Atti del X Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della Matematica
DI.FI.MA. 2021

Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza

Torino, 11-12-13 ottobre 2021 - online

2001-2021
Il convegno del ventennale

A cura di:
Raffaella Bonino
Daniela Marocchi
Marta Rinaudo
Marina Serio

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza
Atti del X Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, DI.FI.MA. 2021
A cura di R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, M. Serio

Responsabile del convegno: Ornella Robutti
Responsabili scientifici: Giulia Bini, Alessio Drivet, Matteo Leone, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Ornella Robutti, Cristina Sabena, Ada Sargenti, Marina Serio, Germana Trinchero

Esperti Tecnici : Tiziana Armano e Filippo Cosma Liardi

Coordinamento rapporti con le scuole : Daniela Truffo (Città Metropolitana di Torino, CE.SE.DI)

Collane@unito.it
Università degli Studi di Torino
ISBN: 9788875902292

Quest'opera è stata rilasciata con
licenza Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale (CC BY-SA 4.0)

Disegno grafico: Maria Grazia Imarisio
Immagine di copertina: rielaborazione grafica di Elisa Gentile, collage di Marina Serio

Atti del X Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della Matematica
DI.FI.MA. 2021

Apprendimento Laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza

Torino, 11-12-13 ottobre 2021 - Online

A cura di:
Raffaella Bonino, Daniela Marocchi, Marta Rinaudo, Marina Serio

Introduzione

Il X Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica si è svolto on-line nei giorni 11-12-13 ottobre 2021 ed ha focalizzato l'attenzione su come si possa attuare una didattica laboratoriale in matematica e in fisica non solo in presenza ma anche a distanza, come è accaduto negli anni del lockdown. Obiettivo e risultato del Convegno è stata la condivisione delle numerose esperienze positive realizzate nei due anni caratterizzati dalla pandemia da Covid-19, per renderle fonte di ispirazione per una didattica efficace anche in situazioni di normale svolgimento delle attività scolastiche . Come di tradizione, la terza giornata è stata dedicata al GeoGebra Day.

Il Convegno è stato anche questa volta momento di riflessione e di scambio, con articolazioni a partire dalla scuola primaria fino ad arrivare all'Università.

Nelle sessioni plenarie si sono affrontati sia aspetti culturali più ampi, in particolare legati al divario di genere ed al tema dell'infinito ("Affrontare il divario di genere in Matematica con metodologie laboratoriali", "Di Lunula in Lunula con Geogebra contro i conflitti dell'infinito"), sia aspetti più prettamente didattici, presentando il possibile utilizzo delle moderne tecnologie per realizzare attività di laboratorio senza strumentazioni complesse ("Laboratorio di Fisica con Arduino e Smartphone").

La realizzazione on-line ha consentito una straordinaria partecipazione al Convegno, con circa 650 iscritti in ogni giornata, con provenienze geograficamente diverse che hanno evidenziato il carattere nazionale dell'iniziativa. Oltre all'ampia partecipazione dei docenti della scuola secondaria di secondo grado (circa 430), è stata più estesa, rispetto alle edizioni precedenti, quella dei docenti della scuola secondaria di primo grado (circa 130), dei docenti della scuola primaria (circa 80) e dell'Università (quasi 90).

Le comunicazioni presenti negli Atti sono 17 di Fisica, 22 di Matematica e 5 interdisciplinari a cui si aggiungono 17 workshop di Matematica e 7 workshop interdisciplinari.

La pubblicazione on line degli Atti permetterà di mettere a disposizione di un ampio pubblico tutta la ricchezza delle esperienze didattiche presentate dai partecipanti al Convegno.

Sommario

INDICAZIONE LIVELLO SCOLARE DELLE COMUNICAZIONI E DEI WORKSHOP

I	Scuola dell’Infanzia
P	Scuola Primaria
S_I	Secondaria I grado
S_II	Secondaria II grado
U	Università

	Comunicazioni – Matematica(*)	
Autori	**Titolo del contributo**	**Livello scolare**
Ferrara F., Ferrari G., Lucco-Castello F.	Piegatura della carta nella didattica della matematica:una sperimentazione a distanza con studenti universitari	U
Aires L., Fassino F., Guino L., Manolino C., Visconti A.	Lo studio della misurazione nella scuola primaria	P
Ferrara F., Ferrari G., Savioli K., Bianchi S., Gilardi M., Minelli I., Mora G., Pozio S.,Sattin M. L.	Riflessioni dal progetto MATT&R: districarsi tra matematica e forme, tra perimetri e aree	I, P, S_I
Buzio P., Bressan P.	Problemi geometrici: un'esperienza per il curriculum verticale	P, S_1
Borsero M., Boccardi S., Pera E.	Ready Player Book - Lettori matematici in gioco	P, S_I
Profumo P. G. M., Galati M., De Grandis R., Melissa I.	Aritmetica…No problem!	P, S_I
Taranto E., Mammana M. F., Alberti V.,Ferro R., Labasin S.	Un MOOC internazionale per fare matematica all'aperto con MathCityMap	P,S_I,S_II
Agostino L. Trinchero G.	Regards incrociati. Una formazione binazionale Francia - Italia	S_I, S_II
Scalambro E., Luciano E.	Un MOOC interdisciplinare: la Storia della Biomatematica	S_I, S_II, U
Borsero M., Casi R.,Pizzarelli C., Tassoni S.	La Casa di Carte. Probabilità peer to peer dal secondo al primo grado	S_I,S_II
Andriano V., Danè C, Doveri A., Nurisso N., Piazza F.	Introduzione al calcolo combinatorio: un'esperienza di lesson study in presenza e a distanza	S_II
Bini G.	MathMemeThon: Una esperienza di didattica a distanza con i meme matematici	S_II
Dané C.	Le lezioni dei maestri: geometria proiettiva e riflessioni didattiche sulle orme di Bruno Spotorno	S_II
Marola B.	Matematica e scienza: sostantivi femminili	S_II
Mattei M., Faggiano E.	Dalle matrici alle immagini digitali - Progetto Klein Italia	S_II
Mennuni F., Faggiano E.	Strumenti in sinergia per la costruzione del significato di rotazione nella scuola "a distanza"	S_II
Nagliati I.	Statistica in DAD con GeoGebra	S_II
Pancanti S.	E-Learning e Geometria nel Biennio della Scuola Secondaria di Secondo Grado	S_II
Palestini P., Toffalori C.	Geogebra per un laboratorio sulle equazioni diofantee	S_II
Rizzi S.,Mennuni F., Faggiano E.	La matematica dello spirografo: un percorso "a distanza" nel Liceo Matematico	S_II
Tomasi L., Montone A.	La trasposizione didattica della vignetta "Isometrie passo passo", Progetto Klein Italia	S_II
Lepellere M. A.	Migliorare il pensiero critico in un corso di analisi 2 attraverso le applicazioni	U

(*) Cliccando sul titolo si può accedere direttamente all'articolo

Comunicazioni – Fisica (*)

Autori	Titolo del contributo	Livello scolare
Barbero A., Leone M., Rinaudo M.	La misura "su misura": un percorso laboratoriale alla scoperta dei concetti di lunghezza e superficie	P
Gilli C.	I fluidi alla scuola primaria: la drammatizzazione a supporto dello sviluppo di competenze scientifiche	P
Revel F.	Blaze e le mega macchine: costruire competenze scientifiche nella scuola primaria con i cartoni animati	P
Scornavacche G.	PAPER UNFOLD. Progetto di un libro pop-up come laboratorio autoprodotto per l'apprendimento/insegnamento dei movimenti della luce.	P
Jahier M., Marocchi D., Serio M.	Il diavoletto di Galileo	P, S_I, S_II
Mattiello S.	Fisica moderna e scuola primaria: quali prospettive?	P, S_I, S_II
Montalbano V.	Meteoriti e misure di densità	S_I
Cane D., Giudici L.	Energia potenziale: maialini, pianeti, atomi e... calciatori	S_II
Casaburo F.	Teaching physics by Arduino during Covid-19 pandemic: oscillation of a single pendulum	S_II
Coscia S., Falabino S.	Laboratorio STEM con Arduino per il triennio del liceo scientifico	S_II
Falabino S.	Un'esperienza di laboratorio di Fisica in DAD: misura dell'intensità luminosa con micro:bit	S_II
Nicola M., Marocchi D., Serio M.	I dati meteorologici come stimolo per l'acquisizione di competenze nell'analisi dei dati e nelle misure sperimentali	S_II
Prevignano A.	Micro:bit in laboratorio: una sperimentazione didattica	S_II
Robotti G.	Clima. Misure, studio e analisi dati	S_II
Saglietto G., Marocchi D., Serio M.	Progettazione e sperimentazione di un'attività didattica laboratoriale sulla spettrofotometria	S_II
Sauda C., Marocchi D., Serio M.	Effetto Doppler e uso di ultrasuoni in medicina. Percorso formativo per studenti della scuola secondaria di secondo grado	S_II
Bandecchi A. E.,Tasquier G.	Laboratorio di Fisica e Didattica della Fisica del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria svolto a distanza: la sfida di sperimentare l'apprendimento basato sull'indagine in un ambiente online	U

Comunicazioni – Multi e Inter-Disciplinari (*)

Autori	Titolo del contributo	Livello scolare
Chiotto A.M. A.	Prossima frontiera: Marte!	S_I
Drivet A.	Smartphone and STEM education	S_II
Fiorentino M. G.,Fusco N., Montone A.	Una piacevole sinfonia: Matematica e Musica	S_II
Montedoro A., Buono R.	La storia della matematica insegnata attraverso la scrittura creativa: un ponte tra cultura umanistica e cultura scientifica	S_II
Paschetta E., Demaggio I.	Misurare le concentrazioni con lo smarphone: una semplice esperienza di taratura degli strumenti.	S_II

Workshop – Matematica (*)

Autori	Titolo del contributo	Livello scolare
Grazian V., Cazzola M.	Giochi di crittografia elementare per studenti di scuola primaria	P
Casi R., Pizzarelli C.	Numerali e algoritmi con le bacchette dell'antica Cina: un'esperienza di trasposizione culturale	P, S_I
Mangiarotti M. A., Mapelli R.	Capire concetti matematici con i manipolatori virtuali e non, alla secondaria di primo grado: perché no?	P, S_I
Manilii M. R., Menegazzo G., Sacco S., Vernero M. C.	Che problema c'è	P, S_I
Montone A., Fiorentino M. G.,Riccardiello G.	La costruzione di isometrie nella realtà, tra artefatti manipolativi e digitali, da una "vignetta Klein"	P, S_I
Peirone A. M., Villella S., Manolino C.	La didattica del senza zaino incontra il lesson study	P, S_I
Pellillo R.	Costruzioni con riga e compasso	P, S_I
Serre S., Gallino G.	Molto più di un gioco	P, S_I, S_II
Merlo D., Vio E., Perotti V.	Laboratorio di matematica e prove INVALSI	P,S_I
Pocalana G., Cicero F.	Esplorare a distanza con GeoGebra	S_I
Cutrone F. N., de Candia M., Marchese G., Mennuni F.	Le rotazioni nella scuola secondaria: un percorso tra fogli di carta e GeoGebra	S_I
Pedrinazzi M., Lucchese G.	Un esempio di laboratorio didattico itinerante con l'utilizzo di Geogebra: grafici a dispersione, diagrammi cartesiani a bolle	S_I
Manassero M., Giugliano A. M.	Approccio alla probabilità	S_I, S_II
Agostino L.	Riflessioni sull'orale in matematica: l'esempio dei muri pedagogici	S_I,S_II
Tallone C., Alocco I., Cavallera L., Durando C., Isoardi G., Olivero F., Raspitzu M., Zamboni F.	Matepraticamente 2.0: laboratorio a distanza, da esigenza temporanea a risorsa innovativa	S_I,S_II
Bencivenni I., Bernardi L., Ferretti F., Tomasi L.	Fregi e tassellazioni del piano per guardare la realtà che ci circonda con occhio matematico	S_II
Coviello Arianna	Integrabilità: costruzione di concetti attraverso congetture e software Geogebra	S_II

Workshop – Multi e Inter-disciplinari (*)		
Autori	**Titolo del contributo**	**Livello scolare**
Agnes C., Merletti A.	La geometria del numero e.	S_II
Alluto G.	Organizzatori concettuali e le simulazioni digitali nella didattica delle scienze integrate: esempi di utilizzo.	S_II
Armano T.,Capietto A., Maietta D., Manolino C., Sofia A.	Produzione di documenti digitali accessibili con contenuto scientifico: strumenti inclusivi	S_II
Azzone A.,Marrone M. R., Santacroce N., Somma M.	Scopriamo e programmiamo la matematica con “Snap!”	S_II
Lamberti L., Tovena F.	Dalla costruzione di un videogioco agli algoritmi decisionali di scelta	S_II
Piccione A., Massa A. A.	Computational Notebook e Big Data	S_II
Sofia A., Armano T.,Capietto A., Maietta D., Manolino C.	Grafici sonori. Multicanalità e inclusività nella didattica delle STEM.	S_II

PLENARIE

AFFRONTARE IL DIVARIO DI GENERE IN MATEMATICA CON METODOLOGIE LABORATORIALI

Maria Laura Di Tommaso ([1]), Francesca Ferrara ([2])
([1]) Dipartimento di Economia e Statistica "Cognetti De Martiis", Università di Torino
([2]) Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino
francesca.ferrara@unito.it

Abstract
Questo contributo presenta la problematica delle differenze di genere in matematica, rilevata a tutti i gradi scolastici dalle indagini internazionali, e alcune sue possibili connessioni con la didattica della matematica. In particolare, l'Italia presenta un divario di genere a favore dei maschi sin dal grado 2 della scuola primaria. I fattori che la letteratura associa a questa problematica sono disparati e riconducibili soprattutto a questioni sociali e culturali, come attitudini dei genitori, pregiudizi di genere e convinzioni dei docenti. Una ridotta autostima e un allontanamento delle ragazze nei confronti della matematica (e delle discipline STEM) sono conseguenze di un tale quadro. Tuttavia, pochi studi in didattica della matematica considerano le differenze di genere, soprattutto in relazione a modalità di insegnamento e apprendimento della disciplina. In quest'ottica, focalizziamo l'attenzione al laboratorio di matematica come esempio di una metodologia utile a progettare attività eque e a instaurare una cultura in classe di superamento delle differenze di genere. Nel contesto di un progetto interateneo, *Tackling the Gender Gap in Mathematics in Piedmont*, abbiamo condotto una sperimentazione sul campo di un intervento didattico progettato su attività laboratoriali, nell'ambito della competenza numerica, cui ha partecipato un campione di classi terze della scuola primaria in Piemonte. La valutazione dell'impatto delle attività ha rivelato che la metodologia adottata ha avuto un'influenza positiva per le bambine partecipanti, con una riduzione del divario di genere preesistente di circa il 40%.

Parole-chiave
Divario di genere, stereotipi, laboratorio di matematica, metodologie didattiche.

LA PROBLEMATICA DEL DIVARIO DI GENERE IN MATEMATICA

Le valutazioni internazionali della competenza matematica degli studenti mostrano differenze di genere a tutti i gradi scolastici che variano da paese a paese. Ci riferiamo a queste differenze come a un divario di genere in matematica che cattura la differenza di punteggio ottenuto da maschi e femmine nei test di valutazione. I dati del test PISA 2018 per i paesi OCSE (OECD 2019) mostrano che, per i quindicenni, il divario di genere medio in matematica (ragazze meno ragazzi) varia tra -16 per l'Italia e +10 per l'Islanda, mentre la media è pari a -5. Significa che in Italia, mediamente, le ragazze ottengono 16 punti in meno dei ragazzi, mentre in Islanda sono i ragazzi ad aver meno successo, con punteggi in media inferiori di 10 punti. Rispetto a tutti i paesi OCSE, invece, i ragazzi ottengono in media 5 punti in più delle ragazze. Le ricerche mostrano anche che il divario di genere in matematica aumenta con l'età e cambia secondo la prestazione, nel senso che generalmente risulta trascurabile tra i risultati più bassi e sempre più apprezzabile man mano che i risultati aumentano (Fryer & Levitt, 2010; Contini et al., 2017). Dal momento che le ragazze dimostrano di andare meglio dei ragazzi nella maggior parte delle valutazioni accademiche, possiamo domandarci quanto sia politicamente rilevante lo svantaggio che le ragazze hanno in matematica. Sebbene la diversità nelle preferenze e nelle aspettative sul mercato del lavoro siano elementi importanti per la scelta del campo di studio, la relativa debolezza delle donne in matematica è anche una delle ragioni della quota criticamente bassa di donne nelle discipline STEM all'università (Turner & Bowen, 1999; Card & Payne, 2021). Ricerche recenti sottolineano d'altra parte

che le abilità matematiche sono importanti anche nelle occupazioni non legate alle STEM. Lo squilibrio nelle scelte accademiche incide poi in modo critico sulle scelte occupazionali e sulle differenze salariali (Paglin & Rufolo, 1990; Black et al., 2008). Il risultato è che le donne sono molto sottorappresentate nei settori più produttivi dell'economia e nei lavori altamente retribuiti (European Commission, 2015; National Academy of Science, 2007; Piazzalunga, 2018).
Per quanto riguarda la situazione del nostro paese, l'Italia mostra di avere il più alto divario di genere a favore dei maschi tra le 57 nazioni che hanno partecipato alla valutazione TIMSS del grado 4 (Mullis et al., 2016), mentre nella lista delle nazioni OCSE che hanno partecipato al test PISA somministrato nel 2018 è seconda (mostra cioè il secondo più alto divario). Lo studio di Contini e colleghe (2017) a partire dai dati delle valutazioni nazionali evidenzia che il divario in Italia emerge precocemente ed è presente in modo significativo già per studenti di 7 anni, ovvero al grado 2 della scuola primaria. Questo pone una questione molto rilevante oggi, nell'ottica di una politica di equità che sappia superare le differenze sociali (non solo di genere ma anche di classe, razza, etnia, e così via) creando storie di accessibilità e successo in matematica e occasioni di apprendimento matematico per tutti, sin dalla precoce età.
Numerose teorie hanno tentato di giustificare l'esistenza del divario di genere in matematica. Alcuni studi hanno fatto riferimento a differenze biologiche nel funzionamento del cervello (ad es. Baron-Cohen, 2003), ma ricerche più recenti sui processi neurali nei bambini piccoli hanno scoperto che lo stesso sistema neurale è coinvolto nello sviluppo della matematica per ragazzi e ragazze (Kersey et al., 2019), facendo dunque cadere l'ipotesi di fattori biologici. La variabilità elevata del divario di genere in matematica tra i paesi sembra piuttosto indicare il ruolo determinante di fattori culturali e sociali. Nei paesi con maggiore uguaglianza di genere, infatti, le ragazze ottengono risultati migliori dei ragazzi in matematica (Guiso et al., 2008; Pope & Syndor, 2010; Nollenberger et al., 2016). Anche l'attitudine della genitorialità verso un'uguaglianza di genere è correlata punteggi ottenuti dalle ragazze nei test di matematica (Dossi et al., 2019). Gli stereotipi di genere possono contribuire a plasmare le differenze di genere nei risultati in matematica, influenzando non solo il comportamento dei genitori nei confronti di ragazze e ragazzi, ma anche le convinzioni degli insegnanti. Spesso gli stessi stereotipi inducono ad attribuire i risultati delle ragazze a una questione di diligenza piuttosto che di talento (Ertl et al., 2017). Pregiudizi di genere impliciti esistenti per gli insegnanti (misurabili con il cosiddetto Test di Associazione Implicita: Greenwald et al., 1998) hanno un'influenza considerevole sul divario di genere in matematica (Carlana, 2019). Una spiegazione collegata riguarda le interazioni tra studenti e insegnanti associate a modelli di ruoli di genere (Dee, 2007). Questi meccanismi possono anche essere responsabili della minore autostima che le ragazze manifestano in matematica, del più alto livello di ansia e della minore competitività (Ho et al., 2000; Niederle & Vesterlund, 2010; Devine et al., 2012; OECD, 2015; Di Tommaso et al., 2018).

DIVARIO DI GENERE E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Un fattore potenzialmente rilevante ma meno esplorato è quello delle pratiche e dei metodi didattici. Ci sono studi nella letteratura in didattica della matematica che considerano le differenze di genere (ad es. Gallagher & Kaufman, 2004; Leder & Forgasz, 2008; Giberti, 2019), soprattutto in relazione alle modalità di insegnamento e apprendimento della disciplina. Alcuni ricercatori suggeriscono che il divario di genere diminuisce e può addirittura scomparire quando l'insegnamento della matematica è incentrato sulla risoluzione di problemi e coinvolge gli studenti in discussioni e indagini invece che in lezioni passive (Boaler, 2002, 2009; Boaler & Greeno, 2000; OECD, 2016; Zohar & Sela, 2003). La stessa Boaler (2009) ha ulteriormente evidenziato che una delle cause di ansia e di disaffezione nei confronti della disciplina è legata a metodi procedurali di insegnamento e apprendimento, di solito propri di insegnamenti di tipo tradizionale. Le ragazze sembrano, infatti, particolarmente influenzate dal modo in cui sviluppano comprensione e dalle mancate opportunità di poter esplorare la matematica in profondità e porre domande. Anche i ragazzi in realtà soffrono di mancanza di opportunità verso una comprensione concettuale, ma ciò non li influenza tanto da non riuscire a ottenere risultati. Le ragazze sono anche meno orientate al risultato e, quando è negato loro accesso a una comprensione più fine, finiscono per allontanarsi dalla disciplina. Condividiamo con la ricercatrice che le questioni di genere

possano dunque essere considerate come risposte situate che emergono tra le persone e l'ambiente di insegnamento e apprendimento piuttosto che dipendere da caratteristiche dei singoli, superando dunque la classica associazione del genere maschile con l'essere bravi in (o portati per la) matematica.
Questi studi inquadrano la problematica del divario di genere secondo una visione costruttivista e sociale dei metodi di insegnamento e apprendimento della matematica (Gutierrez & Boero, 2006). In breve, questa visione si basa sull'idea che l'apprendimento in matematica implica un ruolo attivo e partecipativo dei discenti, che creano comunità di pratica facendo cose insieme (Lave & Wenger, 1991). Studi di ricerca meno giovani sottolineano una relazione tra le differenze di genere in matematica e i processi cognitivi richiesti dai compiti e dalle domande dati ai discenti. Per esempio, Bolger e Kellaghan (1990) e Wilder e Powell (1989) hanno messo in luce che, mentre i ragazzi vanno meglio delle ragazze nelle domande a scelta multipla, le ragazze hanno maggior successo con domande aperte.
La tendenza è diversa, in molte nazioni, nel caso della competenza di lettura; infatti, le ragazze ottengono risultati migliori dei ragazzi e questo sembra accadere dalla scuola primaria alla secondaria di II grado (Ajello et al., 2018). Alcuni aspetti delle domande di lettura (come il formato della domanda, il dominio di contenuto e il processo cognitivo), inoltre, sembrano essere fortemente legati a una differenza di genere nelle performance degli studenti (Marks, 2008; Lafontaine & Monseur, 2009). Per Ajello e colleghe, ciò porta a ipotizzare che il carico di lettura delle domande di matematica sia associato alle performance in matematica, indipendentemente dall'abilità matematica. Studi precedenti hanno indicato in questo senso una stretta connessione tra test di matematica e test di lettura (Jiban & Deno, 2007; Caponera et al., 2016).
Tutto questo suggerisce che sia le modalità di lavoro e di comunicazione in classe sia i processi cognitivi che possono essere attivati nell'insegnamento e nell'apprendimento sono rilevanti rispetto ad azioni didattiche volte al contrasto del divario di genere in matematica.

METODOLOGIE LABORATORIALI E LA PROPOSTA DI UN INTERVENTO DIDATTICO

In questo contributo, focalizziamo l'attenzione sul costrutto del laboratorio di matematica come esempio di metodologia didattica che può essere utile a progettare attività eque proprio nell'ottica di instaurare una cultura di superamento delle differenze di genere in matematica. L'idea di laboratorio di matematica è nata con il paradigma della ricerca per l'innovazione e non fa riferimento a uno spazio fisico, bensì a una visione non passiva dell'apprendimento e alla centralità dei discenti, che supera metodi trasmissivi mediante il lavoro di gruppo, le discussioni di classe guidate dall'insegnante, la condivisione e il confronto di idee, le interazioni, il fare anziché l'ascoltare ponendo e risolvendo problemi, e utilizzando materiali e strumenti (Anichini et al., 2004; Arzarello et al., 2012). Altri aspetti stimolati con questa metodologia sono: un tempo opportuno per esplorare, discutere e lavorare insieme al posto di un tempo prestabilito per rispondere a date domande; gli errori considerati come generatori di significato invece che indice di fallimento; attenzione alle diverse voci nella classe; uno spazio adeguato per la dimensione narrativa e le forme di comunicazione nell'apprendimento. La nozione di laboratorio caratterizza dunque ogni visione della didattica della matematica che valorizzi la dimensione sociale dei processi di insegnamento e apprendimento.
Se, come anticipato, pensiamo alla problematica del divario come emergente dalle situazioni, è rilevante studiare più a fondo possibili modi di migliorare la pratica matematica in classe e approfondire la comprensione di fenomeni di classe che si legano alle differenze di genere. Proprio nella direzione di pensare ad azioni mirate al miglioramento nel contesto dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica, abbiamo progettato un intervento didattico per comprendere meglio la misura in cui il laboratorio di matematica può aiutare a contrastare il divario di genere. L'intervento è parte del lavoro di un progetto di ricerca interateneo dell'Università di Torino (intitolato *Tackling the gender gap in mathematics in Piedmont*) nel quale sono stati coinvolti i due dipartimenti di Matematica e di Economia e Statistica, con esperte di didattica della matematica da un lato ed esperte di economia e statistica dall'altro lato (oltre alle autrici, Dalit Contini, Giulia Ferrari e Ornella Robutti). Il gruppo di progetto ha anche visto la partecipazione nelle fasi di progettazione e di implementazione di giovani laureate e dottorande di entrambi i dipartimenti e di tre docenti della scuola primaria (Ferrara & Robutti, 2020).

Preliminare alla progettazione dell'intervento è stata un'analisi condotta su dati delle prove nazionali di valutazione del grado 2 somministrate dal Servizio Nazionale di Valutazione (INVALSI), precisamente sui dati degli ultimi cinque anni antecedenti l'inizio del progetto (2013-2017). Sappiamo infatti dallo studio di Contini e colleghe (2017) che in Italia il divario c'è già in seconda primaria e aumenta fino al grado 10. Allo stesso tempo, sappiamo che il Piemonte è la regione che registra il più alto divario di genere in matematica a favore dei maschi al grado 2, con l'incidenza massima per l'ambito di contenuto dei Numeri. Analizzare gli 82 item di matematica delle prove dal 2013 al 2017 relativi a questo ambito ci ha permesso di indagare a priori se il divario fosse omogeneamente distribuito o se mostrasse una particolare sensibilità rispetto ad alcuni specifici elementi, legati ad esempio al processo cognitivo coinvolto in una domanda (la Dimensione nella catalogazione INVALSI) piuttosto che alla tipologia di domanda (scelta multipla o aperta, anche confermando o meno i risultati della letteratura sulla differenza in termini di successo). Altre variabili coinvolte nella formulazione degli item sono state identificate e introdotte in questa analisi, oltre alla tipologia: la presenza o meno nello stimolo di un obiettivo, la presenza o meno di un testo, la presenza o meno di una figura e il tipo di figura, la richiesta o meno di soli calcoli, lo scopo della domanda. Per quanto riguarda le figure, esse sono state distinte tra disegni, figure in contesto e rappresentazioni. Per interpretare un disegno basta rendersi conto della presenza di un insieme di oggetti dello stesso tipo, in una certa quantità. L'interpretazione di una figura in contesto invece richiede necessariamente una conoscenza del contesto. Infine, nel caso delle rappresentazioni, è necessario cogliere le relazioni tra gli elementi presenti in figura.
L'analisi delle variabili che abbiamo così potuto associare a ciascun item rispetto alla sua formulazione ci ha condotto a comprendere che, almeno nel caso degli item da noi considerati, la dimensione che più influenza il divario di genere è quella della risoluzione di problemi (*Problem solving*), mentre tra gli scopi delle domande sia la ricerca di dati, sia la risoluzione di problemi, sia infine l'utilizzo di diverse rappresentazioni risultano significative. Anche per la regione Piemonte possiamo confermare i risultati già noti in letteratura sul fatto che i maschi hanno maggior successo con domande a scelta multipla, mentre le femmine sono più favorite con domande aperte, con un divario che è il doppio nel caso delle domande del primo tipo rispetto a quello che si manifesta con domande del secondo tipo. Il divario è di circa 3,5 punti percentuali quando c'è una situazione iniziale, ma quasi raddoppia senza situazione. La presenza o l'assenza di un obiettivo, d'altra parte, non incide sul divario. Tra le figure, i disegni non creano differenze, mentre con rappresentazioni e, soprattutto, figure in contesto il divario è significativo.
A partire da questa analisi, abbiamo progettato il nostro intervento didattico, che è consistito in 15 ore di attività laboratoriali per classi terze della scuola primaria. La scelta delle classi terze è legata al fatto che il divario si manifesta già in classe seconda. Poiché l'ambito di contenuto con il più alto divario è quello dei *Numeri*, abbiamo anche scelto due attività sul numero del piano nazionale m@t.abel, basate sull'approccio metodologico-didattico del laboratorio di matematica, che presentassero un forte contesto narrativo, particolarmente appropriato per le bambine. Brevemente, le due attività originali riguardano, dal punto di vista del contenuto matematico, l'una principalmente il valore posizionale del numero e l'altra il rapporto tra numeri, fornendo un approccio iniziale ai numeri razionali e alle frazioni (MIUR, 2012). In un secondo momento, abbiamo apportato dei cambiamenti alle attività in modo da introdurvi quegli aspetti strutturali e di formulazione delle prove risultati significativi per il divario di genere e da adeguarne la complessità al terzo anno della scuola primaria. Un esempio ulteriore è l'introduzione, in una delle attività, di un nuovo personaggio femminile (folletta figlia), per equilibrare il numero di maschi e femmine presenti nella storia originale, che si pone questioni di natura matematica (Fig. 1a). Relazioni tra il modo di agire dei personaggi sono sfruttate per problematizzare aspetti quantitativi (Fig. 1b).

La sera tutti erano contenti e l'indomani sarebbero tornati a fare le provviste, ma la figlia folletta continuava a pensare ai percorsi fatti dalla sua famiglia e non si trovava con i conti: "Io mi chiedo: se la mamma e il papà hanno preso la strada davanti alla casa e hanno fatto venti passi, perché sono giunti in posti diversi? Se io e mio fratello abbiamo preso la strada dietro alla casa e abbiamo fatto venti passi, perché siamo giunti in posti diversi?	Se mamma folletta fa tre passi ogni due passi di papà folletto, quanti passi deve fare, secondo voi, la mamma per raggiungere il mercato?
a	b

Figura 1. a. Folletta figlia e una questione matematica; b. Problematizzazione di aspetti quantitativi mediante confronti tra le azioni di diversi personaggi

Abbiamo infine cercato di escludere pressioni e competizione dalla filosofia delle attività e di introdurre nella metodologia didattica neutralità ed equità di atteggiamento rispetto al genere, in particolare nelle discussioni collettive. Uno studio pilota, condotto in due classi terze della provincia di Torino, ha fornito primi risultati sulla bontà delle attività didattiche sviluppate, permettendoci di crearne una versione rivisitata, che è poi stata proposta nel progetto a un campione di classi terze della scuola primaria.
Tutte le scuole della provincia di Torino sono state invitate a prendere parte al nostro progetto, con almeno due classi. Una volta ricevute le adesioni, sono state selezionate casualmente 25 scuole tra tutte le scuole partecipanti e poi, all'interno di ciascuna scuola, sono state assegnate le due classi in modo casuale al gruppo di classi che avrebbe ricevuto l'intervento didattico oppure a un diverso gruppo che avrebbe invece continuato con la didattica tradizionale. Questo secondo gruppo serviva da gruppo di controllo per poter valutare statisticamente l'impatto dell'intervento didattico sull'eventuale divario di genere preesistente, rilevato circa un mese prima dell'inizio con la somministrazione di un test comune a tutti (pre-test). Le scuole risultanti coprivano ampiamente il territorio cittadino e la provincia di Torino. Il campione finale era composto da 1.044 bambini e bambine di cui 519 hanno ricevuto l'intervento didattico e 525 hanno fatto parte del gruppo di controllo e seguito la didattica curricolare. L'intervento ha previsto la partecipazione nelle normali ore di matematica alle attività laboratoriali da noi progettate, che sono state gestite in classe da tutor opportunamente formate, con competenze di didattica della matematica (laureate e dottorande), mentre le docenti (tutte donne) avevano il ruolo di osservatrici. I laboratori sono stati organizzati in cinque sessioni di tre ore ciascuna, una volta alla settimana per cinque settimane consecutive, nel periodo tra febbraio e aprile del 2019.

L'IMPATTO DELL'INTERVENTO DIDATTICO SUL DIVARIO

Per la valutazione dell'impatto sulle prestazioni di bambini e bambine, abbiamo somministrato una prova di matematica circa un mese dopo la fine dell'intervento didattico (post-test). Le prove sono state sviluppate con la supervisione esterna di esperte di valutazione che collaborano con INVALSI. La struttura del post-test è simile a quella di una prova di valutazione nazionale, ma si focalizza sulla competenza numerica e si compone di 20 item. Il pre-test ha rilevato un divario a favore dei bambini (come ci attendevamo) prima dell'intervento (Fig. 2a). Il grafico mostra una curva continua che cattura come variano i punteggi delle bambine da sinistra a destra, la quale risulta traslata verso sinistra rispetto alla curva tratteggiata che invece cattura i punteggi dei bambini. Significa che i bambini raggiungevano nel nostro pre-test punteggi maggiori di quelli raggiunti dalle bambine.
La valutazione dell'impatto delle attività didattiche sul divario di genere è stata condotta mediante uno studio controllato randomizzato (*randomized controlled trial*), basato proprio sull'assegnazione casuale delle classi al gruppo di controllo o a quello che ha ricevuto l'intervento (sperimentale). La casualità di questo processo ha generato due gruppi confrontabili, come emerge dalla distribuzione dei punteggi al pre-test di bambini e bambine nel gruppo sperimentale e nel gruppo di controllo (Fig. 2b; le due curve, continua e tratteggiata, questa volta sono sovrapposte quasi perfettamente l'una all'altra). I due gruppi sono risultati molto simili anche relativamente alla distribuzione di altre caratteristiche osservate, come l'istruzione dei genitori, lo sfondo migratorio, la percentuale di bambini con BES, la dimensione delle classi e l'età ed esperienza delle docenti.

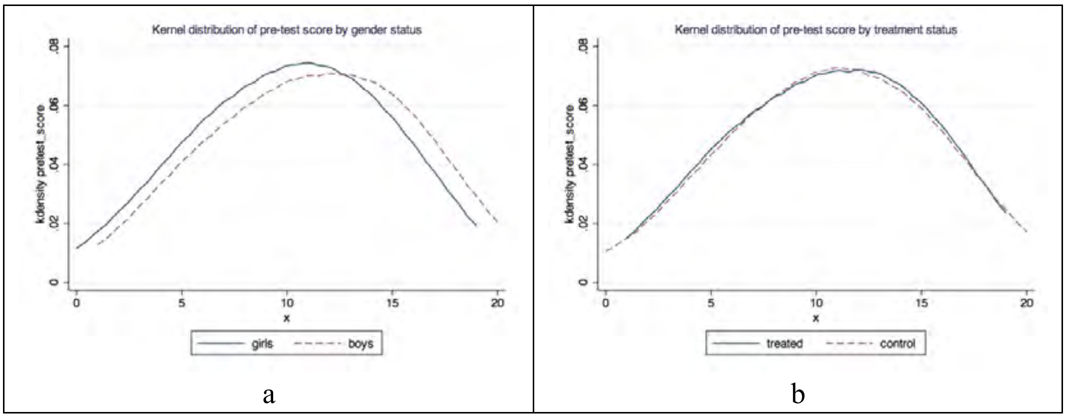


Figura 2. a. Distribuzione dei punteggi di bambini e bambine al pre-test; b. Distribuzione delle caratteristiche dei due gruppi (sperimentale e di controllo)

I risultati principali dello studio sono incoraggianti, poiché mostrano che il gruppo sperimentale migliora significativamente le proprie prestazioni matematiche rispetto alla situazione iniziale, e ciò accade per tutti. L'effetto è però conseguenza del miglioramento delle bambine mentre l'intervento non sembra influire significativamente sui bambini. In particolare, la partecipazione all'intervento appare aumentare il rendimento in matematica per le bambine di 0,15 deviazioni standard (in gergo), senza danneggiare le prestazioni dei bambini. Si tratta di un risultato interessante e di portata per politiche educative. Come termine di paragone, possiamo considerare lo studio di Bloom (2008), che riporta che, per la scuola primaria, un anno intero di frequenza migliora i risultati degli alunni di 0,25 deviazioni standard sia in matematica sia in lettura, mentre una riduzione della dimensione della classe pari a 10 bambini tra i 22 e i 26 studenti migliora le prestazioni di 0,10-0,20 deviazioni standard.

L'analisi che abbiamo condotto permette di sostenere dunque che il divario in matematica (nell'ambito dei numeri e nel contesto da noi considerato) si è ridotto del 40% circa. Sembra inoltre che a beneficiare maggiormente delle attività didattiche siano le bambine con risultati al pre-test almeno pari alla media dei punteggi (riassumendo, le bambine con punteggi alti traggono maggior beneficio dall'intervento, mentre i bambini non vedono effetti indipendentemente dal loro livello di partenza rispetto al pre-test). A parità di risultato, l'impatto è ancora maggiore per quelle bambine che hanno famiglie con status migratorio alle spalle e con madri con un basso livello di istruzione rispetto alle bambine autoctone o con madri altamente istruite. Nel caso dei bambini, questa tendenza si inverte, ossia beneficiano più di tutti i bambini nativi e con padri altamente istruiti.

In conclusione, il progetto qui presentato mette in luce (con tutte le sue limitazioni) che le metodologie laboratoriali di insegnamento possono influenzare positivamente la problematica del divario di genere in matematica. Il laboratorio di matematica sembra configurarsi come metodologia di apprendimento attivo che può ridurre il divario, laddove esistente. Il nostro è il primo studio, nel panorama nazionale, che valuta l'impatto casuale di una metodologia di insegnamento sul divario di genere in matematica, anche se altri si sono occupati di questa problematica in precedenza (ad es., Giberti, 2019).

La letteratura che studia le cause delle differenze di genere in matematica ha finora indicato fattori, come quelli discussi all'inizio di questo contributo, di tipo socio-culturale se non biologico, come le convinzioni, le aspettative e i pregiudizi di genitori e insegnanti, ma finora è mancata un'attenzione più mirata alle metodologie di insegnamento. Ci sembra che questo lavoro di ricerca faccia un primo passo nell'ottica di contribuire a colmare questa lacuna.

BIBLIOGRAFIA

Ajello, A. M., Caponera, E. and Palmerio, L. (2018). Italian students' results in the PISA mathematics test: does reading competence matter? *European Journal of Psychology of Education* **33**, 505-520.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. and Robutti, O. (Eds.). (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni Stampatore.

Arzarello, F., Ferrara, F. and Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications* **31**, 20-30.

Baron-Cohen, S. (2003). *The essential difference: The truth about the male and female brain*. New York: Basic Books.

Black, D. A., Haviland, A. M., Sanders, S. G. and Taylor, L. J. (2008). Gender wage disparities among the highly educated. *Journal of Human Resources* **43**, 630-659.

