{i} B′ 190, e M VI 48 [Torino, 1885] //

Nota del curatore. Per le indicazoni bibliografiche si vedano le pagine seguenti.

S. Pincherle Gli elementi dell'Aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori [106]
(Zanichelli, 16^a ediz^e) [Bologna, 1901]

H. Grassmann Lehrbuch der Arithmetik Berlin 1861

[G.] Peano Arithmetices Principia ... 1889
Aritm^a gener^e e algebra elem. 1902 M IV 26

E. Baroni Algebra ad uso dei licei e 1^o biennio ist^i tecn^i (in 2 vol^i) 3^a ed. 1912

C. Arzelà Trattato di algebra elem^e ad uso dei licei e ist^i tecn^i 3^a ed. 1908 M VI 15

E. Bortolotti Aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori (Albrighi, Segati e C.) [5^a ed. Roma, 1907]

A. Loewy Lehrbuch der Algebra. 1^{er} Theil Grundlagen der Arithmetik 1915 (molto profondo)

S. Catania Corso di Algebra elem^e per i licei classici *e moderni* Parte 2^a, 1914

M. Leoncini Aritmetica ed Algebra ad uso del 1^o biennio d'Istit^o tecnico Brescia 1915

C. Bourlet Lecons d'Algèbre élémentaire 1902 (C V 168) (Ottimo. V. ad es. la discussione dei problemi)

[J. - L.] Bertrand [*Éléments de géométrie*, Paris, 1912]

[R.] Baltzer M I 36 (orig^{le})[†] //

C. Burali Forti Lez.^{i} di Aritm^a pratica (7^a ediz. 1915) [107]

C. Burali Forti e Ramorino Elem^i d'Algebra p. le scuole medie infer^i 4^a ed^e 1914

G. Frattini V. pag. 95 in principio[‡].

[†] *Nota del curatore*. Cfr. p. 101 di questo quaderno.
[‡] *Nota del curatore*. La pagina indicata fa riferimento a questo quaderno.

L. Lo Monaco Aprile Elem^{i} di Aritm^{a} raz^{le} ad uso delle Scuole medie super^{i} 1916

[A.] Clairaut Élémens d'Algèbre 1746 (2 vol^{s}) B' 218
(1713-1765) (molto didattico)

[L.] Euler (1707-1783) Élémens d'Algèbre 1768 (2 voll.) B' 221

N. Amici e *S. Medici* Lez^{i} di Aritm^{a} e Alg^{a} per gli Ist. Tecn. in 3 vol^{i} 1921

G.Vivanti Aritmetica 1920 M VI 166

M. Royer et *P. Court* Aritmétique 3 vol^{s} 1922 M VI 169 //

Trattati di Geometria elem^{e} e scritti vari sui fondamenti

[111]

[A.] Sannia e *[E.] D'Ovidio* (1^{a} ediz. 1869) Elem^{i} di geom. C VI 161

R. De Paolis 1884 Elem^{i} di Geom.

M. Pasch Vorlesungen ü. neuere Geometrie 1882 (fa epoca, per aver messo in evidenza i postulati...) trad. in spagnuolo M I 21

G. Peano I principi di Geometria logicamente esposti 1889
Sui fondamenti della Geometria Rivista di mat. t. 4^{o}, 1894 p. 51-90

G. Veronese Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee ... 1891

G. Veronese Elementi di Geom. 1897 (appendice 1898) 2^{a} ediz. 1901 C VI 270

M. Pieri I principi della geom. di posiz... 1898
Della geom. elem^{e} come sistema ipotetico-ded^{o} 1899
La geom. elem^{e} istituita sulle nozioni di punto e sfera 1908

D. Hilbert Grundlagen der Geometrie 1899[lii] 2^{a} Auflage 1903 Ediz. francese 1900 C III 146

[lii] Recensione di Poincaré in Bull. sciences m. (2) 26, 1902 p. 249.

G. Ingrami Elem$^{\text{i}}$ di Geom. 1899, 2^{a} ediz. 1904 (fusione) C VI 265

F. Enriques Questioni riguardanti la Geom. elem. 1900. - Ediz. tedesca "Fragen der Elem. geom." II 1907 //

[F.] Enriques - [U.] Amaldi Elem$^{\text{i}}$ di Geom. 1903 M VI 59 **[112]**

[F.] Enriques Prinzipien der geom. 1907, nell'Encykl. [*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III 1907] (anche nell'ediz. francese) III 11

W. Killing Einführung in die Grundlagen der Geom. 1893 e 1898

H. Schotten Inhalt und Methode des planimetr. Unterrichts 1890, 1893

M. Simon Euklid und die sechs planimetrischen Bücher 1901 (Abh. z. Gesch. d. m. W. Heft XI)

U. die Entwicklung d. Elementar-Geom. im 19. Jahrhundert. Bericht 1906 (criticato molto da F. Müller in Bibl. Math. (3) 7 p. 406-418)

Ch. Méray Nouveaux Éléments de Géométrie 1874 2^{a} ediz. 1903, 3^{a} ediz. 1906 C V 206

J. Hoüel Essai critique sur le principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire 1867

H. Müller Leitfaden der ebenen Geometrie u. der Stereometrie, *mit Benutzung neuerer Anschauungs-weisen für die Schule* 1875 u. s. w. (*notevole*)

[J.] Henrici - [P.] Treutlein Lehrbuch der Elementar-Geom. [Leipzig, 1897]

[F.] Engel - [P. G.] Stäckel Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss 1895

[R.] Baltzer Elemente der Mathematik [Leipzig, 1870]

R. Bonola La Geometria non-euclidea 1906 //

[113] *[H.] Weber - [J.] Wellstein* Encyklopädie der Elementarmathematik (1906-7 2*e* Auflage dei vol 1 e 2; 1*a* del 3*o*) C III 155

J. Hadamard Leçons de Géom. élém. C V 175 Note A (vol. I) “Sur la méthode en Géométrie” pag. 261

T. L. Heath The thirteen Books of *Euclid*’s Elements. 3 vols. Cambridge 1908 C IV 261

[W.] Killing - [H. J.] Hovestadt v. qui p. 65†

[G.] Lazzeri e [A.] Bassani Elemi di Geometria 1*a* ediz. 1891 (2*a* ediz. Livorno 1898) C V 154

W. Lietzmann Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen *Italiens*) Zeitschr. f. m. u. n. Unt. 39, 1908 p. 177

G.B. Halsted. Géométrie rationelle. Traité élémentaire de la science de l’espace. Gauth. Vill. 1911

Iniziazione: *[J.] Andrade* [*Nouvel enseignement d’initiation*] La Géom. naturelle 1908 Op. C 398

[H.] Thieme v. pag. 61†

[M.] De Franchis Geom.areme 1909, C VI 251 (Ha la fusione, il gro dei moti. Ma poco didattico, a mio avviso) //

[114] *G. Giorgi* Sui fondamenti della geometria. Bollo della Mathesis IV, 1912 [pp. 74-91]

G. Scorza Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori. Ivi p. 235

E. Bortolotti Nozioni di geometria per le scuole tecniche (Albrighi, Segati e C.)

†*Nota del curatore*. Le pagine indicate fanno riferimento a questo quaderno.

P. Benedetti Elem$^{\text{i}}$ di Geom. ad uso specialm. d. scuole normali 1916 C V 357

[E.] Rouché et *[Ch.] Comberousse*. Traité de géom. C V 7

[A.] Clairaut Elem$^{\text{i}}$ di Geom$^{\text{a}}$ (prima ed. 1741 anche in francese 1775) B′ 139

[A. M.] Legendre [*Éléments de géométrie*] 1794 C V 364

E. Borel Géométrie [Paris, 1905] M VI 30

J. Petersen Text-Book of elementary plane Geometry [London, 19] M V 5 (breve, succoso, 73 paginette, incl. molti esercizi)

C. Bourlet Éléments de Géom. [Paris, 1908] C VI 381

J. Poirée Méthodes pour résoudre les probl. de géom. 1920

C. Guichard Traité de Géom. [Paris, 1903] //

Esercizi

[119]

[E.] Heis Raccolta di esempi e quesiti di Aritmetica ed Algebra. Torino, Loescher [1876] C V 252

[J.] Fitz-Patrick (*et [G.] Chevrel* [?]) Exercices d'Arithmétique (avec préface de J. Tannery) Paris, Hermann 1893 3^{e} *edition 1914* (vi sono anche le soluz$^{\text{i}}$ in ambe le ediz$^{\text{i}}$) C II 185 (*da raccomandare*)

[G.] Ritt Problèmes de Geométrie et de Trigonométrie F V 11, (e con B′ 214) Paris, Hachette 1847

[C.-A.] Laisant Recueil de problèmes de mathématiques Gauthier - Villars [1893-18] (Son 6 vol$^{\text{i}}$, fra cui uno di Aritm$^{\text{a}}$ e Algebra elem$^{\text{e}}$, e uno di Geom$^{\text{a}}$ elem. Ma son cose un po' elevate) C IV 126^{3}4