Bloom, H. S. (2008). The core analytics of randomized experiments for social research. In Alasuutari, P., Bickman, L. & Brannen, J. (Eds.), *The SAGE Handbook of social research methods* (pp. 115-133). London: SAGE Publications Ltd.

Boaler, J. (2002). *Experiencing school mathematics: Traditional and reform approaches to teaching and their impact on student learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

Boaler, J. (2009). *The elephant in the classroom: Helping children learn and love maths*. London: Souvenir Press.

Boaler, J. and Greeno, J. (2000). Identity, agency and knowing in mathematics worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171-200). Westport, CT: Ablex Publishing.

Bolger, N. and Kellaghan, T. (1990). Method of measurement and gender differences in scholastic achievement. *Journal of Educational Measurement* **27**, 165-174.

Caponera, E., Sestito, P. and Russo, P. M. (2016). The influence of reading literacy on mathematics and science achievement. *The Journal of Educational Research* **109**, 197-204.

Card, D. and Payne, A. A. (2021). High school choices and the gender gap in STEM. *Economic Inquiry* **59**, 9-28.

Carlana, M. (2019). Implicit stereotypes: Evidence from teachers' gender bias. *The Quarterly Journal of Economics* **134**, 1163-1224.

Contini, D., Di Tommaso, M. L. and Mendolia, S. (2017). The gender gap in mathematics achievement: Evidence from Italian data. *Economics of Education Review* **58**, 32-42.

Dee T. S. (2007). Teachers and the gender gaps in student achievement. *Journal of Human Resources* **42**, 528-554.

Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D. and Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and Brain Functions* **8**, 33.

Di Tommaso, M. L., Maccagnan, A. and Mandolia S. (2018). The gender gap in attitudes and test scores: A new construct of the mathematical capability. *IZA Discussion Paper 11843*.

Dossi, G., Figlio, D., Giuliano, P. and Sapienza, P. (2019). Born in the family: Preferences for boys and the gender gap in math. *IZA Discussion Paper 12156*.

Ertl, B., Luttenberger, S. and Paechter, M. (2017). The impact of gender stereotypes on the self-concept of female students in STEM subjects with an under-representation of females. *Frontiers in Psychology* **8**, 703.

European Commission (2015). *Science is a girls' thing*. Newsletter, Nov. 2015.

Ferrara, F. and Robutti, O. (2020). Divario di genere in matematica in Piemonte e didattica della matematica. In E. Luciano, M. Oggero & C. Sabena (a cura di), *Conferenze e seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2019-2020* (pp. 53-74). Savigliano, Cuneo: L'Artistica Editrice.

Fryer, R. G. and Levitt, S. D. (2010). An empirical analysis of the gender gap in mathematics. *American Economic Journal: Applied Economics* **2**, 210-240.

Gallagher, A. M. and Kaufman, J. C. (Eds.) (2004). Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach. New York: Cambridge University Press.

Giberti, C. (2019). Gender differences in mathematics: From the international literature to the Italian context. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula* **5**, 44-68.

Greenwald, A. G., McGhee, D. E. and Schwartz, J. L. (1998). Measuring individual differences in implicit cognition: The implicit association test. *Journal of Personality and Social Psychology* **74**, 1464.

Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P. and Zingales, L. (2008). Culture, gender, and math. *Science* **320**, 1164-1165.

Gutierrez, A. and Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-428). Rotterdam: Sense Publishers.

Ho, H. Z., Senturk, D., Lam, A. G., Zimmer, J. M., Hong, S., Okamoto, Y., ... and Wang, C. P. (2000). The affective and cognitive dimensions of math anxiety: A cross-national study. *Journal for Research in Mathematics Education* **31**, 362-379.

Jiban, C. L. and Deno, S. L. (2007). Using math and reading curriculum-based measurements to predict state mathematics test performance: Are simple one-minute measures technically adequate? *Assessment for Effective Intervention* **32**, 78-89.

Kersey, A. J., Csumitta, K. D. and Cantlon, J. F. (2019). Gender similarities in the brain during mathematics development. *npj Science of Learning* **4**, 1-7.

Lafontaine, D. and Monseur, C. (2009). Gender gap in comparative studies of reading comprehension: to what extent do the test characteristics make a difference? *European Educational Research Journal* **8**, 69-79.

Lave, J. and Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University of Cambridge Press.

Leder, G. and Forgasz, H. (2008). Mathematics education: New perspectives on gender. *ZDM - Mathematics Education* **40**, 513-518.

Marks, G. N. (2008). Accounting for the gender gaps in student performance in reading and mathematics: Evidence from 31 countries. *Oxford Review of Education* **34**, 89-109.

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*. Roma: Le Monnier.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. and Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College; International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

National Academy of Science (2007). Beyond bias and barriers: Fulfilling the potential of women in academic science and engineering. Available at: http://www.nap.edu/read/11741.

Niederle, M. and Vesterlund, L. (2010). Explaining the gender gap in math test scores: The role of competition. *Journal of Economic Perspectives* **24**, 129-144.

Nollenberger, N., Rodríguez-Planas, N., and Sevilla, A. (2016). The math gender gap: The role of culture. *American Economic Review* **106**, 257-261.

OECD (2015). *The ABC of gender equality in education: Aptitude, behaviour, confidence*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2016). *PISA 2015 results: Excellence and equity in education, Volume I*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2019). *PISA 2018 results: Where all students can succeed, Volume II*. Paris: OECD Publishing.

Paglin, M. and Rufolo, A. M. (1990). Heterogeneous human capital, occupational choice, and male-female earnings differences. *Journal of Labor Economics* **8**, 123-144.

Piazzalunga, D. (2018). The gender wage gap among college graduates in Italy. *Italian Economic Journal* **4**, 33-90.

Pope, D. G. and Sydnor, J. R. (2010). Geographic variation in the gender differences in test scores. *Journal of Economic Perspectives* **24**, 95-108.

Turner, S. E. and Bowen, W. G. (1999). Choice of major: The changing (unchanging) gender gap. *ILR Review* **52**, 289-313.

Wilder, G. Z. and Powell, K. (1989). Sex differences in test performance: A survey of the literature. ETS Research Report Series 1989, i-50.

DI.FI.MA. 2021: Apprendimento Laboratoriale in Matematica e Fisica in Presenza e a Distanza.

Zohar, A. and Sela, D. (2003). Her physics, his physics: Gender issues in Israeli advanced placement physics classes. International Journal of Science Education 25, 245-268.

LABORATORIO DI FISICA CON ARDUINO E SMARTPHONE

Giovanni Organtini
Università Sapienza di Roma & INFN-Sez. Di Roma
giovanni.organtini@uniroma1.it

Abstract
Le nuove tecnologie digitali hanno permesso, negli ultimi anni, un ripensamento complessivo dell'attività laboratoriale in fisica. La diffusione degli smartphone e la disponibilità di sistemi a basso costo come Arduino permettono di sperimentare modelli di didattica laboratoriale completamente diversi da quelli del passato, nei quali gli studenti diventano parte attiva di esperimenti che permettono di ottenere misure di grande interesse e alta qualità, consentendo di studiare la fisica in modo del tutto nuovo, partendo dai dati sperimentali. Le schede Arduino e gli smartphone aprono nuovi scenari nei quali il laboratorio si può trasferire da locali dedicati della scuola alla classe, e persino nelle case degli studenti. In questo seminario si discuteranno i possibili modelli di utilizzo di queste tecnologie a fini didattici, includendo l'illustrazione di alcuni esempi. In particolare saranno presentati i diversi scenari nei quali il nuovo laboratorio puo' condurre a una maggiore partecipazione degli studenti, a sviluppare l'attitudine al lavoro sperimentale e di gruppo, con considerazioni sulle questioni di genere, a un potenziamento delle capacità logiche e a una più profonda comprensione dei concetti, specialmente in relazione al rapporto tra fisica e matematica.

Parole-chiave
Laboratorio, Arduino, Smartphone, Phyphox, Innovazione didattica

INTRODUZIONE

Com'è noto, la scuola italiana (e non solo) è affetta da numerosi problemi di carattere logistico e, tra questi, particolarmente grave è quello dei laboratori. Il primo (e ultimo, a quanto ci consta) censimento dei laboratori scolastici è del 2008 (MIUR 2008).

A parte alcuni casi virtuosi, almeno fino al 2019, in molte scuole non esistevano locali idonei per l'attività di laboratorio. Laddove i laboratori c'erano, se non per lo più sprovvisti della strumentazione, spesso quest'ultima era obsoleta o fuori norma. Non c'era personale tecnico per la manutenzione e, secondo l'opinione di molti insegnanti, l'attività di laboratorio sottraeva molto (troppo) tempo a lezioni e verifiche. La pandemia ha ulteriormente aggravato questa situazione dal 2020, impedendo anche a quelle scuole che avrebbero potuto farlo, di fare attività di laboratorio.

Un ripensamento delle attività di laboratorio, dunque, s'impone, ma non a causa della pandemia, giacché la vera questione è un'altra: a che serve il laboratorio di fisica?

Il modello prevalente di laboratorio (non l'unico, ma di certo il più diffuso) consiste nel far assistere studenti e studentesse a dimostrazioni, in molti casi qualitative, che hanno lo scopo di "dimostrare" che quanto appreso dalle lezioni e dal libro di testo è effettivamente corretto. In rari casi agli studenti è permesso di sperimentare con le proprie mani; quasi sempre attraverso l'esecuzione di operazioni dettagliatamente guidate dai docenti. Quando l'esperimento (sia esso eseguito dall'insegnante o dai discenti) ha carattere quantitativo, l'esecuzione della misura fornisce in molti casi valori che si discostano dalle previsioni teoriche e la conclusione tipica è che l'esperimento "non è riuscito", come si trattasse di un gioco nel quale l'obiettivo è ottenere un punteggio predeterminato. Queste situazioni rafforzano, nella mente di studenti e studentesse, l'idea che la fisica sia qualcosa di astratto, che poco ha a che fare con i fenomeni che accadono realmente nella propria vita, e che imparare la fisica significhi, tutto sommato, ricordare a memoria formule matematiche da applicare ciecamente, senza alcuna aderenza (o, quanto meno, con limitata corrispondenza) alla realtà.

Al contrario, il laboratorio dovrebbe servire a rafforzare l'idea che la fisica non è altro che un modo di descrivere il funzionamento dell'Universo così come l'osserviamo; che non è un'altra matematica (perché talvolta le "regole del gioco" appaiono diverse) e che l'acquisizione di dati è inevitabilmente affetta da incertezze e fluttuazioni intrinseche a carattere statistico, come si vede bene dal dibattito innescato dagli effetti della pandemia e delle misure volte a contrastarne la diffusione.

Quest'ultima osservazione chiarisce, se mai ce ne fosse bisogno, che il laboratorio di fisica non è fine a sé stesso, ma è indispensabile per la formazione complessiva del cittadino consapevole. Ha poca importanza che un commercialista conosca la legge di Farady-Neumann-Lenz o il principio di conservazione della quantità di moto. Che lo stesso commercialista si renda conto, dai dati che possiede, che questi sono descritti da un andamento esponenziale e sappia trarne le opportune conclusioni, invece, lo è eccome!

Un modello di laboratorio ancor più efficace, almeno a nostro avviso, è quello nel quale gli esperimenti non si fanno per verificare le leggi fisiche, ma per dedurle a partire dai dati sperimentali, che è, in effetti, quel che fanno i fisici.

Perché il laboratorio sia efficace, poi, è necessario che studenti e studentesse si trasformino da spettatori ad attori, partecipando in prima persona alla realizzazione degli esperimenti.

LE MODERNE TECNOLOGIE DIGITALI PER IL LABORATORIO DI FISICA

Se in passato gli ostacoli oggettivi esistevano, al giorno d'oggi, la disponibilità di smartphone e di sistemi digitali semplici da usare e a basso costo come le schede Arduino rendono possibile l'adozione di modelli didattici innovativi e di grande efficacia.

Il laboratorio con gli smartphone

Per gli smartphone esistono diverse *App* che consentono l'accesso ai dati dei sensori di bordo che si possono usare come veri e propri strumenti di misura, talvolta con caratteristiche di precisione confrontabili con la strumentazione dedicata. Phyphox (Staacks, S. Hütz, H. Heinke, C. Stampfer, 2019) è, tra queste, un'*App* di grande qualità, molto diffusa, sviluppata da fisici per la fisica, gratuitamente disponibile (senza pubblicità) sia per iOS che per Android. *App* comparabili (Stampfer, Heinke, Staacks, 2020) per completezza e prestazioni sono Physics Toolbox (Vieyra, Vieyra, Marti, Monteiro, Jeanjacquot, 2015) e Arduino Science Journal (Arduino Science Journal, 2020).

Phyphox permette l'accesso ai dati raccolti dai sensori di bordo che sono il microfono, la videocamera e l'accelerometro, presenti in tutti i dispositivi; sono supportati anche il giroscopio per la misura delle velocità angolari e il magnetometro, presenti in molti dispositivi; il barometro comincia a essere diffuso sui modelli più evoluti.
Si possono così realizzare esperimenti sulla fisica delle onde (con quelle sonore), il moto, la dinamica, l'elettromagnetismo e la fisica dei fluidi.
Phyphox offre già una vasta gamma di possibilità, che può soddisfare qualsiasi esigenza, ma permette di espanderle grazie alla possibilità di arricchire la collezione di attività con esperimenti costruiti a partire dalla semplice combinazione di misure da più sensori, all'inclusione di attività complesse attraverso l'inquadratura di codici QR o il collegamento a dispositivi bluetooth (Bouquet, Creutzer, Dorsel, Vince, Bobroff, 2021).

Tutti possiedono ormai almeno uno smartphone e dunque l'esecuzione di esperimenti con tali strumenti è alla portata di tutti praticamente a costo zero. Attraverso l'uso di questi strumenti ogni studente può cimentarsi con la costruzione di un apparato, per quanto semplice, l'acquisizione, il trattamento dei dati e la loro interpretazione.

Arduino in laboratorio

Arduino, oltre a offrire la possibilità di eseguire esperimenti complementari, come quelli relativi alle misure di calorimetria ed elettriche, impossibili da eseguire con gli smartphone, permette lo sviluppo di competenze trasversali considerate oggi imprescindibili, quali la capacità di scrivere codice, di risolvere problemi anche attraverso la ricerca d'informazioni su Internet, e di comunicazione.

Il basso costo di Arduino (poco più di 20 euro per una scheda originale, fino a 5 per cloni, peraltro perfettamente legali dato il carattere aperto del progetto) è confrontabile con quello di un paio di quaderni di buona qualità e si può dunque richiederne l'acquisto a studenti e studentesse senza pesare sui bilanci familiari. Molti, dopo averne imparato il funzionamento, frequentemente continuano a usarlo a scopo ludico o pratico.

MODELLI EFFICACI DI LABORATORIO

Con gli strumenti digitali sopra illustrati, il limite è costituito soltanto dalla fantasia: è possibile realizzare esperimenti quasi in ogni settore della fisica (sono documentati persino esperimenti riguardanti la fisica moderna).

I modelli di utilizzo degli strumenti possono essere i più vari.

Gli strumenti si possono usare come nel laboratorio tradizionale, al posto degli strumenti dedicati. Pur essendo un'opzione minimale, non è da scartare, perché talvolta può essere più semplice usare smartphone e/o Arduino per realizzare una dimostrazione. Per esempio, per mostrare l'induzione e.m. è spesso necessario impiegare bobine con centinaia di spire e galvanometri molto sensibili e pronti. Con Arduino il fenomeno si può apprezzare con una bobina realizzata avvolgendo qualche decina di spire attorno a un tubo, facendovi cadere un comune magnete (Walker, 2020).

Data la facile trasportabilità del materiale, la disponibilità di un locale dedicato è superflua. Gli esperimenti si possono facilmente realizzare sulla cattedra dell'aula nella quale si fa la lezione. Uno smartphone fissato all'estremità di una riga a sbalzo sulla cattedra, fatta oscillare, sostituisce egregiamente i sistemi professionali dedicati allo studio della Legge di Hooke.

Per lo stesso motivo, gli esperimenti si possono allestire facilmente sui banchi e dunque si può far eseguire l'esperimento a gruppi o individualmente. Nel caso di esperimenti con smartphone è sufficiente organizzare i gruppi in maniera che per ciascuno ci sia almeno una persona con il telefono che dispone del sensore idoneo (il che, statisticamente, in una classe, si verifica con probabilità prossima a uno). Se gli esperimenti sono condotti con Arduino, si possono fornire i materiali richiedendo alla scuola di acquistarne un certo numero, oppure si può chiedere a studenti e studentesse di procurarseli, con una spesa comparabile con quella del comune materiale di consumo scolastico che quindi non pesa sul budget delle famiglie più di quanto non facciano le richieste ordinarie. In questo modo attività come l'osservazione della carica e della scarica di un condensatore sono di una semplicità disarmante e molto istruttivi.

A studenti e studentesse si può chiedere di eseguire gli esperimenti come compito a casa, in sostituzione dell'usuale assegnazione di svolgere un certo numero di esercizi. In questo caso non si grava sull'orario scolastico. L'esecuzione dell'esperimento si può modulare facilmente dalla semplice acquisizione dei dati, da discutere in classe, all'analisi degli stessi per ottenere una misura di una grandezza fisica specifica (p.e. l'accelerazione di gravità). Anche in questo caso, se gli esperimenti sono realizzati usando Arduino, se ne può chiedere l'acquisto o si possono fornire kit in comodato d'uso da restituire al termine dell'anno scolastico. Anche i tempi di esecuzione si possono ottimizzare per non pesare troppo sull'impegno richiesto. Le esperienze sulle onde sonore, come la produzione e l'osservazione di fenomeni d'interferenza, si prestano bene per essere eseguiti a casa perché richiedono un relativo silenzio.

Tutti gli esperimenti realizzabili con questi strumenti si possono eseguire in poco tempo e con poca fatica in condizioni sperimentali diverse, conducendo quindi ad acquisire dati che si possono rappresentare graficamente e, da questi, ricavarne le grandezze fisiche d'interesse. Per esempio, invece di misurare il periodo di oscillazione T di un pendolo di lunghezza fissata ℓ, lo si può acquisire per pendoli di lunghezze diverse al fine di estrarre la misura dell'accelerazione di gravità dalla distribuzione dei dati di T^2 in funzione di ℓ. In questo modo si comprende a fondo il ruolo dell'incertezza nella misura e come mitigarla, nonché la relazione tra le grandezze fisiche.

Spesso, per ragioni legate al costo contenuto, l'accuratezza degli strumenti non è la migliore possibile (al contrario della sensibilità, che è di norma elevatissima). Lungi dall'essere un problema, la limitata accuratezza si presta per discutere i problemi legati alla misura con strumenti tarati.

L'elevata sensibilità, poi, rende palese, oltre alle fluttuazioni statistiche, la presenza di possibili errori sistematici che possono essere dovuti all'imperizia dello sperimentatore, ma anche alla non aderenza degli apparati alle condizioni entro le quali i modelli matematici sono formulati (per esempio, perché si trascura l'attrito). In molti casi è possibile tenerne conto nell'analisi dei dati e anche in questo caso, quello che viene per lo più percepito come un problema, si trasforma nell'opportunità di far comprendere il significato e i limiti delle leggi fisiche e dei modelli.

Il lavoro di gruppo, nei modelli di laboratorio proposti, non è una limitazione dovuta all'indisponibilità di strumentazione sufficiente, ma una precisa scelta didattica. È ben noto che esistono molti modi d'imparare e che l'apprendimento può non essere proficuo per tutti. Per alcuni, la fisica è poco o per nulla interessante. Il risultato è una scarsa partecipazione alle attività didattiche, spesso con azioni di disturbo nel corso delle lezioni e/o delle esercitazioni. Attraverso l'utilizzo delle pratiche suggerite si possono facilmente coinvolgere anche studenti e studentesse che hanno uno scarso interesse verso la materia, perché riescono a trovare uno spazio nel quale si rivelano utili per alcune abilità, innate o sviluppate autonomamente, come, per esempio, ma non solo, quelle manuali, che si rivelano preziosissime per la costruzione degli apparati.

Il lavoro individuale, viceversa, si presta per mitigare problemi relativi alle questioni di genere. È noto, infatti, che le studentesse si sentono meno portate nelle attività di laboratorio e, a causa di ciò, delegano, di fatto, l'esecuzione delle attività ai compagni maschi. Con l'uso di dispositivi personali si forzano le ragazze a eseguire operazioni tradizionalmente considerate tipiche del genere maschile, destando quindi, in alcune di esse, la curiosità che può portare a riconsiderare il proprio ruolo sociale.

Infine, molti esperimenti (per esempio, tutti quelli che hanno a che fare con fenomeni descrivibili con leggi di tipo esponenziale o periodico) si prestano bene come applicazioni o come introduzione ai corrispondenti argomenti matematici, favorendo una naturale e proficua interazione tra le due discipline che vada ben al di là della comune percezione secondo cui la fisica non è altro che una matematica con regole sue proprie, spesso lontane dall'esperienza quotidiana.

Anche grazie alla possibilità di eseguire gli esperimenti a casa, il tempo sottratto, per così dire, alle altre attività scolastiche è minimo, se non nullo. Non è comunque necessario eccedere nel numero di esperimenti. Già un solo esperimento per quadrimestre permette a studenti e studentesse di partecipare alle lezioni in aula con rinnovato interesse e con maggiore consapevolezza.

Allo scopo di supportare gli insegnanti nell'introdurre queste attività nelle loro classi, l'autore di questa relazione ha pubblicato un testo (Organtini, 2021) edito dalla casa editrice Zanichelli, che consente d'imparare la programmazione di Arduino svolgendo esperimenti di fisica. Il testo va considerato un testo di fisica e non di programmazione o di argomento tecnologico, essendo la tecnologia solo un pretesto per discutere il significato delle leggi fisiche illustrate.

Oltre a questa risorsa, l'autore ha realizzato, insieme ad altri ricercatori di Università distribuite in diversi continenti, il sito smartphysicslab.org (Smartphysicslab, 2020), dal quale è possibile scaricare liberamente proposte di esperimento modificabili e ridistribuibili in formati diversi. Gli insegnanti possono a loro volta contribuire proponendo ulteriori esperimenti, che saranno vagliati dal comitato editoriale al fine di far loro assumere un formato omogeneo e facilmente riconoscibile.

BIBLIOGRAFIA

Arduino Science Journal (2020). https://www.arduino.cc/education/science-journal

F. Bouquet, G. Creutzer, D. Dorsel, J. Vince, J. Bobroff (2021). Enhance your smartphone with a Bluetooth arduino nano board. *Physics Education*, 57 (1) 015015.

MIUR (2008). Gruppo di Lavoro Interministeriale per lo Sviluppo della Cultura Scientifica e Tecnologica: *LABORATORI E SPAZI ATTREZZATI PER L'INSEGNAMENTO SCIENTIFICO.* https://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/gst/allegati/slide1.pdf.

G. Organtini (2020). *Fisica con Arduino*. Zanichelli.

Smartphysicslab (2020). https://www.smartphysicslab.org/

S. Staacks, S. Hütz, H. Heinke, C. Stampfer, 2019. Advanced tools for smartphone-based experiments: phyphox. *Physics Education*, **53** (4), 045009, DOI: 10.1088/1361-6552/aac05e.

C. Stampfer, H. Heinke, S. Staacks, 2020. A lab in the pocket. *Nature Reviews Materials*, **5** (3), 169-170, DOI: 10.1038/s41578-020-0184-2.

R. Vieyra, C. Vieyra, A. Marti, M. Monteiro, P. Jeanjacquot (2015). Turn your smartphone into a science laboratory. *The Science Teacher*, **82**(9), 32-40.

J. Walker (2020). *Fondamenti di Fisica*, 6 ed. Pearson.

DI LUNULA IN LUNULA CON GEOGEBRA CONTRO I CONFLITTI DELL'INFINITO

Ferdinando Arzarello ([1]), Silvia Beltramino ([2]), Sabrina Camarda ([3])
([1]) Dipartimento di Matematica Università di Torino, ([2]) Liceo M. Curie Pinerolo, ([3]) IIS G. Natta Rivoli

Abstract

Il tema dell'infinito è sempre stato oggetto di studi e di difficile gestione da parte dei nostri studenti, ma anche da parte dei grandi matematici del passato: infatti si creano diverse tensioni tra l'idea di finito e quella di infinito. Gli intrecci tra il pensiero matematico, il registro narrativo, il registro algebrico e gli aspetti visivi permettono di avvicinarsi all'infinito sfruttando in positivo i conflitti generati da tali tensioni. L'obiettivo di questo articolo è presentare alcuni esempi didattici (sperimentati in una seconda e una quarta liceo scientifico) in cui i conflitti diventano uno stimolo per avvicinarsi all'idea di infinito. Si propone lo studio di figure geometriche generate a partire dalle Lunule di Ippocrate. Attraverso un percorso storico, che parte dai tre problemi classici dell'Antica Grecia e arriva ai tempi moderni, l'attività didattica proposta presenta un avvicinamento al concetto di infinito che prepara al raffinamento ulteriore di questa nozione per poterla affrontare successivamente con l'introduzione del calcolo infinitesimale. A supporto dell'intera proposta didattica c'è il software GeoGebra che, vedremo, agevola i processi di apprendimento relativi degli studenti. In particolare, esso costituisce anche uno strumento didatticamente efficace per introdurre i primi elementi di programmazione tramite le "macro".

Parole-chiave
Infinito, conflitti, strumenti.

I CONFLITTI

Il concetto di infinito, come opposto a quello di finito, è stato un ostacolo epistemologico arduo per i matematici nel corso dei secoli ed è certamente un ostacolo cognitivo non indifferente per i nostri allievi. In questo articolo presentiamo una proposta didattica di avvicinamento all'infinito. La proposta si basa sugli intrecci tra il pensiero matematico, il registro narrativo, il registro algebrico e gli aspetti visivi; a nostro avviso tali intrecci permettono di avvicinarsi all'infinito sfruttando in positivo le tensioni e i conflitti cognitivi tra questo e il finito. Nello specifico presenteremo due esperienze didattiche proposte in una classe seconda e una classe quarta di scuola secondaria di secondo grado.
Per chiarire che cosa intendiamo con il termine *conflitto cognitivo* proponiamo un esempio tratto dalla letteratura: il matematico David Tall presentò una sua indagine svolta su trentasei studenti del primo anno di Matematica dell'Università di Warwick, in Inghilterra (Tall & Schwarzenberger,1978). Tall chiese agli studenti, tra le altre cose, la definizione formale di limite e quale fosse il valore di $0,\overline{9}$: sette tra i trentasei rispondenti diedero la corretta definizione formale di limite, ma solo quattordici studenti sostennero che $0,\overline{9}=1$ e di questi quattordici studenti, però, solo uno diede anche correttamente la definizione di limite. Appare evidente l'esistenza di una scollatura tra la definizione formale di limite e il suo significato: gli studenti sembrano non sapere padroneggiarne correttamente il significato della definizione.

Se esaminiamo alcune delle risposte fornite dagli studenti[1], la natura della scollatura appare ancor più chiaramente: si evidenzia un conflitto tra $0,\overline{9}$ pensato come un numero razionale che presenta nella sua parte decimale un numero finito, seppure elevato, di 9 e la sua espansione infinita, rappresentata dall'innocente linea sopra il nove, che esprime un allineamento di cifre che non termina mai, infinito appunto. Ma questo non era (è, allora come oggi) l'unico conflitto: nelle risposte gli studenti mostravano misconcetti e idee infinitesimali non sempre corrette. Le risposte tipiche erano:

- $0,\overline{9}$ è meno di uno, ma la differenza tra questo e uno è infinitamente piccola;
- $0,\overline{9}$ è poco meno di uno perché anche all'infinito il numero, sebbene vicino a uno, non è ancora tecnicamente uguale a uno.

È interessante sottolineare che entrambe le risposte provenivano da studenti che affermavano di conoscere una definizione precisa di limite: ancora una volta conoscere la definizione formale non significa saper padroneggiare il senso e il significato della stessa. Anche tra gli studenti che affermavano correttamente l'uguaglianza tra $0,\overline{9}$ e 1 alcuni erano chiaramente turbati dall'idea di infinito: si consideri, per esempio, la risposta data di uno di loro: "Penso che $0,\overline{9}$ sia uguale a 1 perché potremmo dire che $0,\overline{9}$ raggiunge uno all'infinito, sebbene l'infinito non esista effettivamente. Usiamo questo modo di pensare nel calcolo, nei limiti [...]", esplicitando così tutto il suo turbamento.

Efraim Fischbein (2001) giustifica le origini dei conflitti che sorgono quando si *commercia* con l'infinito introducendo quelli che chiama *modelli taciti di ragionamento*; egli sostiene che quando si ha a che fare con concetti molto astratti o molto complessi, il ragionamento tende a rimpiazzarli con sostituti più familiari, in qualche modo più accessibili e più facilmente manipolabili: sono quelli che lui definisce 'modelli mentali'.
A volte i modelli mentali sono utilizzati in modo intenzionale e se usati consapevolmente possono aiutare la comprensione del problema o del concetto matematico. Il problema sorge quando questi modelli sono utilizzati in modo inconsapevole, quando cioè non si è coscienti della loro presenza e/o del loro impatto: in questo caso i modelli mentali sono chiamati *modelli taciti*. Il rischio dei modelli taciti è che essi possono produrre conclusioni distorte in quanto portano con sé anche proprietà che non sono rilevanti per l'originale ma che a volte sono scorrette.
Fischbein indica in particolare due modelli taciti in conflitto tra di loro e in grado di falsare le conclusioni dei ragionamenti sull'infinito, soprattutto quando sono coinvolti aspetti 'figurali' (cioè riguardanti gli aspetti visivi delle figure):

1. la persistenza dei cosiddetti modelli di figure come *macchie e tracce di inchiostro*;
2. l'equivalenza intuitiva dell'infinito con qualcosa di *inesauribile*.

Per esempio, possiamo pensare alla domanda: "Quanti sono i punti rappresentati nelle tre figure?" rifacendoci ai modelli di figure come macchie e tracce di inchiostro (Fig. 1), oppure confrontando i due segmenti di lunghezza diversa *a* e *b* (Fig. 2) possiamo chiedere quale tra i due segmenti contiene il maggior numero di punti. Nel primo caso, la tendenza è a dire che il segmento ha meno punti del quadrato e questo meno punti del cubo; per il secondo problema è emblematica la risposta di Luca, uno studente di 13 anni, che, dopo alcune esitazioni, risponde così: "C'è lo stesso numero di punti nei due segmenti. Entrambi gli insiemi sono infiniti. Ma i punti nel segmento più lungo sono più grandi".

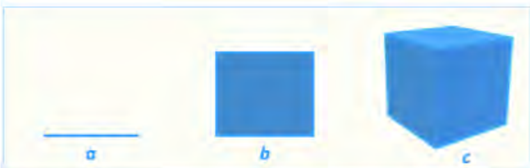


Figura 1 - Esempi di modelli pittorici di figure come macchie e tracce di inchiostro

[1] Per completezza dell'informazione:

- 7 studenti su 36 diedero la corretta definizione formale di limite, 29 risposero in modo non corretto;
- 14 studenti affermarono che $0,\overline{9} = 1$, 2 o dissero che $0,\overline{9} < 1$ e 2 non risposero.

Figura 2 - Quali tra i due segmenti contiene il maggior numero di punti?

La risposta di Luca si discosta poco dall'affermazione di Cantor (in una lettera a Dedekind del 29-06-1877) quando, avendo costruito una corrispondenza biiettiva tra i punti di un segmento e quelli del quadrato avente come lato quel segmento, scrisse: "Lo vedo, ma non lo credo!".
Un altro modello tacito concettualizza l'infinito come qualcosa di *inesauribile*. Compare per esempio nelle risposte fornite da studenti che frequentano la scuola secondaria di secondo grado (Fischbein, 2001), che risolvono il seguente problema: "sia C un punto arbitrario sul segmento AB (Fig. 3). Dividiamo il segmento AB a metà e continuiamo a dividere a metà ogni segmento così ottenuto: arriveremo a una situazione tale che uno dei punti di divisione coincida con il punto C?".

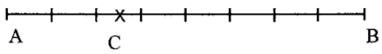


Figura 3 - Dividendo ripetutamente il segmento a metà, uno dei punti di divisione coinciderà con C?

La maggioranza degli studenti fornisce risposte affermative. Nell'indagine presentata da Fischbein, tutti gli studenti conoscevano i numeri razionali e irrazionali, tuttavia, non sembra che abbiano tenuto conto del fatto che un numero C irrazionale non possa essere raggiunto da una tale divisione e che, contemporaneamente, non tutti i punti razionali possono essere raggiunti.
Secondo Fischbein, il motivo di tali risposte risiede nel fatto che l'infinito appare intuitivamente come qualcosa di equivalente all'inesauribile, cioè, se si continuasse il processo di divisione all'infinito, tutti i punti potrebbero essere raggiunti. Questa interpretazione di infinito porta, intuitivamente, a supporre l'esistenza un solo tipo di infinito, infatti un infinito che equivale all'inesauribile non può essere superato da un infinito più ricco.
In generale, nella risoluzione dei problemi in cui compare l'infinito si possono identificare le due tipologie sopra illustrate di modelli taciti: figure come macchie e tracce d'inchiostro da un lato, e l'inesauribilità dall'altro. Essi agiscono *dietro le quinte* e rappresentano due tendenze opposte che sono fonte di *conflitti*. L'effetto è che il concetto matematico di infinito attuale è, intuitivamente, contraddittorio. I due modelli tendono a entrare in conflitto tra loro, aprendo la strada a misconcetti difficilmente superabili.
Stavy e Tirosh (1999) propongono tra i conflitti che sorgono con l'infinito ancora altri modelli: per esempio, se consideriamo due grandezze A e B legate tra loro in qualche modo (per esempio il perimetro e l'area di un quadrato che varia), può tacitamente nascere l'idea che se la grandezza A cresce, allora anche la grandezza B cresce, mentre se la grandezza A diminuisce, allora anche B diminuisce e contemporaneamente se la grandezza A rimane costante, la stessa cosa succede alla grandezza B. Anche in questo caso gli esempi sono numerosi, ma esistono situazioni in cui i modelli taciti di Tirosh non sono validi. Si pensi a figure come il triangolo di Sierpiński (Fig. 4), dove all'aumentare dei passi nella costruzione l'area diminuisce e tende a zero, mentre il perimetro cresce e tende a infinito.

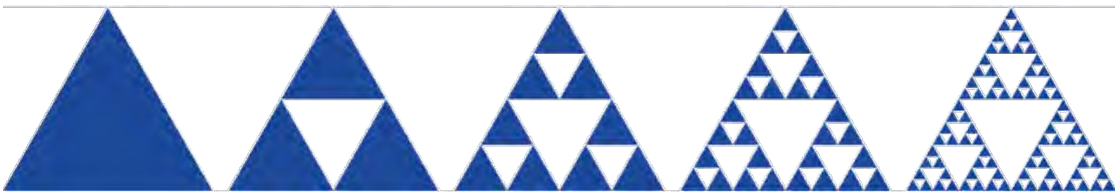


Figura 4 - Primi passi della costruzione del triangolo di Sierpiński

Come superare questi conflitti? Come evitare che tali conflitti generino misconcezioni? Commenta David Tall: *"Quindi è compito dell'insegnante trovare il conflitto e appianarlo in modo adeguato. [...] La scienza dell'insegnamento sta nella chiara esposizione delle idee principali, ma l'arte sta nella*

ricerca delle difficoltà individuali e nella rimozione dei conflitti". Fischbein suggerisce di rendere consapevoli gli studenti dell'impatto dei modelli taciti (di solito riguardano aspetti concernenti figure, che Fischbein chiama figurali: Fischbein, 1987) sui loro processi di ragionamento (che Fischbein chiama concettuali, contrapponendoli ai figurali).
La nostra proposta didattica nasce dall'analisi di questi conflitti e si preoccupa di superarli anche con il supporto di GeoGebra. In particolare:

- nella classe 4ª della scuola secondaria di secondo grado si affrontano i conflitti legati all'infinito utilizzando opportunamente l'instrumentazione di GeoGebra che, da un lato permette di intrecciare in modo interattivo e concreto gli aspetti figurali con le rappresentazioni grafiche e numeriche e dall'altro, con Classroom, supporta le interazioni tra gli allievi e tra questi e l'insegnante anche in lezione a distanza, durante la DDI. Il lavoro nella classe 4° è descritto dalla prof.ssa Sabrina Carmada, docente sperimentatrice;
- nella classe 2ª della scuola secondaria di secondo grado si rendono espliciti i conflitti agli allievi, tramite l'interazione con lo strumento, che li supporta anche al superamento delle contraddizioni. Il lavoro nella classe 2° è descritto dalla prof.ssa Silvia Beltramino, docente sperimentatrice.

LE LUNULE IN QUARTA
L'attività proposta in quarta è stata svolta verso la fine dell'anno scolastico, con l'obiettivo di introdurre il concetto di limite e di infinito, partendo da un approccio storico ai tre famosi problemi dell'Antica Grecia: la quadratura del cerchio, la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo.
Dopo una breve analisi della figura del più noto matematico e geometra del V secolo a.C. Ippocrate di Chio e del suo contributo al calcolo dell'area di una figura curvilinea, la lunula, in termini di un'altra figura rettilinea, il triangolo, si è passati alla costruzione della successione delle lunule a partire dalla lunula L_1. In tal senso l'utilizzo di GeoGebra è stato di grande supporto; in particolare due elementi sono stati significativi:

- GGB integrato con Classroom
- l'uso dello *Strumento Macro* con GGB per costruire nella *Vista Grafici* la successione delle Lunule.