A. Schülke Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geom. u. Trigon. 2 vol$^{\text{i}}$ Teubner 1902, 1906

[O.] Zanotti-Bianco L'Astronomia come sorgente di esempi e problemi per le scuole secondarie (Rivista di Astron^{a} e Scienze affini, 4 , 1910 od anche: Bollettino della "Mathesis" II, 1910)

A Naccari Problemi di Fisica in sussidio all'insegnamento della matem^{a} nelle scuole medie (Bollettino della "Mathesis" II, 1910) p. 116

Esercizi per Scuola Complem^{e} in *E. Bortolotti* Elem^{i} di Aritmetica pratica per le scuole secondarie infer^{i}, Elem^{i} di Geometria per le scuole tecniche Roma, Albrighi e Segati [1914]. //

[120] Esercizi per Scuola Normale in: *Lia Predella Longhi*: Elem^{i} d'Algebra per la 1^{a} cl. normale; Aritmetica raz^{le} per 2^{a} e 3^{a} norm^{e} [Torino, 1901 e 1910 rispettivamente] (Paravia)

Esercizi di Geometria in *Enriques-Amaldi* Elem^{i} di Geom^{a} (ed^{e} ridotta ad uso delle Scuole Normali; e altre ediz^{i}). Molti (pratici e teorici) nel *Bourlet*
Esercizi vari (molti) in *Amaldi-Enriques* Noz^{i} di Mat.*

S. Ortu Carboni Raccolta di problemi d'applicaz. dell'Algebra alla Geom^{a}. [Livorno, 1912]

A. R. Rivera Probl^{i} di Geom^{a} e di Trigon^{a} con le loro soluzioni... Torino 1861 (forse esaurito) F III 59

[Frère Gabriel-Marie] *F. G-M* Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues 5^{e} éd. 1912

S. Catania Probl^{i} di mat^{a} dati agli esami di licenza d'ist. tec^{o}, colle soluz^{i} 3^{a} ediz. 1914

R. Bettazzi I probl^{i} di Aritmetica pratica. [Torino, 1900]

**Nota del curatore*. I testi sono già stati citati nelle pagine 95 e 112 del quaderno.

E. M. Radford Mathematical Problem Papers. Solutions. (Ogni "Paper" o foglio contiene problemi in vari rami di Matematica, incl^{a} elementare) [Cambridge, 1904]

J. Wolstenholme Mathematical Problems 2^{a} ed. 1878 (problemi su tutta la mat^{a} senza soluz^{i}) C IV 12

P. Cattaneo Avviamento alla risoluz. dei problemi di Aritmetica e di Geom. metrica 1915

G. Ritt Problèmes d'Algèbre et exercices de calcul algèbr. [Paris, 1860] B' 214

[I.] Todhunter Esercizi di Geom^{a} colle loro soluz^{i} [Livorno, 1891] //

H. Thieme Raccolta di teoremi e probl^{i} di Stereometria [Livorno, 1891] **[121]**

[Frère Gabriel-Marie] F. G.-M. Exercices d' Algèbre

G. Wulliet Problemi di Aritmetica p. scuole tecn^{e} e commerc^{li}. - Soluzionario id. 4000 problemi d'aritmetica [Torino, 1915]

C. Alasia Esercizi ed applic^{i} di trigon^{a} piana [Milano, 1901] C VI 112

R. Javelot Comment résoudre les probl. de géom. élém. [Paris, 1918]

S. Pincherle Esercizi sull'Algebra elem^{e} [Milano, 1896]

Esercizi sulla Geom. elem^{e} [Milano, 1915]

F. Panizza Esercizi di Aritmetica raz^{le} [Milano, 1893]

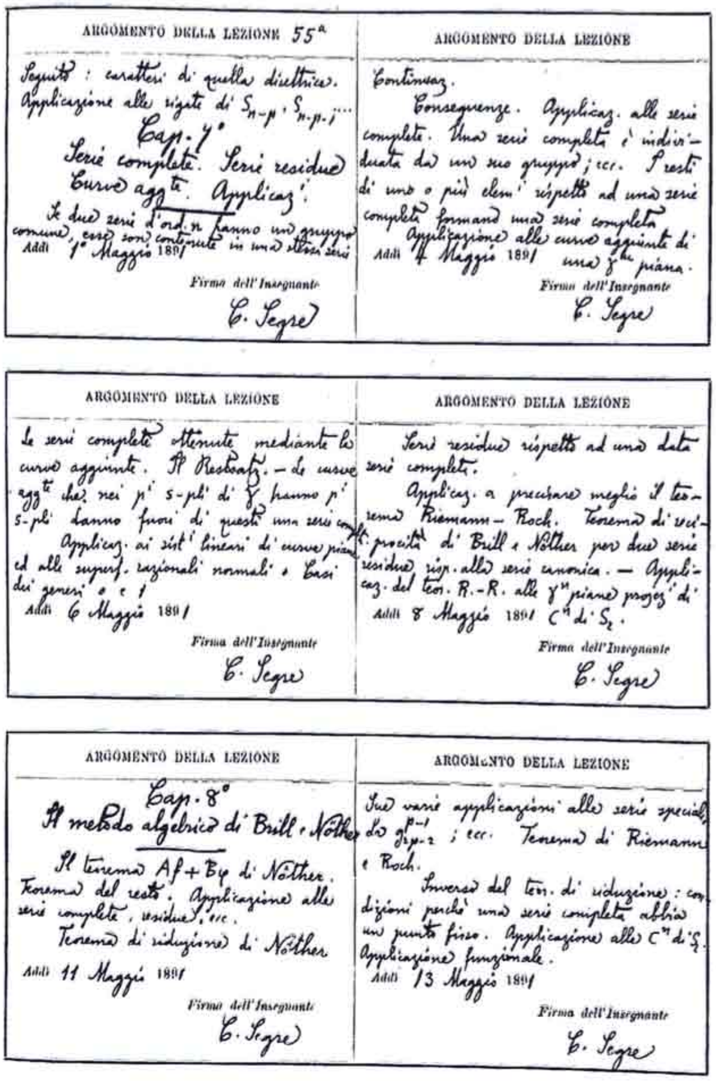
[I.] Crespi-Baccin e *[A.] Solustri* Esercizi e probl^{i} di Aritmetica, Geom. e Alg^{a} 1920
E. Bortolotti 4000 esercizi di alg^{a} elem^{e} p. licei 1921

[Ch.] v. Nagel Geometrische Analysis (syst. Anleitung z. Auflösung von Aufgaben der Geom.) 1883

[E.] Bardey Aufgaben-Sammlung (Aritm^{a} e Alg^{a}) [Liepzig, 1913]//

Indice per Bibliogr[a]

Appendici



ARGOMENTO DELLA LEZIONE 55ª

Seguito: caratteri di quella direttrice. Applicazione alle rigate di S_{n-p}, S_{n-p-1} …

Cap. 7°

Serie complete. Serie residue

Curve aggte. Applicazi.

Se due serie d'ord. n hanno un gruppo comune, esse son contenute in una stessa serie

Addì 1° Maggio 1891

Firma dell'Insegnante

C. Segre

ARGOMENTO DELLA LEZIONE

Continuaz.

Conseguenze. Applicaz. alle serie complete. Una serie completa è individuata da un suo gruppo; ecc. I resti di uno o più elem.i rispetto ad una serie completa formano una serie completa.

Applicazione alle curve aggiunte di una γ^{a} piana.

Addì 4 Maggio 1891

Firma dell'Insegnante

C. Segre

ARGOMENTO DELLA LEZIONE

Le serie complete ottenute mediante le curve aggiunte. Il Restsatz. – Le curve aggte che nei pi s-pli di γ hanno pi s-pli danno fuori di questi una serie compl.

Applicaz. ai sist.i lineari di curve piane ed alle superf. razionali normali e basi dei generi 0 e 1

Addì 6 Maggio 1891

Firma dell'Insegnante

C. Segre

ARGOMENTO DELLA LEZIONE

Serie residue rispetto ad una data serie completa.

Applicaz. a precisare meglio il teorema Riemann – Roch. Teorema di reciprocità di Brill e Nöther per due serie residue risp. alla serie canonica. – Applicaz. del teor. R.-R. alle γ^{n} piane proiez.i di C^n di S_r.

Addì 8 Maggio 1891

Firma dell'Insegnante

C. Segre

ARGOMENTO DELLA LEZIONE

Cap. 8°

Il metodo algebrico di Brill e Nöther

Il teorema $Af+B\varphi$ di Nöther. Teorema del resto. Applicazione alle serie complete, residue, ecc.

Teorema di riduzione di Nöther

Addì 11 Maggio 1891

Firma dell'Insegnante

C. Segre

ARGOMENTO DELLA LEZIONE

Sue varie applicazioni alle serie speciali, la g^{p-1}_{2p-2}; ecc. Teorema di Riemann e Roch.

Inverso del teor. di riduzione: condizioni perchè una serie completa abbia un punto fisso. Applicazione alle C^n di S_r. Applicazione funzionale.