La piattaforma virtuale, *GeoGebra-Classroom*, presente sul sito ufficiale www.geogebra.org/classroom, ha permesso la piena realizzazione di questa unità didattica anche in lezione a distanza, durante la DDI. È stato possibile, infatti, assegnare agli studenti esercizi e attività, monitorare in tempo reale il loro progresso durante lo svolgimento di questi, assegnare domande all'intera classe e visualizzare tutte le risposte in modo complessivo, nascondendo eventualmente i nomi degli studenti per questione di privacy, creare e facilitare discussioni interattive tra tutti gli studenti oppure a piccoli gruppi. Altro elemento molto interessante, per chi è abituato a lavorare in team, è stato quello di aggiungere alla *GeoGebra-Classroom* un docente collaboratore che ha avuto accesso alle stesse informazioni del docente creatore della *Virtual-Classroom.*
Per creare una *Classe-GGB* è necessario impostare un'*Attività* contenente elementi che possano essere trasformati in esercizi; gli elementi possono essere domande a risposta multipla o aperta, App di GeoGebra quali GGB-Classico, GGB-Geometria, Calcolatrice grafica, CAS, 3-D GeoGebra.
In particolare, nel modulo dedicato alle Lunule di Ippocrate, l'Attività impostata prevede tredici esercizi. I primi quattro utilizzano l'App interattiva di GGB-Classico (Fig. 5)
Esercizio 1: prima lunula di Ippocrate a partire dalla diagonale del quadrato di lato assegnato
Esercizio 2: triangolo di Sierpiński con lo strumento Macro di GGB
Esercizio 3: successione dei quadrati inscritti e ruotati rispetto al punto medio della metà del lato del quadrato assegnato con lo strumento Macro di GGB
Esercizio 4: successione delle lunule di Ippocrate con lo strumento Macro di GGB

Figura 5 – Costruzioni geometriche

Per riflettere sul significato di quanto fatto, dal 5° al 13° Esercizio, sono state proposte alcune domande a risposta aperta, con l'obiettivo di esplorare le trasformazioni geometriche legate alla costruzione della Lunula successiva alla prima e di studiare le successioni delle aree delle Lunule, dei perimetri delle Lunule, delle somme parziali delle aree e dei perimetri delle Lunule.
Di seguito le schede studente classiche che ripercorrono gli elementi essenziali riportati negli esercizi della Virtual-Classroom:

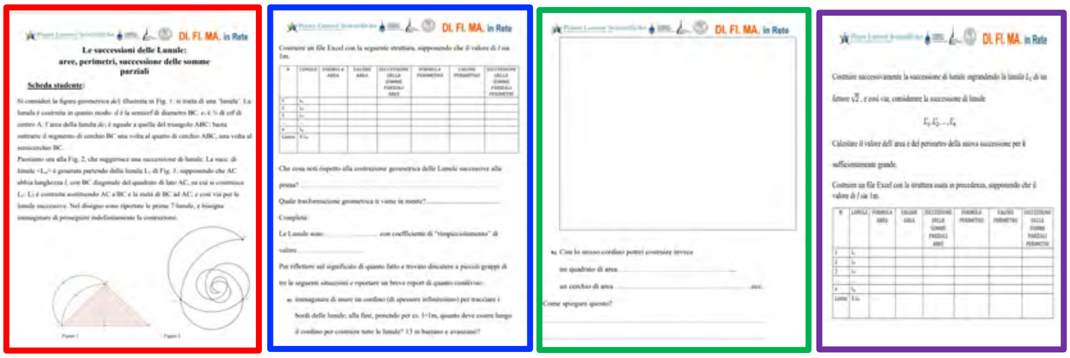


Figura 6

In Fig. 7 sono riportate alcune risposte degli studenti:

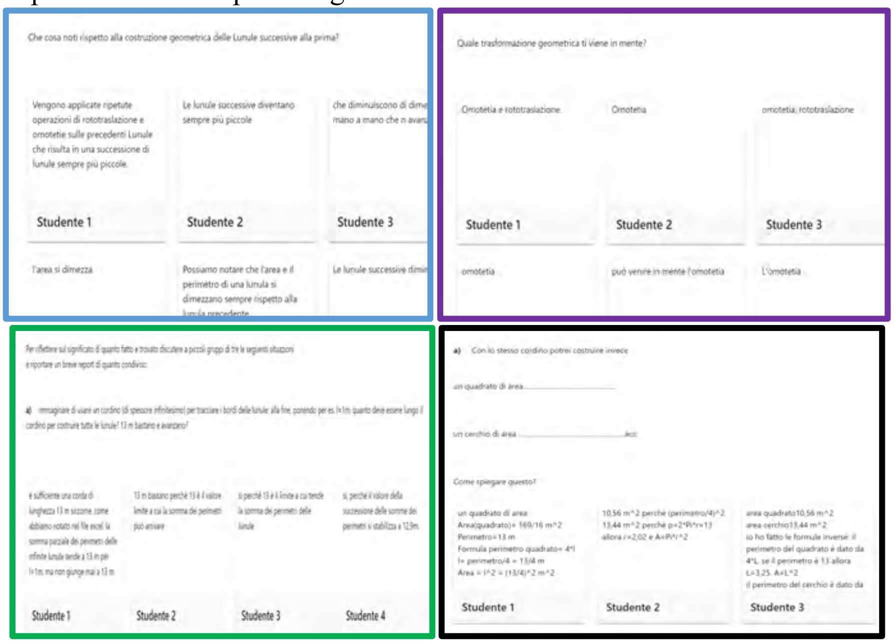


Figura 7

Il secondo elemento che ha fatto la differenza in DID al fine di stimolare la curiosità degli studenti e di farli anche divertire è stato l'utilizzo dello *Strumento Macro* di GGB: a partire da una costruzione modello, con un semplice clic del mouse, GeoGebra permette di generare in automatico una serie di operazioni a volte anche molto complesse. La creazione di Macro, chiamate Strumenti in GeoGebra è estremamente semplice: una volta realizzata una costruzione modello, si sceglie *Crea Nuovi Strumenti* dal menu *Strumenti*. Si devono indicare gli *oggetti iniziali e finali* della macro-costruzione, il nome e l'eventuale icona da usare, il nome di comando (cioè il nome da usare se si vuole inserire il comando tramite la finestra di input) e un eventuale help per l'utente. Le macro che si usano in una data costruzione vengono salvate all'interno del file GeoGebra (file di tipo .ggb).
Usando *Organizza Strumenti* dal menu *Strumenti*, si possono anche salvare in uno speciale file (di tipo .ggt), che successivamente può essere caricato all'interno di un altro file dove la costruzione può essere utile: dall'interno del file a cui si sta lavorando basta scegliere *Apri* dal menu File e ritrovare la macro costruzione salvata.
Nel breve video, reperibile al link **https://screencast-o-matic.com/watch/cr6jjOVXbCX**, è descritto il modello geometrico, utilizzato dagli studenti, per realizzare la Prima Lunula L_1 costruita sulla diagonale BC del quadrato di lato AC. Le lunule successive L_2, L_3, L_4...
sono costruite con lo strumento Macro che vede come oggetti iniziali i punti A, C, B e come oggetti finali i due arche di circonferenze e il punto medio del lato, in questo caso CB, sul quale è stata costruita la prima Lunula, tenendo presente il verso di rotazione antioraria con il quale si clicca sui tre punti.

LE LUNULE IN SECONDA

L'attività proposta in seconda è simile a quella di quarta: siamo partiti da schede di lavoro guidate con l'obiettivo di introdurre la nozione di lunula e indagare la successione delle stesse.
L'attività è stata proposta a metà dell'anno scolastico quando le conoscenze pregresse erano: conoscenze sui numeri irrazionali e in particolare i radicali, su equazioni e funzioni di secondo grado e qualche nozione sulle circonferenze. Gli studenti erano abituati a lavorare in piccoli gruppi, a condividere le loro scoperte e a utilizzare le TIC in classe (o a casa, nel caso di DDI). Lo strumento GeoGebra non è stato proposto dal docente, ma sono gli studenti stessi che in autonomia hanno deciso di utilizzarlo.
Inizialmente si forniscono le indicazioni per disegnare una lunula a partire da un quadrato di lato ℓ. Con una discussione matematica, si deduce la quadrabilità della lunula (la sua area infatti è $A(\ell) = \frac{\ell^2}{2}$) e al calcolo del perimetro ($P(\ell) = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2} \cdot \ell$), per poi, fissato il valore di ℓ, esplicitare:

- la successione per il calcolo delle aree: $A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \ell^2$;
- la successione per il calcolo del perimetro: $P_n = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2} \cdot \ell \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$.

Nella fase di lavoro successiva la classe si è trovata a lavorare a distanza, il che ha permesso di creare dei gruppi di lavoro di tre o quattro studenti. I ragazzi avevano a disposizione una stanza virtuale dedicata in cui discutere, un foglio condiviso su cui scrivere la risposta e in cui era presente la traccia del lavoro (Fig. 8) e, ovviamente, un calcolatore.
Agli studenti è proposto di produrre una successione di lunule con un cordino lungo 13 m, e si chiede loro di indicare quante lunule sia possibile rappresentare con tale cordino.
Gli studenti hanno iniziato a esporre il loro lavoro di gruppo e le risposte alle domande. Qualche gruppo ha dichiarato la propria difficoltà nell'applicare quanto avevano pensato per individuare la risposta: "Il procedimento è semplice – dice Elena – abbiamo pensato di calcolare passo dopo passo il perimetro e di fare la somma dei perimetri trovati, fino a superare 13. Ma il procedimento è lungo anche se abbiamo usato il foglio di calcolo di GeoGebra ed è *pieno di approssimazioni per via dei numeri* π *e* $\sqrt{2}$. Non abbiamo avuto tempo di finire… ci siamo fermati alla sesta lunula, ma non siamo arrivati a 13."

Ipotizziamo che il lato ℓ del quadrato iniziale sia lungo 1m e immaginiamo di iterare il processo segnando il bordo delle varie lunule con cordino.

Secondo voi, quante lunule si riescono a disegnare con un cordino lungo 13 m? Perché?

Figura 8 - Terza scheda di lavoro**.**

La risposta di Elena è quella che ha aperto la discussione: nel suo gruppo (come nella maggioranza dei gruppi) la scelta di utilizzare il foglio di calcolo di GeoGebra è stata dettata principalmente dalla necessità di semplificare il lavoro e in particolare gli aspetti computazionali. Il gruppo di Elena ha subito sottolineato la questione di come approssimare valori irrazionali e quante cifre significative considerare: *se i perimetri diventano sempre più piccoli è importante avere tante cifre significative, altrimenti non vedi la differenza*, sostenevano.
Anche Viola afferma di aver lavorato con il suo gruppo utilizzando lo stesso procedimento di Elena. Viola però dichiara che il suo gruppo è arrivato a una conclusione: "Allora noi siamo arrivati alla conclusione *di circa 18 lunule*. Più che altro non arrivavamo esattamente a 13, ma circa 12,92 però... visto che avevamo immaginato la situazione proprio concreta diventava difficile disegnare con un cordino lunule che avessero un perimetro anche più piccolo di un centimetro e quindi ... *idealmente ovviamente il numero poteva essere più alto di lunule*, però concretamente il numero di lunule rappresentabili è 18." Viola è una ragazza brava in matematica e la sua risposta è stata convincente. Marco afferma che il loro gruppo si è fermato a 4 lunule, ma sentendo la risposta di Viola pensa di essere d'accordo e lo giustifica: "dopo 4 lunule il 13 è ancora distante; quindi, ci possono benissimo essere ancora 14 lunule. Deve anche considerare, prof, che il *perimetro diminuisce sempre di più* quindi 18 è un numero *plausibile*!" La discussione sembra essere arrivata al termine, con una risposta plausibile, accettata dai più, ma interviene il gruppo di Edoardo e Francesco.
Inizia Francesco: "Noi abbiamo messo i valori su un foglio di calcolo. Abbiamo messo la formula, abbiamo messo i vari passaggi e tirato giù per vedere il risultato... e alla fine abbiamo visto che arrivati a circa 12,94 ... il perimetro [di ogni lunula] era molto piccolo e quindi aumentava di poco: non arrivano praticamente mai a 13. *Però noi non ci siamo posti il problema di renderlo concretamente con il cordino; quindi, abbiamo messo come risultato che sembrava potesse fare l'infinito, quasi*. Perché il nostro non è un cordino reale… *è un cordino solo nella mente*."

	A	B	C
1	Passo	Perimetro L	Perimetro Tot
21	20	0.01	12.93
22	21	0	12.94
23	22	0	12.94
24	23	0	12.94
25	24	0	12.94

Figura 9 - Foglio di calcolo prodotto dal gruppo di Edoardo e Francesco

Nel leggere l'intervento di Francesco si possono vedere i passaggi nel costruire il foglio di calcolo. Francesco ha anche proiettato il file prodotto da loro (Fig. 9) e durante il suo racconto a supporto della tesi "il perimetro era molto piccolo e quindi la successione aumentava di poco" indica con il mouse le ultime righe della successione (dalla riga 22 alla riga 25) dove il perimetro della lunula è indicato da GeoGebra come zero. L'intervento dell'insegnante vuole proprio evidenziare il numero 0 in queste righe, che apparentemente non fanno aumentare il perimetro. E chiede perciò il motivo di tale

affermazione: “Leggo che dalla ventunesima lunula in poi il perimetro è zero, quindi il perimetro non aumenta più? Perché voi dite che aumenta di poco?”
Risponde Edoardo: “Intanto perché sappiamo *che è una figura geometrica quindi in teoria dovrebbe avere un valore* che sia maggiore di zero e poi dove poter *riprovare andare a fare la formula con n che vale 75 e vedere se vale qualcosa,* per esempio. Abbiamo provato e sarà sicuramente qualcosa di diverso, sempre molto molto piccolo ma secondo me non può essere certo zero proprio.”
E poi continua Edoardo: “Abbiamo anche rappresentato i dati del perimetro in *un grafico* (Fig. 10) *per visualizzare un po' più concretamente quello che abbiamo fatto* e sull'asse delle ordinate abbiamo il numero dei passaggi che arriva quasi a ottanta perché, come abbiamo visto abbiamo calcolato fino a 75 lunule, e ***sotto*** abbiamo il valore del perimetro e vediamo che quando sta per toccare 13 inizia a salire salire a salire e non lo tocca mai ed e un po' quello che abbiamo visto con i dati. Quindi *aumenta aumenta aumenta* ma non arriva mai a 13. [...] potrebbe esserci lì una sorta di asintoto”.

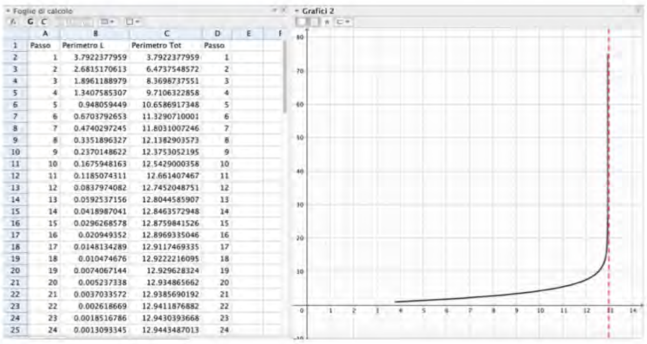


Figura 10 – Grafico prodotto dal gruppo di Edoardo e Francesco

Dalla discussione si è potuto concludere la presenza di differenti risposte a seconda dell'utilizzo del cordino della mente piuttosto che il cordino reale, di vedere uno zero che non è zero e che permette di dire che si può continuare all'infinito (senza più il “*quasi*” timidamente messo da Francesco). Per capire e soprattutto per convincere la classe di questo fatto si è fatto ricorso al registro numerico e algebrico, ma anche il registro grafico visualizzando appunto un grafico (dove, a dire il vero, si confonde la variabile dipendente da quella indipendente[1]), che serve per capire meglio, come dice Edoardo. Grazie alle potenzialità di GeoGebra si può agevolmente lavorare su una commistione tra i vari registri e arrivare all'asintoto (a cui abbiamo tolto il “*sorta*” messo da Edoardo).

In entrambe le attività gli studenti incontrano l'infinito e attraverso l'aiuto del software iniziano a dare un senso alle nozioni che incontrano. Gli studenti sono di età diverse, ma i conflitti sull'infinito non sono così diversi. In particolare, si può notare come vengano superati attraverso il confronto tra pari, il dialogo con il docente e l'intervento del software, che interviene a supporto. In questo confronto giocano in modo essenziale aspetti figurali e concettuali (Fischbein, 2001): le figure e le formule attraverso la dinamicità di Geogebra stimolano e supportano il superamento dei vari conflitti cognitivi e un'elaborazione concettuale via via più approfondita.
Si sottolinea come GeoGebra sia utilizzato nelle due attività in modo differente: in quarta la docente ha pensato alcune attività strutturate e schede di lavoro che prevedono non solo l'utilizzo del software, ma anche le sue potenzialità online; in seconda, invece, l'utilizzo di GeoGebra è conseguenza di esigenze dei ragazzi che autonomamente cercano di lavorare intersecando il registro numerico con quello grafico, e sono i ragazzi stessi a commentare l'uso di GeoGebra: per capire meglio, ma anche per vedere meglio. Terminiamo prendendo in prestito le parole di Natalia “Lo capisco e lo vedo, certo però che se sommo ogni volta qualcosina di positivo… Per fortuna lo vedo!”

[1] Il grafico sarà corretto solo in un secondo momento con l'intervento dell'insegnante per non distogliere l'attenzione dal concetto di infinito.

BIBLIOGRAFIA

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Mathematics Education Library. Reidel Publishing Co.

Fischbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48. 309-329.

Stavy, R., & Tirosh, D. (1999). Intuitive rules: a way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*. 51–66.

Tall, D. & Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82. 44–49.

COMUNICAZIONI

PIEGATURA DELLA CARTA NELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA: UNA SPERIMENTAZIONE A DISTANZA CON STUDENTI UNIVERSITARI

Francesca Ferrara, Giulia Ferrari, Federica Lucco-Castello
Dipartimento di Matematica ''G. Peano'', Università degli Studi di Torino
francesca.ferrara@unito.it

Abstract
Questo contributo presenta una sperimentazione didattica condotta a distanza nel dicembre del 2020 con l'ausilio delle piattaforme Google Meet e Moodle, in cui un gruppo di studenti e studentesse universitari è stato coinvolto in una serie di attività di piegatura della carta. Le attività si focalizzano sulla scoperta e sull'esplorazione della matematica di particolari origami, detti piatti, mediante quesiti che li guidano nella ricerca delle relazioni tra un modello origami (tridimensionale), il suo diagramma di costruzione e il *crease pattern* associato (bidimensionali). Vedremo alcune delle strategie, comunicative e cognitive, adottate dai gruppi di lavoro per trattare queste relazioni e per condividere i significati che man mano si vanno a costruire. In questo discorso assumono un'importanza centrale il *crease pattern* e la dinamicità che deriva dai movimenti operati nello spazio per la creazione dell'origami e che si accompagna alle conversioni tra registri di rappresentazione diversi.

Parole-chiave
Origami, *crease pattern*, matematica, movimento, rappresentazione

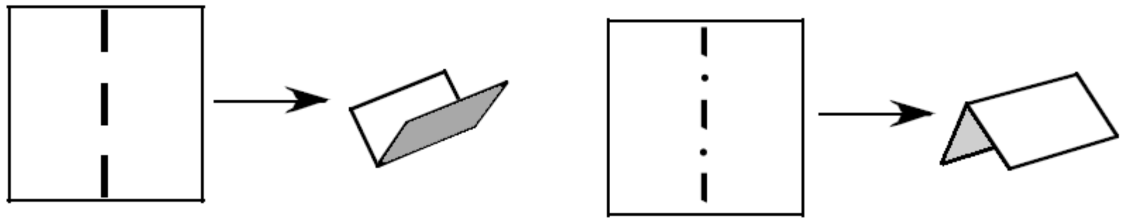
INTRODUZIONE

La cosiddetta arte dell'origami, dal giapponese *oru* (piegare) e *kami* (carta), sembra essere nata in Cina in tempi molto antichi, già con la produzione della carta, prima di approdare in Giappone. La pratica origami consiste nel piegare ripetutamente uno o più fogli di carta, generalmente e tradizionalmente di forma quadrata, per ottenere altre forme (tridimensionali) che spaziano dagli animali ai fiori, a forme e motivi geometrici.
L'arte orientale di piegare la carta è spesso considerata un'attività ricreativa, rivolta principalmente ai bambini, ma negli ultimi anni ha avuto importanti applicazioni in molti campi. Le caratteristiche dell'origami sono per esempio state sfruttate ultimamente per sviluppi in ambito aerospaziale e medico. Con l'intento di condividere le applicazioni dell'origami ad altre discipline, negli ultimi 30 anni sono nati convegni e associazioni a livello nazionale e internazionale che spaziano dalla matematica all'arte, dall'ingegneria alla didattica. Per esempio, tra le conferenze di interesse didattico, l'International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education (OSME) si tiene circa ogni 4 anni dal 1989 ed è nato il Convegno italiano su origami, dinamiche educative e didattica, organizzato dal Centro Diffusione Origami (CDO), giunto nel 2021 alla sua quinta edizione.
Questi convegni, associazioni, incontri e i relativi documenti (atti, libri, ecc.) condividono l'interesse matematico e didattico che si lega a questa arte così antica e solo apparentemente semplice.
In questo lavoro, esploriamo l'attività di piegatura della carta dal punto di vista della ricerca in didattica della matematica, con particolare attenzione ai processi cognitivi che sono messi in atto nella pratica con gli origami e alle rappresentazioni che caratterizzano gli origami (ad esempio, il *crease pattern*) e che possono essere utilizzate per dimostrare teoremi e proprietà dei modelli origami. Presenteremo una sperimentazione didattica, implementata a distanza utilizzando una metodologia di tipo laboratoriale, che ha coinvolto un gruppo di studenti della laurea magistrale in matematica dell'Università di Torino. Analizzeremo l'attività degli studenti, concentrando l'attenzione sulle strategie messe in atto nel corso

dei lavori di gruppo per dare senso a diverse rappresentazioni e comunicare scoperte e relazioni matematiche a partire dall'attività materiale con la carta.

LA MATEMATICA DEGLI ORIGAMI, TRA PIEGHE E RAPPRESENTAZIONI

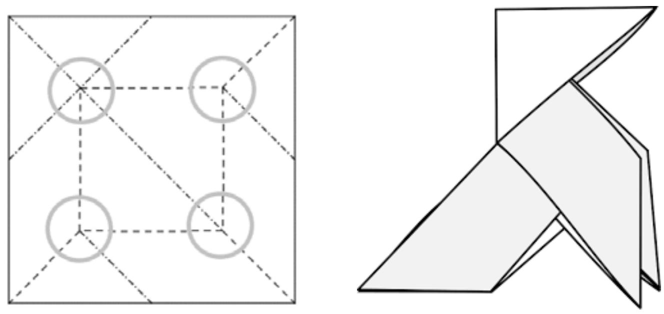
La maggior parte dei libri disponibili in commercio illustra il processo di creazione di un origami attraverso dei diagrammi di costruzione. Il foglio di carta, generalmente quadrato, è mostrato corredato di frecce che indicano la direzione dei movimenti da effettuare e di tratteggi che indicano la posizione e il tipo di pieghe da operare sul foglio nelle varie fasi (passaggi) della costruzione (a monte o a valle). Il processo porta al modello origami, il quale ha generalmente una forma riconducibile a un oggetto, un fiore, un animale. I diagrammi di costruzione forniscono una rappresentazione iconica dei passaggi della costruzione, mentre il modello finale incorpora tutte le trasformazioni operate sul foglio di carta tramite la piegatura. Talvolta, le immagini sono accompagnate da brevi descrizioni a parole. Racchiuse nelle illustrazioni sono invece le proprietà matematiche che si accompagnano alle pieghe. Ciascuna piega infatti è, nella costruzione, un asse di simmetria: fare una piega non significa solo sovrapporre due strati di carta ma anche portare punti e pieghe preesistenti a coincidere sul foglio di carta. La geometria degli origami ha poi la sua formalizzazione matematica in un insieme di sette assiomi, che identificano i possibili modi in cui è lecito creare una piega. Questi assiomi sono diventati celebri come *Assiomi Huzita-Justin* o *Huzita-Hatori* (Huzita, 1989). È stato anche dimostrato che la lista è completa (Alperin & Lang, 2009). La gran parte dei movimenti che concorrono alla costruzione di un modello origami si basa sugli assiomi, rendendo la teoria matematica soggiacente particolarmente ricca e interessante dal punto di vista didattico per la scoperta e lo studio di proprietà e relazioni matematiche in un contesto concreto (Haga, 2008; Hull, 2013).
Il legame tra il modello origami e le trasformazioni subite dal foglio di carta attraverso la piegatura è catturato da una ulteriore, particolare, rappresentazione: il *crease pattern* (o "schema delle pieghe"). Alcuni bellissimi esempi di *crease pattern* sono disponibili nel sito dell'origamista Robert J. Lang (https://langorigami.com/crease-patterns/), che li descrive come: un tipo di rappresentazione strutturale, per chi inventa e progetta origami; uno strumento che dà indicazioni sulle modalità di una piega, per chi costruisce; un nuovo modo di guardare il modello origami, per chi osserva senza un occhio esperto. Il *crease pattern* "mostra" ciò che è nascosto nel modello, una volta piegato.
Per i nostri scopi, nel caso dell'esperienza con gli studenti universitari, abbiamo rivisitato la definizione di *crease pattern* data da Hull (1994), introducendolo come *il diagramma piano costituito dalle linee che rappresentano le pieghe a monte e a valle fondamentali, ossia tutte e sole le pieghe che risultano effettivamente utilizzate per chiudere l'origami (nella sua forma finale)*.
Il *crease pattern*, perciò, contiene informazioni importanti sulla natura delle pieghe che costituiscono il modello finale, a partire da una rappresentazione piana fatta esclusivamente di linee, ma solo l'occhio esperto è in grado di "ricostruire" (o immaginare) il modello a partire dal *crease pattern*. Anche il processo inverso, ovvero costruire il *crease pattern* a partire da un modello origami piegato, non è scontato, perché richiede un notevole sforzo di visualizzazione tridimensionale. Non è sufficiente, infatti, riaprire il modello origami e ricalcare le tracce lasciate dalle pieghe. Occorre fare due tipi di distinzioni: (1) riconoscere le pieghe fondamentali rispetto a quelle usate solo per la costruzione (ma che non risultano piegate nel modello finale), (2) riconoscere se si tratta di pieghe a valle o a monte. Tradizionalmente, il *crease pattern* rappresenta le pieghe a valle, cioè che creano un avvallamento, o una V, con linee tratteggiate (Figura 1a). Viceversa, nella piega a monte il foglio forma un rilievo, o una V capovolta, e il *crease pattern* la cattura con una linea tratto-punto (Figura 1b). Osserviamo che, nel ricostruire un *crease pattern* bisogna avere l'accortezza di "guardare il foglio sempre dallo stesso lato", in quanto se il foglio viene capovolto le pieghe a valle diventano a monte e viceversa.



a b

Figura 1. (a) *Crease pattern* di una piega a valle; (b) *crease pattern* di una piega a monte.

In un *crease pattern*, che è dunque un diagramma quadrato al cui interno sono rappresentati tratti di linee, parliamo di *vertice* ogni qual volta si abbia *un punto interno al quadrato dove concorrono almeno due linee distinte* (Figura 2a): è anche un vertice dell'origami. Nel nostro lavoro ci siamo focalizzate sulle caratteristiche di particolari tipi di origami, anche detti *piatti*. Intuitivamente, un origami piatto può essere chiuso in un libro senza che si creino ulteriori pieghe e senza che se ne tolgano di fondamentali: è quindi un oggetto che pur essendo tridimensionale, in quanto formato da più strati ripiegati gli uni sugli altri, può essere trattato come bidimensionale (un esempio è mostrato in Figura 2b; si tratta della nota Pajarita).



a b

Figura 2. (a) *Crease pattern* con 4 vertici; (b) esempio di origami piatto (associato), la Pajarita.

Interessanti nel caso degli origami piatti sono i due teoremi di Maekawa e di Kawasaki, che esprimono risultati locali basati su relazioni algebriche e geometriche osservabili e verificabili a partire dal *crease pattern*, come segue.

Teorema di Maekawa. La differenza tra il numero di pieghe a monte e il numero di pieghe a valle che convergono in un vertice di un origami piatto è sempre 2: $|M - V| = 2$ (con M e V rispettivamente i due numeri di pieghe).

Teorema di Kawasaki. La somma degli angoli alternati individuati dalle pieghe a monte e a valle attorno a un vertice di un origami piatto è sempre uguale a π.

Le dimostrazioni di questi teoremi (che si possono trovare in Hull, 1994) sfruttano in modo elementare le relazioni tra gli elementi del *crease pattern* e permettono di esplorare ed evidenziare le caratteristiche degli origami piatti dal punto di vista matematico. Questo aspetto è rilevante per il nostro interesse verso gli origami e la didattica della matematica e mette l'accento sul ruolo cardine del *crease pattern*.

Il diagramma di costruzione e il *crease pattern* sono due modalità attraverso cui possiamo descrivere– o rappresentare–un modello origami. Ciascuna modalità ha scopi diversi e fornisce informazioni differenti, oltre ad avere peculiarità specifiche. Nell'esplorare la matematica degli origami è interessante collegare queste modalità con il modello. Sono tutti particolari registri di rappresentazione, nel senso introdotto da Duval (2006), secondo il quale la conversione tra registri diversi è al cuore della pratica matematica. Nel caso degli origami, possiamo riconoscere due conversioni particolari: il passaggio dal diagramma di costruzione al modello origami, il più comune nella pratica origami, e il passaggio dal modello al *crease pattern* (e viceversa). Notiamo che, nel caso del passaggio dal diagramma di costruzione all'origami, le azioni descritte in modalità iconica e nel piano dal primo sono tradotte con

movimenti nello spazio tridimensionale per dare vita alle pieghe del modello. Nel passaggio dal modello al *crease pattern*, l'oggetto tridimensionale ritorna a una configurazione piana, che incorpora le relazioni spaziali tra le pieghe fondamentali.
In questo lavoro, focalizziamo dunque l'attenzione su rappresentazioni e conversioni che si legano ai modelli origami: in particolare, trattiamo il *crease pattern*, generalmente non noto, da codificare, come un nuovo registro di rappresentazione di relazioni nello spazio che permette di arricchire l'esperienza matematica degli studenti. Ci concentreremo poi sulle conversioni tra registi differenti e sull'attività materiale in questo processo: imprescindibili per l'attività di piegatura sono infatti la relazione con la carta, il ruolo del movimento, la gestualità. Esamineremo con tale focus le strategie messe in atto da alcuni studenti universitari nel contesto di una sperimentazione condotta a distanza nell'a.a. 2020-21.

SPERIMENTAZIONE DIDATTICA

Contesto e partecipanti

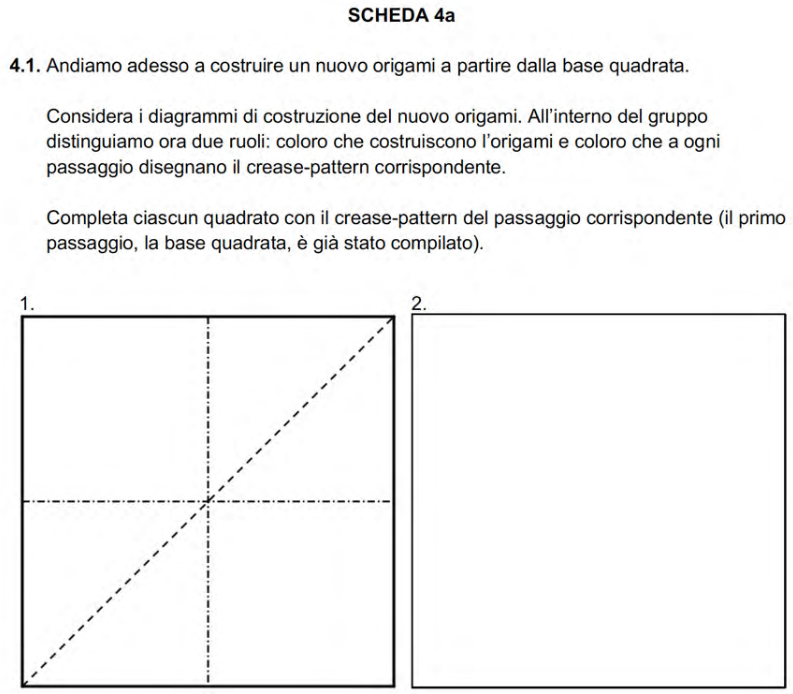
La sperimentazione didattica ha coinvolto 29 studenti e studentesse del corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università degli Studi di Torino, frequentanti il corso di Istituzioni di Matematiche Complementari. Il corso propone una introduzione alla geometria proiettiva come sistema assiomatico e la costruzione delle altre geometrie, come sotto-geometria della geometria proiettiva, mediante lo studio di gruppi di trasformazioni. I suoi obiettivi e i contenuti si allineano dunque con l'impostazione assiomatica della geometria degli origami accennata nella precedente sezione. La sperimentazione è stata svolta in 3 incontri di 2 ore ciascuno, nel dicembre 2020, quando a causa della pandemia tutta la didattica universitaria si svolgeva online. Dopo una breve introduzione iniziale sulla terminologia degli origami e sulla notazione del *crease pattern*, gli studenti e le studentesse hanno svolto alcune attività in piccolo gruppo, seguendo la scansione proposta da 8 schede di lavoro. Le schede, da noi progettate, erano accessibili in piattaforma Moodle alla pagina del corso e in cartelle condivise su Google Drive e dedicate a ciascun gruppo. Un momento di discussione tra gruppi caratterizzava la fine di ogni incontro. Per gestire le attività online abbiamo utilizzato la piattaforma Google Meet sia nei momenti collettivi sia in quelli di lavoro di gruppo (per i quali abbiamo create stanze virtuali separate). Abbiamo inoltre videoregistrato tutti i gruppi, con il consenso dei partecipanti, tramite la funzionalità incorporata nel sistema Meet. I protocolli (le schede compilate dai gruppi di lavoro) sono stati caricati nelle cartelle condivise. Nell'ultimo incontro, la docente del corso (la prima autrice) ha orchestrato una discussione conclusiva sulle attività e ha chiesto agli studenti di provare a produrre una dimostrazione collettiva per i teoremi di Maekawa e di Kawasaki, come compito aggiuntivo finale.

Il laboratorio di matematica a distanza: l'approccio metodologico

L'impostazione delle attività svolte a distanza ha presentato una serie di sfide logistiche, metodologiche, didattiche. In primis, perché l'attività di piegatura coinvolge l'uso di materiali da manipolare e nel caso del lavoro di gruppo in presenza sarebbe stato più che naturale per i partecipanti scambiarsi i modelli origami, lavorare sullo stesso supporto, osservare da vicino le modalità di piegatura, e così via. Poiché però a distanza molte di queste modalità non erano perseguibili, è interessante analizzare le strategie che gli stessi studenti e studentesse hanno messo in atto per comunicare pur a distanza le proprie scoperte, supportare i membri del gruppo in difficoltà e argomentare le proprie congetture.
Cercando di mantenere l'impostazione metodologica del laboratorio di matematica (Anichini et al., 2004) abbiamo privilegiato un apprendimento attivo, coinvolgendo i gruppi di 2, 3 o 4 partecipanti in costruzioni concrete di modelli origami e di *crease pattern* associati, confronti e richieste di gruppo. Abbiamo a tal fine previsto schede di lavoro che guidassero gli studenti nell'esplorazione dei modelli e delle loro rappresentazioni, prevedendo momenti dedicati alla manipolazione (anche dividendo i compiti nel gruppo), alla sola immaginazione e alla congettura a partire dalle esperienze fatte, fornendo solo le informazioni indispensabili affinché i gruppi potessero svolgere il lavoro in modo indipendente.

Le schede di lavoro: dal modello al *crease pattern*

Come abbiamo anticipato, il *crease pattern* riveste un ruolo chiave per la relazione tra il processo di costruzione di un origami piatto e la matematica che soggiace al modello origami ottenuto. Per questa ragione, le idee delle schede ruotano intorno a questa rappresentazione. In particolare, le prime due schede di lavoro proposte ai gruppi hanno riguardato la realizzazione e l'analisi di *crease pattern* di due semplici origami (la base triangolare e la base quadrata, che generalmente rappresentano il punto di partenza per origami più complessi). Nella terza scheda il focus era sull'analisi del *crease pattern* realizzato da un altro gruppo e sul concetto di vertice nel *crease pattern*. La scheda 4, divisa in due parti (a e b), si concentrava sulla richiesta di creare i successivi *crease pattern* che corrispondono ai diversi passaggi della realizzazione della gru (uno degli origami più noti). I compiti delle schede dalla 5 alla 7 guidavano infine i gruppi nell'analisi di origami piatti e nell'esplorazione e scoperta degli enunciati dei teoremi di Maekawa e di Kawasaki. Ci concentriamo qui sulla richiesta della scheda 4a (Figura 3).



SCHEDA 4a

4.1. Andiamo adesso a costruire un nuovo origami a partire dalla base quadrata.

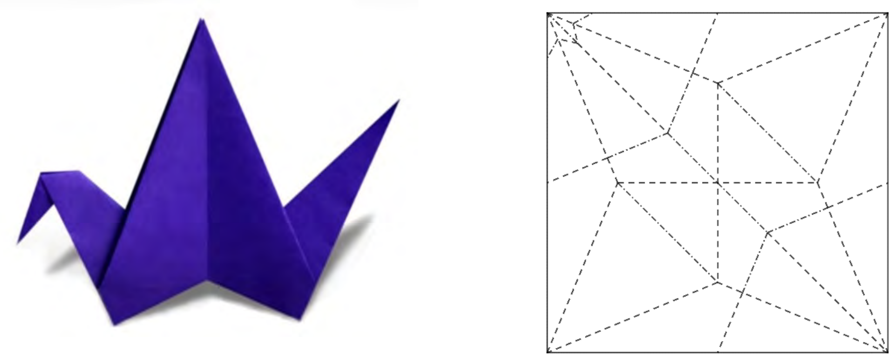
Considera i diagrammi di costruzione del nuovo origami. All'interno del gruppo distinguiamo ora due ruoli: coloro che costruiscono l'origami e coloro che a ogni passaggio disegnano il crease-pattern corrispondente.

Completa ciascun quadrato con il crease-pattern del passaggio corrispondente (il primo passaggio, la base quadrata, è già stato compilato).

1. 2.

Figura 3. La scheda 4a.

Nella scheda erano presenti anche altri quadrati numerati e, con l'ultimo passaggio, ciascun gruppo doveva approdare al *crease pattern* della gru (Figura 4a), che è presentato in Figura 4b.



a b

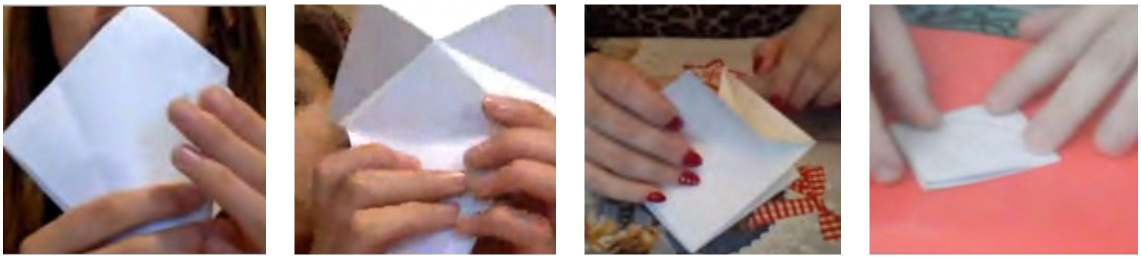
Figura 4. (a) La gru; (b) il *crease pattern* della gru.

Nella consegna, agli studenti era richiesto di dividersi i compiti, ovvero alcuni studenti dovevano lavorare sul modello, altri sul *crease pattern* corrispondente. Non tutti i gruppi hanno rispettato fedelmente la richiesta, che era particolarmente sfidante rispetto alla difficoltà di comunicare a distanza come trasformazioni subite dal modello nei vari passaggi si riflettevano in trasformazioni del *crease pattern*. A ogni movimento (piegatura) nello spazio corrisponde infatti un cambiamento nel *crease pattern* associato (rappresentazione piana) e ciascun passaggio può rendere fondamentali alcune nuove pieghe, mentre le pieghe già rappresentate possono rimanere o cessare di essere fondamentali, e cambiare o meno la loro natura (valle/monte). In breve, la scheda che stiamo prendendo in esame presenta molte sfide, tra cui: il passaggio dallo spazio al piano (generalmente si lavora sul passaggio inverso, dal piano allo spazio, in geometria), la difficoltà di riconoscere le pieghe fondamentali (e la loro posizione relativa nel *crease pattern*), la necessità di registrare cambiamenti in ciascun passaggio della costruzione.