Addì 13 Maggio 1891

Firma dell'Insegnante

C. Segre

8. Registro delle lezioni di Corrado Segre di Geometria superiore del 1890-1891 (UTo-ACS)

APPENDICE 1

Gli studenti di Segre alla Scuola di Magistero

a cura di Maria Anna Raspanti

Si riporta qui di seguito la lista degli studenti che hanno sostenuto l'*Esame di Magistero in Matematica*, con Corrado Segre dal 1907 al 1922, con la trascrizione dei dati ad essi relativi quali compaiono nel registro:
ASUT: *Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali: Verbali degli esami di Laurea e di Magistero in Matematica, Fisica, Chimica. Dal 27.10.1902 al 16.11.1925*, pp. 19-131.

Picco Annetta, nata a Cuorgnè (TO), p. 19[1]
TEMA: Relazione fra gli angoli e relazioni fra i lati e le diagonali di un quadrilatero iscrittibile in un circolo. Sua costruzione, dati i lati.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/12/1907
PRESIDENTE: Naccari[2]. COMMISSARI: Parona,[3] Segre.

Caramelli Olga, nata a Venezia, p. 21
TEMA: Posizione relativa di due cerchi nello stesso piano.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

[1]Le pagine riportate per ciascun candidato si riferiscono al registro citato.

[2]Andrea Naccari (1841-1926), fisico dell'Università di Torino, fu direttore della Scuola di Magistero annessa alla Facoltà di scienze dal 1908 al 1916, quando gli subentrò Corrado Segre. Ricoprì pure la carica di rettore dell'Università di Torino dal 1889 al 1892. Le notizie sui vari commissari, quando non precisato, sono tratte da C. SILVIA ROERO (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, Deputazione subalpina di storia patria, Torino 1999, vol. II, *I Docenti*, cui si rimanda per ulteriori informazioni.

[3]Carlo Fabrizio Parona (1855-1939), paleontologo, insegnò Geologia all'Università di Torino. Fu preside della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali e poi rettore dell'Università di Torino dal 1920 al 1922.

Gaido Margherita, nata a S. Remo prov. di Portomaurizio, p. 21
TEMA: Teoria delle diseguaglianze (di 1°. e 2°. Grado)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Riva Francesco, nato a S. Antioco (Cagliari), p. 22
TEMA: Retta e piano perpendic^{i}.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Rovetti Carlo, nato a Cuorgné (Torino), p. 22
TEMA: Principi d'analisi ind. di 1° grado.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Raffo Raffaella, nata a Roma, p.25
TEMA: Alcuni problemi nella costruzione di cerchi soddisfacenti a certe condizioni di passaggi per punti e contatti con rette, o cerchi dati.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 31/10/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Mo Vittoria, nata a Nizza marittima, p. 26
TEMA: Equivalenza di tetraedri fra loro e con prismi. Volume del tetraedro.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 02/12/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Oneglio Teresa, nata a Torino, p. 26
TEMA: Logaritmi.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 02/12/1908
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Druetti Maria Carmela, nata a Chivasso prov. di Torino, p. 27
TEMA: Triedri. Loro proprietà; Casi d'uguaglianza (1^{a}. classe liceale o 2°. d'Ist.

Tecnico)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 18/05/1909 N° di matricola 730
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Gino Fano,[4] Parona.

Colombo Ofelia, nata a Saluzzo prov. di Cuneo, p. 27
TEMA: Costruzione del pentagono e del decagono regolare (sezione aurea).
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 12/07/1909
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Artom Emilio, nato a Torino, p. 28
TEMA: Formule di addizione per le funzioni trigonometriche.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 12/07/1909
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cairo Emma, nata a Massa Carrara, p. 29
TEMA: Esercizi relativi alle misure delle superficie e volumi del cilindro e della sfera (2ª classe liceale).
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 20/10/1909
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Marnetto Antonietta, nata a Cañada de Gomez,[5] (Rep. Argentina), p. 30
TEMA: Grandezze direttamente ed inversamente proporzionali. Problemi relativi (regola del tre).
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 20/10/1909
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Peyroleri Margherita, nata a Torino, p. 30
TEMA: Rapporto dei perimetri e delle aree di due poligoni simili (1ª classe liceale o d'istituto tecnico)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30

[4]Gino Fano (1871-1952), matematico, allievo di Corrado Segre, insegnò Geometria proiettiva e descrittiva con disegno e Geometria superiore presso l'Università di Torino fino al 1938 quando le leggi razziali lo costrinsero a lasciare l'Italia. Diresse la Biblioteca matematica dal 1924 al 1938.

[5]Città della provincia argentina di Santa Fé.

DATA DELL'ESAME: Torino, 20/10/1909
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cytron Davide, figlio di Abram, nato a Bialystok (Grodno), Russia, p. 32
TEMA: Formole d'interesse semplice e composto. Applicazioni (2ª classe d'Istituto Tecnico)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1910. N° di matricola: 31.13
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Ricaldone Paolo, nato a Mirabello Monferrato, prov. di Alessandria, p. 32
TEMA: Applicazioni dell'Algebra alla Geometria.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1910. N° di matricola: 28.196
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Mosca Pietro, nato a Moncalieri, prov. di Torino, p. 33
TEMA: Misura della circonferenza e della superficie di un cerchio.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1910
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Fortunato Ernesto, nato a Velletri, prov. di Roma, p. 33
TEMA: Problemi di massimo e di minimo.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1910
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Gramegna Maria, nata a Tortona, prov. di Alessandria, p. 34
TEMA: Area della zona sferica e della sfera.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 38/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1910, N° di matricola: 31.98
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Fileti,[6] Parona.

Mago Vincenzo, nato a Pinerolo, prov. di Torino, p. 34
TEMA: Regola del tre semplice e composta.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 22/30

[6]Michele Fileti (1851-1914), chimico, nel 1881 fu professore di Chimica presso l'Università di Torino dal 1881 fino alla morte e rettore dal 1900 al 1903.

DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1910. N° di matricola: 31.89
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Osimo Alice, nata a Borgonovo, prov. di Piacenza, p. 37
TEMA: Frazioni ordinarie.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 05/07/1911
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Greggi Giovanna, nata a Aglié, prov. di Torino, p. 40
TEMA: per la terza classe liceale, Numeri irrazionali ed operazioni su di essi.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 20/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/12/1911, N° di matricola: 31.172
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Sterponi Berardo, nato a Teramo, p. 41
TEMA: Figure omotetiche.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 22/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1912
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Togliatti Eugenio Giuseppe, nato a Orbassano prov. di Torino, p. 41
TEMA: Teorema d'Eulero sui poliedri convessi. Qualche applicazione, ad esempio per la ricerca dei poliedri regolari euclidei.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30 con lode
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/07/1912
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Frisone Rosetta, nata a Novi Ligure, prov. di Alessandria, p. 44
TEMA: Figure Numeri primi. Scomposizione di un numero in fattori primi.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 27/02/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Camerano,[7] Fileti, Segre.

Vesin Virginia, nata a Torino, p. 45
TEMA: Intersezioni di sfere con rette, piani, sfere.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 36/40

[7]Lorenzo Camerano (1856-1917), zoologo, fu professore di Anatomia comparata dell'Università di Torino e rettore dal 1907 al 1910. Diresse anche il Museo di Zoologia.

DATA DELL'ESAME: Torino, 27/02/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Camerano, Fileti, Segre.

Beltrami Anna, nata a Torino, p. 45
TEMA: Proporzionalità fra segmenti. Poligoni simili.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 27/06/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Bognetti Assunta, nata a Alessandria, p. 46
TEMA: Sistemi di più equazioni di 1° grado con altrettante incognite (3ª classe tecnica)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 11/07/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Quarra Paolina, nata a Torino, p. 46
TEMA: Angoli nel cerchio. Cerchi iscritto e circoscritto ad un triangolo
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/12/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Fileti, Segre, Parona.

Allais Vittorio, nato a Saluzzo, prov. di Cuneo, p. 47
TEMA: Logaritmi
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 06/12/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Fileti, Segre, Parona.

Dusi Teresa, nata a Torino, p. 47
TEMA: Grandezze direttamente ed inversamente proporzionali
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 13/12/1913
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Fileti, Parona.

Tealdi Evangelina, nata a Guspini, prov. di Cagliari, p. 49
TEMA: Prime proposizioni sull'equivalenza dei poligoni (5ª classe ginnasiale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/01/1914

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Fileti, Parona.

Roggero Ettore, nato a Torino, p. 50
TEMA di lezione: Problemi di massimo e minimo
ESITO: approvato
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 02/05/1914, N° di matricola: 32.14
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Vercellin Raffaele, nato a Lillianes, prov. di Torino,[8] p. 50
TEMA di lezione: Relazioni fra 4 elementi (lati ed angoli) di un triangolo sferico
ESITO: approvato
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 02/05/1914, N° di matricola: 30.1
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Fritzsche Maria Paola, nata a Roma, p. 52
TEMA della lezione. Sui metodi per la risoluzione dei problemi geometrici
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 04/07/1914, N. di matricola: 31.171
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Murineddu Antonio, nato a Sassari, p. 53
TEMA della lezione: Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 04/07/1914, N. di matricola: 32.61
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Castelli Teresa, nata a Edolo, prov. di Brescia, p. 53
TEMA della lezione: Proprietà trigonometriche dei triangoli rettilinei (3ª classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1914, N. di matricola: 32.88
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Comi Tersilla Leonarda, nata a Pieve di Cadore, prov. di Belluno, p. 54
TEMA della lezione: Concetto di numeri razionali. Prime operazioni fra questi (5ª ginnasiale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30

[8] Attualmente Lillianes è un comune della Valle d'Aosta.

DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1914, N° di matricola: 32.89
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Segre Amalia, nata a Torino, p. 54
TEMA della lezione: Concetto di numero negativo. Prime operazioni fra i numeri col segno (1ª cl. liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/07/1914, N° di matricola: 32.100
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Pagliano Luigi Pietro, nato a Penango,[9] prov. di Alessandria, p. 55
TEMA della lezione: Omotetia nel piano
ESITO: approvato
CON PUNTI: 21/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 18/07/1914, N° di matricola: 30.113
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Bruzzone Marianna, nata a Mondovì Piazza, prov. di Cuneo, p. 57
TEMA della lezione per la 3ª classe tecnica: Avendo già svolti i p.ⁱ 1 e 2 del progr. di Geometria e di quello di calc. letter. Faccia una lez.ⁿᵉ di esercizi o problemi in applicaz.
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.94
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cordero di Montezemolo Elena, nata a Mondovì, prov. di Cuneo, p. 57
TEMA della lezione per la 2ª cl. liceale: Alc. problemi geom. od algebrici, che conducono ad equazioni riducibili ai primi due gradi: loro riduzione
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.10
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Garrone Laura, nata a Alessandria, p. 58
TEMA della lezione per la 3 cls. Normale: Rette e piani e loro rapporti di posizione nello spazio
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.60
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

[9] Il comune di Penango attualmente è nella provincia di Asti.

Bonferroni Carlo Emilio, nato a Bergamo, p. 58
TEMA della lezione per la 3ª cl. del liceo Moderno: Cenno sull'integrale definito ed ovvie applicazioni.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.89
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Del Vecchio Ettore, nato a Ancona, p. 59
TEMA della lezione per la 3ª Cl. del liceo Moderno: Concetto di limite. Sue applicazioni geometriche, tangente ad una curva e lunghezza di un arco.
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 10/11/1914, N° di matricola: 32.90
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Serra Caterina, nata a Torino, p. 59
TEMA: Rapporti e proporzioni. Lezione per la IIª Normale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 21/11/1914, N° di matricola: 32.18
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Segre Vittorina, nata a Torino, p. 60
TEMA per la 3ª Cl. Normale. Rette e piani paralleli
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 21/11/1914, N° di matricola: 32.64
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

De Giorgis Giorgina, nata a Acqui, prov. di Alessandria, p. 60
TEMA della lezione per la 5ª Cl. ginnasiale «Poligoni regolari»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 22/12/1914, N° di matricola: 32.11
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Durando Diva, nata a Viù, prov. di Torino, p. 61
TEMA della lezione per la 5ª Cl. ginnasiale «Alcuni problemi relativi alla costruzione di cerchi tangenti a date rette o cerchi»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 22/12/1914, N° di matricola: 32.91
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Bachi Elsa, nata a Brescia, p. 61
TEMA della lezione per la 2ª Cl. liceale: Volume della Sfera
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 23/06/1915, N° di matricola: 33.9
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Quaglia Giuseppe, nato a Vigevano, prov. di Pavia, p. 62
TEMA per la 2ª Cl. d'Istituto Tecnico: Numeri irrazionali
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 23/06/1915, N° di matricola: 33.66
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Cassissa Elena, nata a Pasturana, prov. di Alessandria, p. 65
TEMA della lezione: Discussione di problemi di 2° grado (per la 2ª Classe di Istituto Tecnico)
ESITO: respinta
CON PUNTI: 20/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 08/12/1915, N° di matricola: 32.87
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona, Ponzio[10].

Muggia Natalia, nata a Cirié, prov. di Torino, p. 67
TEMA della lezione: «I poligoni regolari»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/03/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona, Ponzio.

Boffa - Tarlatta Ortensia, nata a Cuneo, p. 67
TEMA della lezione: «Proprietà della sfera»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 32/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/04/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Parona, Segre, Ponzio.

De Stefanis Maria, nata a Parma, p. 70
TEMA della lezione: Equivalenza di tetraedri fra loro e con prismi (per la 2ª classe di Liceo Moderno)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916

[10] Giacomo Ponzio (1870-1945), chimico, fu professore di Chimica generale ed inorganica dell'Università di Torino.

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Guglielmi Amalia, nata a Martina Franca, prov. di Lecce, p. 70
TEMA: Problemi di 1° grado (per la 1ª classe di Istituto Tecnico)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Oxilia Francesca, nata a Piacenza, p. 71
TEMA: Problemi numerici relativi alle misure delle superficie e volumi del cilindro del cono rotondo e della sfera (lez.ne per la 3ª classe tecnica)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Perotti Severina, nata a Torino, p. 71
TEMA: Principi di analisi indeterminata di 1° grado (lez.ne per la 3ª classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Casetta Gemma, nata a Torino, p. 72
TEMA: Rapporto dei perimetri e delle aree di poligoni simili (Lez.ne per la 1ª Cl. liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Paglieri Rosa, nata a Recanati, prov. di Macerata, p. 72
TEMA: Teoria delle disuguaglianze di 1° e di 2° grado (Lez per la 3ª classe di Ist.º Tecnico-sez. fisico - matem.)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Scarzello Maria Teresa, nata a Fossano, prov. di Cuneo, p. 73.
TEMA: Logaritmi (Lez.ne 3ª Classe Liceo Moderno)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916

PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Sertorio Emilia, nata a Colonia Veneta, prov. di Verona, p. 73.
TEMA: Triedri, loro proprietà, casi di uguaglianza (lez.$^{\text{ne}}$ per la 2$^{\text{a}}$ Classe d'Ist.$^{\text{o}}$ Tecnico)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1916
PRESIDENTE: Naccari. COMMISSARI: Segre, Parona.

Castellaro Cristina, nata a Pinerolo, p. 74.
TEMA della lezione: «Frazioni continue»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 04/11/1916, N° di matricola: 33.79
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Camerano, Ponzio.

Capra Tullia, nata a Asti, p. 75.
TEMA della lezione: «Proprietà dei coni e cilindri rotanti» (per la 1$^{\text{a}}$ Classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 18/11/1916, N° di matricola: 33.29
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Meroni Maria, nata a Como, p. 75.
TEMA della lezione: «Moltiplicazione e divisione dei polinomi. Casi particolari notevoli» (per la 3$^{\text{a}}$ classe della Scuola Tecnica)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 18/11/1916, N° di matricola: 33.78
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Boverio Ernesto, nato a Casale Monferrato, p. 79.
TEMA della lezione: «Derivata di una funzione; interpretazioni geometriche e meccaniche»
ESITO: approvato
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1917, N° di matricola: 35.173
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Puccianti,[11] Parona, Ponzio.

[11] Lugi Puccianti (1875-1952), fisico, vinto il concorso a cattedra, nel 1915 fu chiamato dall'Università di Genova come professore di Fisica sperimentale, ma l'anno successivo passò all'Università di Torino per tornare nella città natale Pisa nel 1917. Diede contributi significativi soprattutto nel campo della spettroscopia, ma si distinse per alcune ricerche nel campo dell'ottica e dell'elettromagnetismo. Cfr. la biografia a cura di Paolo Rossi in http://osiris.df.unipi.it/∼ rossi/Direzione%20Puccianti.pdf.

Mancinelli Maria, nata a Urbino, p. 80.
TEMA della lezione: «Teorema di Eulero sui poliedri convessi- Applicazioni»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1917, N° di matricola: 34.10
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Puccianti, Parona, Ponzio.

Pelizzari Elena, nata a Calcinate[12], p. 81.
TEMA della lezione: «Rappresentazione grafica della funzione $y = ax^2$. Applicazioni meccaniche»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/00
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1917, N° di matricola: 34.13
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Puccianti, Ponzio.

Savio Maria Consolata, nata a Chieri, p. 81.
TEMA della lezione: «Esercizi sulla discussione dei problemi di 2° grado»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 21/07/1917, N° di matricola: 33.82
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Migliorero Caterina, nata a Lemie, prov. di Torino, p. 83.
TEMA della lezione: «1ª lezione sulle frazioni ordinarie» (per la 5ª classe ginnasiale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 13/11/1917, N° di matricola: 33.80
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Viglezio Elisa, nata a Lucca, p. 86.
TEMA della lezione: «Esercizi relativi alle misure delle superficie e dei volumi del cilindro, del cono e della sfera»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1918, N° di matricola: 34.19
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino,[13] Parona, Ponzio.

Rossi Maria Anita, nata a Bobbio,[14] prov. di Pavia, p. 89.
TEMA della lezione: I numeri negativi
ESITO: approvata

[12] Comune in provincia di Bergamo.
[13] Alfredo Pochettino (1876-1953), fisico, fu professore di Fisica sperimentale dell'Università di Torino e rettore dal 1924 al 1928.
[14] Oggi risulta in provincia di Piacenza.

CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 20/07/1918
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Campetti[15].