STRATEGIE A DISTANZA

Presentiamo in questa sezione una panoramica delle strategie introdotte da studentesse e studenti per comunicare le loro scoperte nel corso dell'attività, in particolare in relazione alle varie rappresentazioni con le quali hanno interagito.
In primo luogo, abbiamo potuto osservare strategie comuni a tutti i gruppi nella fase di costruzione degli origami, quando la rappresentazione di riferimento era il diagramma di costruzione:

- mostrare solo il foglio di carta, "in aria", di fronte a sé (Figura 5a), oppure inclinando la videocamera per inquadrare il piano di lavoro (Figura 5d);
- condividere in uno di questi modi non solo il modello dopo la piegatura (Figura 5c), ma il movimento "in aria" (una o più volte) davanti alla telecamera (Figura 5b);
- arricchire la parte gestuale di piegatura con un linguaggio che mescola termini comuni utilizzati con un'accezione metaforica oppure specifici termini matematici (in particolare geometrici).



a b c d

Figura 5. (a)-(b) Piegatura "aerea" della carta; (c)-(d) visuale della piegatura con telecamera inclinata.

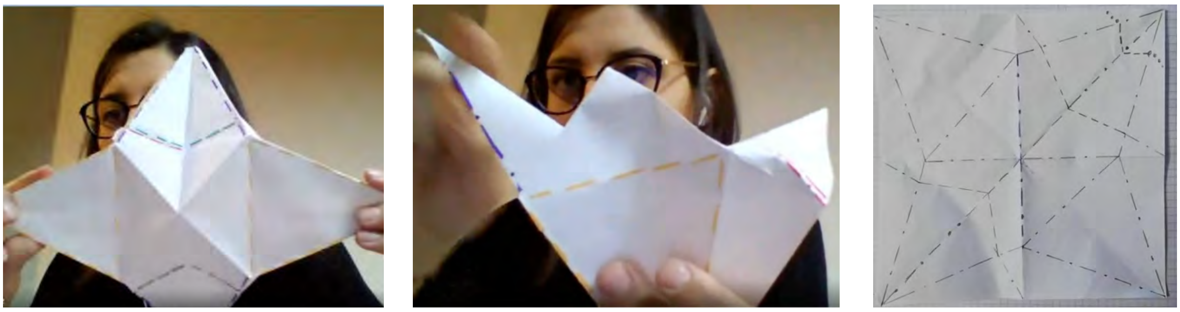
È interessante notare che tutte queste modalità emergono per dare visibilità alle azioni di piegatura nello spazio online condiviso, pur essendo a volte quelle meno indicate per svolgere le pieghe (sappiamo infatti che la maggior parte delle pieghe è normalmente effettuata sul piano di lavoro, per una maggiore precisione). In questa fase del lavoro, non è solamente il "prodotto finito" ad avere importanza per i gruppi, ma soprattutto l'interpretazione dei diagrammi e, dunque, il movimento che porta alla piegatura descritta dai diagrammi. Per questo motivo, alcune azioni sono ripetute più volte, la carta è riaperta e poi richiusa, di fatto i membri dei gruppi si muovono "avanti e indietro" nel diagramma di costruzione, per operare un controllo oppure per riallinearsi le une agli altri nel processo di costruzione. Inoltre, si riferiscono alle parti dell'origami in costruzione con termini indicali, oppure con termini che richiamano la forma delle parti piegate (*aletta*, *coda*, *punta*, …) o risultante dalla piegatura (spesso matematici, come *triangolo*, *quadrato*, *diagonale*, …) e la loro posizione reciproca (*sopra*/sotto, *interno*/*esterno*, *perpendicolare*, …). Approfondiamo alcuni di questi aspetti emersi in relazione alla scheda 4a, nella quale l'indagine era focalizzata sulla relazione tra modello e *crease pattern*.

Relazione *crease pattern*-origami

In questa sezione analizziamo prima il gruppo A, formato da tre studentesse (S, G, H) e uno studente (A). Nello svolgere la scheda, S e A creano l'origami, mentre G e H realizzano il *crease pattern* a ogni passaggio (Figura 6c). Osserviamo delle strategie interessanti attivate in questo gruppo:

1. S, oltre a costruire il modello, disegna di volta in volta anche il *crease pattern* direttamente sul modello, riaprendolo e tracciando le linee fondamentali sulla carta, dove è possibile vedere il segno della piegatura e dunque rilevare sia la posizione sia la natura della piega (Figura 6a).
2. Per controllare la corrispondenza tra quanto fatto dalle compagne su carta, il modello è aperto e poi richiuso, ma solamente a metà (Figura 6b), in quanto il modello è sostanzialmente simmetrico, per quasi tutto il processo, rispetto alle diagonali del quadrato.

Notiamo dunque che il gruppo crea un nuovo tipo di diagramma "ibrido", ovvero l'origami con aggiunte le pieghe marcate con la medesima notazione del *crease pattern*. Lo consideriamo ibrido poiché in esso le caratteristiche dell'origami sono fuse con quelle del *crease pattern*, ma è manipolato con opportune differenze. Riteniamo che il modello così modificato possa essere ritenuto un diagramma, in quanto diventa predominante l'insieme delle relazioni che contiene e tali informazioni sono anche veicolate da opportune convenzioni. È quindi ibrido anche nel senso che coniuga la natura materiale del modello con la modalità di rappresentazione piana della natura delle pieghe.
Dunque, possiamo concludere che questo nuovo diagramma agisce come uno strumento cognitivo per operare la conversione tra i due registri (modello e *crease pattern*), per testare relazioni e modifiche nello spazio e nel piano.



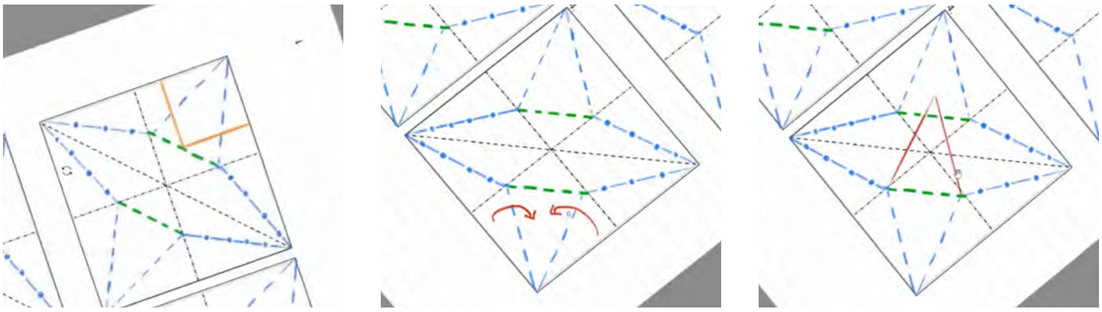
a b c

Figura 6. (a)-(b) Il diagramma ibrido, poi piegato a metà; (c) *crease pattern* della gru del gruppo A.

Passiamo ora al gruppo B, che lavora invece in questo modo: uno studente (M) condivide il suo schermo, in particolare la finestra di un editor grafico tramite il quale modifica la scheda assegnata, disegnando il *crease pattern*; il resto del gruppo lavora sul modello origami. Il gruppo si convince di non poter riaprire il modello e osservare le pieghe e quindi procede in tutto il lavoro immaginando le modifiche al *crease pattern*, senza avere riscontro dal modello. Analizziamo alcune peculiarità delle modalità di lavoro sul *crease pattern*:

1. M copia e incolla il *crease pattern* del passaggio precedente per poi operare le modifiche direttamente su tale diagramma. Le nuove linee aggiunte sono di colore differente (Figura 7a; come già fatto dal gruppo A nel diagramma ibrido) e la scheda è più volte ruotata per mostrare il *crease pattern* nella stessa posizione in cui gli altri membri del gruppo stanno visualizzando il modello piegato. Le pieghe aggiunte sono spesso prima tracciate come segmenti e, solo in un secondo momento, è segnato il tratteggio che si ritiene corretto.
2. Sul *crease pattern* sono tracciati anche altri segni, in particolare frecce che si riferiscono al movimento di piegatura (Figura 7b) oppure che materializzano l'aspetto dell'origami in quel particolare passaggio (Figura 7c).

Moltissimi gesti arricchiscono la comunicazione e supportano le argomentazioni; tuttavia, per motivi di spazio non possiamo entrare qui nel dettaglio di questo aspetto. Anche in questo caso osserviamo un diagramma "ibrido": il *crease pattern*, in alcune fasi del lavoro del gruppo B, incorpora i movimenti di piegatura o cattura elementi presenti nel modello tridimensionale (sebbene alla fine non risulti del tutto corretto).



a b c

Figura 7. (a)-(b)-(c) Differenti linee e segni aggiunti dal gruppo B su un *crease pattern*.

CONCLUSIONI

In questo contributo abbiamo presentato una sperimentazione didattica, implementata online in modalità laboratoriale, che ha coinvolto le studentesse e gli studenti di un corso universitario di geometria in alcune attività di piegatura della carta, per lo studio delle relazioni matematiche che caratterizzano gli origami piatti. Il laboratorio si è svolto interamente a distanza, presentando ai vari gruppi la sfida di trovare nuove modalità comunicative adatte alla tipologia di attività senza sfruttare uno stesso spazio fisico. Abbiamo potute osservare una serie di strategie (non solo comunicative ma anche cognitive) che studentesse e studenti hanno attivato per pensare al (e parlare del) movimento di piegatura della carta, e per mostrare il risultato della piegatura oppure descriverlo. Si tratta di strategie specificatamente legate all'infrastruttura che ha permesso lo svolgimento dell'attività. Le riteniamo interessanti per la loro natura profondamente dinamica. Le strategie osservate infatti mettono al centro il movimento di piegatura, che avviene nello spazio e ha un ruolo centrale in tutta l'attività. L'analisi del lavoro di due gruppi sulla relazione tra modello e *crease pattern* ci ha permesso di evidenziare proprio le caratteristiche dinamiche delle loro modalità di pensiero e condivisione. Abbiamo anche visto come l'attività materiale con la carta, necessaria nel passaggio dal diagramma di costruzione al modello, sia fondamentale per le strategie che emergono nella conversione dal modello al *crease pattern*. Non solo fornisce un supporto al ragionamento, ma permette di dare vita a *diagrammi ibridi*, realizzati dai gruppi proprio nel momento in cui devono lavorare sulla conversione tra i diversi registri di rappresentazione. Questi diagrammi sono anche strumenti di pensiero, i quali aggiungono variabili di contesto alla scoperta di proprietà matematiche, come il colore nella ricerca di corrispondenze tra il modello costruito e il *crease pattern*. Allo stesso tempo, le trasformazioni subite dal *crease pattern* e dal diagramma ibrido possono essere viste come trasformazioni all'interno dei singoli registri. La ricchezza che, dal punto di vista cognitivo, si cela dietro questi aspetti è certamente da approfondire, data l'importanza delle trasformazioni all'interno di un registro e delle conversioni tra registri per l'insegnamento e apprendimento della matematica. Anche l'introduzione dell'attività di piegatura della carta nella normale didattica della matematica in classe, per la creazione di origami e lo studio della matematica a essi connessa, sembra essere un ambito con molte potenzialità, sia in relazione alla teoria assiomatica sia in relazione alle proprietà algebriche e geometriche soggiacenti.

BIBLIOGRAFIA

Alperin, R. C. and Lang, R. J. (2006). One-, two-, and multi-fold origami axioms. *Proceedings of the Fourth International Meeting of Origami in Science, Mathematics, and Education*, R. J. Lang (Ed.), 371-393.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **61**, 103-131.
Haga, K. (2008). *Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
Hull, T. (1994). On the Mathematics of Flat Origamis, *Congressus Numerantium* **100**, 215-224.
Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for exploring mathematics*. New York: CRC Press.
Huzita, H. (1989). Axiomatic Development of Origami Geometry. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, H. Huzita (Ed.), 143-158.

LO STUDIO DELLA MISURAZIONE NELLA SCUOLA PRIMARIA

Lorena Aires[2], Fulvia Fassino[1], Lucia Guino[1], Carola Manolino[2], Anna Visconti[1]
[1]I.C. San Mauro 1 - San Mauro T.se (TO), [2]Università di Torino
lorena.aires92@edu.unito.it, carola.manolino@unito.it

Abstract
Sempre più spesso i docenti decidono di affrontare l'argomento della misurazione partendo dalla realtà concreta vissuta dagli alunni, progettando situazioni problematiche aperte e promuovendo così un maggior coinvolgimento nello studio della disciplina matematica.
Il contributo descrive due attività laboratoriali, una in presenza e una a distanza, realizzate nell'anno scolastico 2020-2021, rispettivamente nelle classi terza e quinta della Scuola Primaria dell'istituto comprensivo San Mauro I. Il percorso si riferisce agli obiettivi di apprendimento al termine delle classi terza e quinta del nucleo "Relazioni, dati e previsioni" che coinvolgono il concetto di misurazione. In particolare, la prima attività didattica affronta lo studio del metro come artefatto e come distanza, mentre la seconda attività riguarda la proposta di calcolo dell'area di figure non regolari.
La sperimentazione attuata ha seguito le fasi della metodologia di formazione docenti Lesson Study: scelta dell'obiettivo, progettazione, implementazione e discussione.

Parole-chiave
Misurazione, metro, area, Lesson Study

Il Lesson Study è una metodologia di formazione docenti di origine orientale. In Italia la metodologia viene denominata CORi, acronimo per "Costruire, Osservare, Riprogettare" una lezione di matematica[2]. Il Lesson Study è quindi formato dalle tre fasi citate: la co-progettazione, l'osservazione e la messa in discussione di quanto realizzato al fine di un'eventuale riprogettazione.
La caratteristica fondamentale è il ruolo centrale affidato alla collaborazione e corresponsabilità di un gruppo di insegnanti. Tale aspetto richiede ai partecipanti l'impegno a interrogarsi sulla propria pratica didattica, mettere in gioco sia contenuto disciplinare che metodologie, e di conseguenza osservarne la ricaduta sull'apprendimento degli alunni (Bartolini Bussi & Ramploud, 2018). Del gruppo di lavoro possono fare parte insegnanti, educatori, tirocinanti, tesisti ed esperti di diversi settori scientifico-disciplinari. Il gruppo è chiamato a progettare una lezione di matematica di 1 ora. La lezione progettata viene solitamente implementata da un docente nella classe di appartenenza, mentre il ruolo che ricoprono gli altri membri del gruppo è quello di osservatori della lezione. La dinamica di gruppo fa sì che i problemi professionali dei docenti e quelli della classe o dei singoli alunni siano analizzati e supportati in team. Questo aspetto è essenziale anche come proposta operativa per la riduzione del rischio degli insegnanti di essere sovracaricati di stress causato dalla gestione in solitudine delle situazioni difficili. Il Lesson Study, infatti, prevede che il gruppo ricerchi in modo collaborativo soluzioni per un insegnamento *consapevole* (Cusi, 2012), sperimenti e ne discuta le ricadute sul proprio sviluppo professionale e sui processi di apprendimento del gruppo classe.

IL LESSON STUDY A SAN MAURO 1: LA SPERIMENTAZIONE

La sperimentazione qui presentata è stata realizzata presso l'Istituto Comprensivo di San Mauro 1 nell'anno scolastico 2020/2021. L'esperienza consta in due cicli Lesson Study.
Il percorso di sperimentazione è stato messo in atto da un gruppo di lavoro eterogeneo. I componenti sono: tre insegnanti della scuola primaria di San Mauro Torinese e una tesista di Scienze della

[2] Cfr. http://memoesperienze.comune.modena.it/lessonstudy/pages/com_e.html

Formazione Primaria dell'Università di Torino, coordinati da una dottoranda del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino.
Il primo ciclo ha visto protagonista una classe terza del plesso Costa, il secondo una classe quinta del plesso Morante.

Il primo ciclo: Introduzione al concetto e all'uso del metro
Il percorso scelto per il primo ciclo Lesson Study concerneva la costruzione del metro e l'argomentazione. L'obiettivo dell'osservazione scelto riguardava l'incidenza degli interventi dell'insegnante sui contributi condivisi dagli alunni. Le insegnanti si sono quindi impegnate a osservare quanto la gestione dell'insegnante durante la *discussione matematica* (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995) fosse neutra o condizionante. Il gruppo ha progettato collaborativamente l'intero percorso didattico ma, come previsto dalla metodologia Lesson Study, la lezione osservata è stata solamente una, della durata di un modulo orario.
Per tenere traccia della progettazione è stato utilizzato il *lesson plan*, strumento principe del Lesson Study, nella formulazione proposta dal gruppo di ricerca (Manolino *et al*., 2020). Il percorso didattico progettato prevedeva 3 fasi (di seguito a, b, c) svolte in 3 differenti giorni di lezione.

a) La fase iniziale del percorso è stata focalizzata su cosa fosse già conosciuto dai bambini, tramite l'attuazione di un brainstorming a gruppo classe intero. Durante tale attività è stato chiesto agli alunni cosa venisse loro in mente pensando alla parola "metro".
b) In una seconda lezione, a piccoli gruppi, gli studenti hanno potuto costruire il metro così come da loro immaginato, usando materiali di diverso tipo (strisce di carte, spaghetti, spago, nastro adesivo, stuzzicadenti e pennarelli). Il materiale è stato proposto e messo a disposizione dei bambini da parte dei docenti, a seguito di una attenta analisi a priori del materiale (si veda la nozione di *potenziale semiotico* di un artefatto, in Mariotti & Maffia, 2018). Tale analisi si ritrova nella parte finale del lesson plan utilizzato, in cui vengono specificati i materiali messi a disposizione degli alunni e le riflessioni del gruppo a tal proposito. Viene infatti specificato il desiderio di mettere a disposizione sia materiali funzionali alla costruzione del metro, sia materiali non utili ma accattivanti agli occhi degli alunni. La finalità espressa per questa scelta riguarda l'osservazione di quali materiali vengano maggiormente scelti dagli alunni e la motivazione si tale scelta.

Analisi materiali
Nella seconda attività si è scelto di mettere a disposizione materiali utili alla costruzione del metro e materiali "inutili", che non mantengano la lunghezza, in modo da poter osservare e studiare le scelte degli alunni. Tra i materiali utili si propongono: nastri, gomitoli di lana, gomitoli di spago, fettucce di spessore diverso, strisce di carta di spessore diverso e che si alternino per foglio bianco e foglio a quadretti, bucatini, stecchini per spiedini e cannucce. Per i materiali "inutili" si propongono: elastici, cotone, bottiglie d'acqua, stoffe a pezzi e coriandoli. Per quanto riguarda il primo elenco di materiali si intende verificare se lo spessore e la resistenza dei materiali incidano sulla scelta e in particolare, per quanto riguarda le strisce di carta, se è la quadrettatura ad incidere. Per quanto riguarda il secondo elenco di materiali si intende osservare il motivo della scelta, per esempio si potrebbero scegliere i coriandoli perché sono affascinanti e belli, senza sapere come utilizzarli per raggiungere l'obiettivo.

c) La terza e ultima fase è stata la lezione implementata e osservata, dedicata completamente all'argomentazione. É stato chiesto agli alunni di spiegare la strategia utilizzata per la costruzione del metro, argomentando i ragionamenti compiuti. I principali aspetti che si sono voluti mettere in luce durante la presentazione alla classe sono stati il modo in cui ciascun gruppo di alunni ha costruito il metro, il motivo della scelta d'uso di un determinato materiale e cosa si potrebbe misurare con il metro costruito. É stata scelta questa attività per potenziare la capacità di esporre i propri ragionamenti e per portare la classe a ragionare su questo nuovo strumento.

Di seguito viene riportato un estratto della progettazione della lezione implementata.
La sezione del lesson plan riportata qui sotto analizza ciascun momento della lezione e per ognuno richiede di indicare la *descrizione dell'attività*, le modalità di gestione del gruppo classe, i *tempi* da dedicare e le *intenzionalità educative*. In particolare, viene riportata tale sezione per mettere in evidenza

la descrizione delle attività, che guida gli insegnanti nell'implementazione, e la relativa esplicitazione da parte del gruppo delle intenzionalità educative specifiche di ogni momento dell'attività di classe. Queste ultime, in particolare, sono fondamentali poiché richiedono di mettere per iscritto le finalità con cui vengono proposte le attività e per le quali vengono utilizzate determinate metodologie.
Il lesson plan non è fondamentale solamente nelle fasi di progettazione e implementazione ma, è altrettanto importante in fase di discussione. Esso, infatti, permette di realizzare un'analisi fine dell'intervento realizzato e una messa in discussione critica e costruttiva dell'attività docente.

Attività sul problema			
Descrizione dell'attività	**Raggruppamenti**	**Tempi**	**Intenzionalità Educative**
L'insegnante ha il compito di stabilire i turni di parola. Si sceglie di partire da coloro che hanno avuto più difficoltà nella costruzione del metro e che hanno più difficoltà nell'argomentazione delle proprie scelte. Gli alunni uno alla volta mostreranno il metro costruito e argomenteranno la scelta del materiale e il ragionamento fatto per poter arrivare al prodotto ottenuto.	Intera classe	44 minuti	Si decide di lasciare all'insegnante, e non agli alunni, la scelta dei turni di parola in modo che gli allievi che hanno riscontrato maggiori difficoltà non siano influenzati dagli interventi dei compagni. In questa attività si vuole mettere in luce la consapevolezza delle scelte fatte in vista dell'obiettivo e la capacità di spiegarle e argomentarle al gruppo classe e all'insegnante. Si chiede di portar fuori e rendere noti i ragionamenti fatti in modo da farli comprendere agli ascoltatori.

Conclusioni			
Descrizione dell'attività	**Raggruppamenti**	**Tempi**	**Intenzionalità Educative**
Istituzionalizzazione del metro come strumento. Verifica di ciò che si è detto. L'insegnante mostra lo strumento del metro e rende nota la sua istituzionalizzazione. Verifica poi se le spiegazioni degli alunni si possano ritenere corrette o meno.	Intera classe	10 minuti	L'intenzionalità di questa fase riguarda la conoscenza dell'istituzionalizzazione dello strumento del metro e la relazione con gli interventi di ciascuno. Si desidera che ognuno comprenda quanto il proprio prodotto e i propri ragionamenti si possano dire corretti e quanto invece si discostino dalla spiegazione dell'insegnante.

Le tabelle riportate non costituiscono l'intero lesson plan, che prevede una documentazione maggiore. È stata riportata la sezione "attività sul problema" per offrire una descrizione più dettagliata delle aspettative del gruppo, emerse durante la fase progettuale, riguardo all'attività da proporre in classe. La sezione "conclusioni", invece, è stata riportata per esplicitare il risultato della lezione atteso dal gruppo. In entrambe le sezioni vi è una correlazione diretta tra la descrizione delle attività e le intenzionalità educative. Nella prima sezione, nella seconda colonna, i docenti scrivono: "l'insegnante ha il compito di stabilire i turni di parola. Si sceglie di partire da coloro che hanno avuto più difficoltà nella costruzione del metro e che hanno più difficoltà nell'argomentazione delle proprie scelte" e nell'ultima colonna si legge: "si decide di lasciare all'insegnante, e non agli alunni, la scelta dei turni di parola in modo che gli allievi che hanno riscontrato maggiori difficoltà non siano influenzati dagli interventi dei compagni". Emerge, allora, il legame tra cosa i docenti propongono e a quale scopo. I docenti spiegano, infatti, la scelta di non lasciare liberi i turni di parola conseguente alla consapevolezza della difficoltà di alcuni alunni durante questo tipo di attività e la finalità di tale metodologia di rendere autentici gli interventi di ciascun alunno e non influenzati dagli interventi dei compagni. Nella prima colonna scrivono poi: "gli alunni uno alla volta mostreranno il metro costruito e argomenteranno la scelta del materiale e il ragionamento fatto per poter arrivare al prodotto ottenuto" e nell'ultima colonna: "in questa attività si vuole mettere in luce la consapevolezza delle scelte fatte in vista dell'obiettivo e la capacità di spiegarle e argomentarle al gruppo classe e all'insegnante. Si chiede di portar fuori e rendere noti i ragionamenti fatti in modo da farli comprendere agli ascoltatori". Ecco evidente la relazione tra la proposta e l'intenzionalità. L'attività è proposta per uno scopo preciso: comprendere se le scelte siano state compiute dando senso all'azione, e non in modo procedurale, e se la capacità degli studenti di spiegare i propri ragionamenti sia presente e consapevole.

Anche nella sezione delle conclusioni l'attività corrisponde a una precisa intenzionalità educativa di comprensione e istituzionalizzazione dello strumento di misurazione del metro e di riflessione sul proprio operato da parte degli alunni. Il lesson plan permette però al gruppo una chiara esposizione, dichiarazione e formalizzazione di quello che sono le proprie intenzionalità, le quali altrimenti rimarrebbero a parole, volubili ai possibili cambiamenti derivanti dall'azione.

Durante l'incontro del gruppo avvenuto post-implementazione è stato possibile discutere e confrontarsi sui risultati ottenuti rispetto all'*obiettivo didattico* scelto e all'*obiettivo di osservazione*: rispettivamente, capacità argomentativa degli alunni e ruolo del docente nella discussione di classe. È utile sottolineare l'evidente abitudine degli alunni coinvolti in questo ciclo a partecipare ad attività di questo tipo.

Di seguito vengono riportati risultati e riflessioni emersi durante l'incontro di discussione. Tali dati vengono qui presentati seguendo la cronologia dell'incontro. In particolare, rispetto all'*obiettivo didattico*, vengono riportate riflessioni espresse dai docenti riguardo le conoscenze emerse dalla classe, la considerazione dell'errore come elemento costruttivo e la capacità di ragionamento ed espressione degli alunni. Rispetto all'*obiettivo di osservazione* della lezione si riportano riflessioni sulla neutralità, ma anche sulla natura stimolante, degli interventi che l'insegnante ha effettuato durante la lezione.

Confrontandosi sul raggiungimento dell'*obiettivo didattico* preposto, tra le riflessioni fatte nel gruppo docenti durante l'incontro di riflessione post-implementazione è emerso come non siano stati riscontrati alcuni interventi che, al contrario, in fase di progettazione, erano stati ritenuti scontati e attesi dai docenti. Per esempio, durante tutto lo svolgimento del percorso didattico, i bambini non hanno mai nominato il metro "da sarta", mentre è stato citato il metro a laser. Tale osservazione ha portato il gruppo a constatare un cambio generazionale importante, probabilmente sottovalutato in progettazione.

È stata sottolineata, inoltre, l'importanza degli errori commessi dagli studenti in aula, ritenuti dal gruppo docenti fonte di discussione costruttiva. Un'insegnante osservatrice, infatti, afferma:

> A. "É stato interessante vedere come i bambini si siano accorti che due metri erano visibilmente più corti di tutti gli altri e la condivisione di questa consapevolezza ha fatto nascere una discussione. Perché poi gli autori dei metri più corti hanno cercato di spiegare le loro ragioni."

Inoltre, è stata evidenziata la capacità degli alunni di esprimere e sostenere la propria opinione, anche se diversa da quella dei compagni, accompagnata da una buona capacità di ascolto del gruppo classe. Di seguito vengono riportate le affermazioni di due studenti di gruppi diversi, espresse durante il momento finale di discussione sui metodi risolutivi.

> R. "Secondo me quello di V. è troppo piccolo, perché io sono alto un metro e trentacinque e un metro è tipo qua (indicandosi una spalla)."
>
> A. "Se quello che dice R. è vero allora anche quello di C. è troppo corto."

Si nota in questo estratto come A. abbia ascoltato con attenzione l'intervento di R.. A., infatti, comprendendo che R. offre un paragone utile (legato alla propria corporeità) per la stima lunghezza del metro, lo ha sfruttato per ricavare un'informazione e condividere un'inferenza. Questa capacità di ragionamento riscontrata ha messo in luce buone capacità di dedurre soluzioni a partire da situazioni date.

Ancora un estratto:

> V. "Ci siamo dimenticati di dire una cosa: i bastoncini sono sistemati quindi non l'abbiamo scritto ma la distanza c'è."

Dall'intervento della studentessa V. emerge il suo ascolto attivo degli interventi dei compagni, i quali esprimevano incomprensione verso il metro prodotto dal gruppo di V.. Raccolta la critica dei compagni, l'alunna è intervenuta esplicitando un pensiero che non era stato condiviso con il gruppo classe al momento dell'esposizione del lavoro, ma ora ritenuto utile alla comprensione del prodotto.

Riguardo all'*obiettivo di osservazione*, gli interventi dell'insegnante e la sua interazione con il gruppo classe sono stati ritenuti dal gruppo "precisi e costruttivi". Gli interventi della docente implementatrice "non hanno provocato condizionamenti negli interventi degli alunni e nel target del discorso del singolo bambino" – riporta Lo. in un intervento durante l'incontro di restituzione. Il gruppo ricorda poi un intervento in particolare in cui la docente implementatrice ha detto al secondo gruppo: "Fate attenzione, gli spaghetti e le strisce di carta sono materiali, ma come avete deciso di fare le tacchette che sono segnate sul vostro metro? E come le avete fatte? Con quali strumenti?". Questo intervento della docente, secondo il gruppo di lavoro, ha stimolato l'attenzione non solo del gruppo 2, ma anche tutti gli altri gruppi hanno compreso quanto detto. Infatti, durante il proprio turno di esposizione tutti i gruppi di studenti hanno precisato autonomamente questo aspetto in modo corretto. In fase di discussione finale i docenti, dunque, hanno ritenuto positiva non solo la progettazione degli interventi del docente, ma anche la gestione della lezione nel suo complesso. Gli studenti, infatti, sono stati coinvolti e partecipi e si è osservata una continua interazione e una buona *orchestrazione* (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995).
Le aspettative dei docenti riguardo ai prodotti e agli interventi degli studenti sono state ampiamente superate e sono state riscontrate condivise conoscenze fondamentali ora condivise nel gruppo classe. Tra queste si ritrovano la consapevolezza del metro come strumento di misurazione, la conoscenza delle operazioni che un tale strumento rende possibili e la consapevolezza del centimetro come misura di lunghezza del Sistema Internazionale definito come sottomultiplo del metro.

Il secondo ciclo: Aree di Figure Non Regolari

Il secondo ciclo è stato progettato in riferimento al calcolo dell'area di figure non regolari tramite l'utilizzo di figure composte e poligoni equivalenti. L'*obiettivo di osservazione* durante lo svolgimento della lezione ha riguardato i ragionamenti espliciti degli alunni, divisi a gruppi. Osservare il processo risolutivo e le strategie messe in atto per trovare una soluzione. Per il secondo ciclo è stata progettata solamente la lezione implementata.
La lezione si è svolta in modalità a distanza a causa dei provvedimenti dovuti alla pandemia da COVID-19. La metodologia utilizzata è basata sull'apprendimento sociale a partire da una realtà conosciuta. Durante la lezione gli alunni sono stati divisi in tre gruppi, utilizzando tre stanze della piattaforma Meet, e ad ogni gruppo è stato fornito il collegamento a una Jamboard: una lavagna virtuale sulla quale gli studenti hanno trovato l'immagine stilizzata della regione Sicilia e la relativa scala di rappresentazione. A fianco di tale immagine sono state poste alcune forme di poligoni regolari, un reticolo quadrettato (si veda fig. 1), allo scopo di fornire alcuni artefatti digitali per la misurazione dell'area. Gli alunni avevano la possibilità di spostare sia le forme geometriche che il reticolo in modo da posizionarli sulla figura della regione, per poi calcolarne l'area. Di seguito si riporta un estratto del lesson plan.

Attività sul problema			
Descrizione dell'attività	**Raggruppamenti**	**Tempi**	**Intenzionalità Educative**
A ogni gruppo verrà fornito il collegamento a una Jamboard e a una videochiamata su Meet. Sulla lavagna virtuale troveranno l'immagine stilizzata della regione Sicilia con a lato alcune forme di poligoni regolari, un reticolo e uno spazio per gli appunti. Gli alunni avranno la possibilità di spostare sia le forme geometriche che il reticolo.	Gli alunni verranno divisi in tre gruppi.	40 minuti	I gruppi di lavoro sono decisi dall'insegnante in modo eterogeneo. Si desidera che in questa fase gli alunni collaborino nei rispettivi gruppi per il raggiungimento dell'obiettivo comune. I gruppi eterogenei sono ritenuti efficaci per evitare frustrazione e agitazione nel dover affrontare un compito nuovo.

Anche da questo scritto emerge la forte relazione esplicita tra le attività progettate e le intenzionalità educative dei docenti. Per esempio, la scelta di creare dei gruppi eterogenei è proposta perché si intende raggiungere un obiettivo preciso: il sentimento di appartenenza al gruppo che promuove un atteggiamento attivo nel lavoro da svolgere e di ricerca partecipata ma in assenza di sentimenti di

frustrazione. Inoltre, dalle stesse parole qui riportate si evince come per i docenti, già in fase di progettazione, l'*obiettivo di osservazione* fosse ritenuto raggiungibile proprio grazie all'attività proposta e alla tecnologia messa a disposizione della classe: la lavagna virtuale permette a ciascuno studente di interagire e operare concretamente.
Di seguito vengono riportate le Jamboard fornite agli alunni con le soluzioni proposte dai gruppi. Tali soluzioni sono state l'oggetto di osservazione da parte dei docenti e su di esse si sono basate le riflessioni compiute durante l'incontro di discussione. In figura 1 viene presentata la jamboard "bianca", come condivisa con gli alunni durante la consegna. È stata scelta una figura neutra della regione, in modo da non creare inutili distrazioni. Gli studenti avevano la possibilità di muovere, ingrandire, ridurre, duplicare sia le figure geometriche sia il reticolo predisposti sul bordo della lavagna virtuale, ma non l'immagine della regione né la scala. Infine, la jamboard è stata dotata di uno spazio per gli appunti in cui gli studenti avevano la possibilità di scrivere.

Figura 1: J*amboard proposta agli studenti durante la consegna dell'attività.*

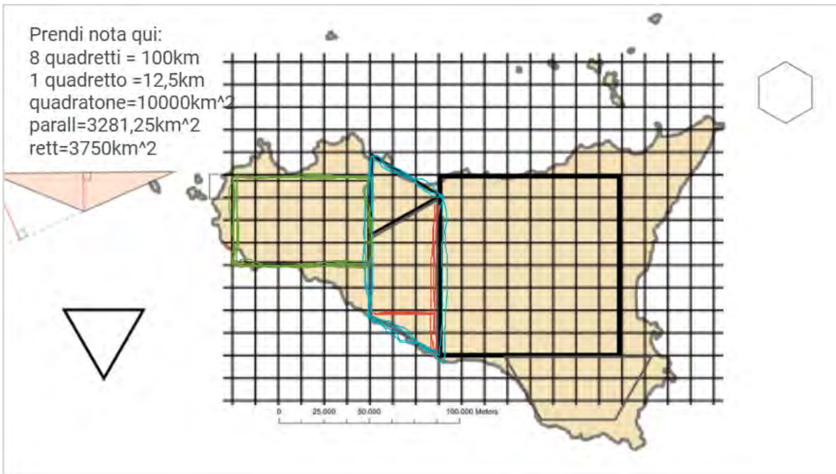


Figura 2: *Jamboard gruppo 1*

La figura 2 mostra il lavoro del gruppo 1. Il gruppo ha condiviso l'idea di posizionare il reticolo sulla figura della regione in modo che il lato di un quadrato del reticolo coincidesse con la lunghezza di uno dei segmenti della scala di riduzione. Una volta posizionato il reticolo, il gruppo ha deciso di posizonare su di esso alcuni poligoni noti con grandezza massima, al fine di poter calcolare velocemente l'area di ogni poligono e poi sommarne i valori ottenuti. Il gruppo 2 ha ragionato in modo analogo.

La figura 3 riporta il lavoro condiviso dal gruppo 3. La strategia messa in atto si è differenziata da quelle dei gruppi 1 e 2. Questo gruppo non ha utilizzato il reticolo, ma provato a ricoprire la superficie colorata dell'immagine della Sicilia posizionando i poligoni con più precisione possibile. Ogni figura sarebbe poi stata trasportata sulla scala di riduzione per ottenere i dati per calcolarne l'area e sommare i valori ottenuti. A causa del limite di tempo il gruppo ha interrotto il lavoro ma ha condiviso oralmente la strategia che intendeva perseguire.

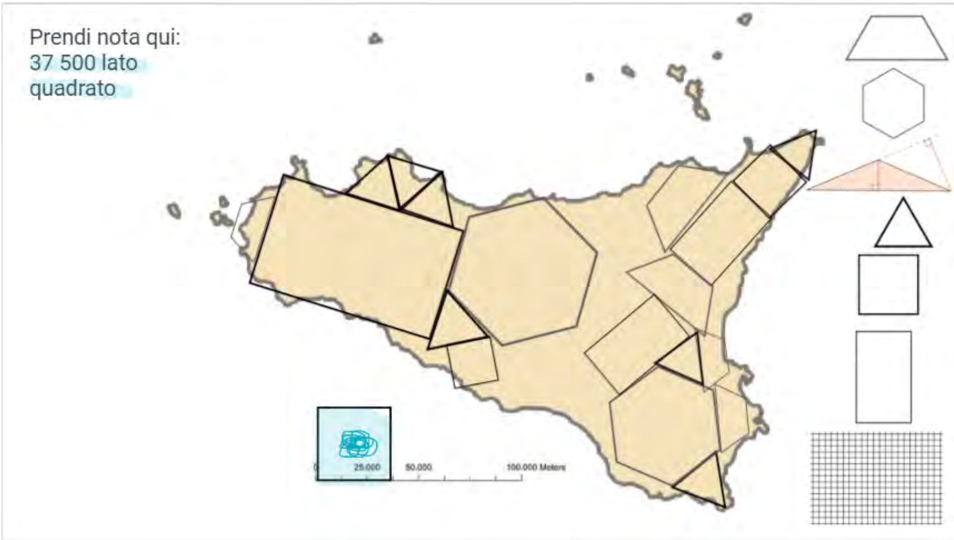


Figura 3: *Jamboard gruppo3*

Durante l'incontro di discussione del gruppo docenti è emersa la soddisfazione per il risultato ottenuto. L'*obiettivo di osservazione* poneva in primo piano le strategie e i ragionamenti degli alunni durante l'attività, ma questo si è rivelato essere una leva importante anche per lo sviluppo *dell'obiettivo didattico*: i docenti hanno evidenziato in particolar modo l'essenzialità attribuita al percorso e non al risultato, sia dall'insegnante sia dagli alunni durante la lezione, e l'utilizzo strategico di ricreare figure note per semplificare il processo di calcolo. A tal proposito, di seguito, si ricorda collettivamente l'intervento di un bambino del gruppo 1:

> G. "Nessuno di noi ricorda a memoria l'area del trapezio con precisione. Appoggiamo su un lato obliquo un triangolo equilatero, così diventa un parallelogramma [azzurro in figura 2] e l'area si fa base per altezza."

CONCLUSIONI

Il percorso di formazione ha suscitato nei docenti il desiderio di una formazione di qualità. Tre interventi conclusivi dell'incontro di discussione al termine del primo ciclo rendono note alcune impressioni condivise dal gruppo:

> Lu. "Questa esperienza ci può aiutare anche per la mancanza di confronto […]. Mi piacerebbe che questo potesse entrare un po' di più dentro le porte, anche in questa annata in cui a volte ci si perde nella burocrazia, nella valutazione eccetera. Senza progettare non si sa neanche cosa valutare. Per me quella che abbiamo fatto ora è una valutazione."

> F. "Ed è una valutazione anche del nostro lavoro. Questi incontri tra di noi servono come incentivo alla nostra autovalutazione. Si lasciano un po' da parte i problemi e le difficoltà […]. Io ho bisogno di un riscontro tra di noi."

> A. "Infatti qualsiasi collaborazione sia disponibile direttamente con l'università non è da perdere. Tutte le possibilità sono da cogliere, perché arriva proprio un lavoro che ha una qualità che noi non riusciamo a dare. Però, con l'esperienza e le conoscenze che abbiamo noi, ricevuto lo stimolo,

possiamo riportarlo su altri argomenti e su altre cose. Per esempio, l'osservazione degli altri docenti è uno stimolo importante, perché non si riesce a fare nella quotidianità."