Bertacchi Maria, nata a Saluzzo, p. 90.
TEMA della lezione: «numeri decimali periodici. Frazioni ordinarie che li generano» (per la 5ª ginnasiale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 14/11/1918
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Segre Annetta, nata a Vercelli, p. 90.
TEMA della lezione: «Divisibilità dei numeri interi» (per la 4ª classe ginnasiale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 26/02/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Poli Luigi, nato a Torino, p. 91.
TEMA della lezione: «Similitudine delle figure piane» (per la 1ª classe liceale)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 26/02/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Gianasso Severino, nato a Baldissero d'Alba, prov. di Cuneo, p. 92
TEMA della lezione: «Disuguaglianze di 2° grado» (per la 3ª classe della sezione fisico - matematica dell'Istituto Tecnico)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 37/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 04/04/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Gandiglio Maria, nata a Carignano, p. 92.
TEMA della lezione: «Divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati (problema di ripartizione). Applicazioni»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/04/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Troucana Elgisa, nata a Torino, p. 93.

[15] Adolfo Campetti (1866-1947), fisico, fu professore di Fisica sperimentale dell'Università di Torino.

TEMA della lezione: «Formule di bisezione per le funzioni goniometriche» (per la 2^a classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/04/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Gambera Giovenale, nato a Dogliani, prov. di Cuneo, p. 93.
TEMA della lezione: «teorema di Pitagora. Applicazioni»
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/05/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Bruera Stefano, nato a Torino, p. 94.
TEMA della lezione: «Equivalenza di prismi» per la 2^a classe di Istituto Tecnico
ESITO: approvato
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 04/04/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Gonella Giovanni Battista, nato a Bologna, p. 94.
TEMA della lezione: «Cenno sull'integrale definito ed ovvie applicazioni»
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 28/05/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Barla Eugenio, nato a Cesio, prov. di Porto Maurizio,[16] p. 95
TEMA della lezione: «Equazioni e sistemi di equazioni riducibili al 1° e 2° grado» (per la 2^a classe liceale)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 24/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 21/06/1919
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Ghigi Luisa, nata a Fossano, p. 96.
TEMA della lezione: «Il metodo della riduzione all'unità nella regola del tre» (per la 3^a classe di Scuola Normale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1919, N° di matricola: 34/9

[16] Il comune di Cesio ora risulta in provincia di Imperia.

PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Ponzio.

Pisa Angiolina, nata a Guastalla, p. 97.
TEMA della lezione: «Relazione fra gli angoli e i lati di un triangolo rettilineo» (per la 3ª classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1919, N° di matricola: 34/71
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Ponzio.

Rucci Francesco, nato a Panni, prov. di Foggia, p. 97.
TEMA della lezione: «1ª lezione di trigonometria» (per la 1ª classe liceale)
ESITO: approvato
CON PUNTI: 18/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 15/07/1919, N° di matricola: 34/113
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Ponzio.

Travaglini Irmo, nato a Licciana[17], p. 104
TEMA della lezione: «Esempi di discussione di problemi di 2° grado» per la 2ª classe di Istituto Tecnico
ESITO: approvato
CON PUNTI: 25/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/10/1919, N° di matricola: 34-107
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Braggio Caterina, nata a Acqui, prov. di Alessandria, p. 105
TEMA della lezione: «Poligoni regolari» (per la 5ª classe ginnasiale o 1ª liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 34.59
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Locchi Pia, nata a Torino, p. 106.
TEMA della lezione: «Pentagono e decagono regolare» (incluso sezione aurea di un segmento) per la 1ª liceale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 34/67
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Cassina Ugo, figlio di Opimio, nato a Polesine, prov. di Parma, p. 106
TEMA della lezione: «Analisi indeterminata di 1° grado» Pel 2° biennio di Istituto Tecnico

[17] Licciana Nardi si trova in provincia di Massa Carrara.

ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 35.178
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Maccone Adriano, nato a Barbania, prov. di Torino, p. 107
TEMA della lezione: «Concetto di limite. Sue applicazioni geometriche» Per la 3ª classe di liceo moderno
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/12/1919, N° di matricola: 34.135
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Daniele Maria, nata a Dronero, prov. di Cuneo, p. 107
TEMA della lezione: «1ª lezione sulle frazioni continue» pel 2° biennio d'Istituto Tecnico
ESITO: approvata
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 27/12/1919, N° di matricola: 34.129
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Ambrosetti Maria Teresa, nata a Castegnato, prov. di Brescia, p. 109
TEMA della lezione: «Prime proprietà della sfera»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 12/05/1920, N° di matricola: 34.125
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino.

Mongini Jeannette, nata a Caselle Torinese, prov. di Torino, p. 110
TEMA della lezione: «Progressioni geometriche. Applicazione al calcolo dell'interesse composto»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 12/05/1920, N° di matricola: 34.138
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino.

Rigrillo Giuseppe, nato a Rionero in Vulture, prov. di Potenza, p. 110
TEMA della lezione: «Posizione reciproca di due cerchi in un piano»
ESITO: approvato
CON PUNTI: 27/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 12/05/1920, N° di matricola: 33.61
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino.

Bandiera Attilio, nato a Livorno, p. 112
TEMA della lezione: «Volume della sfera»

ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 09/07/1920, N° di matricola: 38.30
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Bobba Maria, nata a Cigliano, prov. di Novara, p. 113
TEMA della lezione: «Prisma e cilindro» per la 3ª normale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 35.223
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Stipa Linda, nata a Norcia, prov. di Perugia, p. 113
TEMA della lezione: «Numeri complessi» per la 3ª classe complementare
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 34.75
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Tizzani Emilia, nata a S. Salvatore Monferrato, prov. di Alessandria, p. 115
TEMA della lezione: «Circolo» per la 1ª classe normale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 38/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 35.247
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Vernero Carlo, nato a Solero, prov. di Alessandria, p.115
TEMA della lezione: «Derivata di una funzione di 2° grado e di a/x» per la 3ª classe di liceo moderno
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 16/07/1920, N° di matricola: 34.18
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Grassi Enrico, nato a Firenze, p. 117
TEMA della lezione: «Frazioni ordinarie» per la 1ª tecnica
ESITO: approvato
CON PUNTI: 32/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920, N° di matricola: 34.66
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Hidalgo Laura, nata a Alessandria, p. 117
TEMA della lezione: «Logaritmi» per la classe liceale
ESITO: approvata
CON PUNTI: 40/40

DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920, N° di matricola: 35.232
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Luzzi Guido, nato a Arezzo, p. 119
TEMA della lezione: «Esempi di equazioni riducibili al 1° o al 2° grado» pel liceo od Istituto Tecnico
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920, N° di matricola: 33.77
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio, Pochettino.

Mesturini Camilla, nata a Montiglio, prov. di Alessandria,[18] p. 120
TEMA della lezione: «Proprietà dei parallelogrammi» per la 4ª o 5ª ginnasiale
ESITO: approvato
CON PUNTI: 40/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 17/07/1920
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Pochettino, Parona, Ponzio.

Raynaud Dario, nato a Mondovì Piazza, p. 120
TEMA della lezione: «Perimetri ed aree di poligoni simili» per Liceo
ESITO: approvato
CON PUNTI: 24/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 27/11/1920, N° di matricola: 32.141
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Taverna Teresa, nata a Alba, prov. di Cuneo, p. 122
TEMA della lezione: «Numeri primi»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 08/12/1920
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Ponzio, Parona, Pochettino.

Villavecchia Angela, nata a Alessandria, p. 123
TEMA della lezione: «Rette e piani perpendicolari»
ESITO: approvata
CON PUNTI: 36/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 08/12/1920
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Ponzio, Parona, Pochettino.

Carmarino Maria Teresa, nata a Torino, p. 126
TEMA della lezione: «Teorema di Pitagora e sue applicazioni» per Scuole Medie Superiori
ESITO: approvata

[18] Il comune di Montiglio ora è denominato Montiglio Monferrato ed è nella provincia di Asti.

CON PUNTI: 28/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 23/03/1921, N° di matricola: 34.128
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Poisetti Eugenio, nato a Racconigi,[19] p. 127
TEMA della lezione: «Esercizi su problemi di 2° grado» per l' Istituto Tecnico
ESITO: approvato
CON PUNTI: 30/30
DATA DELL'ESAME: Torino, 23/03/1921, N° di matricola: 34.14
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Ponzio.

Musso Clotilde, nata a Asti,[20] prov. di Alessandria, p.127
TEMA della lezione: «Problemi su grandezze direttamente od inversamente proporzionali, col metodo della riduzione all'unità» (3ª classe normale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 32/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1921, N° di matricola: 34.11
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Palomba Margherita, nata a Cagliari, p. 128
TEMA della lezione: «Proprietà della sfera» per la 2ª classe d'Istituto Tecnico
ESITO: approvata
CON PUNTI: 32/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1921, N° di matricola: 35.239
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio

Amadio Maria, nata a Vittorio,[21] prov. di Treviso, p. 128
TEMA della lezione: «Sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite» (Per la 1ª classe liceale)
ESITO: approvata
CON PUNTI: 34/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 19/07/1921, N° di matricola: 36.70
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

Pellerino Palmira, nata a Saluzzo, prov. di Cuneo, p. 131
TEMA della lezione: «Poligoni equivalenti» per liceo
ESITO: approvata
CON PUNTI: 32/40
DATA DELL'ESAME: Torino, 18/07/1922
PRESIDENTE: Segre. COMMISSARI: Parona, Pochettino, Ponzio.