In riferimento all'esperienza di formazione è stato evidenziato il vantaggio dato dall'eterogeneità del gruppo. Interessante è stata la presenza di insegnanti di classi differenti, ma il gruppo ha ritenuto prezioso anche il dialogo con i ricercatori. Sono stati i docenti stessi a scegliere di inquadrare questa esperienza sullo sfondo dell'ormai tradizionale Ricerca in Didattica della Matematica italiana (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998). Una metodologia di ricerca e sviluppo professionale in cui gli insegnanti sono essi stessi protagonisti (e attori) della costruzione di azioni didattiche, capaci di conciliare pratica e teoria della Didattica in Matematica. In questo quadro, e grazie all'importante leva della Trasposizione Culturale (Mellone *et al*., 2019), l'introduzione del Lesson Study nel contesto italiano è davvero un modo per i docenti di mettere a fuoco le proprie pratiche didattiche e di mettere costruttivamente in discussione le teorie su cui esse si fondano. In riferimento alla progettazione didattica, la partecipazione alle due attività riportate ha promosso sicurezza professionale nei docenti. In particolare, nell'attività del primo ciclo, si è trattato del coraggio di mantenere aspettative elevate per l'intera proposta didattica. Esso è stato stimolato ulteriormente dalla sfida proposta dal secondo ciclo, dove invece l'audacia è stata vissuta in riferimento allo strumento utilizzato. La Jamboard non era mai stata utilizzata ed è stata proposta agli alunni da docenti non conosciuti in precedenza dalla classe, in modalità di didattica a distanza. La buona riuscita delle due attività e i risultati raggiunti hanno ravvivato nei docenti il desiderio di proporre attività non tradizionali non solo alle loro classi, ma anche ai propri colleghi per una nuova formazione docenti.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M. G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematical Education: A National Case Study from an International Perspective. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 243-262). Springer.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Centro documentazione educativa.Bartolini Bussi, M. G. & Ramploud, A. (2018). *Il lesson study per la formazione degli insegnanti*. Carocci editore.

Cusi, A. (2012). Un costrutto teorico per guidare il docente nell'attività di riflessione a posteriori sulla propria pratica: analisi di un'esperienza di tirocinio. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente, 4*(4), 57-74.

Manolino, C., Minisola, R., Robutti., O., & Arzarello., F. (2020). Translating practices for reflecting on ourselves: Lesson Study. In *CIEAEM 71*. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 7, 519-526. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).

Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula* (4), 50 - 64. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM, 51*(1), 199-212.

RIFLESSIONI DAL PROGETTO MATT&R: DISTRICARSI TRA MATEMATICA E FORME, TRA PERIMETRI E AREE

Francesca Ferrara[*], Giulia Ferrari[*], Ketty Savioli[**], Sara Bianchi[**], Marina Gilardi[**], Irene Minelli[°], Giovanna Mora[§], Stefania Pozio[#], Maria Luisa Sattin[**]

[*] Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Torino

[**] Istituto Comprensivo Chieri III, Chieri (Torino)

[°] Istituto Comprensivo Chieri IV, Chieri (Torino)

[§] Istituto Comprensivo Bassa Atesina, Egna (Bolzano)

[#] INVALSI, Roma

francesca.ferrara@unito.it

Abstract

Questo contributo presenta alcune riflessioni che derivano da sperimentazioni di didattica laboratoriale condotte nell'anno scolastico 2020/21. Le sperimentazioni rientrano nell'ambito di un progetto dal nome MATT&R che intende valorizzare la dimensione materiale delle attività in matematica, e una visione del(la) docente che in classe osserva, analizza e ricerca. Poniamo il focus su due lavori laboratoriali sulla matematica delle forme, che sono stati condotti rispettivamente con un bambino autistico di classe prima primaria e con due classi di quinta primaria. Il primo lavoro mette in luce potenzialità e difficoltà emerse dall'utilizzo di un contesto giocoso, che riprende la passione del bambino per i videogiochi, per affrontare i concetti di quadrato e rettangolo e le loro relazioni. Il secondo lavoro riguarda un problema sulla relazione tra aree e perimetri di semplici figure piane in una situazione non nota ed evidenzia esempi di strategie risolutive (non necessariamente corrette) che mobilizzano la configurazione iniziale del problema, la matematica sottesa, le modalità comunicative, anche sul foglio di carta.

Parole-chiave

Competenza matematica, forma, perimetro, area, laboratorio

IL PROGETTO MATT&R E LA MATEMATICA DELLE FORME

Il progetto MATT&R nasce come un progetto di lavoro *per e con* docenti di matematica, dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di I grado. La sua filosofia prende spunto dal termine inglese *matter* e da sue due accezioni: come sostantivo, si può riferire alla materia; come verbo, all'avere importanza. Il progetto (di formazione e ricerca) valorizza la dimensione materiale dell'attività come importante nell'apprendimento della matematica e le sue implicazioni per la costruzione di competenza matematica. MATT&R è anche acronimo di "MAThematics Teaching & Research", valorizzando una visione nuova del(la) docente, che non solo insegna ma osserva, analizza, ricerca in classe. Insieme può essere associato a Movement-Affect-Teachers-Teaching-&-Resources: la didattica della matematica dipende dalle scelte dell'insegnante, dal processo di insegnamento, dalle risorse in esso introdotte, e in ugual misura, dal ruolo rivestito dal corpo e dalla sfera affettiva, elementi essenziali per lo sviluppo di una relazione 'positiva' con la disciplina. Il gruppo di progetto è composto da esperte con competenze eterogenee, che spaziano dalla didattica della matematica all'insegnamento nella scuola dall'infanzia, alla secondaria di primo grado, dall'esperienza con difficoltà e disabilità, alla valutazione.

In questo lavoro, presentiamo prime riflessioni del gruppo di progetto attorno a lavori laboratoriali che sono stati condotti durante l'anno scolastico 2020/21. Questi lavori si sono concentrati su Matematica e Forme, o la matematica delle forme. La scelta del tema deriva da un lato da risultati provenienti dalla letteratura che mettono in evidenza errori e misconcetti associati al pensiero geometrico, di cui la confusione tra area e perimetro di una figura fornisce un noto esempio. Dall'altro lato, l'idea di forma è importante in matematica poiché le forme hanno a che fare con modi di organizzare e di strutturare lo

spazio prima, di misurarlo poi (coinvolgendo rapporti, tassellazioni, lunghezze, superfici, e così via). Seppur lunghezza e area siano quantità spaziali, tangibili, accessibili, è interessante notare che non esistono strumenti come i righelli per operare direttamente la misura di un'area. L'area è poi un concetto fondamentale, utile per comprendere le frazioni così come per lavorare in campi associati alle discipline STEM (Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica). La ricerca si è occupata di provare a capire perché molti studenti confondano area e perimetro anche di semplici figure geometriche (specialmente i rettangoli), rilevando che spesso questo ha a che vedere con una comprensione debole di entrambe le formule per il calcolo di area e perimetro (Smith & Barrett, 2017). Altri hanno messo in luce che, quando si impara a misurare l'area, emergono difficoltà nel distinguere l'area di una regione dalla lunghezza del contorno e che questo accade ancora nella scuola secondaria di I grado (si vedano ad es., Chappell & Thompson, 1999; Tan-Sisman & Aksu, 2012). Un linguaggio descrittivo vago per queste grandezze (in particolare, per il perimetro), ad esempio "l'area è l'interno e il perimetro l'esterno" può anche supportare questa confusione (Clements & Sarama, 2009). La ricerca non ha tuttavia dato spiegazioni soddisfacenti o risposte efficaci a queste problematiche, che richiedono dunque studi più approfonditi.
In un discorso sulla matematica delle forme, meritano un cenno gli angoli, che sono matematicamente essenziali per classificare figure geometriche (come triangoli e quadrilateri), per comprendere le rotazioni come trasformazioni e per distinguere le relazioni di similitudine e di congruenza. La misura degli angoli connette la staticità della figura con il movimento rotatorio e, allo stesso tempo, gli angoli sono elementi per orientarsi e navigare tra posizioni spaziali, localizzare i nostri corpi in relazione ad altri e tracciare il movimento degli oggetti (Smith & Barrett, 2017).
Nell'anno scolastico 2020/21, con l'intento di indagare le possibilità didattiche offerte dalla matematica delle forme per lo sviluppo di competenza geometrica (e di senso dello spazio), abbiamo esplorato e sperimentato attività laboratoriali da tre prospettive diverse: nell'ambito del progetto "*Bambini in movimento verso le STEAM*" (finanziato dalla Compagnia di San Paolo); in un lavoro con un bambino di prima primaria con la sindrome dello spettro autistico; con una sperimentazione in classi quinte della scuola primaria (progettata a partire da un quesito INVALSI dell'ambito *Spazio e Figure*). Il primo progetto ha coinvolto nella primavera del 2021 due gruppi di bambine e bambini dai 3 ai 5 anni in esperienze di matematica e *coding* (e in una fase finale le loro famiglie), con l'obiettivo di avvicinarli alla conoscenza della forma quadrata vista come traiettoria del movimento di un'ape robot (una *Blue bot*). Non ci soffermiamo qui su queste esperienze, per motivi di spazio. Il lavoro sperimentale delle altre due prospettive è invece oggetto degli spunti di riflessione che presentiamo nelle due sezioni seguenti. La scelta è ponderata: la classe prima e la classe quinta primaria, infatti, racchiudono entrambe un passaggio, in quanto momenti 'ponte' rispettivamente dall'infanzia alla primaria e dalla primaria alla secondaria di I grado. Gli obiettivi dei lavori sperimentali erano molteplici. Didatticamente, lavorare su figure geometriche semplici come quadrati e rettangoli e sulle loro relazioni, a diversi gradi scolari e con sensibilità adatte ad alunni con specifica disabilità. In secondo luogo, indagare processi sottesi al riconoscimento e alla classificazione di una forma (una figura) o processi sottesi alla delicata relazione tra area e perimetro, spesso fonte di difficoltà come testimonia la letteratura di ricerca.

ANDREA, I QUADRATI E I RETTANGOLI

In questa sezione approfondiamo il lavoro su quadrati e rettangoli sviluppato con Andrea (i nomi dei minori che compaiono nel testo sono di fantasia). Andrea è un bambino di 6 anni di una classe prima della scuola primaria e soffre di un disturbo dello spettro autistico in comorbilità con ADHD (deficit di attenzione e iperattività) e DOP (disturbo oppositivo provocatorio). Andrea fatica moltissimo a stare fermo e seduto, ha un linguaggio molto sviluppato ma usato spesso in modo ecolalico per ripetere a memoria frasi di video o videogiochi, la sua grande passione. Possiede anche velocità di calcolo e facilità nella visualizzazione di schemi numerici, ma allo stesso tempo mostra notevoli difficoltà con l'argomentazione.
Il lavoro svolto con Andrea si è focalizzato sul riconoscimento delle caratteristiche di un quadrato e di un rettangolo, sul calcolo del perimetro di queste figure e sulla relazione tra di esse. Viste le difficoltà presentate da Andrea, abbiamo scelto di accompagnare il lavoro con uno sfondo narrativo accattivante

che permettesse di catturare la sua limitata attenzione e di soffermarsi per un tempo sufficiente sulle relazioni geometriche: ciò che lo ha reso possibile è stata la sua inclinazione verso i videogiochi.
Lo spunto per ragionare sulle caratteristiche di un quadrato è stato dunque il contesto di Minecraft. Andrea sa già che un quadrato è una figura con quattro lati "uguali", ma non riesce a gestire il concetto di uguale, non sa che cosa vuole dire quattro lati uguali. Il primo compito attribuitogli dall'insegnante, Sara (tra le autrici di questo contributo), è così quello di costruire una pavimentazione per una casa di un "Villager", che nel videogioco si presenta come una pavimentazione fatta di tanti quadrati, utilizzando un gomitolo di lana da cui ricavare quattro fili. Andrea inizialmente taglia quattro fili di lunghezze diverse (Figura 1a) e, solo dopo alcune prove fallimentari per costruire un quadrato di lato 4, afferma che per costruire un quadrato è necessario che i fili siano lunghi uguali, scoprendo che avere quattro lati "uguali" equivale ad avere quattro lati che hanno la stessa lunghezza.


a

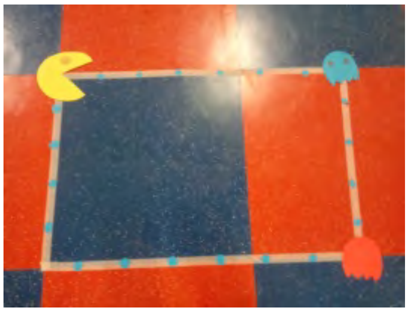

b

Figura 1. (a) Fili di lana per costruire un quadrato; (b) visualizzare le caratteristiche di un rettangolo.

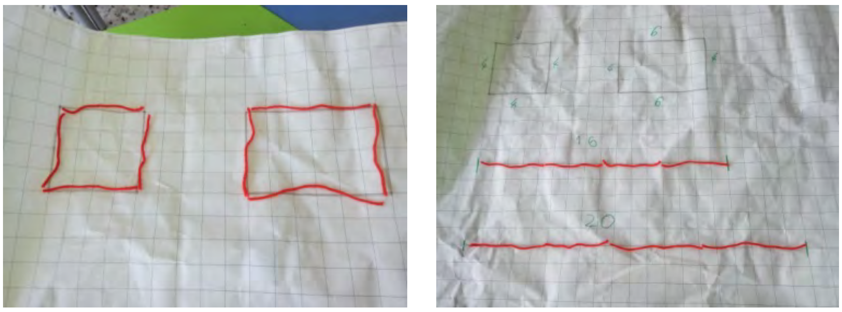
Il contesto scelto per scoprire visivamente le caratteristiche di un rettangolo è stato invece quello offerto da Pac-Man. Dopo aver costruito un quadrato e un rettangolo sul pavimento con del nastro di carta, Sara ha posizionato le riproduzioni di carta di Pac-Man e di due piccoli fantasmi in punti diversi lungo il perimetro e una serie di pallini equidistanti lungo i lati delle figure (4 nel caso del lato del quadrato, 4 e 6 pallini per i lati del rettangolo: Figura 1b). Muovendo la bocca affamata per raggiungere i diversi vertici del rettangolo, Andrea ha potuto contare quanti pallini può mangiare Pac-Man su ogni lato e osservare che, se per il quadrato i quattro lati erano lunghi "4" (senza indicare alcuna unità di misura), per il rettangolo emerge il fatto che i lati sono "uguali" a due a due, due di 4 e due di 6 nel caso esaminato.
A questo punto, abbiamo proposto ad Andrea l'utilizzo di una *Bee-bot* (un piccolo robot programmabile a forma di ape, simile a quello del progetto alla scuola dell'infanzia) per riprodurre quadrati e rettangoli come traiettorie del movimento dell'ape sul pavimento della scuola. La piccola ape presenta 4 frecce sulla schiena, i comandi per programmare il suo movimento: 2 frecce sono posizionate a indicare le due direzioni alto/basso e le altre 2 a indicare le due rotazioni a destra/sinistra. Questa attività ha permesso ad Andrea di dare senso alla classificazione delle due figure come quadrilateri della stessa famiglia, soprattutto grazie al fatto che, nel cambio di direzione, l'ape robot si muove sempre con una rotazione di 90 gradi. Il movimento del robot inoltre è stato un motivo di ulteriore coinvolgimento per il bambino.
Al di là dei risultati raggiunti, in questa prima parte del lavoro abbiamo riscontato le difficoltà maggiori nella predominanza, per Andrea, di una memoria visiva (caratteristica molto comune delle menti neurodiverse) su un apprendimento più concettuale: nell'attribuzione di senso, buona parte dei pensieri di una persona autistica passano infatti attraverso schemi e immagini e, in Andrea, ciò ha portato a una chiara difficoltà di generalizzazione. Per Andrea, le due figure incontrate, il quadrato di lato 4 e il rettangolo di lati 4 e 6, rappresentavano tutti possibili quadrati e tutti i possibili rettangoli, ovvero ogni quadrato deve avere i lati lunghi 4, ogni rettangolo i lati lunghi 4 e 6. I soggetti autistici inoltre possono presentare un deficit della coerenza centrale, che rende difficile l'integrazione di informazioni in un insieme coerente: questa difficoltà entra in gioco nel passaggio dal particolare al generale, con la

percezione di una figura che inizia dalle singole parti per approdare all'immagine complessiva solo con lentezza. Anche questo aspetto può aver reso difficile per il bambino la visualizzazione di figure con misure dei lati diverse da quelle memorizzate. Infine, l'iperattività di Andrea rende faticosi i nuovi apprendimenti, spesso non riuscendo a sostenere lo sforzo cognitivo che è richiesto da un'attenzione prolungata. Risulta più semplice rimanere ancorato a ciò che conosce, soprattutto se si tratta di schemi. Queste riflessioni hanno portato a due nuove proposte di attività. La prima ha coinvolto Andrea nel gioco di Pac-Man che mangia i pallini lungo figure con le misure cambiate rispetto a quelle originarie, così da visualizzare concretamente i cambiamenti. La seconda attività si è focalizzata sulla costruzione di tanti quadrati di dimensioni diverse, traendo spunto dal videogioco Red Ball 4. In questo gioco, un cerchio rosso (Red Ball) si trova a dover fronteggiare dei quadrati nemici che crescono di potenza man mano che crescono di dimensione. Andrea ha qui costruito diversi quadrati partendo dal più piccolo con lato 1 fino ad arrivare a dimensioni più "potenti". Giocando con i quadrati, è poi stato possibile sistemarli in ordine di grandezza prima crescente (Figura 2a), quindi decrescente, ma anche osservare, ponendoli uno dentro l'altro, che pur variando le dimensioni la forma rimane sempre la stessa (Figura 2b).

a b

Figura 2. (a) Quadrati ordinati per grandezza crescente; (b) quadrati sistemati uno dentro l'altro.

Da qui siamo passate a una nuova fase del lavoro nella quale introdurre il calcolo del perimetro. Andrea sa già calcolare a mente il perimetro, ma di fronte alla richiesta di contare sulle figure (un quadrato e un rettangolo dati su carta centrimetrata; Figura 3a) i quadretti del contorno di ciascuna, ha manifestato di non farlo correttamente. Si è infatti confuso contando i quadretti interni alla figura senza fare riferimento al bordo (una manifestazione della confusione area-perimetro). Sara ha dunque reintrodotto il gomitolo di lana e, assieme ad Andrea, ha tagliato quattro fili corrispondenti ai lati di ciascuna figura. I fili sono stati utilizzati per provare concretamente a costruire il contorno e successivamente per unire in un unico segmento i quattro lati (Figura 3b).

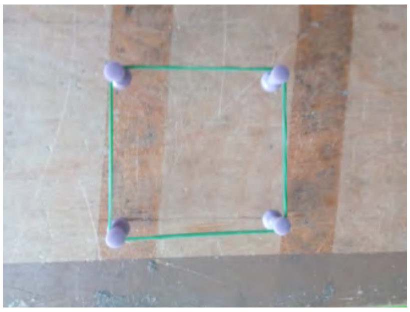
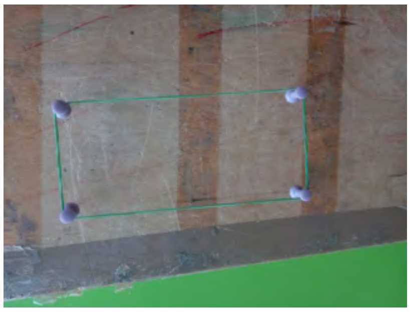


a b

Figura 3. (a) Un quadrato e un rettangolo su carta centimetrata; (b) segmenti di lana di lunghezza i perimetri.

In questo modo, Andrea è riuscito a visualizzare la linea che si è formata e ha sperimentato che il perimetro può essere calcolato in diversi modi, poiché il risultato è sempre lo stesso sia effettuando l'operazione matematica sia contando i bordi dei quadretti sulla carta (quadretti della figura o quadretti

del segmento). Superato l'ostacolo, abbiamo spostato l'attenzione sulla relazione tra le due figure geometriche mediante l'utilizzo di un elastico.
Andrea ha provato ad allungare manualmente tutti i lati di un quadrato costruito con un elastico e quattro puntine (Figura 4a): è emerso che ogni volta due lati restano invariati e due lati "crescono" in lunghezza; pertanto, un rettangolo non è altro che un quadrato allungato (Figura 4b).

a b

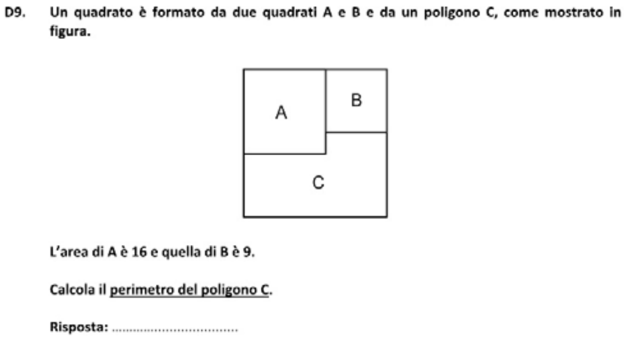
Figura 4. (a) Un quadrato costruito con un elastico e quattro puntine; (b) un quadrato allungato in un rettangolo.

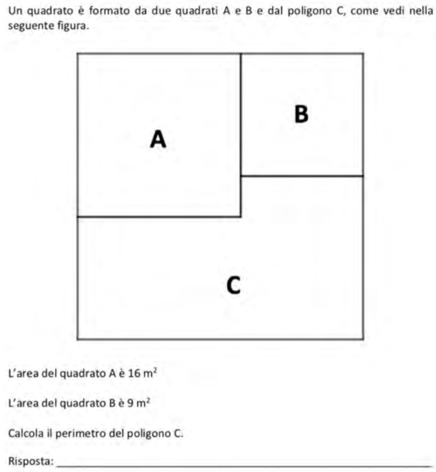
Altra osservazione interessante emersa in questo contesto è che la "curva" (l'angolo) da creare attorno a ogni puntina, se si percorre il perimetro di entrambe le figure, non cambia. Per essere sicuro che gli angoli di un quadrato e di un rettangolo hanno la stessa ampiezza, Andrea ha costruito un "misuratore" a forma di pistola con un angolo di 90° e, dopo svariate prove, ha concluso con sicurezza che i quattro angoli sono congruenti in entrambe le figure.
In conclusione, vogliamo sottolineare il ruolo che i sensi e l'esperienza concreta hanno rivestito per Andrea. Il lavoro fatto con Andrea mostra che è possibile progettare "attività di senso" per bambini con neurotipicità differenti, sfruttando le loro potenzialità e con alcuni accorgimenti. Il contesto di lavoro deve innanzitutto essere strutturato con scrupolo, creando uno sfondo narrativo che agganci l'attenzione e che faciliti il focus attentivo sugli elementi salienti e sui dettagli da prendere in considerazione. Sono necessari strumenti facilitatori e altamente motivanti accanto a un approccio multimodale che preveda risorse verbali, gestuali, grafiche. Il coinvolgimento attivo del bambino con il corpo e con il movimento del corpo lascia infine un imprinting molto profondo nella memoria di lavoro e attiva quelle tracce emotive che rendono i processi cognitivi davvero rilevanti.

TRA PERIMETRI E AREE

Il secondo lavoro che prendiamo in esame riguarda una sperimentazione didattica condotta in due classi quinte della scuola primaria e sviluppata a partire da una domanda chiusa dell'ambito *Spazio e Figure* tratta dalla prova nazionale SNV proposta al grado 10 nel 2016 (Figura 5a).
Lo scopo della domanda è di calcolare il perimetro del poligono C, che è porzione di un quadrato, per cui è necessario individuare la misura dei lati del poligono. Completano il quadrato grande altri due quadrati (denominati A e B) di cui si conosce la misura della superficie. Il quesito richiede di mettere in relazione aree e perimetri di semplici figure geometriche piane. Tale competenza è risultata fragile negli studenti di grado 10 che hanno risolto il quesito, e infatti la percentuale di risposte corrette è stata pari al 35,2% del campione nazionale mentre le risposte mancanti sono state il 18,1%.
Dal momento che perimetri e aree si introducono nella scuola primaria, abbiamo pensato di trasformare il quesito in una situazione problematica non standard (non nota), cambiando in modo opportuno la formulazione e inserendo delle unità di misura (Figura 5b), per proporlo a classi di quinta primaria e analizzare le strategie risolutive introdotte. Per sondare in profondità i processi attuati abbiamo anche chiesto di sostenere la risposta fornita con una argomentazione scritta ("Spiega il tuo ragionamento").
L'attività è stata svolta da alunni di due classi quinte (le classi di Irene e Marina, due delle autrici del

contributo), e qui di seguito presentiamo i protocolli di due alunne, Sofia e Martina. Al di là della specificità e diversità dei processi risolutivi, siano essi corretti o meno, nei due protocolli emerge il ricorso a trasformazioni isometriche anche se non esplicitamente nominate.

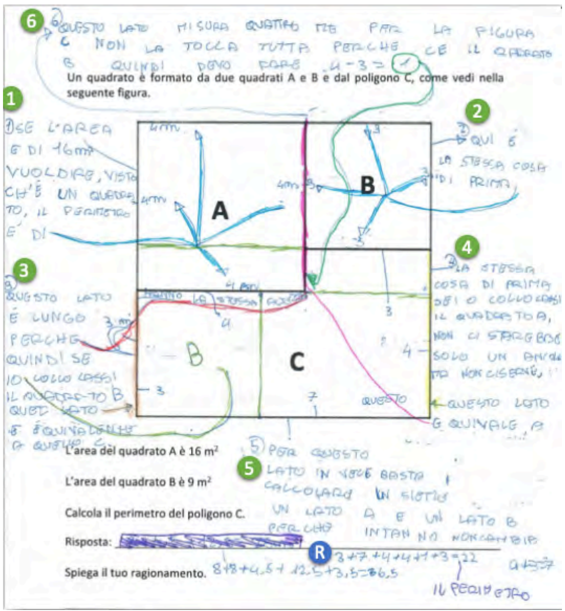




a b

Figura 5. (a) Quesito SNV 2016, grado 10; (b) Adattamento per l'attività in quinta primaria.

Il protocollo di Sofia (Figura 6a) mostra una disposizione delle frasi e un uso di segni grafici come frecce e colori e di termini precisi che esprimono una consuetudine alla manipolazione delle figure, sia concreta sia con software di geometria dinamica ("se collocassi", "ho tagliato", "ho ribaltato"). Possiamo notare che l'alunna non ha prodotto un testo continuo ma una successione di frasi che sembrano quasi "toccare" i segmenti delle figure date e che permettono di comprendere come sia giunta a individuare la misura cercata. La Figura 6b presenta la trascrizione dell'argomentazione prodotta per punti (dove R indica la risposta, in questo caso corretta).



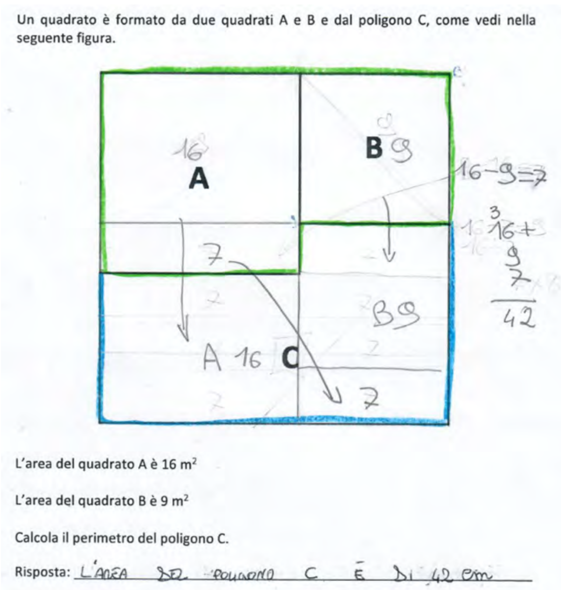
1. *Se l'area è di 16 m² vuol dire, visto che è un quadrato, il perimetro è di (→ 4m 4m 4m 4m)*
2. *Qui è la stessa cosa di prima (→ 3 3 3 3)*
3. *Questo lato è lungo 3m perché quindi se io collocassi il quadrato B quel lato è equivalente a quello C (hanno la stessa altezza)*
4. *La stessa cosa di prima se io collocassi il quadrato A, non ci starebbe solo un angolo ma non ci serve, questo lato equivale a (questo, 4)*
5. *Per questo lato invece basta collocare insieme un lato A e un lato B perché intanto non cambia 4+3=7*
6. *Questo lato misura 4 m per la figura C non la tocca tutta perché c'è il quadrato B quindi devo fare 4-3=1*

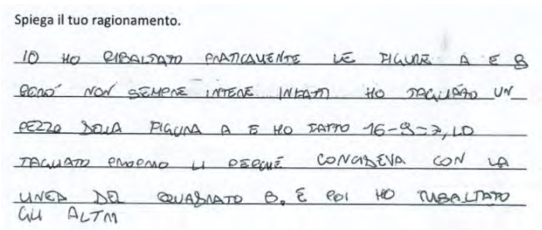
R. *3+7+4+4+1+3 = 22, il perimetro*

a b

Figura 6. (a) Il protocollo di Sofia; (b) trascrizione dell'argomentazione prodotta per punti.

Dal protocollo prodotto inizialmente da Martina si evince che il processo risolutivo seguito non conduce alla soluzione corretta (Figura 7a). L'alunna mostra di traslare i due quadrati o parti di essi così da ricoprire completamente il poligono C, lavorando esclusivamente sulla misura delle superfici delle figure date. Infatti, Martina conclude il suo ragionamento scrivendo nella riga della risposta l'area del poligono C anziché il perimetro. La spiegazione che dà del suo ragionamento esplicita le trasformazioni che l'alunna ha operato e che indica sul foglio mediante frecce e l'aggiunta di segmenti per identificare i lati delle nuove figure, e con termini che indicano movimenti e azioni ("ho ribaltato", "ho tagliato", "l'ho tagliato").



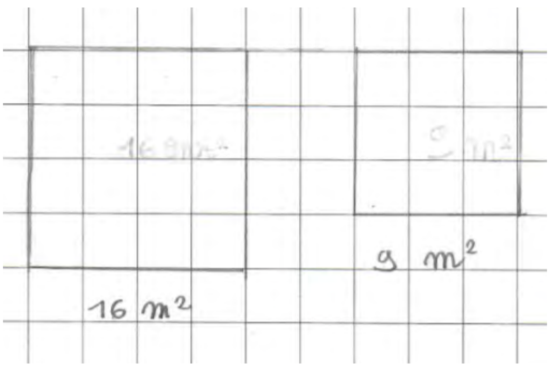


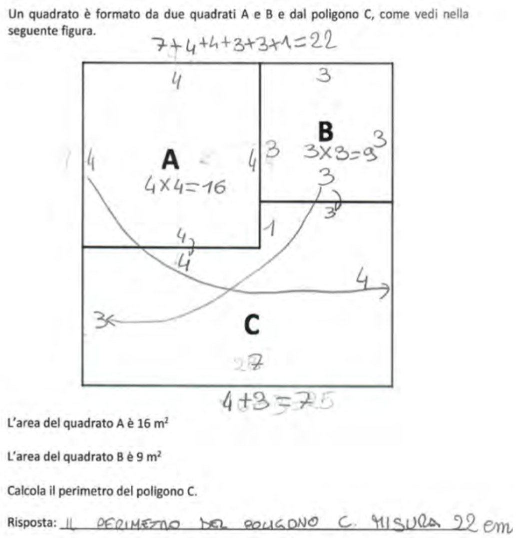
Io ho ribaltato praticamente le figure A e B però non sempre intere infatti ho tagliato un pezzo della figura A e ho fatto 16-9=7, l'ho tagliato proprio lì perché coincideva con la linea del quadrato B. E poi ho ribaltato gli altri.

a b

Figura 7. (a) Il primo protocollo di Martina; (b) spiegazione del ragionamento e sua trascrizione.

L'insegnante si accorge dell'errore di Martina e, in un secondo momento, fornisce all'alunna un nuovo strumento di pensiero, suggerendole di disegnare su carta centimetrata due quadrati, uno di area 16 cm^2 e uno di area 9 cm^2 (Figura 8a), prima di invitarla a risolvere nuovamente il quesito.





a b

Figura 8. (a) Disegno dei quadrati su carta centimetrata; (b) il protocollo definitivo di Martina.

L'utilizzo della carta centimetrata per disegnare una semplice figura geometrica conoscendo la sua area riporta Martina a una situazione nota: questa le consente di visualizzare facilmente sia la misura delle superfici dei due quadrati sia la lunghezza dei loro lati. L'alunna a questo punto trasferisce il suo

ragionamento sulla nuova scheda dell'attività, utilizzando frecce per collegare le misure dei lati dei quadrati A e B, ottenute dalle aree, e le misure dei lati del poligono C, e completa il quesito fornendo il risultato corretto per il calcolo del perimetro di C (Figura 8b).
La risorsa fornita dalla docente non solo aiuta Martina a ricondursi a una situazione nota che supera le difficoltà avute in precedenza, ma mobilita il processo di pensiero rendendolo efficace, e con esso la matematica della situazione, senza intaccare l'autonomia di lavoro. Nella prospettiva della nuova valutazione degli alunni di scuola primaria, introdotta dell'Ordinanza Ministeriale n. 172 del 4 dicembre 2020, questo esempio si configura proprio come buona pratica in cui l'insegnante accompagna i propri alunni nell'affrontare situazioni non standard, concorrendo allo sviluppo delle capacità cognitive e metacognitive degli allievi e al miglioramento dei loro apprendimenti. L'insegnante che fornisce la carta centimetrata a Martina concretizza un insegnamento attento a bisogni educativi e stili di apprendimento. Tali esperienze possono esemplificare il valore della didattica esplorativa, dove c'è spazio per l'errore, per le sue forme più divergenti ma anche per un suo recupero "di senso".

BIBLIOGRAFIA

Chappell, M. F. and Thompson, D. R. (1999). Perimeter or area? Which measure is it?, *Mathematics Teaching in the Middle School* **5***,* 20-23.
Clements, D. H. and Sarama, J. (2009). *Teaching and Learning Early Math: The Learning Trajectories Approach.* New York: Routledge.
Smith, J. P. and Barrett, J. E. (2017). Learning and teaching measurement: Coordinating quantity and number. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 355-385). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
Tan-Sisman, G. and Aksu, M. (2012). The length measurement in the Turkish mathematics curriculum: Its potential to contribute to students' learning, *International Journal of Science and Mathematics Education* **10***,* 363-385.

PROBLEMI GEOMETRICI :UN'ESPERIENZA PER IL CURRICULUM VERTICALE

Paola Buzio, Paola Bressan
IC Paolo e Rita Borsellino, Valenza (AL)
paola.buzio@icvalenza.edu.it

Abstract
In questo contributo presenteremo alcune attività svolte in un progetto che ha lo scopo di supportare i docenti nella loro attività di insegnamento grazie a una collaborazione tra le insegnanti della scuola primaria e secondaria di primo grado, coordinate dai docenti di didattica della matematica dell'Università del Piemonte Orientale.
Nelle sperimentazioni sono stati progettati e sviluppati laboratori di matematica in cui si chiedeva agli studenti di argomentare per iscritto la risoluzione di quesiti di geometria sulla variazione di area e perimetro e composizione e scomposizione di figure piane, tratti dalle prove INVALSI. Pertanto, sono state condotte discussioni collettive il cui obiettivo era favorire la discussione, il confronto e la condivisione di idee tra pari. I docenti coinvolti nel progetto hanno lavorato insieme sia nelle fasi di progettazione, sia di analisi a posteriori dei risultati producendo anche una rubrica valutativa per la valutazione formativa delle competenze.

Parole-chiave
Area, perimetro, argomentare, laboratorio, rubrica valutativa, discussione matematica.

INTRODUZIONE E SCOPO DEL LAVORO

In questo contributo vengono presentate attività svolte all'interno di un progetto che ha coinvolto docenti dell'I.C. Paolo e Rita Borsellino, Valenza (AL) e ricercatori in didattica della matematica dell'Università del Piemonte Orientale. Lo scopo del progetto è condividere e analizzare attività didattiche in un'ottica di sviluppo verticale di competenze trasversali e matematiche indicate nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo di Istruzione (MIUR, 2012). Sono stati svolti pertanto laboratori di matematica nelle classi di scuola primaria e secondaria di primo grado per favorire la discussione, il confronto e la condivisione di idee e riflessioni tra pari. In particolare sono stati predisposti quesiti di geometria sulla variazione di area e perimetro e composizione e scomposizione di figure piane, tratti dalle prove INVALSI, per un periodo che va dalla classe IV Primaria alla classe II della scuola Secondaria.
Il gruppo di ricerca ha consentito alle insegnanti di rimodulare le metodologie didattiche tradizionali scegliendo di far sviluppare le competenze trasversali comunicative attraverso la discussione matematica (Bartolini-Bussi, Bona & Ferri, 1995).

ATTIVITÀ DEL GRUPPO

All'inizio di ogni anno scolastico il gruppo si riunisce e si scelgono le classi e i quesiti da somministrare. L'attività che si svolge durante tutto l'anno è suddivisa in varie fasi:

1. Realizzazione di un protocollo comune e analisi a priori

Il protocollo comune ai due ordini di scuola descrive il contesto della classe, gli obiettivi generali in riferimento alle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012), l'elenco delle lezioni programmate, le modalità di valutazione e l'analisi a priori delle possibili strategie risolutive degli studenti. Cercare di prevedere le strategie risolutive degli alunni, i possibili errori o difficoltà può essere utile al docente per poi supportare i ragazzi in modo adeguato durante la prova attraverso le domande stimolo affinché vengano raggiunti gli obiettivi prefissati. Portiamo come esempio un quesito che è stato scelto dalle Prove Invalsi del 2015 - livello 8 somministrato alla classe V Primaria e classe II Secondaria al quale sono state tolte le risposte chiuse (**figura 1**)

Osserva la seguente figura formata da un quadrato al cui interno è disegnato un poligono di colore grigio. Qual è l'area del poligono grigio?

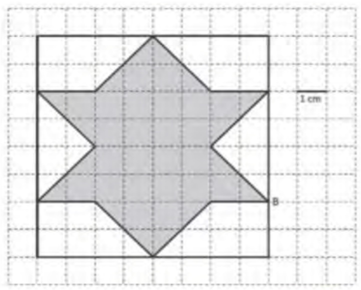


Figura 1 Quesito dalle Prove Invalsi del 2015, livello 8.

Il gruppo di lavoro dà molta importanza all'analisi a priori: si riflette insieme per prevedere i ragionamenti dei ragazzi nell'ottica delle competenze che si vogliono far sviluppare. Di seguito riportiamo alcune osservazioni emerse dell'analisi a priori del quesito riportato in figura 1.

Possibili strategie risolutive

- Scomporre e ricomporre la figura in modo da ottenere un rettangolo o figure note
- Contare i quadretti interi e a metà e sommarli: 32 cm^2
- Calcolare la differenza tra l'area del quadrato e l'area bianca: 64-32 = 32cm^2

Possibili errori e difficoltà

- Errore nel conteggio dei quadretti
- Errore nel calcolo delle aree
- Spiegazione del ragionamento incompleta e poco chiara

2. Somministrazione dei quesiti

In classe i ragazzi dopo aver letto i quesiti possono sia manipolare la figura anche ritagliandola, sia descrivere con calcoli e parole il percorso mentale messo in atto in modo individuale; in seguito, in piccoli gruppi, confrontano le strategie per concordare quella più efficace quindi scrivono il ragionamento giustificando le loro scelte.