[19] Racconigi è un comune di Torino.
[20] Attualmente Asti è capoluogo di provincia.
[21] Il comune ora è denominato Vittorio Veneto.

Appendice 2

I registri relativi ai corsi di Geometria superiore del 1890-1891 e di Matematica alla Scuola di Magistero

a cura di Livia Giacardi

1. Registro delle Lezioni di Geometria superiore dettate dal Sig. Prof. Corrado Segre nell'anno scolastico 1890-91, Uto-ACS, *Registri delle lezioni.*[22]

5 Nov.ᵉ 1890
Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti.
Cap. 1° Preliminari.
Considerazioni generali sulle relazioni fra Geometria ed Analisi. Due modi di concepire la geometria. Coordinate elementi complessi. Coordinate proiettive
7 Nov.ᵉ 1890
Elementi complessi. Coordinate proiettive. Cenno sulle curve piane algebriche. Polarità. Punti multipli. Relazione a cui questi soddisfano se la curva è irriduttibile.
10 Nov.ᵉ 1890
Genere di una curva piana. Altri caratteri. Formule di Plücker.
28 Nov.ᵉ 1890
Cenno sulle superficie algebriche sui complessi algebrici di rette, sui complessi algebrici di elementi qualunque.
1 Dic.ᵉ 1890
Tutti gli enti enumerati si determinano con coordinate. Definizione di varietà ∞^k (due significati); casi particolari. Varietà algebriche.
3 Dic.ᵉ 1890
Varietà razionali. Varietà o sistemi lineari di forme: determinazione di un sistema lineare ∞^r mediante $r+1$ forme linearmente indipendenti.
5 Dic.ᵉ 1890
Continuaz. Sistemi lineari contenuti nel sistema primitivo Esempi.
10 Dic.ᵉ 1890
Sistema lineare comune a due sistemi. Minimo sistema lineare in cui questi son

[22] Per quanto riguarda i nomi di autori e gli scritti citati nel registro, si rimanda alle note relative contenute nell'edizione del quaderno corrispondente.

contenuti Casi particolari; generazione successiva dei sistemi lineari di dimensione crescente.
12 Dic.[e] 1890
Considerazioni speciali relative alle involuzioni e sist.[i] lineari di curve e superf. d' ord. n. Proprietà particolari relative ai punti base e fondamentali di tali sistemi. Fasci e reti di curve e sup.
15 Dic.[e] 1890
Sist.[i] lineari con punti base straordinari. Sist.[i] lineari con una parte fissa. Sezione di un sist.[i] lin. con una retta ed un piano.
Cap.2° Iperspazi.
Come dalle cose esposte finora si giunga naturalmente agl'isperspazi.
17 Dic.[e] 1890
Le varie nozioni, analitica, geometrica in senso largo, e geometrica in senso ristretto (fisico), d'iperspazio. Definizioni delle varietà subordinate. Vantaggi dell'uso degl'iperspazi.
19 Dic.[e] 1890
Obbiezioni mosse contro tale uso, e loro insussistenza.
Cenno storico e bibliografico sulla geometria (proiettiva) degl'iperspazi. Avvertenze ai giovani che vorranno fare ricerche intorno a questi.
2 Genn.[o] 1891
Spazi contenuti in un S_r. Loro definizione e prime proprietà. Loro interazioni. Iperpiani di S_r: loro equazioni e coordinate.
5 Genn.[o] 1891
Dualità fra i punti e gl'iperpiani in S_r. Generazioni duali degli spazi di S_r. Alcune proprietà che vi si riferiscono.
7 Genn.[o] 1891
La varietà degli S_k di S_r. Coordinate degli S_k. Forme geom.[e] fondam.[li]. Proiezione e sezione. Elementi fondamentali in S_r. Corrispondenza lineare e proiettiva fra due S_r: corrispondenza fra gli spazi subordinati.
12 Genn.[o] 1891
Continuaz. Uguaglianza dei birapporti omologhi. Le coordinate come birapporti. Trasformaz.[e] di coordinate. Di un modo sintetico per giungere alla geometria degl'iperspazi.
14 Genn.[o] 1891
Altre proprietà delle proiettività. Proiettività degeneri. Collineazioni in S_r. Punti uniti. Collineazioni assiali. Involuzioni.
16 Genn.[o] 1891
Proiettività in S_r. Polarità. Sistemi nulli. Quadriche e loro generazioni.
19 Genn.[o] 1891
Varietà M_{r-1} d'ord. n di S_r. Coefficienti. Punti semplici e multipli e coni tangenti. Polarità.- Interazioni di varietà. Sistemi lineari di varietà: proprietà diverse.
21 Genn.[o] 1891
Varietà algebriche di dimensione $k < r+1$. Loro proiezioni. Loro ordini (teor. relativo) Rappresentaz. di una tal varietà mediante trasformazione razionale di una M_k di S_{k+1}.

23 Genn.º 1891
Consideraz. su tale rappresentazione. Numero delle intersezioni di due varietà M_k, M_{r-k} ecc. ecc. Varietà luoghi di ∞ S_i; coni di varie specie e dimensioni. Caratteri di una curva di S_r.

26 Genn.º 1891
Cenno sulle formole di Cayley e Veronese. – Caratteri di una superficie e di una varietà: piani e spazi tangenti ecc. Varietà appartenenti ad S_r e normali. Teorema di Clifford sul massimo spazio a cui appartiene uno C^n e sua estensione a varietà qualunque.

28 Genn.º 1891
La C^n appartenente ad S_n: sue generazioni proiettive. – Generazioni proiettive delle rigate d'ord. $n-1$ di S_n.

30 Genn.º 1891
Estensione alle ∞^1 di S^i d'ordine $n-i$ appartenenti ad S_n. Alcune applicazioni della geometria degl'iperspazi. 1° alla geometria della retta; teor. di Clifford applicato alle rigate.

2 Febbr.º 1891
2° ai sistemi di forme di qualunque indice contenuti in un sist. lineare. Altro modo di applicare gl'iperspazi nello studio di un sist. lineare ∞^r di forme di un S_k $(r \geq k)$. Questo sist. rappresenta una M_k di S_r e viceversa; ecc. ecc.: caso di $k = r$, rappresentazione di due S_k l'uno sull'altro.

4 Febbr.º 1891
Considerazioni varie. – Se un sist. lineare è contenuto in un altro. le M_k che li rappresentano son proiez. l'una dell'altra. Applicaz. alle curve razionali ed alla C^n di S_n. Applicaz. alle superf. rappresentabili.

13 Febbr.º 1891
Cap 3°. Oggetto della geometria su una ∞^1 algebrica.
I punti di vista nelle varie geometrie. La geometria su una ∞^k algebrica. Corrispondenze algebriche. Definizioni.

16 Febbr.º 1891
Proprietà e rappresentazioni delle corrispondenze algebriche. Corrispondenze univoche in particolare. Corrispondenze fra varietà razionali. La geometria su una varietà razionale.

18 Febbr.º 1891
Serie lineari di gruppi di punti su una curva. Come entrino nella geometria sulla curva. Definizioni e legami col sistema lineare di varietà che le definiscono. Prime proprietà. Esempio: serie date da curve aggiunte sulla curva piana.

20 Febbr.º 1891
Continuaz. Prime proprietà delle serie così definite.
Come una serie g_n^r definisce una C^n di S_r che la rappresenta. Legame colla trasformazione univoca di una curva. Studio di questa quistione.

23 Febbr.º 1891
Esempio: trasformaz.ᵉ univoca di una curva piana. Ragione dell'uso delle curve

aggiunte per definire le serie lineari sulle curve piane. – Rappresentazione di una g_n^r composta mediante una ∞^1 di gruppi di μ punti con una $C^{\frac{n}{\mu}}$ di S_r.

25 Febbr.º 1891

Continuaz. – Serie lineari contenute in una serie data. Le curve corrispondenti son proiezioni della curva rappresentante di queste.

27 Febbr.º 1891

Continuaz. Serie complete e serie parziali. Importanza delle serie lin.[i]. Problemi relativi ad esse e loro equivalenza coi problemi relativi alle curve dei vari spazi. Applicazioni. Cenno storico e bibliografico sulla geometria sull'ente algebrico e particolarmente delle serie lineari. Altri problemi.

2 Marzo 1891

Cap.4°. Geom. sugli enti razionali

Gli enti razionali. Le serie lineari su essi sono le involuzioni. Proprietà.

4 Marzo 1891

Principio di corrispondenza sull'ente razionale. Soluzioni multiple. – Applicazioni del principio allo studio delle corrispondenze. Curva generata da due fasci di rette in corrisp. $(\alpha.\alpha')$...

6 Marzo 1891

Altre applicazioni del principio di corrispondenza a curve e rigate. Elementi doppi di una I_n^1. Elementi $(r+1)$-pli di una I_n^r. Applicazioni.

9 Marzo 1891

Formula di Jonquières sul numero dei gruppi di un'involuz. aventi multiplicità qualunque date. Applicazioni.