3. Discussione collettiva

Successivamente vengono restituiti in classe i lavori corretti, commentando le soluzioni e i ragionamenti adottati, i punti di forza e gli errori; l'insegnante invita gli alunni ad esplicitare in un testo narrativo comune i concetti e le procedure emerse che diventeranno parte della cultura di classe costruita attraverso la condivisione delle soluzioni.

4. Confronto tra docenti e analisi a posteriori

I docenti del gruppo di lavoro confrontano tramite piattaforma Moodle gli elaborati più significativi, sia le procedure corrette, sia quelle errate, e insieme al gruppo di ricerca dell'università, vengono evidenziate solo le maggiori difficoltà riscontrate dai ragazzi e si cerca di mettere a punto un metodo didattico efficace.

Di seguito riportiamo alcuni protocolli e i commenti del gruppo di ricerca:

Elaborato n°1: un'alunna della classe V Primaria scrive il seguente ragionamento, **figura 2**:
"Ho fatto il quadrato per sovrapporre i pezzi, prima mi avanzavano due pezzi ma poi ci sono riuscita.... la figura ha il lato di 6,7 cm e devo fare 6,7 x 6,7 = 22,89 cm^2"

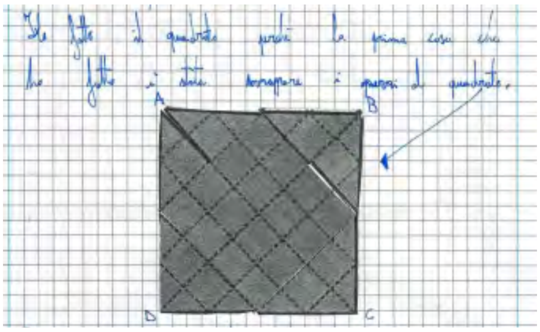


Figura 2 Elaborato di un'alunna della classe V Primaria

Commento dell'insegnante:
l'alunna ha scomposto la figura ottenendo un quadrato ma ha utilizzato la diagonale anziché il lato del quadretto. In questo caso l'alunna non si è accorta che il rettangolo grigio è di dimensioni diverse rispetto alla figura del testo, l'obiettivo di saper scomporre e ricomporre le figure non è stato raggiunto.

Elaborato n°2: un'alunna della classe V primaria scrive il seguente ragionamento, **figura 3**:
"...ho ritagliato la parte bianca che non faceva parte del poligono...e ho visto che la parte bianca e quella grigia hanno la stessa area, quindi ho calcolato l'area del quadrato e ho diviso per due..."

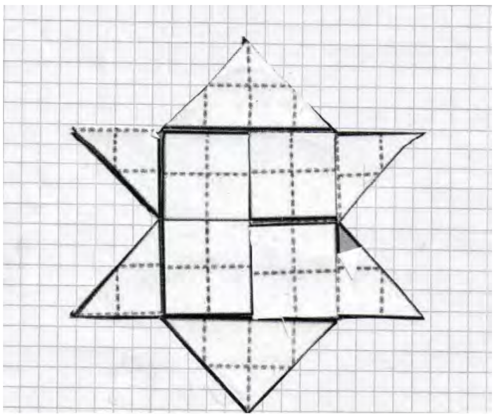


Figura 3 Elaborato di un alunna della classe V Primaria

Commento dell'insegnante:
In questo caso l'alunna ha dimostrato di aver raggiunto l'obiettivi prefissati, infatti sa comporre e scomporre figure in altre ad area nota e conosce le formule geometriche.

Elaborato n°3: un alunno della classe II secondaria, attraverso un modulo di Google poiché l'attività è stata svolta in DAD, scrive il seguente ragionamento:
"Ho affermato che l'area della stella grigia presente all'interno del quadrato bianco misura 36 centimetri quadrati. La prima parte del mio ragionamento è stato calcolare il perimetro del quadrato bianco che

misurava 64 centimetri quadrati. Per calcolare la stella è bastato sommare i triangoli rettangoli bianchi in modo da ottenere dei quadrati che corrisponde a 28 centimetri quadrati. Successivamente bisogna sottrarre la parte ottenuta per l'area totale e così troviamo l'area della stella ossia 36 centimetri quadrati."
Commento dell'insegnante:
L'alunno, pur utilizzando un ragionamento corretto per calcolare l'area della parte colorata per differenza, dimostra di fare confusione tra area e perimetro, fa errori di calcolo e usa una terminologia errata anche nel definire le figure geometriche scomposte. In questo caso non sono stati raggiunti gli obiettivi prefissati.

VERSO UNA VALUTAZIONE FORMATIVA

Le attività sono state svolte in un clima non valutativo in modo gli alunni fossero più concentrati sui processi piuttosto che sui risultati. Allo scopo di avere una valutazione formativa (Black & Wiliam 2009) degli alunni, è stata predisposta una rubrica valutativa, **figura 4**. I docenti del gruppo hanno riflettuto insieme sulla possibilità di sviluppare maggiormente una valutazione delle argomentazioni degli studenti in un'ottica di valutazione formativa, ma questa nuova prospettiva obiettivo è ancora in corso di sviluppo.

Indicatori	**RAGGIUNTO** **Punteggio 2**	**PARZIALMENTE RAGGIUNTO** **Punteggio 1**	**NON RAGGIUNTO** **Punteggio 0**
Strategie risolutive	Individua una strategia risolutiva efficace	La strategia è parzialmente corretta	Non individua una strategia oppure la strategia è sbagliata
Correttezza dei calcoli	Esegue correttamente i calcoli	Ci sono alcuni errori di calcolo	I calcoli sono errati
Chiarezza nell'esposizione	Espone il ragionamento in modo chiaro individuando relazioni tra gli elementi	L'esposizione presenta imprecisioni	Il ragionamento non è comprensibile
Gestione delle unità di misura	Sa passare dalle unità di misura lineari a quelle di superficie esplicitandole ogni volta	Non esplicita le unità di misura in modo completo	Omette le unità di misura

Figura 4. Rubrica valutativa in cui gli indicatori sono stati scelti in base all'analisi a priori

CONCLUSIONI

I risultati ottenuti nelle classi hanno mostrato che l'attività ha portato un miglioramento sia nella capacità argomentativa dei ragazzi che si impegnano ad esporre i concetti in modo chiaro e sintetico anche durante l'attività didattica quotidiana, sia nella motivazione ad apprendere percependo il lavoro proposto come una sfida. Inoltre abbiamo fatto osservare quanto sia importante che il linguaggio usato per descrivere le strategie, in particolare i termini propri della disciplina, debba essere chiaro e corretto affinché possa essere ben compreso all'interno della comunicazione collettiva. Infine la valutazione formativa ha permesso di classificare in livelli i raggiungimento degli obiettivi secondo gli indicatori scelti e, nel caso di obiettivo non raggiunto, i ragazzi hanno preso consapevolezza dei margini di miglioramento.

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare il Dirigente Scolastico dell'Istituto Comprensivo "Paolo e Rita Borsellino" Prof. Maurizio Primo Carandini che ha proposto e incentivato la formazione del Gruppo di ricerca.
Ringraziamo tutti i colleghi e agli alunni che hanno partecipato alla sperimentazione.
Un ringraziamento particolare al Prof. Luigi Ferrari e alla Prof.ssa Francesca Martignone dell'Università del Piemonte Orientale che ci hanno accompagnato in questi anni condividendo la loro esperienza nell'ambito della didattica della matematica e fornendo un costante supporto in ogni fase del nostro lavoro di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica*, Comune di Modena, CDE.
Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *21*(1), 5–31.
MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Annali della Pubblica Istruzione. No. Speciale. Disponibile in: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

READY PLAYER BOOK
LETTORI MATEMATICI IN GIOCO

S. Boccardo [1], M. Borsero[1][2], E. Pera [3]

[1] I.C. "Parri - Vian", Torino
[2] Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino.
[3] I.C. "S. Pertini", Torino

E-mail: massimo.borsero@unito.it

Abstract

L'uso di *problemi a righe* è ampiamente diffuso come mezzo per favorire le capacità di argomentazione e problem solving di studenti e studentesse. In questi testi problema sono tipicamente presenti e possibili molteplici soluzioni da discutere e argomentare. Tale struttura a scelta è presente anche nei *librigame*: testi in cui la narrazione è interattiva grazie a bivi, e il lettore sceglie come proseguire la storia. In questo articolo sarà presentata un'attività didattica proposta ad un gruppo di studenti di classe seconda di Scuola Secondaria di I grado, nell'ambito di un progetto PON dell'I.C. "Parri - Vian" di Torino. Studenti e studentesse sono partiti da un problema contenuto in M. Tahan (1938) e, dopo averlo risolto, vi hanno costruito intorno un raccontogame a bivi, immaginando un prima e un dopo della storia narrata nel problema, integrandola con le diverse soluzioni possibili dello stesso trovate in precedenza (corrette ed errate). Molto importante è stata la giustificazione di questi bivi: l'evoluzione della storia è stata legata in parte alla struttura narrativa, in parte a quella matematica del problema.

Parole chiave
Problem solving, problemi narrativi, librogame, argomentazione

QUADRO TEORICO

Il problem solving è da sempre uno dei cardini dell'attività matematica e dunque, per riflesso, uno degli elementi centrali del suo apprendimento. Nel vasto filone di ricerca sulla comprensione dei problemi, riguardo al quale rimandiamo a Demartini e Sbaragli (2019) per una panoramica approfondita, particolare rilevanza ha assunto lo studio dei cosiddetti problemi narrativi. Questi problemi sono caratterizzati da una formulazione testuale che racconta esplicitamente una storia. Come osservato in Zan (2016), una storia ha tre componenti:

1. una situazione che presenta qualche conflitto, problema, disagio;
2. un protagonista animato che è coinvolto in questa situazione con uno scopo;
3. una sequenza basata su rapporti causali, in cui il conflitto viene risolto.

Chiaramente, l'idea di causalità è centrale nella narrazione di storie, ma è una causalità diversa da quella logica: si tratta di una causalità narrativa. Lo stretto legame tra il contesto narrativo evocato dalla storia e il contesto matematico del problema diviene un elemento essenziale sia per la comprensione sia per la soluzione dei problemi narrativi. A volte però può esserci frattura invece che continuità tra il contesto narrativo e il contesto matematico evocato dal problema: questi problemi sono chiamati dalla stessa Zan *problemi a quadretti*, in opposizione ai *problemi a righe* dove invece vi è continuità. Nei primi la comprensione (e dunque la possibilità di soluzione) è ostacolata, mentre nei secondi è favorita. Per un approfondimento sul tema dei problemi a righe e a quadretti rimandiamo a Zan (2007) e (2016).

Un altro elemento essenziali nel percorso didattico che verrà descritto è l'uso del *librogame*. Un *librogame* è un'opera narrativa divisa in sezioni numerate al termine delle quali il lettore si trova di fronte a uno snodo narrativo, con diverse opzioni di sviluppo tra cui scegliere. Per proseguire e concludere la lettura si deve scegliere la risposta migliore. La scelta modifica lo svolgimento della storia stessa. A ogni opzione corrisponde infatti una nuova sezione numerata con cui la storia prosegue. Esistono risposte migliori che permettono di andare avanti e risposte peggiori che danno delle penalità. La storia si conclude sempre e al termine, in base alle penalità accumulate, si ha un profilo di gioco e un diverso finale. La struttura del *librogame* richiede la partecipazione attiva del lettore (nel nostro caso, del gruppo classe), coinvolgendolo come regista della storia. Il racconto è fortemente contestualizzato e la cornice narrativa è un elemento importante di cui tener conto nel momento dei cosiddetti bivi, sulla base dell'empatia e del processo di immedesimazione suscitati dalla storia stessa. Per approfondire il tema del *librogame* rimandiamo a Rio (2021).

Il fatto che la situazione problema sia definita all'interno del *librogame* da più opzioni di sviluppo si fonda su due momenti caratteristici: il lettore-solutore è chiamato in un primo momento a un'attività interpretativa, in corrispondenza di un punto di crisi della storia, che ingenera un momento "conflittuale", "contradditorio", "di rottura" rispetto alle proprie preconoscenze, che andrà risolto con uno "scarto", attivando la propria zona di sviluppo prossimale (De Vecchi e Carmona-Magnaldi 2015); in un secondo momento, la situazione problematica viene portata fuori dal testo, passando dal testo scritto al testo parlato, dal narrativo all'argomentativo. Il passaggio costituisce una strategia risolutiva con cui attivare il processo di astrazione. Si formalizzano a voce alta alcuni ragionamenti risolutivi, si formulano ipotesi e si devono giustificare le scelte attraverso un processo di confronto e discussione. La situazione problema permette in questo modo di collaborare, riflettere e decidere tra più soluzioni (Herrington, Oliver, Reeves, 2014) e a questo proposito, in particolare il *librogame* ben rappresenta si potrebbe dire, con un accostamento di gusto ossimorico, "il problema delle soluzioni". Infine, la sua struttura permette al lettore-solutore anche a fronte di "deviazioni", intese come soluzioni sbagliate, di essere reinserito nella storia principale e dunque la possibilità di un ritorno riflessivo sui processi procedurali e cognitivi attivati, per divenire consapevoli di strategie che potranno essere utilizzate in nuove situazioni problematiche, con maggior successo.

PERCORSO DIDATTICO

Il percorso didattico è stato articolato in 9 incontri. Si possono delineare 4 fasi che lo hanno composto: la lettura del libro di riferimento, la proposta del problema del mercante, l'elaborazione delle differenti soluzioni, la presentazione della storia a bivi in un luogo reale di mercato. Attraverso questi passaggi si è tentato di lavorare sull'argomentazione a partire da un problema narrativo, rendendo gli studenti consapevoli dell'importanza della cornice narrativa e delle ricadute delle differenti scelte sull'esito della storia. Tutto il percorso è stato svolto in compresenza dei docenti di italiano e di matematica, poiché le attività hanno richiesto un lavoro sinergico in entrambe le discipline, coniugando abilità di produzione orale e scritta con abilità logiche e di calcolo.

- *Fase 1. La lettura di un librogame*

Durante questa prima fase, corrispondente alle prime due lezioni, gli studenti hanno potuto familiarizzare con la struttura del *librogame*, attraverso la lettura ad alta voce del libro "Il mistero del corvo d'argento" (Baffo, Le Goff e Berlioz, 1991). Per ogni bivio proposto nella storia, i ragazzi hanno dovuto argomentare a voce le proprie preferenze per l'una o l'altra opzione ed in seguito si decideva insieme per quale propendere. In questo modo la lettura del *librogame* è proseguita fino alla fine della storia: gli studenti hanno fatto esperienza di come una storia possa prendere direzioni diverse a seconda delle scelte che si compiono e sono stati sollecitati a formulare delle argomentazioni in forma orale, durante i momenti di discussione in classe stimolati dalla necessità e dal desiderio di far procedere il racconto.

Questa fase ha privilegiato il canale uditivo, in quanto l'attività di lettura è stata svolta unicamente dall'insegnante, mentre gli studenti sono stati invitati ad ascoltare e a confrontarsi a voce, proponendo argomentazioni orali. In questa prima fase, dunque, sono stati favoriti gli studenti che apprendono maggiormente ascoltando, mentre nelle fasi successive sono stati utilizzati differenti mediatori didattici.

- *Fase 2. Il problema del mercante*

Agli studenti è stato proposto un problema tratto e rielaborato dal libro "L'uomo che sapeva contare" (Tahan, 1938), intitolato "Il problema del mercante" (in origine "Il problema delle mele"). È importante sottolineare la continuità del contesto del mercato tra la fase precedente, la presente e l'ultima: il mercato (medievale, mediorientale o attuale) è stato il luogo che ha accomunato le diverse parti del percorso didattico. La fase 2 si è realizzata nel corso di una lezione: il testo del problema è stato letto agli studenti; successivamente, divisi in gruppi, hanno ricevuto il testo in fotocopia. Si riporta di seguito il testo del problema.

C'era una volta a Damasco un contadino intraprendente, che aveva tre figlie: la più grande si chiamava Fatima, la seconda Cunda e la terza Shia. Le ragazze lo aiutavano tutti i giorni nella vendita di frutta e verdura al mercato: erano molto ubbidienti e servizievoli. Il contadino, che stava invecchiando, si rese conto che avrebbe dovuto presto lasciare l'attività alle figlie. Avrebbero saputo gestire insieme la vendita al mercato? Per testare la loro intelligenza, una sera riunì le figlie e decise di proporre loro una prova. Il contadino disse: «Domani non verrò al mercato con voi, ma dovrete provare a vendere da sole ciò che ho raccolto: il lavoro è stancante e io ormai ho una certa età… Ascoltate bene le indicazioni che ora vi darò: qui ci sono 90 mele che dovete vendere al mercato domani mattina. Tu, Fatima, la più grande, ne prenderai 50, e tu, Cunda 30; mentre tu, Shia, che sei la minore, ne avrai 10. Fin qui tutto chiaro?».
«Sì, padre! Sembra facile…» rispose Fatima.
«Solitamente vendiamo ben più di 90 mele in una mattinata!» aggiunse Cunda.
«Io sarei capace di venderne anche più di 10!» propose Shia, la più piccola, che non voleva sentirsi da meno.
«Assolutamente no: ognuna deve vendere il numero di mele che ho detto. Attenzione però» riprese il contadino, rivolgendosi a Cunda e Shia, «se Fatima vende le sue mele al prezzo di 1 denaro ogni 7 mele, anche voi due dovrete fare lo stesso. E se invece Fatima le vende al prezzo di 3 denari per ogni mela, allora anche voi le venderete alle stesse condizioni. Ma, qualunque cosa facciate, ciascuna di voi dovrà alla fine avere incassato la stessa somma di denaro, pur vendendo quantità diverse di mele».
«Quindi tutte e tre dobbiamo dar via le mele allo stesso prezzo e alla fine dobbiamo aver ottenuto lo stesso profitto. Ho capito bene?» chiese Fatima.
«Esattamente! Avete tutta la notte per mettervi d'accordo e trovare una soluzione soddisfacente. Domani mattina, prima di andare al mercato, vi chiederò quale soluzione avrete trovato e capirò se siete in grado di portare avanti questo lavoro anche senza di me» concluse il contadino.
Quale soluzione proponete per aiutare le tre sorelle nel compito affidato dal padre?

Ogni gruppo ha elaborato una soluzione al problema posto dalla storia. La soluzione matematica è la seguente: in un primo momento, un primo turno di vendita, le mele sono vendute da tutte le ragazze al prezzo di 1 denaro per 7 mele; in un secondo momento le mele restanti vengono vendute al prezzo di 3 denari per 1 mela. In questo modo al primo turno Fatima venderà 49 mele (per 7 denari in tutto) e al secondo turno venderà l'ultima rimasta (3 denari): in totale guadagna 10 denari. Cunda invece al primo turno venderà 28 mele (per 7 denari in tutto) e al secondo turno venderà le ultime 2 mele rimaste (6 denari in tutto): a fine giornata avrà guadagnato anche lei 10 denari. Infine Shia, pur avendo solo 10 mele, secondo questa suddivisione in due turni di vendita, riuscirà a guadagnare allo stesso modo 10 denari: venderà al primo turno 7 mele (ottenendo 1 denaro) e al secondo turno le restanti 3 (per 9 denari in tutto).

Un gruppo di studenti ha trovato questa soluzione, mentre gli altri gruppi hanno elaborato soluzioni differenti, che tenevano conto in maniera più o meno significativa del contesto narrativo. Per presentare ai compagni la propria soluzione, gli studenti sono stati invitati a posizionarsi in due cerchi concentrici: in questo modo ogni studente aveva di fronte un compagno al quale spiegare, in un tempo limitato di 3 minuti, in che modo avesse risolto il problema del mercante con il proprio gruppo e perché. In questo modo gli studenti sono stati sollecitati a formulare delle argomentazioni oralmente.

- *Fase 3. Realizzazione dei cartelloni*

Ogni gruppo di studenti ha dovuto realizzare un cartellone (storyboard) che rappresentasse in forma grafica l'esito della storia. Per una maggiore uniformità si è deciso di raffigurare dapprima i personaggi principali (il padre e le tre figlie), in modo tale che tutti i gruppi li riproducessero sui cartelloni con lo stesso aspetto fisico e abbigliamento. I cartelloni dei 3 gruppi riflettono le differenti soluzioni trovate: il gruppo 1 (fig. 1 a sinistra) ha trovato la soluzione puramente matematica presentata nella fase 2; il gruppo 2 (fig. 1 a destra) ha trovato una soluzione che prevede l'inserimento di un altro personaggio (un contadino), che avrebbe passato 20 mele da Fatima a Shia: in questo modo tutte le sorelle avrebbero avuto 30 mele e le avrebbero potute vedere allo stesso prezzo, ricavando la stessa quantità di denaro. Infine, il gruppo 3 (fig. 2) ha trovato una soluzione valida dal punto di vista matematico, ma scarsamente accettabile nel contesto mercantile della storia: le tre ragazze avrebbero venduto le mele al prezzo di 0 denari, ottenendo tutte lo stesso profitto (nullo!).

Figura 1 - A sinistra storyboard del gruppo che ha trovato la soluzione matematica. Si possono osservare i calcoli che sottostanno alla soluzione, riportati come prezzi sulle bancarelle o nei fumetti come discorsi diretti tra le sorelle. A destra storyboard del gruppo che ha trovato una soluzione efficace dal punto di vista della storia: le tre sorelle hanno dimostrato di sapersi ingegnare pur di vendere le mele ed ottenere un profitto come richiesto dal padre, che infatti nelle ultime vignette si mostra felice e cede l'attività alle figlie.

Figura 2 - Storyboard del gruppo che ha trovato una soluzione matematica adeguata ai vincoli imposti dal padre (regalare le mele), ma senza soddisfarlo: si riconosce dal cartellone la sua delusione espressa dal volto sconsolato. Nell'ultima immagine si può osservare che il padre cede l'attività ad un amico, poiché le figlie non hanno dimostrato capacità imprenditoriali.

- *Fase 4. Al mercato*

Durante l'ultimo incontro del percorso didattico, gli studenti si sono recati in un mercato vicino alla loro scuola, per proporre ai passanti la storia a bivi del mercante. Dopo aver raccontato, come cantastorie medievali, la situazione iniziale, gli studenti hanno proposto le diverse soluzioni della storia e i passanti hanno deciso, come lettori attivi di un *librogame*, dove spostarsi nel mercato per seguire la soluzione scelta da loro stessi, determinando quindi l'esito della storia.

CONCLUSIONE

Riassumiamo in conclusione le caratteristiche dell'attività che ha proposto un intreccio tra piano narrativo e piano matematico. Il progetto ha messo l'accento sulla centralità della situazione problema e sulla sua effettiva comprensione, senza ricorrere a scorciatoie o automatismi risolutivi; il ruolo forte del contesto narrativo ha reso possibili le soluzioni non accettabili matematicamente, che sono state distinte dalle incoerenti e integrate alla soluzione matematica, secondo un approccio didattico complesso ma, a nostro avviso, più completo; il progetto ha adottato un approccio alla matematica non legato esclusivamente alle competenze di lettura, al cercare gli elementi risolutivi del problema nel testo, che tenesse invece in considerazione le altre dimensioni linguistiche, dell'ascolto e del parlato e in particolare quelle argomentative. Si ribadisce a questo proposito l'importanza dell'"orecchio", canale linguisticamente sensibile, e non solo dell'"occhio", generalmente impiegato in matematica nella decifrazione del testo problema. L'opzione multicanale rappresenta poi un vantaggio per chi nell'apprendimento utilizza il canale uditivo in via prevalente.
Infine, nell'ultima fase, quella del mercato, va sottolineata l'attenzione riservata a una buona ed efficace comunicazione del problema e delle sue soluzioni, che ha rappresentato una verifica della comprensione dell'intero processo da parte degli allievi e delle allieve.

BIBLIOGRAFIA

Baffo, S., Le Goff, J., & Berlioz, J. (1991). *Il mistero del corvo d'argento*. Giunti.
Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, (5), 9-43.
De Vecchi, G., & Carmona-Magnaldi, N. (2015). *Faire vivre de véritables situations-problèmes*. Hachette éducation.
Herrington, J., Reeves, T. C., & Oliver, R. (2014). Authentic learning environments. *Handbook of research on educational communications and technology*, 401-412.
Rio, A. (2021). *La narrazione interattiva: dai librogame a Bandersnatch*.
Tahan, M. (1934). *L'uomo che sapeva contare: una raccolta di avventure matematiche*. Salani.
Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Springer Milan.
Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Carocci Faber.

ARITMETICA…NO PROBLEM!

Profumo Paola Giulia Maria, Galati Marianna, De Grandis Roberta, Melissa Ilaria
I.C. Paolo e Rita Borsellino – Valenza (AL); Università del Piemonte Orientale.
profumo.p@gmail.com

Abstract
In questo contributo presentiamo alcuni esempi di attività condotte negli ultimi tre anni dal gruppo di ricerca in didattica della matematica composto da docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado dell'IC Paolo e Rita Borsellino di Valenza e da ricercatori dell'Università del Piemonte Orientale. In particolare saranno descritte le fasi del lavoro svolto, dalla progettazione delle sperimentazioni nelle classi di scuola primaria e secondaria di primo grado alle analisi a posteriori dei materiali raccolti e poi condivisi nel gruppo. Le attività didattiche proposte sono focalizzate sulla risoluzione di problemi aritmetici e sullo sviluppo di processi argomentativi.

Parole-chiave
Argomentazione, INVALSI, problemi aritmetici, competenze trasversali.

INTRODUZIONE

Le attività che presenteremo in questo contributo fanno parte di un progetto che è nato nel 2018 dalla collaborazione tra docenti della scuola primaria e secondaria di I grado dell'Istituto Comprensivo Paolo e Rita Borsellino di Valenza (AL) e due ricercatori in didattica della matematica dell'Università del Piemonte Orientale, il Prof. Pier Luigi Ferrari e la Prof.ssa Francesca Martignone. Sono state progettate, sviluppate e analizzate molte attività didattiche, in un'ottica di sviluppo in verticale di competenze trasversali e matematiche, al fine di supportare i docenti nella loro attività di insegnamento e di migliorare gli esiti scolastici degli alunni alla fine del primo ciclo d'istruzione. Tra gli obiettivi di questo progetto c'è la condivisione, da parte dei docenti coinvolti, di metodologie didattiche suggerite dalla ricerca in Didattica della matematica e in linea con le richieste delle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012), come ad esempio l'idea di laboratorio di matematica. Gli studenti sono stati coinvolti in attività di tipo laboratoriale ed è sempre stato chiesto loro di scrivere i processi risolutivi svolti per la soluzione dei problemi. Le diverse strategie risolutive sono state oggetto di discussioni matematiche guidate dall'insegnante (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, 1995). Le attività hanno messo in evidenza come la dimensione problematica sia connessa al soggetto, alla sua motivazione, alle conoscenze e abilità I problemi scelti evocano situazioni realistiche e possono essere classificati come problemi verbali (word problem - Verschaffel & Van Dooren, 2014) in cui sono descritte a parole situazioni problematiche in cui, per trovare la risposta, si applicano schemi e si svolgono operazioni matematiche utilizzando i dati ricavabili dal testo del problema. Nei seguenti paragrafi descriveremo brevemente le diverse fasi del lavoro portato avanti dal gruppo di ricerca e analizzeremo degli esempi di problemi aritmetici somministrati e analizzati nei passati anni scolastici nelle nostre classi IV, V primaria e I e II secondaria di primo grado.

FASI DEL LAVORO

L'organizzazione del lavoro del gruppo di ricerca è estremamente importante ed è fondamentale per poter giungere ad una metodologia didattica comune. Per ciascuna attività proposta abbiamo affrontato le seguenti 5 fasi:

- *Confronto per la scelta dei temi* Si svolge un incontro preliminare nel quale si ricercano argomenti da poter trattare in classi della scuola primaria (IV e V) e della scuola secondaria di primo grado (I e II). Noi in questo contributo parleremo nello specifico di quesiti di aritmetica.

- *Selezione dei quesiti.* Una volta scelto il tema si cercano problemi autentici, legati a situazioni realistiche. Spesso si è fatto riferimento anche a quesiti delle prove INVALSI di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. Quando sono stati presi in considerazione i quesiti INVALSI allora abbiamo studiato anche i risultati del campione nazionale soffermandoci principalmente sui quesiti che hanno generato maggiori difficoltà nei ragazzi (maggioranza di risposte errate) per cercare di comprenderne il perché. Tutti i problemi scelti devono naturalmente essere in linea con le Indicazioni Nazionali e vengono analizzati dal gruppo anche dal punto di vista della formulazione del testo. Spesso vengono modificati per rendere più chiare le richieste e l'esposizione dei dati e per adeguarli al livello degli alunni ai quali saranno somministrati (se per la scuola primaria o per la scuola secondaria di primo grado)
- *Schede di progettazione.* In Figura 1 viene presentata la struttura di una scheda di progettazione con i diversi campi che vengono compilati per ogni attività in seguito ad un'analisi a priori svolta collegialmente dai docenti che somministreranno i quesiti in classi omologhe. Nella scheda vi è una prima parte introduttiva dove si descrivono le classi alle quali saranno sottoposti i quesiti; vengono poi elencati gli obiettivi generali della sperimentazione in relazione alle Indicazioni Nazionali e ai traguardi per lo sviluppo delle competenze; in seguito si descrive come saranno articolate le lezioni.

Progettazione delle sperimentazioni

Scuola: ISTITUTO COMPRENSIVO ……

RISOLVERE I PROBLEMI – TEMA TRATTATO

Classe/i coinvolte ……
Periodo e durata della sperimentazione ……
Caratteristiche del contesto classe …..
Obiettivi generali della sperimentazione in relazione ai traguardi per lo sviluppo delle competenze scritti nelle Indicazioni Nazionali e allo sviluppo delle competenze chiave …..
Elenco delle lezioni programmate e descrizione delle consegne e della metodologia Prima lezione: ………….. Seconda lezione: …………..
Modalità di valutazione
Elenco allegati (ad esempio i problemi che saranno somministrati) …

TESTO PROBLEMA SOMMINISTRATO

COMPETENZE RICHIESTE

POSSIBILI STRATEGIE RISOLUTIVE

POSSIBILI ERRORI E DIFFICOLTA'

VALUTAZIONE DEGLI ELABORATI:

Figura 1. Esempio di scheda di progettazione.

Negli allegati vi sono i problemi da somministrare, le competenze specifiche necessarie, si ipotizzano le diverse strategie risolutive che potrebbero usare gli alunni e, analogamente, i potenziali errori nei quali potrebbero incorrere. Nella parte finale vengono scelti degli indicatori per una valutazione formativa dell'elaborato. Tutte le schede di progettazione vengono condivise sulla piattaforma Moodle del gruppo di ricerca.

- *Somministrazione dei quesiti.* Per la somministrazione si usa una metodologia laboratoriale per favorire la discussione, il confronto e la condivisione di idee e riflessioni tra pari. Una volta consegnato il quesito si commenta il problema in classe per instaurare una discussione tra i ragazzi orchestrata dal docente in qualità di esperto. Nella discussione matematica l'insegnante ha un ruolo fondamentale: progetta la discussione all'interno delle attività della classe e la guida (e quindi la influenza con i suoi interventi mirati), portando spesso un punto di vista che è diverso da quello degli alunni. Per progettare una discussione matematica, l'insegnante può cercare di immaginare quali potrebbero essere le reazioni degli studenti e cosa potrebbe emergere nel corso della discussione, preparandosi così delle linee guida mantenendo focalizzato l'obiettivo dell'attività didattica. Una discussione matematica potrebbe anche non seguire esattamente le aspettative del docente: questo potrebbe in qualche modo destabilizzarlo, ma è importante che l'insegnante riesca a gestire questi "imprevisti" che possono diventare un punto di forza dell'attività perché, concedendo spazio agli interventi degli allievi, si sfruttano gli spunti che emergono spontaneamente dall'interazione. In questo scambio di idee e riflessioni, il docente avrà il compito di effettuare domande che stimolino lo sviluppo della discussione e l'interazione tra gli alunni.
  Il quesito viene poi affrontato dagli alunni che devono descrivere e motivare i passaggi svolti per la risoluzione del problema argomentando quanto svolto per iscritto. Solo per quest'anno il lavoro è stato svolto singolarmente mentre negli anni passati vi era un momento di lavoro in piccoli gruppi per confrontare le diverse soluzioni trovate dai ragazzi. Una volta conclusa l'attività c'è una seconda discussione a posteriori per analizzare le svariate strategie risolutive ottenute. Diversi sono gli scopi di questa discussione: la socializzazione di strategie messe in atto e la costruzione, quando è possibile, di una o più rappresentazioni e soluzioni di un problema. Come obiettivo didattico trasversale vi è quindi anche l'educazione all'ascolto e alla comprensione del pensiero altrui oltre al confronto e alla mediazione tra idee differenti. Le procedure emerse diventeranno parte della cultura di classe costruita attraverso le attività condivise.
- *Condivisione risultati e analisi a posteriori.* La fase conclusiva della nostra metodologia è quella di condividere con il gruppo di ricerca alcuni protocolli ottenuti nella sperimentazione. La scelta spetta al singolo docente che deve sceglierne alcuni che mettano in luce alcuni aspetti che a suo avviso possano stimolare riflessioni e commenti da parte del gruppo. Nello specifico durante l'analisi a posteriori condivisa si analizzano le strategie risolutive trovate dagli alunni sia corrette che errate e si riflette sui loro ragionamenti e sulla formulazione dell'argomentazione scritta.

ATTIVITA' SUI PROBLEMI ARITMETICI

Vengono qui riportate due attività somministrate nell'A.S. 2021/2022 in due classi quarte (scuola primaria) e due classi prime (scuola secondaria di primo grado).
Nella prima attività l'obiettivo era la *scelta tra i dati* proposti e quindi saper riconoscere se vi erano o meno dati inutili alla risoluzione del problema (vedi Figura 2).
Questi problemi sono stati prodotti dal gruppo di ricerca ispirandosi ad alcuni quesiti INVALSI analoghi e con simile obiettivo. Come si può notare i problemi sono molto simili, ma le richieste e il testo sono leggermente differenti tra scuola primaria e secondaria di primo grado.
Nella seconda attività si è scelto, come argomento, il concetto di *relazione di proporzionalità*, in quanto viene affrontato durante la scuola primaria e viene poi ripreso nella classe seconda della secondaria di primo grado. L'idea di sottoporlo prima dello studio delle proporzioni che di solito si fa nella scuola

secondaria di primo grado ha come scopo quello di stimolare i ragazzi alla ricerca di strategie risolutive personalizzate e di sviluppare un pensiero proprozionale.

RISOLVI IL SEGUENTE PROBLEMA

PRIMARIA

Luca ha 15 anni; il papà di Luca ha il triplo degli anni di Luca e la mamma di Luca ha 2 anni in meno del papà di Luca.

Quanti anni ha il papà di Luca? ....

SCRIVI IL TUO RAGIONAMENTO

RISOLVI IL SEGUENTE PROBLEMA

SECONDARIA

Il papà di Luca ha 45 anni, la mamma di Luca ha 2 anni in meno del papà e Luca ha un terzo degli anni di suo papà.

Quanti anni ha Luca? ....

Tra 20 anni, quanti anni avrà la mamma di Luca? ....

Tra 20 anni, quale sarà la differenza d'età tra Luca e suo papà? ....

SCRIVI IL TUO RAGIONAMENTO

Figura 2. Quesiti somministrati per la prima attività di aritmetica sulla *scelta tra i dati*.

Per questa attività sono stati scelti due quesiti INVALSI riadattati dal gruppo di ricerca (vedi Figura 3). Il primo problema, somministrato alle classi quarte – primaria, deriva dal quesito INVALSI D.17 della prova del 2010 grado 6; in seguito alla riunione sulla scelta dei quesiti si è deciso di modificare il testo aggiungendo la frase "seguendo la stessa ricetta" in modo che non vi potessero essere fraintendimenti. Per quanto riguarda il problema sottoposto alle classi prime della secondaria di primo grado, è stato tratto dal quesito D.12 della prova INVALSI del 2009, grado 8. Anche in questo caso abbiamo apportato delle variazioni e infatti abbiamo lasciato la tabella interamente da compilare da parte degli alunni mentre originariamente, era un quesito a risposta chiusa.

RISOLVI IL SEGUENTE PROBLEMA **PRIMARIA**

Nonna Pina l'anno scorso con 21 kg di prugne ha preparato 7 kg di marmellata.

Seguendo la stessa ricetta, quest'anno nonna Pina vuole fare 10 kg di marmellata.

Quanti chili di prugne le serviranno?

SCRIVI IL TUO RAGIONAMENTO

RISOLVI IL SEGUENTE PROBLEMA **SECONDARIA**

Emanuele prepara la limonata utilizzando questa ricetta:

Dosi per 4 persone	1 litro di acqua	30 g di zucchero	4 limoni

Completa la seguente tabella con le dosi per 6 persone.

Dosi per 6 persone	.... acqua	.... zucchero	.... limoni

SCRIVI IL TUO RAGIONAMENTO

Figura 3. Quesiti somministrati per la seconda attività di aritmetica sulla *relazione di proporzionalità*.

Come si può notare i problemi che vengono somministrati agli allievi terminano sempre con la dicitura “Scrivi il tuo ragionamento” in quanto nella nostra attività laboratoriale è fondamentale l’argomentazione scritta.

RISULTATI

Per le due attività di aritmetica sopra descritte mostreremo ora alcuni esempi di protocolli a nostro avviso significativi.
Protocolli prima attività. Durante la nostra analisi a posteriori, legata alla prima attività sulla scelta dei dati, abbiamo scelto due protocolli nei quali gli alunni hanno correttamente risolto il quesito, ma vi sono alcuni dettagli che ci sono sembrati significativi. In Figura 4 l’alunno di quarta elementare ha compreso esattamente e argomentato correttamente quanto svolto, ma ha compiuto un errore relativamente al disegno; confrontandoci abbiamo dedotto che per qualche alunno non sempre è di aiuto la rappresentazione grafica e che, a volte, è quasi un automatismo che non viene però usato come mezzo per ragionare. Si può notare dall’argomentazione come abbia compreso che il dato relativo all’età della madre non fosse utile al fine della risoluzione.

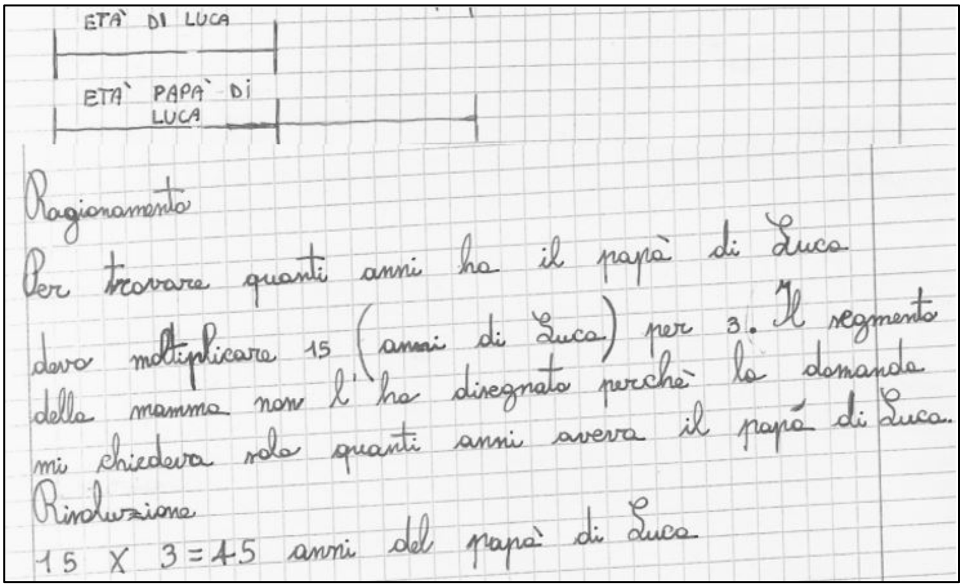


Figura 4. Protocollo corretto prima attività *scelta tra i dati* (classe quarta – primaria).