11 Marzo 1891

Seguito. Applicazioni della C^n razionale normale alla geom. sull'ente razionale. – Teorema di Clifford sulla polarità di S_n data dalla C^n.

13 Marzo 1891

Applicazioni. Gruppi coniugati od armonici di n elementi. Involuzioni armoniche e loro relazioni. Polarità rispetto ad un gruppo di n elementi.

16 Marzo 1891

Seguito. Gruppi apolari rispetto ad un dato gruppo di n elem.[i]; rappresentaz.[i] analitiche e geometriche. Le involuzioni di ordine $n+1$ sulla C^n. Piramidi iscritte nelle curve raz.[li] normali.

18 Marzo 1891

Altri problemi sulle involuzioni. Cap.5°. *Le serie lineari* ∞^1. *Genere degli enti algebrici.* Le serie lineari ∞^1 in un ente algebrico qualunque. Funzioni razionali dell'ente. Costanza della differenza fra in numero degli elem.[i] di diramazione e il doppio dell'ordine di una serie lin. ∞^1. Genere. Sua invariabilità.

20 Marzo 1891

Elem.[i] di diramazione multipli. Cenno sui moduli. Genere di una curva piana con singolarità qualunque. Applicaz.[i] della curva piana alle g_n^r. Numero degli elementi $(r+1)$pli di una g_n^r sull'ente di genere p.

3 Aprile 1891

Caso di una serie composta. Rappres.[e] dell'ente algebrico con una curva piana con sole singolarità ordinarie (o soli nodi). Tutte le serie lineari si hanno allora mediante curve agg.[te]. Per una g_n^r completa è $n - r \leq p$.

6 Aprile 1891

Quando $n > p$ si può sempre assumere ad arbitrio un gruppo e si ha $r > 0$. – Serie speciali e non speciali. Esempi di serie speciali colle agg.[te] di ord. $m - 3$. Applicazioni alle curve, speciali e non speciali, normali e non. – Rappresentazioni particolari degli enti di genere 1, 2, 3.

8 Aprile 1891

Rappres. di un ente con una g_n^1 ed una $g_m^{1'}$. Cioè con due funz.[i] razionali s, z di gradi n, m. Procedimento analitico. Procedimento geometrico: curva piana di ordine $m + n$. Applicazioni.

10 Aprile 1891

Abbassamento nell'ordine di quella curva. Applicazione alle g_2^1. Enti con due g_2^1: $p = 0$ o $p = 1$; distinzione. *Enti ellittici ed iperellittici.* Si rappresentano con curve piane di gen. p e ord. $p + 2$ con punto p-plo; od analiticamente con $W^2 = R(z)$ polinomio di grado $2p + 2$ o $2p + 1$.

13 Aprile 1891

Moduli degli enti iperellitici di genere p. Caso degli enti ellittici: le ∞ g_2^1 danno lo stesso birapporto; applicazioni alle cubiche piane, corrispondenze (2, 2) fra enti razionali ecc. – *Serie lineari speciali* sugli enti iperellittici. Sono le involuzioni entro la g_2^1: son fra loro residue rispetto all'unica g_{2p-2}^{p-1}, ecc.

15 Aprile 1891

Cenno sulla via da tenersi in seguito.

CAP 6°. Formola di Zeuthen. Varietà ∞^1 di spazi e loro applicaz.[i].

Elem.[i] diram. in una corrispondenza $(1, \mu)$ fra due enti. Applicazioni. Generalizzazione. – Formola di Zeuthen.

17 Aprile 1891

Elem.[i] diram.[e] di una ∞^1 di gen. π di gruppi di m punti di una γ_p; varietà ∞^1 di gen. π di spazi. Caso della rigata: formola che le lega ad una sua curva qualunque.

20 Aprile 1891

Formola di Schubert pel numero dei gruppi di un'involuz. d'ord. m (e genere π) su una γ^n di S_r con 2 punti coincidenti.

22 Aprile 1891

Formola fondamentale che lega i caratteri di quell'involuzione a quelli della curva. Applicazioni. Numero dei gruppi di $r + 1$ p.[i] comuni ad una g_n^r e ad un'involuzione qualunque. Varietà M_{k+1} di ∞^1 S_k: varietà normali, speciali e non.

24 Aprile 1891

I gruppi di una g_Q^q su una curva speciale stanno in S_{Q-q-1}. Applicazioni. Per una g_n^r speciale è $n \geq 2r$, $r \leq p - 1$, $n \leq 2p - 2$. Conseguenze. La g_{2p-2}^{p-1} segata sulla γ^m piana dalle φ^{m-3} aggiunte.

27 Aprile 1891

Curva e serie *canonica*. Per suo mezzo la geom. *sull*'ente si riduce alla geom. *projettiva* (della curva armonica). Teorema di Riemann e Roch. Sue varie forme, analitiche e geometriche.

29 Aprile 1891
Considerazioni sull'importanza e la fecondità del teorema di Riemann e Roch. Serie g_{2r}^{r} speciali. Applicazioni alle rigate speciali. Le rigate di genere $p > 0$ e d'ord. n di S_{n-p+1} sono coni. In generale quelle di $S_{n-p-i+1}$ hanno una curva direttrice speciale.
1° Maggio 1891
Seguito: caratteri di quella direttrice. Applicazione alle rigate di $S_{n-p}, S_{n-p-1}, \ldots$
CAP. 7°. Serie complete. Serie residue. Curve agg.$^{\mathbf{te}}$. Applicaz.$^{\mathbf{i}}$.
Le due serie d'ord. n fanno un gruppo comune, esse son contenute in una stessa serie.
4 Maggio 1891
Continuaz. Conseguenze. Applicaz. alle serie complete. Una serie completa è individuata da un suo gruppo; ecc. I resti di uno o più elementi rispetto ad una serie completa formano una serie completa. Applicazione alle curve aggiunte di una γ^{m} piana.
6 Maggio 1891
Le serie complete ottenute mediante le curve aggiunte. Il Restsatz. – Le curve agg.$^{\text{te}}$ che nei p$^{\text{i}}$ s-pli di γ hanno p$^{\text{i}}$ s-pli hanno fuori di questi una serie completa. Applicaz. ai sist.$^{\text{i}}$ lineari di curve piane ed alle superf. razionali normali. Casi dei generi 0 e 1.
8 Maggio 1891
Serie residue rispetto ad una data serie completa. Applicaz. a precisare meglio il teorema Riemann-Roch. Teorema di reciprocità di Brill e Nöther per due serie residue risp. alla serie canonica. – Applicaz. del teor .R.-R. alle γ^{n} piane proiez.$^{\text{i}}$ di C^{n} di S_{r}.
11 Maggio 1891
Cap. 8°. Il metodo algebrico di Brill e Nöther. Il teorema $Af + B\varphi$ di Nöther. Teorema del resto. Applicazione alle serie complete, residue, ecc. Teorema di riduzione di Nöther.
13 Maggio 1891
Sue varie applicazioni alle serie speciali. La g_{2p-2}^{p-1}; ecc. Teorema di Riemann e Roch. Inverso del teor. di riduzione: condizioni perché una serie completa abbia un punto fisso. Applicazione alle C^{n} di S_{r} . Applicazione funzionale.
15 Maggio 1891
Applicazione al Lückensatz di Weierstrass ed alla generalizzazione fattane da Nöther. Ecc.
Cap. 9°. Rappresentazioni reali dell'ente alg.$^{\mathbf{o}}$. Il metodo funzionale di Riemann.
L'ente algebrico come ∞^{2}: sua natura. Analogie con una superficie (reale) chiusa. La questione della rappresentabilità. Caso dell'ente razionale: piano e sfera. Caso generale $F(s, z) = 0$. Piano e sfera di Riemann.
18 Maggio 1891
Superficie di Klein per rappresentare gli enti algebrici: esempi. Altre superficie che servono per tali rappresent.$^{\text{i}}$. Superficie chiuse ed aperte, bilatere e unilatere.

L'Analysis situs. I tagli di una superficie. Numero fondam.$^{\text{le}}$ e genere di una superficie chiusa. Applicaz.$^{\text{i}}$.

20 Maggio 1891

Seguito. Importanza ed applic.$^{\text{i}}$ del genere. Le *funzioni complesse* su una superficie. Legame fra loro e con una forma diff.$^{\text{le}}$ quadratica definita $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ Parametri differ.$^{\text{li}}$ relativi a questi. Equazioni differ.li a cui soddisfano le funzioni complesse su una sup. Ecc.

22 Maggio 1891

Interpretazione geometrica dell'equaz. $ds^2 = 0$ e delle cose precedenti. Come e quando le funz.$^{\text{i}}$ complesse di una sup. si mutano in funz.$^{\text{i}}$ complesse su un'altra in corrispondenza con quella. Rappresentazioni *conformi* delle superficie fra loro. Applicaz.$^{\text{i}}$. Legame coi *flussi stazionari* della fisica matem. Come ad ogni tal flusso corrisponda una funz. complessa sulla sup.

25 Maggio 1891

Le funz.$^{\text{i}}$ univoche con soli poli su una superficie. Son legate algebricam. Danno le funz.$^{\text{i}}$ razionali dell'ente algebrico. – I loro integrali (Abeliani). – Proprietà caratteristiche di tutte queste funz.$^{\text{i}}$. Teorema di esistenza di Riemann: cenno sulla questione e sulla sua storia. Il principio di Dirichlet. Il metodo fisico di Klein.

27 Maggio 1891

Applicazioni del teorema di esistenza di Riemann. Integrali di 1$^{\text{a}}$ e 2$^{\text{a}}$ specie Loro espressioni mediante quelle normali. Espressione di Riemann di una funzione dotata di soli poli (funz raz.$^{\text{le}}$ dell'ente algebrico) mediante somma di integrali di 2$^{\text{a}}$ sp. Applicaz. alla dimostraz. del teor di Riemann-Roch. Teorema di Abel per gli integr.$^{\text{i}}$ di 1$^{\text{a}}$ specie.

29 Maggio 1891

Sua applicazione ad una dimostraz. del teor. Riemann-Roch. Come questo teorema e precisam. i gruppi speciali di punti compaiono pure nel problema d'inversione di Jacobi e quindi nella questione dell'annullarsi identico delle funzioni θ. Teor. geometrico, relativo alla determinaz. di una classe di enti mediante i val.$^{\text{i}}$ di diramaz. di una g_n^1, in cui si traduce il teor. d'esistenza ecc.

1° Giugno 1891

Cenno sulla rappresentaz.$^{\text{e}}$ delle funz.$^{\text{i}}$ raz.$^{\text{li}}$ dell'ente come funz.$^{\text{i}}$ *uniformi* di un parametro. Funzioni di Poincaré, Klein ecc.

CAP 10°. I moduli. Le serie lineari sugli enti generali.

La questione delle corrispondenze univoche fra due enti o su un sol ente, e la questione dei moduli. Casi $p = 0, 1$. Come per $p > 1$ si fissi una particolare g_m^1.

3 Giugno 1891

Applicazioni. In un ente $p > 1$ non vi posson essere infinite corrispondenze univoche. Corollari. Numero dei moduli di un ente qual. Dimostraz. di Riemann. Applicazioni alle rappresentazioni conformi di superficie di gen. p.

5 Giugno 1891

La questione delle g_n^2 su un ente di genere p. Se i moduli son generali, sarà $(r + 1)(n - r) - rp \geq 0$ l'ord. d'infinità di tali serie. Le γ_p^n di S_r; in partic. le curve

sghembe di S_3. – Applicaz alle serie minime ∞^1 e ∞^2. Curve piane dei minimi ordini rappresentanti un ente generale.
6 Giugno 1891
Metodo del Castelnuovo per risolvere la questione delle g_n^r su un ente dato. Come in casi particolari si possa risolvere completamente tale questione. Esempio. Esercizi.

2. Registro delle lezioni della Scuola di Magistero dettate dal sig. Prof. Cav.ʳ Corrado Segre nell'anno scolastico 1907-908. ASUT, *Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali, Scuola di Magistero, Registri delle lezioni e relazioni finali, 1907-08.*[23]

30 Novᵉ 1907
La Matematica e l'esperienza
7 Dicᵉ
La Matematica in relazione colle applicazioni. La Matematica logico-deduttiva. Scopi dell'insegnamento elementare della Matematica. L'intuizione e i postulati.
14 Dicᵉ 1907
Seguito. Non occorre l'indipendenza dei postulati. Il rigore. Come si concilia colle altre esigenze didattiche. Osservazioni varie sul metodo.
21 Dic. 1907
Norme per gli esercizi di matematica. Sulla discussione delle figure (col sig. Artom). Indicazioni bibliografiche varie.
11. I. 1908
I numeri negativi (sig$^{\text{na}}$ Peyroleri) (*L'Univ$^{\text{à}}$ era chiusa nei giorni 25 I e 1 II*)
18. I. 1908
Seguito (Sig$^{\text{na}}$ Cairo)
8. II. 1908
Problemi elementari di massimi e minimi (Artom)
15. II. 1908
Seguito (Artom)
22. II. 1908
Divisibilità dei numeri (Sig$^{\text{na}}$ Baggi)
7. III. 1908
Seguito (Baggi). Numeri primi. Massimo comun divisore (Fracchia)
12. III. 1908
Seguito. Minimo comune multiplo (Fracchia) Sui programmi esteri di riforma dell'insegnamento delle matematiche elementari (D$^{\text{r}}$ Rovetti)
21. III. 1908
Seguito. Analisi di alcuni sviluppi contenuti in un trattato elementare del Tannery (D$^{\text{r}}$ Rovetti)

[23] Per quanto riguarda i nomi di autori e gli scritti citati nel registro, si rimanda alle note relative contenute nell'edizione del quaderno corrispondente. Per notizie concernenti gli studenti citati si rimanda alla *Appendice 1*.

28. III. 1908
Trigonometria piana (Marnetto)
2. IV. 1908
Seguito (Marnetto). Projezioni dei vettori. Formola di $\cos(a + b)$ (Cartasegna)
25. IV. 1908
Altre dimostrazioni delle formole fondamentali trigonometriche (Cartasegna)
2. V. 1908
Analisi indeterminata di 1° grado (Ricaldone)
9. V. 1908
Seguito (Ricaldone). Approssimazioni numeriche (decimali) (Capitelli)
16. V. 1908
Seguito (Capitelli). Cenni sulle *Leçons élémentaires* di Lagrange (S.C.)[24]
23. V. 1908
Cenno sulle cautele da usare nella trattazione delle equazioni irrazionali (S.C.). Sistema di 2 equazioni di 1° grado a 2 incognite (Artom)
30. V. 1908
Seguito (Artom). Considerazioni varie a proposito del libro di M. Simon «*Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.*»

[24]Si tratta della sigla di Segre Corrado.

FONTI ICONOGRAFICHE

1. Corrado Segre studente all'Università di Torino (UTo-ACS)
2. Corrado Segre nel 1899 (UTo-ACS)
3. Corrado Segre negli anni Venti (BMP-Segre)
4. Corrado Segre e la moglie Olga Michelli (UTo-ACS)
5. Lapide in onore di Corrado Segre (Dipartimento di Matematica, via C. Alberto, 10 Torino)
6. Gino Loria (in centro) e Corrado Segre (secondo da destra) con Luisa Pochintesta, Adelina Pochintesta, Sofia Rolandi-Meroni, Rachele Meroni, Pierino Meroni, Teresa Lorenzi-Galante, Guicciardini-Vaj e Carla Marchesi-Taddei. (BMP-Segre)
7. Pagina tratta da [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*] (BMP-Segre)
8. Registro delle lezioni di Corrado Segre di Geometria superiore del 1890-1891 (UTo-ACS)

Indice dei nomi

Fra i maggiori artefici del 'risorgimento geometrico in Italia', Corrado Segre offre uno degli esempi più alti del ruolo di maestro nella storia della matematica. I suoi corsi universitari sono una vera fucina di futuri ricercatori. La migliore testimonianza del suo duplice ruolo di caposcuola e di educatore è rappresentata dai 40 quaderni manoscritti in cui sviluppava con cura, ogni estate, l'argomento del corso che avrebbe tenuto nell'autunno successivo.
Emblematici sono i due quaderni che qui presentiamo, che raccolgono rispettivamente le lezioni del corso di Geometria superiore del 1890-91 e quelle del Corso di matematica che Segre tenne per quasi vent'anni alla Scuola di Magistero dell'Università di Torino. Il primo, dedicato alla geometria sulla curva algebrica, costituisce la base della sua fondamentale memoria del 1894, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, che, come scrive l'allievo Francesco Severi, contiene 'le radici' della geometria algebrica italiana. Nel secondo, Segre, partendo da alcune considerazioni sulla natura della matematica, sugli scopi dell'insegnamento, sull'importanza dell'intuizione e sul rigore, propone un approccio innovativo alla formazione degli insegnanti, legato da un lato al suo modo peculiare di fare ricerca e frutto, dall'altro, di un attento esame delle recenti riforme e delle problematiche didattiche dibattute in Europa.*

Corrado Segre (Saluzzo 1863-Torino 1924), leader della Scuola italiana di geometria, ricoprì presso l'Università di Torino la cattedra di Geometria superiore dal 1888 fino alla morte, e la carica di preside della Facoltà di scienze dal 1909-10 al 1915-16. Sotto la sua guida, fra il 1891 e il 1912, prese avvio a Torino la Scuola italiana di geometria algebrica che annoverava matematici di alto livello fra i quali G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi e G. Fano, e che portò l'Italia ad assumere una posizione di primo piano (*führende Stellung*) sulla scena internazionale. La sua attività scientifica si esplicò in varie direzioni e in ciascuna di esse egli aprì nuove strade: la geometria proiettiva iperspaziale e i suoi fondamenti, la geometria birazionale, la geometria numerativa, la geometria proiettiva differenziale degli iperspazi e la geometria proiettiva nel campo complesso. Il corposo articolo *Mehrdimensionale Räume* (1921) per la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, sugli spazi a più dimensioni, è un modello di chiarezza e di eleganza.

€ 25,00

ISBN 978-88-909997-8-9