In Figura 5 ciò che ci ha colpito è stata l’abilità nell’aver applicato e riconosciuto una proprietà teorica affrontata alcuni mesi prima in classe; nella descrizione del procedimento l’alunno esplicita inoltre che era inutile nella richiesta aver scritto 20 anni dopo (scrive infatti “non ho dovuto aggiungere 20”).

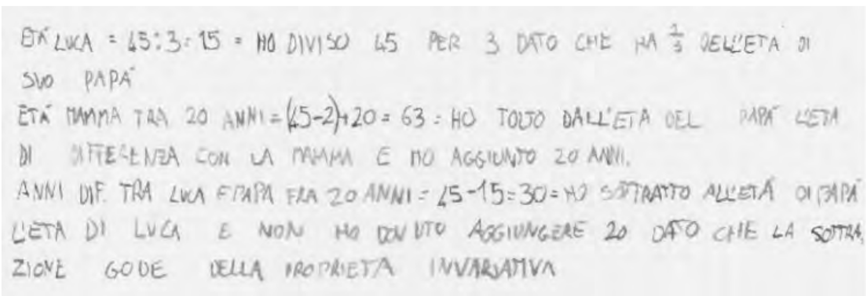


Figura 5. Protocollo corretto prima attività *scelta tra i dati* (classe prima – secondaria di primo grado).

Protocolli seconda attività. Per questa attività abbiamo selezionato due protocolli con risoluzione corretta (Figure 6 e 8 reciprocamente primaria e secondaria di primo grado) e due con procedimento errato (Figure 7 e 9 reciprocamente primaria e secondaria di primo grado). In figura 6 l'alunno della scuola primaria ha riconosciuto la relazione di proporzionalità e lo si comprende dalla presenza della parola "triplo" e ha descritto il suo ragionamento in modo corretto. In figura 7 l'alunno della scuola primaria non ha compreso il problema ma, grazie all'argomentazione è riuscito in ogni caso a giustificare il suo ragionamento anche se errato. Analogamente nel protocollo di figura 9, l'alunno della secondaria di primo grado ha confuso la dose per 4 persone come dose per una singola persona e ha quindi triplicato tutte le quantità sbagliando la soluzione, ma cercando in ogni caso di giustificarla. Nel protocollo di figura 8 invece l'alunno ha compreso la relazione di proporzionalità e ha correttamente sommato alla dose per 4 persone la metà per giungere alle quantità corrette per 6. Da rilevare come, anche in quest'ultimo caso, il descrivere il ragionamento abbia aiutato anche il docente nell'interpretazione dei conti e del procedimento svolti dall'alunno.

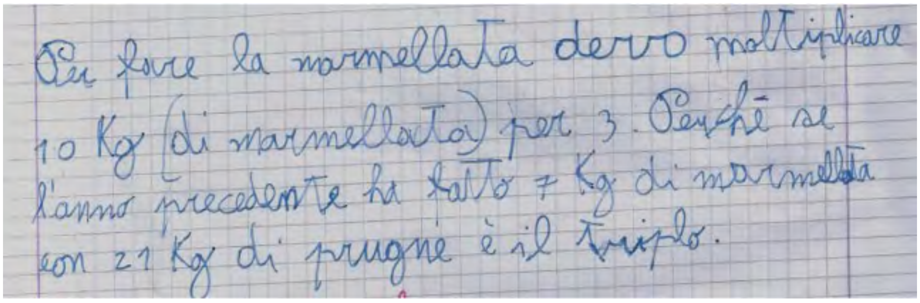

Per fare la marmellata devo moltiplicare 10 Kg (di marmellata) per 3. Perché se l'anno precedente ha fatto 7 Kg di marmellata con 21 Kg di prugne è il triplo.

Figura 6. Protocollo corretto seconda attività *relazione di proporzionalità* (classe quarta – primaria).

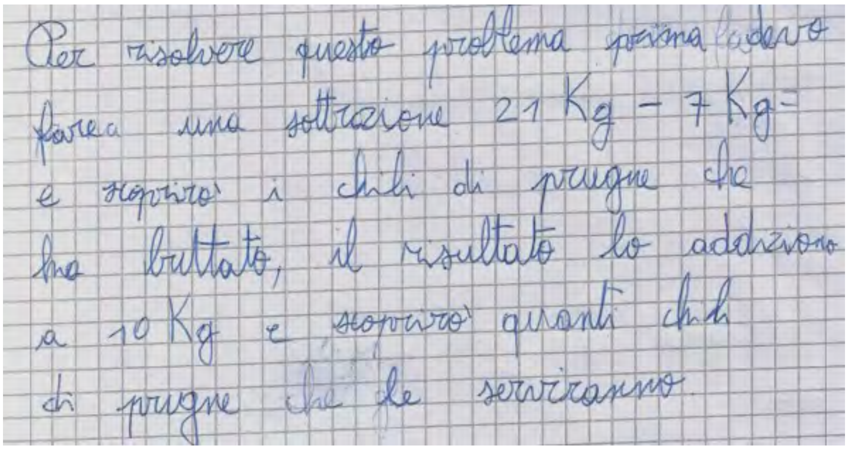

Per risolvere questo problema prima devo fare una sottrazione 21 Kg − 7 Kg = e scoprirò i chili di prugne che ha buttato, il risultato lo addiziono a 10 Kg e scoprirò quanti chili di prugne che le serviranno.

Figura 7. Protocollo errato seconda attività *relazione di proporzionalità* (classe quarta – primaria).

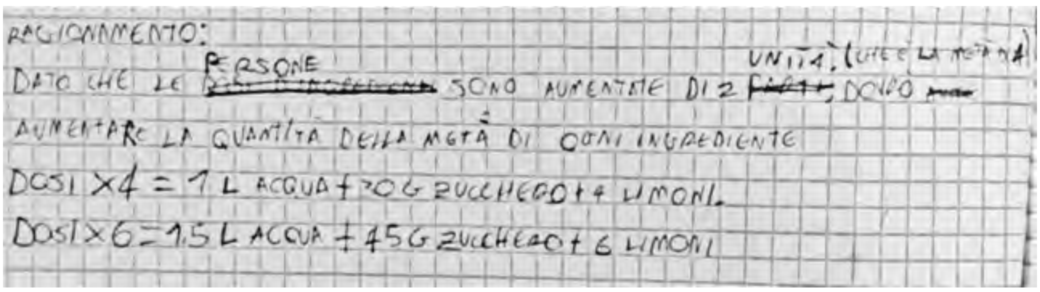

RAGIONAMENTO:
DATO CHE LE PERSONE SONO AUMENTATE DI 2 UNITÀ (CHE È LA METÀ) DEVO AUMENTARE LA QUANTITÀ DELLA METÀ DI OGNI INGREDIENTE
DOSI ×4 = 1 L ACQUA + 30 G ZUCCHERO + 4 LIMONI
DOSI ×6 = 1,5 L ACQUA + 45 G ZUCCHERO + 6 LIMONI

Figura 8. Protocollo corretto seconda attività *relazione di proporzionalità* (classe prima – secondaria).

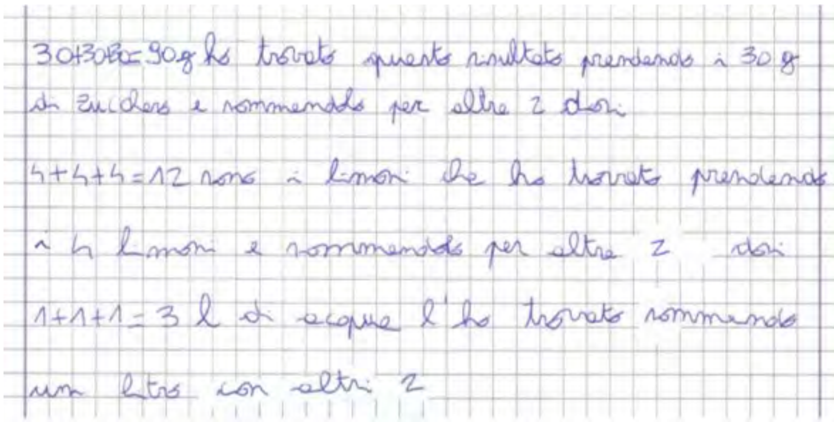


Figura 9. Protocollo errato seconda attività *relazione di proporzionalità* (classe prima – secondaria).

CONCLUSIONI

Nel corso del progetto abbiamo notato che la competenza argomentativa e comunicativa degli alunni è migliorata e inoltre gli studenti si sono dimostrati più sicuri nell'affrontare i problemi aritmetici assegnati. Questo è stato riscontrato soprattutto negli studenti che hanno partecipato a tutti e tre anni di sperimentazione e che hanno quindi affrontato il passaggio tra primaria e secondaria. Da docenti ci siamo resi conto che il far scrivere a parole il ragionamento può supportare gli studenti durante le attività di problem solving perché permette loro di mantenere anche un controllo sui processi e di riflettere sulla strategia risolutiva scelta rileggendo i singoli passaggi; inoltre il poter raccontare il loro ragionamenti sembra anche dare sicurezza agli studenti che provano a risolvere i quesiti posti spiegando appunto il perché delle loro scelte e azioni. Nella nostra esperienza si è notato come questo approccio alla risoluzione dei problemi sia particolarmente utile per gli alunni con maggiori difficoltà che tendono a perdersi nei diversi passi risolutivi.
Le attività svolte nel progetto sono state molto stimolanti anche per la nostra formazione come docenti perché hanno favorito la collaborazione e il confronto tra colleghi di diversi ordini di scuola. Abbiamo infatti lavorato insieme sia nelle fasi di progettazione, sia di analisi delle attività didattiche sempre in un'ottica di sviluppo in verticale delle competenze descritte nei traguardi delle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo di istruzione (Martignone, 2016).

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare il Dirigente Scolastico dell'Istituto Comprensivo "Paolo e Rita Borsellino" Prof. Maurizio Primo Carandini che ha proposto e incentivato la formazione del Gruppo di ricerca.
Ringraziamo tutti i colleghi e agli alunni che hanno partecipato alla sperimentazione.
Un ringraziamento particolare al Prof. Ferrari e alla Prof.ssa Martignone dell'Università del Piemonte Orientale che ci hanno accompagnato in questi anni condividendo la loro esperienza nell'ambito della didattica della matematica e fornendo un costante supporto in ogni fase del nostro lavoro di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica*, Comune di Modena, CDE.

Martignone, F. (2016). Un'attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove Invalsi di matematica. *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*. *16*, 1, 70-86

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Annali della Pubblica Istruzione. No. Speciale. Disponibile in: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2014). Word problems in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp. 641-645). Dordrecht: Springer.

UN MOOC INTERNAZIONALE PER FARE MATEMATICA ALL'APERTO CON MATHCITYMAP

Eugenia Taranto[1], Maria Flavia Mammana[1], Virginia Alberti[2], Roberta Ferro[3], Sara Labasin[4]
[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
[2]I.I.S. Castelli, Brescia; [3]Liceo Statale De Amicis, Cuneo;
[4]Liceo Scientifico "P. Gobetti", Torino
eugenia.taranto@unict.it

Abstract
In questo articolo, presentiamo i risultati di un MOOC internazionale, prodotto all'interno del progetto europeo MaSCE[3]. Il MOOC era rivolto agli insegnanti di matematica di tutti i gradi scolastici di tutta Europa e del mondo. Mirava ad educare una vasta gamma di insegnanti ad utilizzare MathCityMap, un sistema tecnologico che permette di progettare attività di percorsi matematici da usare all'aperto con i propri studenti. Le analisi qualitative e quantitative dei dati ci permettono di concludere che il MOOC ha dimostrato di essere un valido strumento per lo sviluppo professionale nel fornire preziose esperienze di apprendimento a un gran numero di partecipanti.

Parole-chiave
MOOC, matematica all'aperto, MathCityMap, formazione docenti

PERCORSI DI MATEMATICA

Fare matematica all'aperto è possibile mediante i percorsi di matematica. Un percorso di matematica è una passeggiata matematica su di un sentiero, attraverso la quale si può sperimentare la matematica, scoprendola in luoghi ed oggetti interessanti (Shoaf, Pollak & Schneider, 2004). Un percorso di matematica può avvenire ovunque ed è adattabile a tutte le fasce d'età (Ludwig, Jesberg & Weiß, 2013). L'idea dei percorsi di matematica non è nuova, risale agli anni '80 quando Blane & Clarke (1984) idearono un sentiero di matematica intorno alla città di Melbourne. Quello che era necessario per poter eseguire il percorso era disporre di una guida, che fosse cartacea o una persona reale, che accompagnasse chi desiderava fare il percorso lungo le tappe che lo componevano. Quello che è invece innovativo è l'aver coniugato questa idea con le potenzialità della tecnologia, per impiegarla a scopi didattici. Questo è quanto ha fatto il progetto MathCityMap (MCM: https://mathcitymap.eu/it/), nato nel 2012, e coordinato dal prof. M. Ludwig dell'Università Goethe di Francoforte.
MCM è un sistema composto da un portale web e un'applicazione per smartphone. Esso permette di memorizzare in un database le attività che compongono i percorsi matematici; queste appaiono come appuntate su una mappa digitale attraverso il portale web, poiché sono localizzate con coordinate GPS (Figura 1). Chi si cimenta nel percorso matematico, accede alle attività e le svolge con l'aiuto di un'applicazione mobile abilitata al GPS. Sul portale web, gli utenti – di solito insegnanti o educatori – possono quindi creare attività di matematica e/o cercare quelle esistenti. Una volta selezionate queste attività, il sistema le collega tutte in un percorso matematico. Una volta che l'insegnante è soddisfatto del percorso matematico creato, lo salva sul database e gli viene associato un codice. Gli studenti possono eseguire il percorso utilizzando l'app MCM e localizzare il percorso inserendo il codice fornito dall'insegnante. Ogni attività è accompagnata da una foto che permette di identificare univocamente l'oggetto su cui il compito è stato creato (Figura 2); una consegna da soddisfare; uno spazio per inserire la risposta (il sistema fornisce un feedback immediato una volta che è stata inserita dall'utente); un massimo di tre suggerimenti, che possono essere consultati dall'utente se ha difficoltà a identificare la

strategia di soluzione da adottare; un esempio di soluzione che è visibile all'utente solo se risolve il problema.

Figura 1. Come appare un percorso sul portale web di MCM

Figura 2. Come appare una attività sull'app di MCM

Ci sono diversi benefici legati allo svolgere la matematica all'aperto. Innanzitutto, gli studenti si confrontano con problemi autentici e reali, in contesti quotidiani. Lo smartphone, poi, viene utilizzato come strumento tecnologico che assume una connotazione valida anche didatticamente. Inoltre, la letteratura riporta che l'apprendimento di concetti matematici acquisti all'esterno risulta più duraturo e lo spostamento della lezione fuori dall'aula incide sulla motivazione degli studenti (Zender, 2019).
Ciononostante, gli insegnanti utilizzano i percorsi di matematica spesso solo in occasione di giorni di escursione ed esprimono anche qualche perplessità nell'usarli. Precisamente, a seguito di alcune interviste (Gurjanow et al., 2016), gli insegnanti, soprattutto della scuola primaria, lamentano il fatto che lo svolgimento di attività matematiche all'aperto richiede la presenza di più di un collega e grava su di loro un carico di responsabilità. Altri hanno fatto presente che sentono la necessità di comunicare con gli studenti sparsi tra le tappe del percorso, o che gli stessi studenti hanno bisogno di interfacciarsi con l'insegnante durante la risoluzione di una attività, ma che rinunciano perché a volte significa doversi spostare fisicamente per raggiungere l'insegnante e perdere minuti preziosi che potrebbero essere dedicati alla risoluzione matematica del problema.
L'obiettivo del progetto europeo MaSCE³: "Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe" – Erasmus+ programme, Key Action 2, Strategic Partnerships (2019-1-DE03-KA201-060118) – è quello di formare un elevato numero di insegnanti di matematica nell'usare regolarmente la matematica all'aperto come metodologia per l'insegnamento/apprendimento della matematica, avvalendosi di MCM e delle sue funzionalità. Per raggiungere questo obiettivo, uno dei risultati del progetto MaSCE³ è stata la creazione ed erogazione di un MOOC, di cui parleremo nella prossima sezione.

UN MOOC INTERNAZIONALE SU MATHCITYMAP

I MOOC offrono l'opportunità di fornire una piattaforma di apprendimento per un gran numero di utenti, permettendo loro di avere un'istruzione libera da confini geografici e fisici. C'è un crescente interesse per i MOOC che coinvolgono gli insegnanti di matematica come partecipanti (ad esempio Taranto, 2020), cambiando il modo in cui lo sviluppo professionale è visto ed erogato. Questi nuovi spazi di apprendimento sono collaborativi e gli studenti hanno più potere di creare e condividere (Bond, 2013). Pertanto, i MOOC offrono opportunità per la pubblicazione e la revisione tra pari, la comunicazione

multipiattaforma, l'insegnamento reciproco e il mentoring, confondendo la linea tra lo sviluppo professionale e la pratica professionale (ibidem).
"Task Design for Math Trails" è il titolo del MOOC aperto e liberamente accessibile prodotto nell'ambito del progetto MaSCE[3]. Come accennato, il MOOC aveva lo scopo di educare una vasta gamma di insegnanti, di tutti i gradi scolastici da tutto il mondo, ad utilizzare MCM nel loro insegnamento. In particolare, il MOOC ha voluto aumentare la consapevolezza dei partecipanti per quanto riguarda le potenzialità delle attività dei percorsi matematici, e renderli autonomi nel loro uso e creazione con i propri studenti. Il MOOC è stato erogato in inglese, dall'8 marzo al 30 maggio 2021, attraverso la piattaforma DI.MA. Moodle (http://dimamooc.unict.it/) gestita dall'Università di Catania. Esso è anche il risultato di una proficua collaborazione a livello internazionale. Infatti, la presenza di formatori qualificati provenienti da diversi paesi (Estonia, Francia, Germania, Italia, Portogallo e Spagna) ha garantito un proficuo monitoraggio del ritmo di apprendimento dei partecipanti e un pronto supporto in caso di necessità. Il MOOC è stato organizzato in 6 moduli della durata complessiva di 12 settimane così suddivise: la prima settimana per entrare nel mondo dell'apprendimento della matematica all'aperto; 8 settimane dedicate a 4 moduli tematici (2 settimane ciascuno), in cui gli insegnanti creano 8 attività di matematica di diverse tipologie, che andranno a formare un percorso; 3 settimane in cui gli insegnanti svolgono il compito finale, cioè eseguire il proprio percorso matematico con i loro studenti e riferire su questa esperienza. Alla fine del MOOC è stato rilasciato un certificato finale dall'Università di Catania, per un totale di 30 ore di formazione.
In ogni modulo, gli insegnanti hanno avuto una varietà di materiali a loro disposizione: video, tutorial, esempi di attività di matematica da cui trarre ispirazione. Gli insegnanti potevano svolgere la progettazione delle attività di matematica in una delle lingue ufficiali del progetto MaSCE[3]: estone, francese, tedesco, italiano, portoghese e spagnolo. Le attività dovevano soddisfare specifici criteri di progettazione (per maggiori informazioni si veda: https://mathcitymap.eu/en/tutorials-en/). Inoltre, una volta che l'attività è stata progettata, è stata revisionata dal formatore che parlava la lingua in cui l'attività era stata progettata. Ogni formatore MOOC era un esperto revisore MCM. Ci sono voluti anche 3-4 round di revisione prima che la produzione di alcune attività di matematica fosse finalmente accettata. Una volta accettate, le attività di matematica sono state rese pubbliche sul portale web MCM, quindi disponibili a tutta la comunità MCM.
Agli insegnanti è stato somministrato un questionario pre-corso e un questionario finale, rispettivamente durante la prima settimana e l'ultimo modulo del MOOC. I questionari sono stati prodotti utilizzando Google Forms, un'applicazione open source per i sondaggi online, e i dati sono stati analizzati utilizzando il software Microsoft Excel. Le analisi sono sia quantitative che qualitative. Nelle analisi quantitative, abbiamo riportato le frequenze delle risposte. Le risposte alle domande aperte sono state sottoposte ad un'analisi tematica. L'analisi ha seguito il principio della riduzione dei dati e la generazione di temi.
Le domande di ricerca che guidano questo studio sono le seguenti:

(i) Gli insegnanti che hanno frequentato e completato il MOOC hanno acquisito competenze per progettare attività con MathCityMap?
(ii) Se sì, quali aspetti del MOOC lo hanno permesso?

RISULTATI

C'erano 503 partecipanti al MOOC, da 36 paesi, di cui 18 paesi europei. I partecipanti che hanno completato il MOOC in tutte le sue fasi sono stati 93. I dati che presenteremo di seguito si riferiscono solo ai 93 finalisti e provengono dal questionario finale. Il campione dei partecipanti al MOOC che lo hanno completato è composto dal 76% di donne e dal 24% di uomini. La maggior parte di loro sono insegnanti in servizio (68%), ma la parte rimanente sta studiando per diventarlo (26%) o è un formatore di insegnanti (4%) o lavora nelle università (2%). Ci riferiremo, in generale, ai membri del campione come "insegnanti". In particolare, escludendo coloro che insegnano all'università o sono formatori di insegnanti, gli insegnanti o i futuri insegnanti lavorano nei seguenti gradi scolastici: 1% alla scuola

materna, 17% alla scuola primaria, 38% alla scuola secondaria inferiore, 44% alla scuola secondaria superiore.
Al fine di indagare le competenze degli insegnanti in materia di progettazione di attività di matematica e la loro possibile evoluzione, sono state poste le seguenti domande su una scala di Likert (da 0=nessuna a 6=eccellente): "*Prima del MOOC, valuta la consapevolezza delle tue competenze nel ...*" e "*Ora che il MOOC è finito, valuta la consapevolezza delle tue competenze nel ...*". Le opzioni di risposta includevano, in entrambi i casi, "Progettare attività di matematica per praticare la matematica all'aperto"; "Progettare percorsi di matematica per praticare la matematica all'aperto"; "Utilizzare il portale web MCM".

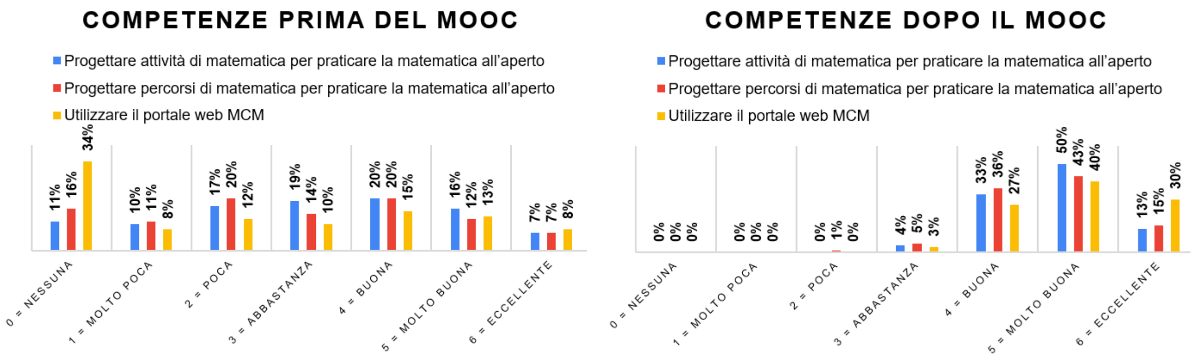


Figura 3. Competenze possedute prima e dopo il MOOC

Prima del MOOC (Figura 3, a sinistra), gli insegnanti hanno riferito di avere vari livelli di competenze. Per quanto riguarda la *Progettazione di attività di matematica per praticare la matematica all'aperto*, l'11% ha dichiarato di non avere affatto questa competenza; il 27% ha dichiarato di percepire di avere una competenza molto scarsa o nulla (1+2 nella scala di Likert); il 19% ha dichiarato di avere abbastanza competenza; il 43% ha dichiarato di percepire di avere una competenza buona o molto buona (4+5 nella scala di Likert); il 7% ha dichiarato di essere eccellente in questa competenza. La *Progettazione di percorsi matematici per praticare la matematica all'aperto* ha percentuali simili (il che non sorprende, dato che ricordiamo che un percorso è un insieme di un certo numero di attività). Infine, per quanto riguarda la competenza di *Usare il portale web MCM per progettare le proprie attività e percorsi*, gli insegnanti si sono posizionati come segue: il 34% ha dichiarato di non avere affatto questa competenza, quindi di non conoscere il sistema MCM; il 20% ha dichiarato di avere una competenza molto scarsa o nulla (1+2 nella scala di Likert); il 10% ha dichiarato di avere una competenza sufficiente; il 28% ha dichiarato di avere una competenza buona o molto buona (4+5 nella scala di Likert); l'8% ha dichiarato di essere eccellente in questa competenza, cioè di conoscere molto bene il sistema MCM. Vediamo che c'è una chiara evoluzione delle competenze degli insegnanti dopo la fine del MOOC (Figura 3, a destra). Infatti, per quanto riguarda la *Progettazione di attività di matematica per praticare la matematica all'aperto*, tutti dichiarano di essere consapevoli di aver acquisito questa competenza nelle seguenti percentuali: 4% abbastanza; 83% dichiara di avere una competenza buona o molto buona (4+5 nella scala di Likert); 13% di essere eccellente in questa competenza. Anche per la *Progettazione di percorsi matematici per praticare la matematica all'aperto* vediamo incrementi positivi nelle percezioni degli insegnanti e le percentuali non si discostano molto da quelle osservate per la progettazione delle attività. Infine, per quanto riguarda la competenza di *Usare il portale web MCM per progettare le proprie attività e percorsi*, gli insegnanti si sono posizionati come segue: il 3% ha affermato di aver acquisito abbastanza competenza nell'uso di MCM; il 67% ha affermato di avere una competenza buona o molto buona (4+5 nella scala di Likert); il 30% ha affermato di essere eccellente in questa competenza, cioè sentiva di conoscere molto bene il sistema MCM.
I dati seguenti supportano questi sviluppi positivi nella percezione delle competenze degli insegnanti. Una domanda su scala di Likert (da 1=fortemente in disaccordo a 4=fortemente d'accordo) mirava a indagare quanto gli insegnanti fossero d'accordo con le seguenti affermazioni. Il 97% (3+4 sulla scala

di Likert) ha dichiarato che "*È stato facile per me imparare come funziona il portale web MCM per creare attività e percorsi di matematica all'aperto*". In particolare, il 99% (3+4 nella scala di Likert) ha ritenuto che il processo di "*Creare attività/percorsi con MCM è intuitivo*".
Una domanda aperta mirava a indagare quali difficoltà gli insegnanti hanno incontrato nel progettare attività e percorsi. Queste sono mostrate nella Figura 4 (il 28% degli intervistati non ha incontrato alcuna difficoltà). Per ragioni di spazio, ne commentiamo solo alcune.

Difficoltà incontrate nell'uso di MCM per progettare compiti/percorsi	**Percentuale**
Nessuna difficoltà	28%
Ideazione dell'attività	20%
Impostazione dell'intervallo nelle attività ad intervallo	7%
Posizione delle attività	6%
Progettare attività con sotto-attività	6%
Vincoli di tempo	4%
Progettare i attività utilizzando la procedura guidata	3%
Identificare gli oggetti su cui progettare le attività	2%
Stabilire la tipologia del formato di risposta	1%
Progettare attività con valore esatto	1%
Scrivere i suggerimenti	1%
Altro	5%
Non applicabile (NA)	16%
Total	100%

Figura 4. Difficoltà incontrate dagli insegnanti nell'uso di MCM per progettare attività/percorsi (n=93)

Osserviamo che per il 20% degli insegnanti non è stato facile ideare le attività. Riportiamo una risposta come esempio: "Quando ho iniziato a creare le attività, è stato molto difficile elaborare attività che fossero corrette, non troppo facili, non troppo difficili e un po' interessanti [...]". E' stato difficile per il 6% trovare un luogo adatto per le attività. Nelle indicazioni iniziali, noi formatori avevamo specificato che tutte le attività da progettare dovevano essere disposte in uno spazio percorribile a piedi, in modo che potessero poi formare un percorso per i loro studenti. Ecco la risposta di un insegnante: "Non è stato facile trovare oggetti vicini alla scuola, che fornissero idee per progettare attività che fossero interessanti e adeguate alla competenza matematica degli studenti". Il 4% ha lamentato difficoltà legate al tempo necessario per progettare le attività. Per esempio, un insegnante ha scritto: "La difficoltà maggiore era il tempo: per poter fare una buona attività, era necessario eseguire tutti i passaggi con calma e attenzione. A volte sono stato lì per interi pomeriggi per una attività. [...] C'è anche da dire che una volta preparata rimane utilizzabile in futuro anche con altre classi".
Ricordiamo che tutte le produzioni degli insegnanti sono state riviste dal team dei formatori. Abbiamo, quindi, voluto indagare se, secondo gli insegnanti, il processo di revisione avesse portato ad un miglioramento delle loro produzioni, con una domanda su scala di Likert (da 1=fortemente in disaccordo a 4=fortemente d'accordo). È emerso che il 96% (3+4 nella scala di Likert) ritiene che "La revisione mi ha permesso di migliorare le mie capacità di progettazione delle attività di matematica".
I dati seguenti ci permettono di analizzare quanto il MOOC con le sue risorse e l'impegno degli insegnanti in esso abbia influenzato le affermazioni precedenti. Una domanda su scala di Likert (da 1=fortemente in disaccordo a 4=fortemente d'accordo) ha evidenziato che il 99% (3+4 sulla scala di Likert) ritiene che "*il MOOC MaSCE*[3] *offre abbastanza materiale (ad esempio tutorial, attività di esempio, ecc.) per imparare l'uso di MCM*" nella progettazione di attività e percorsi. In relazione ai materiali forniti da noi formatori nel MOOC e il loro impatto sugli insegnanti, abbiamo posto le seguenti tre domande aperte: "*Quali elementi del MOOC:* i) *hanno favorito la tua riflessione sulla possibilità di fare matematica all'aperto?*; ii) *hanno sostenuto al meglio il tuo sviluppo come progettista di attività/percorsi matematici su MathCityMap?*; iii) *sono stati inefficaci o quali aggiustamenti potrebbero essere fatti per migliorare l'esperienza?*".

Elementi del MOOC che …					
hanno favorito la riflessione degli insegnanti sulla possibilità di fare matematica all'aperto	**%**	**hanno sostenuto al meglio lo sviluppo degli insegnanti come designer di attività/percorsi su MCM**	**%**	**sono stati inefficaci o quali aggiustamenti potrebbero essere fatti per migliorare l'esperienza**	**%**
La possibilità di usare la tecnologia all'aperto	21%	Video	28%		
Tutti i materiali proposti	17%	Revisioni	14%	Nessuno	53%
La possibilità di creare compiti di realtà	16%	Le attività mostrate come esempi	14%	Maggiori chiarimenti sulle attività della procedura guidata	15%
La possibilità di progettare diverse tipologie di attività	11%	Attività della procedura guidata	13%	Più chiarimenti sulle sotto-attività	2%
I video	9%	Sistema MCM	6%	Più contesti narrativi	2%
Le attività mostrate come esempi	7%	La possibilità di progettare diverse tipologie di attività	4%	Tempistica del MOOC	2%
Ero già sicuro di fare matematica all'aperto	4%	Tutti gli elementi	4%	Troppe attività di progettazione richieste	2%
Altro	4%	Altro	5%	Altro	7%
Non applicabile (NA)	11%	Non applicabile (NA)	12%	Non applicabile (NA)	17%
Totale	100%	Totale	100%	Totale	100%

Figura 5. Elementi del MOOC che i) hanno favorito la riflessione degli insegnanti sulla possibilità di fare matematica all'aperto; ii) hanno sostenuto gli insegnanti nel loro sviluppo come progettisti di attività/percorsi; iii) sono stati inefficaci in tali direzioni (n=93)

La Figura 5 mostra le risposte degli insegnanti. Per ragioni di spazio, ne commenteremo solo alcune. Tra gli elementi del MOOC che hanno incoraggiato la riflessione degli insegnanti sulla possibilità di fare matematica all'aperto (Figura 5, prime due colonne), c'è la possibilità di usare la tecnologia all'aperto, cioè il sistema MCM. Per esempio, qualcuno ha scritto: "[...] il sito web e l'app hanno anche rafforzato questa convinzione che questa proposta di insegnare la matematica all'aperto sia ottima e possibile da attuare". Altri hanno fatto riferimento a singoli elementi specifici, come i video (9%). Ecco la risposta di un insegnante: "[...] mi è piaciuto anche che i video erano brevi in termini di tempo ma davano tutte le informazioni richieste". Tra gli elementi che meglio hanno sostenuto lo sviluppo degli insegnanti come progettisti di attività/percorsi su MCM (Figura 5, terza e quarta colonna), troviamo i video nella maggioranza (28%). Le revisioni ricevute dal team di formatori e gli esempi di attività messi a disposizione sono in parità con il 14%. Per quanto riguarda gli elementi del MOOC che gli insegnanti hanno trovato inefficaci o quali miglioramenti potrebbero essere fatti per migliorare l'esperienza (Figura 5, ultime due colonne), osserviamo che più della metà degli intervistati (53%) non ha nulla da segnalare. Piccole minoranze (circa il 2%) suggeriscono miglioramenti, come l'aggiunta di altri contesti narrativi, oltre a uno dei pirati già presenti. Qualcun altro si è lamentato dell'eccessiva richiesta di attività da progettare. Noi formatori ne abbiamo chieste 8. Il numero minimo ideale di attività per generare un percorso è 6. In un MOOC dedicato alla progettazione di attività, non abbiamo pensato che fosse pretenzioso far esercitare gli insegnanti aggiungendo altre due attività, poiché era solo per il loro beneficio di esercitarsi.

Abbiamo anche voluto indagare la soddisfazione degli insegnanti per la partecipazione al MOOC. Con la seguente domanda a scelta multipla "*Come giudichi la durata del corso rispetto agli argomenti trattati?*". Abbiamo trovato che il 94% ha giudicato la durata del MOOC come *Buona* (3% come *Insufficiente* e un altro 3% come *Eccessiva*). In particolare, con una domanda su scala di Likert (da 1=fortemente in disaccordo a 4=fortemente d'accordo) il 96% (3+4 nella scala di Likert) ha confermato che "*Questo MOOC è stato un uso prezioso del tuo tempo*". E alla domanda "*Consiglieresti questo corso?*" il 100% ha risposto *Sì*. Quindi, in generale, registriamo un'alta soddisfazione degli insegnanti che hanno partecipato al MOOC. Inoltre, con la domanda a scelta multipla "*Hai intenzione di usare MathCityMap in futuro?*" è emerso che il 98% intende continuare a usare MCM in futuro. Nessuno ha risposto *No*, ma il 2% che ha risposto *Non lo so ancora* comprende insegnanti pre-servizio, che quindi non hanno ancora una propria classe.

CONCLUSIONI

Come prima esperienza internazionale, il MOOC è stato un successo nel fornire preziose esperienze di apprendimento a un gran numero di partecipanti. Gli insegnanti hanno ricevuto una formazione su come progettare attività di matematica all'aperto con MCM, al fine di acquisire o migliorare le competenze nella progettazione di attività di matematica. Ad ogni insegnante è stato chiesto di creare 8 diverse attività di matematica all'aperto per i loro studenti. Pertanto, è stato prodotto un numero significativo di attività all'aperto, da cui anche gli insegnanti che non fanno parte di MCM possono trarre beneficio, poiché queste produzioni sono pubbliche sul portale web di MCM e sono anche produzioni di qualità perché sono state revisionate da esperti. Gli sforzi degli insegnanti nel creare attività di percorsi matematici e gli sforzi fatti dai revisori hanno costituito un patrimonio, non solo per la comunità MOOC ma anche per tutti gli utenti di MCM. Attraverso lo spazio di lavoro internazionale, il MOOC sottolinea immensamente l'idea di MCM come uno strumento internazionale per l'educazione matematica. Il MOOC, quindi, ha il potenziale per educare gli insegnanti di matematica nella creazione di attività di matematica all'aperto e nell'implementazione dell'uso regolare dei percorsi matematici. Ha dimostrato di essere uno strumento prezioso per lo sviluppo professionale, insieme ad ampi dati per informarne il miglioramento in futuro.

RINGRAZIAMENTI

Il MOOC del progetto MaSCE[3] è stato reso possibile grazie al sostegno del programma Erasmus+ dell'Unione Europea (2019-1-DE03-KA201-060118). Un ringraziamento speciale va a tutti i formatori del MOOC: Andrus, Christian, Claudia, Elisabete, Gregor, Simone.
La ricerca è stata parzialmente sostenuta dall'Università di Catania nell'ambito del progetto "Piano per la Ricerca 2020-2022 (PIACERI) linea 2, Equazioni Ellittiche: Esistenza e Proprietà qualitativa & Didattica Laboratoriale e a Distanza".

BIBLIOGRAFIA

Blane D. C., & Clarke, D. (1984). *A mathematics trail around the city of Melbourne*. Monash: Monash Mathematics Education Centre, Monash University.
Bond, P. (2013). Massive Open Online Courses (MOOC) for Professional Development and Growth. In C. Smallwood, K. Harrod & V. Gubnitskaia (Eds.), *Continuing Education for Librarians* (pp-28–34). Jefferson: McFarland and Company.
Gurjanow, I., Ludwig, M. & Zender, J. (2016). What influences in-service and student teachers use of MathCityMap? *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education,* pp. 2366-2373. Dublin, Ireland.
Ludwig, M., Jesberg, J., & Weiß, D. (2013). MathCityMap – faszinierende Belebung der Idee mathematischer Wanderpfade. *Praxis der Mathematik*, ***55***(53), S. 14-19.
Shoaf, M. M., Pollak, H., & Schneider, J. (2004). *Math trails.* Lexington, MA.
Taranto, E. (2020). MOOCs for mathematics teacher education: New environments for professional development. In J. P. Howard II & J. F. Beyers (Eds.), *Teaching and learning mathematics online* (pp. 359–384). Boca Raton, Florida: CRC Press.
Zender, J. (2019). *Mathtrails in der Sekundarstufe I. Der Einsatz von MathCityMap bei Zylinderproblemen in der neunten Klasse*. Münster, WTM-Verlag.

REGARDS INCROCIATI
UNA FORMAZIONE BINAZIONALE FRANCIA-ITALIA

Luca Agostino, Germana Trinchero
USR Piemonte, Université Paris Saclay, Uff I area formazione
luca.agostino@univ-evry.fr germana.trinchero@posta.istruzione.it

Abstract
Questo articolo propone il bilancio di un'azione di formazione innovativa per docenti di matematica della regione Piemonte che ha avuto luogo nei giorni 18 e 24 Febbraio, 25 Marzo e 21 Aprile 2021. Essa si è proposta di far scoprire e praticare la didattica della matematica come è intesa e promossa in Francia. Dopo averne descritto l'organizzazione e il formato specifico, gli autori faranno un'analisi dei diversi momenti della formazione cercando di mettere in evidenza gli apporti più significativi alla riflessione didattica degli insegnanti e le ricadute in classe. Un'analisi della valutazione della formazione da parte degli insegnanti sarà dettagliata e delle proposte di prosecuzione di progetti binazionali concluderanno l'articolo.

Parole-chiave
Pedagogia attiva, Brousseau, Didattica, USR

INTRODUZIONE

La costruzione di una identità europea non può non passare da una riflessione approfondita sulla scuola in Europa che miri alla formalizzazione di un modello di scuola comunitaria in cui gli insegnanti condividono,discutono e si confrontano relativamente ai loro approcci didattici e alle loro pratiche pedagogiche. Alcuni progetti europei di successo (eTwinning e Erasmus) hanno permesso a numerosi insegnanti di diversi paesi di lavorare insieme e di far cooperare i propri alunni. Se azioni di formazione su temi trasversali legati alla scuola esistono, la creazione di formazioni transnazionali disciplinari tenute da esperti formatori di diversi paesi potrebbe costituire un ulteriore passo verso un accrescimento professionale condiviso. La formazione oggetto di questo articolo si inscrive in questa dinamica proponendo un corso sulla metodologia dell'insegnamento della Matematica in Francia vista con gli occhi della pedagogia e didattica italiane. La vicinanza culturale e linguistica dei due paesi costituisce un elemento facilitatore dell'analisi delle differenze che, nonostante ciò, risultano essere importanti e permette delle ricadute dirette nelle classi italiane in un'ottica di evoluzione delle pratiche di insegnamento.

UNA FORMAZIONE FRANCO-ITALIANA

La formazione oggetto di questo articolo nasce da una presa di contatto tra l'Università d'Evry (Paris-Saclay) e l'Ufficio Scolastico Regionale del Piemonte proprio con lo scopo di mettere in atto quanto sopra descritto . Il corso, progettato insieme, è stato strutturato in quattro incontri in videoconferenza, di tre ore ciascuno, per un totale di 20 ore di cui 12 in presenza, 2 di studio e visione materiali e 6 di sperimentazione in classe (facoltativa) tra il mese di Febbraio e Aprile 2021. Rivolto ad insegnanti di matematica delle scuole secondarie di primo e secondo grado della regione Piemonte è stato inserito anche su piattaforma S.O.F.I.A. per la formazione.I docenti partecipanti alla formazione sono stati una quarantina, tra questi cinque hanno realizzato una sperimentazione in classe ed esposto i risultati della stessa durante un pomeriggio di restituzione a Ottobre 2021.

Obiettivi e analisi a priori

Come detto nell'introduzione, questa azione di formazione innovativa nasce da un desiderio di incrociare le riflessioni sull'insegnamento della matematica a livello europeo. In questo senso, il suo scopo principale è stato quello di sensibilizzare i docenti al confronto dei sistemi educativi cercandone differenze e sinergie attraverso il punto di vista dell'insegnamento della matematica.

Per raggiungere questo obiettivo, si è scelto di centrare la formazione sull'approfondimento delle conoscenze didattiche degli insegnanti partecipanti attraverso l'analisi di attività matematiche scelte direttamente dagli esempi dei grandi nomi della didattica francese (in particolare l'approccio della teoria delle situazioni di didattiche di Guy Brousseau). L'analisi dei testi e delle metodologie è propedeutica alla sperimentazione da parte dei docenti italiani di unità didattiche costruite in formazione ispirandosi agli approcci e ai supporti studiati.

Al di là degli aspetti metodologici e didattici, il confronto sulla disciplina passa anche da aspetti linguistici : vocabolario, notazione, formalizzazione, spiegazione. Constatare queste differenze o similitudini permette di completare la riflessione integrando un sguardo critico sulle proprie pratiche di trasmissione pensando a come si nominano gli oggetti matematici e a come si indicano. Un tale approccio di formazione permette agli insegnanti italiani di riflettere sulle loro proprie pratiche prendendo la distanza necessaria per relativizzare le problematiche contingenti e quotidiane che, spesso, tendono a interferire con la riflessione didattica : comportamento degli alunni, mancanza di tempo, organizzazione scolastica ecc… In effetti, il fatto di focalizzare l'attenzione su un sistema che funziona secondo altre modalità pratiche, può portare l'insegnante a interessarsi ai soli contenuti matematici in maniera indipendente dal contesto. Ovviamente, una ricaduta in classe non potrà farsi senza prendere in conto gli aspetti concreti del mestiere, ma il fatto di aver riflettuto in maniera indipendente sull'apprendimento della materia permette un lavoro molto approfondito sulla didattica, lavoro che può portare a notevoli riflessioni sui contenuti e la loro trasmissione.

SVOLGIMENTO E CONTENUTI

La formazione si è svolta alternando le tre modalità seguenti:

- *Apporti magistrali*: struttura del sistema educativo francese, dei programmi di matematica, principi di didattica e di pedagogia, libri di testo, esempi di unità di insegnamento e analisi.
- *Laboratorio/interazione*: realizzazione in gruppo di una lezione su un tema scelto tra quelli proposti nello « spirito » della progettazione didattica francese, restituzione collettiva in presenza di un docente e un ispettore dell'Education Nationale.
- *Approfondimenti a distanza* grazie a documenti e supporti forniti sulla piattaforma collaborativa di formazione Moodle messa a disposizione dell'USR Piemonte.

Alcune attività (realizzazione dell'unità didattica e restituzione) sono state proposte in italiano o in francese a seconda della volontà e delle competenze linguistiche dei partecipanti.

La figura seguente mostra il dettaglio dei diversi tempi di formazione e la loro modalità.

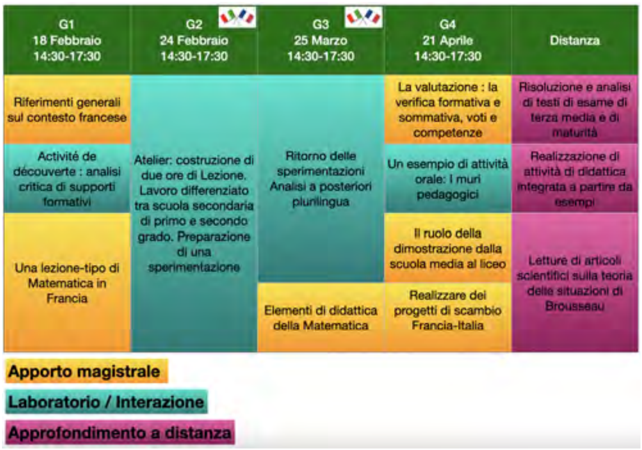


Figura 1. Piano della formazione

Incontro 1

La prima parte della giornata è stata dedicata alla scoperta del sistema scolastico francese, dei programmi di matematica. Questo momento è stato propedeutico all'analisi dell'approccio didattico che permette di introdurre delle nozioni nuove durante la lezione di matematica e che trova le sue radici nella teoria delle situazioni di Guy Brousseau. Si tratta dell'idea di attività di scoperta il cui obiettivo è di mettere gli alunni di fronte a una situazione problematica per la cui risoluzione necessitano di conoscenze/competenze che non possiedono ancora. Per realizzare ciò, si è chiesto agli insegnanti di riflettere su tre attività di scoperta chiedendo loro di metterne in evidenza gli obiettivi didattici e le ricadute in termini di apprendimento. La Figura 2 mostra il testo di una di loro (scoperta di asse del segmento in prima media).

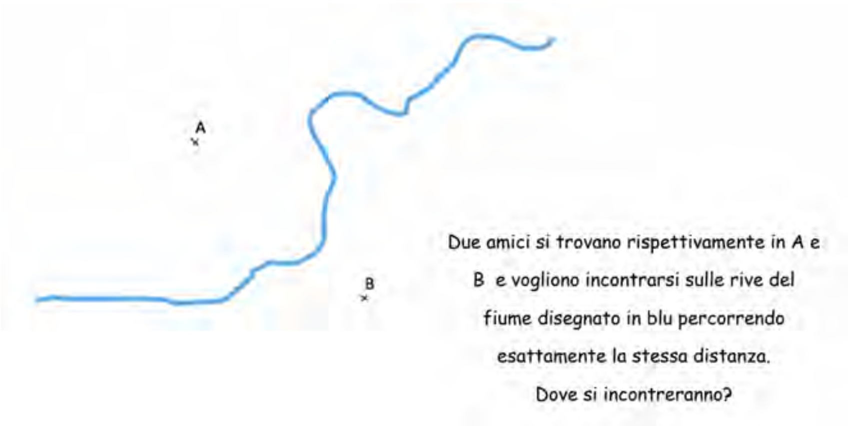


Figura 2. Esempio di attività di scoperta

Ne è seguito un lungo tempo di discussione e dibattito sull'idea (non ancora formalizzata) di *scoperta.* Ciò che è interessante sottolineare (e ciò si ritroverà a più riprese sui quattro incontri) è che i commenti degli insegnanti sono stati di due ordini distinti : associati alla loro propria pratica di insegnamento con tendenza a valorizzare il fatto che lavorano già in questo modo oppure, al contrario, esplicitando una forma di sorpresa, a volte di critica, e facendo molte domande su come si gestiscono concretamente queste situazioni. Sono due indicatori di formazione molto forti, da un lato il bisogno di legittimazione/rassicurazione, dall'altro il diritto alla critica positiva o negativa con relativa proiezione nella propria classe. Questo dibattito è stato seguito da una fase di formalizzazione di questo approccio dandone dei riferimenti teorici e storici. Di fatto, si è fatto vivere agli insegnanti l'esperienza dell'attività di scoperta su un tema didattico: un'attività di scoperta dell'attività di scoperta! La questione della realizzazione pratica in classe ha portato naturalmente a un tempo di esposizione sulla struttura di una lezione di matematica in Francia: attività di scoperta, fase istituzionale, esercizi. La schematizzazione proposta è certamente limitante e, sicuramente, troppo paradigmatica, ma ha permesso di porre una base di riflessione semplice per le attività di laboratorio del secondo giorno.

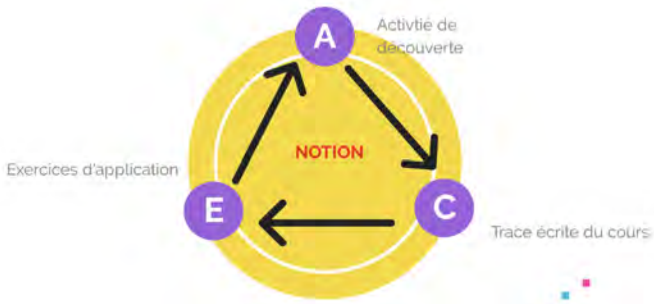


Figura 3. Paradigma di una lezione di matematica

Nell'ottica di arricchire e completare il paradigma proposto, molti insegnanti hanno espresso un grande interesse per una pratica pedagogica in pieno sviluppo in Francia, quella delle domande flash all'inizio di una lezione. Si tratta di domande veloci proposte all'inizio dell'ora e che rispondono all'obiettivo pedagogico di mettere la classe in attività direttamente e a quello didattico di ripasso e anticipazione delle difficoltà della lezione. Sottolineiamo questo punto perché esso costituisce probabilmente una delle sollecitazioni che hanno avuto il riscontro più forte durante la fase di laboratorio. Questa prima giornata ha mostrato che le sollecitazioni formative che vengono dalla pratica della classe costituiscono una porta di ingresso privilegiata al coinvolgimento in formazione degli insegnanti e permettono di illustrare gli spunti teorici che ne potranno scaturire.

Incontro 2
La seconda giornata aveva come obiettivo la costruzione di un'azione didattica, intendendo per azione didattica una lezione intera o una parte di essa. La condizione posta era quella di mettere al centro l'apprendimento attivo degli alunni attraverso un'attività di scoperta. Una lista di temi dei programmi della scuola secondaria di primo e secondo grado è stata proposta ai docenti e il lavoro è stato organizzato a gruppi utilizzando la divisione in stanzette disponibile sulla piattaforma utilizzata. Ogni gruppo aveva disposizione degli esempi di attività di scoperta, di enunciati di esercizi vari precedentemente tradotti e di pagine di libri di testo francesi. I docenti avevano la scelta di realizzare l'attività su alcuni temi utilizzando delle risorse in italiano o in francese. I temi proposti ai docenti sono riassunti in Tabella 1.

Tabella 1. Proposta di temi di lavoro per la scuola secondaria di primo e secondo grado

Secondaria di primo grado							
Proporzionalità	Teorema di Pitagora (IT)	Teorema di Pitagora (FR)	Divisibilità	Calcolo letterale (IT)	Calcolo letterale (FR)	Trasformazioni geometriche (IT)	Trasformazioni geometriche (FR)
Secondaria di secondo grado							
Equazioni di secondo grado	Derivazione (IT)	Derivazione (FR)	Integrazione	Vettori (IT)	Vettori (FR)	Limiti (IT)	Limiti (FR)

I formatori (un formatore supplementare ha partecipato alla giornata) hanno accompagnato le riflessioni dei gruppi spostandosi da una stanza all'altra, rispondendo alle domande e ascoltando le diverse proposte. Questi laboratori sono stati anche un momento di scambio tra docenti che si sono potuti confrontare sulle loro pratiche di classe che si iscrivono in situazioni scolastiche diverse. I gruppi di lavoro in francese hanno mostrato delle difficoltà nella progettazione in lingua straniera. Una riflessione sul ruolo delle lingue straniere in materie non linguistiche (CLIL) potrà fornire ulteriori spunti di sviluppo della formazione. I materiali prodotti sono stati depositati e condivisi in una cartella comune sulla piattaforma dell'USR. Alcuni docenti si sono proposti per sperimentare le attività realizzate con i loro alunni prima dell'incontro successivo.

Incontro 3
Il terzo incontro è stato incentrato sulla restituzione delle sperimentazioni fatte in classe delle attività costruite durante l'incontro precedente. Cinque relazioni sono state ascoltate dal gruppo di partecipanti. I formatori, accompagnati da un Ispettore Pedagogico dell'Académie de Normandie, hanno commentato

e posto domande al fine di suscitare ulteriori approfondimenti e accompagnare l'analisi a posteriori delle lezioni.
Consacrare un tempo lungo all'ascolto dei colleghi ha permesso di rimettere i contesti specifici regionali al centro della riflessione e mostrare la fattibilità dell'applicazione delle metodologie in diverse scuole italiane. In effetti, le esperienze dei docenti sono state fatte su classi di scuola media, liceo e istituto professionale, mostrando che il lavoro di formazione professionale e innovazione delle pratiche di classe è possibile in molte situazioni. L'incontro si è concluso con un'illustrazione essenziale delle teorie di Brousseau mettendo al centro della riflessione l'idea di pedagogia attiva come generatrice di apprendimenti. Il dibattito sulla teoria della didattica si è nutrito degli esempi delle attività svolte in classe e presentate dai docenti, rendendo la sua esplicitazione più chiara e mostrandone esempi di applicazione diretta.

Incontro 4
L'ultimo incontro aveva come obiettivo quello di arricchire il quadro generale con degli argomenti collaterali alla costruzione di una lezione : la valutazione, l'orale in matematica e una carrellata di esempi di siti di istituzioni e associazioni francesi che si occupano di queste tematiche. Al di là del discorso sulla valutazione che si è basato sulle problematiche che l'ultima riforma francese ha sollevato nel corpo docente, soprattutto al liceo (valutazione formativa e continuativa), la maggior parte del tempo è stata dedicata a un confronto sul ruolo delle competenze orali nell'apprendimento della matematica. Un dispositivo innovativo in Francia, sperimentato dal formatore e chiamato *Muri Pedagogici*[3], è stato spiegato e analizzato sia dal punto di vista dei vantaggi che esso dà nello sviluppo delle competenze orali sia dal punto di vista della sua organizzazione focalizzando l'attenzione sulla scelta dei contenuti e degli enunciati che favoriscano la produzione orale degli alunni. La scelta di concludere la formazione su questo tema è stata dettata dalla volontà di dare una visione di reciprocità della formazione : le competenze orali degli alunni italiani sono conosciute in Francia al punto da diventare un riferimento e un'ispirazione (in particolare nella definizione della nuova prova orale di maturità francese, *le Grand Oral*). Far riflettere i docenti italiani in formazione su una delle eccellenze della loro pedagogia è un'occasione di arricchimento perché permette di chiarire quali sono i meccanismi che essi stessi mettono in atto durante le loro lezioni e che favoriscono questa competenza. Gli insegnanti partecipanti, riconoscendo l'expertise della pratica dell'orale in Italia, si sono anche resi conto di come questa competenza si sviluppi durante il percorso scolastico degli alunni in una maniera che essi definiscono spontanea et culturale cioè non basata su scelte didattiche precise. Questa sorta di epifania ha portato i partecipanti a interrogarsi su quali siano le radici e le cause di questa competenza innescando così una autoriflessione formativa sulle proprie pratiche.

ANALISI A POSTERIORI E PROSPETTIVE

Nell'obiettivo di valutare l'impatto della formazione e le sue ricadute nelle pratiche della classe, l'USR Piemonte ha sottomesso un questionario di gradimento successivamente alla formazione e successivamente, organizzato, in collaborazione con l'USR Toscana, un pomeriggio di restituzione e discussione collettive il 9 Novembre 2021 durante il quale i docenti che hanno partecipato alla formazione in Piemonte e in Toscana hanno esposto ulteriori esperienze di classe usando le metodologie esposte.
In questa occasione, le direzioni delle istituzioni coinvolte (USR e INSPE de l'Académie de Versailles) hanno tenuto dei discorsi di apertura confortando le scelte fatte e incoraggiando attività future in questo senso. In effetti, al di là dell'interesse di co-costruzione di una visione comune di insegnamento della matematica in Europa e lungi dal proporre delle innovazioni pedagogiche epocali (le metodologie esposte sono ben conosciute e sperimentate anche in Italia da molti anni), questa formazione permette di affrontare le note resistenze alla formazione dei docenti ribaltando la postura. Infatti, il partecipante è interpellato dal formatore come osservatore esterno e in quanto tale meno coinvolto, apparentemente,

[3] Si veda l'atto del convegno relativo dell'autore Luca Agostino

in prima persona dal suo modo di fare lezione quotidianamente. In questo modo, lo spirito critico del docente è stimolato dall'inizio alla fine grazie al confronto tra paesi e culture e il formatore crea una zona di conforto nella quale il formato agisce da soggetto e non da oggetto della formazione. L'osservazione critica, il confronto didattico, la sperimentazione veicolata dal multiculturalismo sono i veicoli di formazione di questo corso.

Questionario di gradimento
Al fine di valutare la formazione, un questionario di gradimento è stato proposto ai docenti partecipanti. Tutti hanno manifestato interesse a continuare l'esperienza di formazione e une grande maggioranza ha espresso soddisfazione per i contenuti e le modalità del corso. In particolare:

- 89% dei partecipanti ha espresso un grado di soddisfazione di 4 o 5 su 5 sulla modalità
- il 62% pensa di proporre un percorso di formazione su questo modello nel suo istituto
- il 96% pensa che questo corso possa avere delle ricadute sulla sua pratica didattica

Tra gli aspetti che i docenti vorrebbero approfondire risalta il tema valutazione: come si è evoluta in Francia la valutazione delle prove orali nel prossimo futuro e aspetti metodologici della valutazione.
Queste risposte lasciano pensare che questo corso intercetti un bisogno di formazione degli insegnanti che includa una riflessione su pratiche provenienti da sistemi scolastici diversi. Ancora una volta, siamo convinti che il fatto di prendere una certa distanza dalle proprie preoccupazioni quotidiane professionali non possa che avere un impatto positivo sulla motivazione alla formazione e sulle sur ricadute in classe.

Prospettive
I numeri dei partecipanti a questa formazione (e alla formazione toscana) fanno pensare che questi contenuti e proposte intercettano un bisogno e una motivazione esistenti e forti in Italia. Questo interesse si è confermato durante una sperimentazione in modalità ibrida a Dicembre 2021 nella regione Toscana (120 partecipanti) nell'ambito dell' Accreditamento Erasmus+ dell'Ufficio Scolastico Regionale (progetto 2021-1-IT02-KA121-SCH-00000914 9)e in due occasioni distinte in Spagna ad Ottobre 2021 (Siviglia e Salamanca) nell'ambito dell'Accreditamento Erasmus del Liceo Internazionale di Saint Germain en Laye (progetto 2020-1-FR01-KA120-SCH-094937)
.
Durante l'ultima replica in Toscana, il formatore ha attivato lui stesso delle lezioni in classi di liceo seguendo le metodologie esposte nella formazione. Questi momenti, che sono stati indipendenti dall'azione di formazione, potranno in futuro costituire uno dei momenti del corso secondo delle modalità ancora da immaginare. Completare la formazione con un apporto legato agli aspetti linguistici della matematica in lingua francese permetterà una declinazione del corso che potrà avere delle ricadute interessanti nelle classi CLIL.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano il comitato organizzativo del DI.FI.MA per la fiducia riposta in questa Comunicazione e le Direzioni dell'Ufficio Scolastico Regionale Piemonte e dell'Université d'Evry per aver creduto in questo progetto.

BIBLIOGRAFIA

Brousseau G. (1990), Le contrat didactique: le milieu, in Recherches en Didactique des Mathématiques, n° **9, 9.3**, pp. 309-336
BrousseauG. (1994), «*Perspectives pour la didactique des mathématiques*» in M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (eds), Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 51- 66

Brousseau G. (1997), Theory of Didactical situations in Mathematics. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990, trad. M. Cooper et N. Balacheff, R. Sutherland et V. Warfield. London: Kluwer.
Brousseau G. (1998), «Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique», in *La théorie des situations didactiques*, Guy Brousseau (ed.) pp. 115-160

UN MOOC INTERDISCIPLINARE: LA STORIA DELLA BIOMATEMATICA

Elena Scalambro, Erika Luciano
Università degli Studi di Torino, Dipartimento di Matematica "G. Peano"
elena.scalambro@unito.it

Abstract
Alla vigilia del centenario dei lavori di V. Volterra sulla dinamica di popolazioni, che sancirono l'inizio dell'età aurea della biomatematica, si avvertiva l'esigenza di offrire agli insegnanti di scuola secondaria di I e II grado strumenti culturali adeguati per comprendere la travagliata storia della matematizzazione e della modellizzazione dei fenomeni biologici. Di qui è nata l'idea del gruppo di ricerca in Storia delle Matematiche dell'Università di Torino di creare un insegnamento digitale open-source di storia della biomatematica (sulla lunga durata e in un'accezione ampia del termine, ovvero incluse le applicazioni della matematica alla cristallografia e alle biotecnologie), rivolto sia ai docenti e alle loro classi, sia agli studenti universitari interessati ad approfondire in modo autonomo questi argomenti.
Nel presente contributo si illustrano gli obiettivi, i contenuti e i principi fondamentali alla base della progettazione e costruzione di questo MOOC.

Parole-chiave
MOOC, storia della biomatematica, *digital education*, storia delle matematiche in classe, STEM.

UN MOOC DI STORIA DELLA BIOMATEMATICA: PERCHÉ?

Il progetto *Un MOOC di Storia della Biomatematica* nasce nel 2020, in occasione del centenario della 'golden age' della biomatematica, all'interno del gruppo di ricerca in Storia delle Matematiche del Dipartimento di Matematica 'G. Peano' di Torino, con l'obiettivo di creare un insegnamento digitale open-source di storia delle applicazioni della matematica alle scienze della natura e della vita, nelle quali al meglio si coglie quella che E.P. Wigner (1960) ha definito la *"unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"*. Coordinato dalla prof.ssa E. Luciano, con la collaborazione della prof.ssa L. Giacardi e della dott.ssa E. Scalambro, il progetto prende l'avvio grazie al cofinanziamento del CIRDA (Centro Interdipartimentale per la Ricerca Didattica e l'Aggiornamento degli Insegnamenti dell'Università di Torino), il cui scopo è la promozione e lo sviluppo di studi riguardanti la ricerca didattica, la formazione continua e il rapporto con il mondo della scuola.

Obiettivi e finalità del progetto

Il formato del MOOC (Massive Open Online Course), 'nuovo paradigma' nei progetti educativi in *e-learning* (Taranto, Arzarello & Robutti, 2017 e 2020) è parso particolarmente adatto per perseguire i molteplici obiettivi del progetto, primo fra tutti quello di arricchire il bagaglio culturale dei differenti fruitori. Il corso, infatti, si rivolge sia a docenti in servizio e/o in formazione, sia agli studenti universitari delle facoltà STEM e non, interessati ad approfondire in modo autonomo questi argomenti, che per la loro stessa natura hanno carattere interdisciplinare. La modalità di fruizione digitale, oltre a consentire di rivolgersi ad un pubblico ampio e di mettere in contatto docenti e studenti di aree geografiche differenti, è risultata particolarmente efficace in un periodo di emergenza sanitaria, segnato dall'impossibilità di avviare una sperimentazione tradizionale in classe.
All'arricchimento culturale, si è affiancato l'obiettivo di fornire strumenti adeguati e accessibili per comprendere la storia della matematizzazione e della modellizzazione dei fenomeni naturali, illustrando la maturazione di concetti, metodi e modelli, su esempi opportunamente scelti e attraverso letture mirate. È stata inoltre posta particolare attenzione al costruire con i docenti coinvolti idee progettuali nuove per

sviluppare in aula attività didattiche coerenti con la genesi storica delle teorie illustrate e con il contesto culturale, sociale e politico in cui esse sono maturate e si sono sviluppate. In quest'ottica, anche i MOOC possono efficacemente contribuire al costituirsi di una comunità di pratica formata da esperti, insegnanti di scuola secondaria di I e di II grado e studenti universitari, impegnata nella costruzione collettiva e nella condivisione di percorsi e laboratori didattici di carattere storico, su temi di biomatematica, a partire dai moduli proposti e dalla lettura di testi classici.
Si auspica infine di contribuire ad arricchire il panorama di insegnamenti on-line open offerti dall'Università di Torino, ancora singolarmente sguarnito sul fronte della storia della matematica e della scienza, concorrendo al suo inserimento nel novero degli atenei che, a livello internazionale e nazionale, sono all'avanguardia sul fronte della *digital history of science*.

Progettazione e struttura del MOOC
Il progetto è stato elaborato in accordo con il quadro teorico di L. Radford, V.J. Katz e U.T. Jankvist (*historical modules for the teaching & learning of mathematics; history as a goal, history as a tool*) e in collegamento con le iniziative di *digital education in history of science* avviate all'estero e in Italia (MIT, Groningen, Montpellier, Padova, …). Si è dunque voluto sviluppare un ambiente virtuale di formazione, aggiornamento e apprendimento integrato, con modelli di attività e contenuti multimediali da esplorare, sistemi di valutazione automatica e una piattaforma documentale di fonti storiche, testi e letture, in lingua originale (inglese, francese, latino, …) o in traduzione. Al fine di offrire proposte in linea con i nuclei di programmazione propri delle Indicazioni Nazionali per la scuola secondaria (2010) – che sottolineano l'importanza di "connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate; inquadrarle nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e comprenderne il significato concettuale attraverso una visione storico critica anche in relazione al contesto filosofico, scientifico e tecnologico" (p. 22) – e allo scopo di guidare i docenti nella progettazione, costruzione, sviluppo e gestione di percorsi didattici interdisciplinari, sono stati messi a punto i seguenti 12 moduli.

- Metodo assiomatico vs. metodo sperimentale? La "unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences" (G. Vailati, V. Volterra, H. Poincaré, B. De Finetti, A. Koyré, E.P. Wigner, …)
- La sezione aurea: dal pentagono regolare alla fillotassi
- I conigli di L. Fibonacci
- J. Kepler e la forma dei fiocchi di neve
- *"L'Universo è scritto in caratteri matematici"*: G. Galileo, J. Kepler, F. Bacon, …
- Aritmetica binaria e tassonomia: dall'*I Ching* alla *Philosophia Botanica* di Linneo
- John Graunt e le tavole di mortalità
- D. Bernulli e E.E. Duvillard de Durand: matematica, statistica ed epidemie
- Equazioni differenziali e dinamica delle popolazioni: i modelli di Malthus e Verhulst
- G.V. Schiaparelli: un modello geometrico per la teoria dell'evoluzione
- La 'golden age' della biomatematica: V. Volterra, A. Lotka, M. Brelot, …
- Il modello SIR: la dinamica delle epidemie

Si possono suddividere questi moduli in due grandi aree tematiche. I primi sei sono dedicati a diversi esempi delle 'tracce' della matematica nel mondo naturale. Dopo un'introduzione sulle differenze tra metodo assiomatico e metodo sperimentale, si parte dalla più celebre incursione della matematica in natura: la sezione aurea. Questa è, a sua volta, strettamente collegata alla successione di Fibonacci, i cui numeri compaiono all'interno di numerosi elementi naturali. Altrettanto affascinante è la matematica dei fiocchi di neve, introdotta a partire dall'opera *Strena seu de nive sexangula* di J. Kepler (1610), la cui figura fa da *trait-d'union* con il modulo successivo, dedicato all'Universo e alle leggi matematiche che lo regolano. L'ultimo esempio del legame tra matematica e scienze della natura è costituito dall'aritmetica binaria, che viene presentata attraverso un viaggio dall'*I Ching* (testo sapienziale cinese del 300 a.C.) alla più nota tassonomia di Linneo (1735). I restanti sei moduli del MOOC si fondano invece sulle applicazioni della matematica alle scienze della vita e hanno lo scopo di avvicinare al

concetto di modello matematico, nell'ottica della sua evoluzione nel corso dei secoli. A partire dalle tavole di mortalità di J. Graunt (1662), sono introdotti alcuni esempi del legame tra matematica, statistica ed epidemie attraverso i contributi di Bernoulli, D'Alembert e Duvillard de Durand, i primi modelli matematici propriamente detti (quelli di Malthus e Verhulst per la dinamica delle popolazioni) e il modello geometrico di Schiaparelli per la teoria dell'evoluzione (1898). Si passa poi al periodo aureo della biomatematica (1920-1940), segnato dall'opera di Volterra, Lotka e Brelot, per finire con l'introduzione del modello SIR, uno dei più importanti modelli matematici in epidemiologia, che consente di interpretare anche fenomeni estremamente attuali, come la diffusione del Covid-19.
Ciascun modulo del MOOC è liberamente navigabile al suo interno, grazie ai pulsanti interattivi che consentono sia di tornare all'indice del modulo sia di riprendere la lettura dal punto in cui ci si è interrotti per aprire un eventuale approfondimento. Sono stati infatti inseriti degli approfondimenti di tipo diverso (matematico, didattico, storico, …), oltre ad alcuni focus sulle fonti originali e collegamenti ad altri materiali online. In linea con il principio di gestione autonoma della fruizione dei MOOC, ciò è stato concepito nell'ottica di tener presente le differenze esigenze e i diversi target cui è rivolto il progetto: ad esempio, i docenti potrebbero essere maggiormente interessati alle attività didattiche da proporre in classe, mentre gli studenti universitari potrebbero avere la necessità di entrare nei dettagli dei passaggi matematici che hanno condotto alla formulazione di un determinato modello.

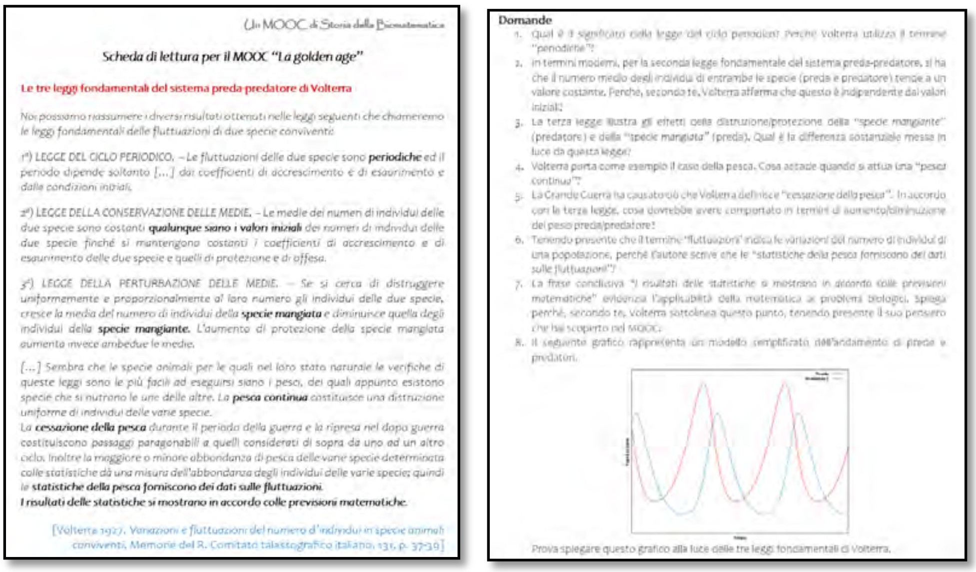
UN ESEMPIO SIGNIFICATIVO: IL MODULO SULLA 'GOLDEN AGE'

Ogni modulo del MOOC si articola in diversi capitoli che possono essere idealmente raggruppati in tre diverse sezioni: il contesto storico, con particolare attenzione ai personaggi che hanno apportato contributi significativi nell'ambito preso in esame; gli aspetti prettamente matematici del tema affrontato; le applicazioni e le implicazioni in diversi contesti con gli eventuali approfondimenti.
Per fornire alcuni dettagli su questa struttura comune a ciascun modulo, è doveroso considerare più da vicino uno di essi. A distanza di cent'anni dai lavori di Volterra sulla dinamica delle popolazioni, appare naturale esaminare il modulo dedicato all'età d'oro della biomatematica. Come emerge dall'indice (Fig. 1), esso si presenta suddiviso in nove capitoli.

Figura 1. Indice del modulo del MOOC *La 'golden age' della biomatematica: V. Volterra, A. Lotka, M. Brelot*.

Tenendo presente che la matematica è da sempre un'attività fortemente situata e 'frutto del suo tempo', è inserita in apertura una parte dedicata al contesto storico, culturale, sociale e politico all'interno del quale si sono sviluppate le diverse teorie.
Nel modulo dedicato alla 'golden age', si pone quindi l'accento sul processo di matematizzazione dei fenomeni non fisici che dagli anni Venti inizia a investire ogni settore e, in particolare, quello delle scienze della vita con l'obiettivo di pervenire a una teoria unificante dei fenomeni biologici espressa in termini matematici.

Vi sono inoltre le biografie ragionate dei diversi personaggi coinvolti – in questo caso quelle di Volterra, Lotka e Brelot – con lo scopo di creare anche un collegamento tra il punto di vista da loro sviluppato, il clima culturale e l'ambiente intellettuale in cui hanno vissuto.
Si passa poi alla parte a contenuto prettamente matematico; in questo caso è naturalmente dedicata a due modelli matematici: il modello preda-predatore e quello relativo a due specie in competizione che sfruttano la stessa nicchia ecologica. Oltre a delinearne i tratti principali, si mettono in luce i punti di forza e i limiti di ciascun modello, evidenziandone i relativi campi di applicabilità. Nella trattazione compaiono numerose rappresentazioni grafiche, volte a promuovere lo sviluppo delle competenze necessarie per lettura dei grafici, come suggerito anche dalle Indicazioni Nazionali. I passaggi matematici più avanzati – come, in questo caso, quelli necessari per ricavare le equazioni del modello preda-predatore o, ancora, lo studio delle soluzioni del modello di due specie in competizione – sono invece stati inseriti negli approfondimenti, per evitare di appesantire eccessivamente la trattazione e in modo da essere facilmente consultabili dagli interessati. Un altro punto importante per la promozione del pensiero critico, che compare quindi nei vari moduli, è il confronto tra i diversi modelli matematici, approcci e punti di vista: in questo caso sono state confrontate le idee di Volterra, Lotka e Brelot sia in forma sintetica (tabelle, elenchi puntati, …) sia attraverso alcuni brani particolarmente significativi estratti dalla corrispondenza tra questi matematici.
Vi è, infine, la parte degli approfondimenti: oltre a quelli di carattere prettamente matematico precedentemente citati, compaiono qui alcune trascrizioni delle fonti e proposte di attività didattiche. Sono introdotti anche dei collegamenti con la scienza moderna come, in questo caso, le funzioni di Holling che sono state elaborate in tempi recenti per migliorare e correggere il principio degli incontri di Volterra nel modello preda-predatore: in questo modo, sono stati costruiti dei modelli più elaborati nei quali il termine che rappresenta la sottrazione di prede da parte del predatore è direttamente proporzionale alla risposta funzionale del predatore che misura il numero di prede consumate da un predatore nell'unità di tempo. In appendice a ogni modulo, vi sono la sitografia e un'ampia bibliografia, composta sia da articoli specialistici che da saggi divulgativi in modo che ciascun fruitore del MOOC possa trovare dei riferimenti a materiali adatti alle proprie esigenze.
Ciascun modulo è poi completato da un test di autovalutazione, per aiutare nello studio individuale, e da una scheda di lettura di un passo particolarmente significativo legato al tema. Le domande del test finale sono differenziate a seconda del livello scolare (scuola secondaria di II grado e università) e destinate ad essere implementate con dei softwares online open access dotati di sistemi di valutazione automatica.



Un MOOC di Storia della Biomatematica

Scheda di lettura per il MOOC "La golden age"

Le tre leggi fondamentali del sistema preda predatore di Volterra

Noi possiamo riassumere i diversi risultati ottenuti nelle leggi seguenti che chiameremo le leggi fondamentali delle fluttuazioni di due specie conviventi:

1ª) LEGGE DEL CICLO PERIODICO. – *Le fluttuazioni delle due specie sono* **periodiche** *ed il periodo dipende soltanto […] dai coefficienti di accrescimento e di esaurimento e dalle condizioni iniziali.*

2ª) LEGGE DELLA CONSERVAZIONE DELLE MEDIE. – *Le medie dei numeri di individui delle due specie sono costanti* **qualunque siano i valori iniziali** *dei numeri di individui delle due specie finché si mantengono costanti i coefficienti di accrescimento e di esaurimento delle due specie e quelli di protezione e di offesa.*

3ª) LEGGE DELLA PERTURBAZIONE DELLE MEDIE. – *Se si cerca di distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero gli individui delle due specie, cresce la media del numero di individui della* **specie mangiata** *e diminuisce quella degli individui della* **specie mangiante.** *L'aumento di protezione della specie mangiata aumenta invece ambedue le medie.*

[…] Sembra che le specie animali per le quali nel loro stato naturale le verifiche di queste leggi sono le più facili ad eseguirsi siano i pesci, dei quali appunto esistono specie che si nutrono le une delle altre. La **pesca continua** *costituisce una distruzione uniforme di individui delle varie specie.*
La **cessazione della pesca** *durante il periodo della guerra e la ripresa nel dopo guerra costituiscono passaggi paragonabili a quelli considerati di sopra da uno ad un altro ciclo. Inoltre la maggiore o minore abbondanza di pesca delle varie specie determinata colle statistiche dà una misura dell'abbondanza degli individui delle varie specie; quindi le* **statistiche della pesca forniscono dei dati sulle fluttuazioni.**
I risultati delle statistiche si mostrano in accordo colle previsioni matematiche.

[Volterra 1927. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, Memorie del R. Comitato talassografico italiano, 131, p. 37-39]

Domande

1. Qual è il significato della legge del ciclo periodico? Perché Volterra utilizza il termine "periodiche"?
2. In termini moderni, per la seconda legge fondamentale del sistema preda-predatore, si ha che il numero medio degli individui di entrambe le specie (preda e predatore) tende a un valore costante. Perché, secondo te, Volterra afferma che questo è indipendente dai valori iniziali?
3. La terza legge illustra gli effetti della distruzione/protezione della "specie mangiante" (predatore) e della "specie mangiata" (preda). Qual è la differenza sostanziale messa in luce da questa legge?
4. Volterra porta come esempio il caso della pesca. Cosa accade quando si attua una "pesca continua"?
5. La Grande Guerra ha causato ciò che Volterra definisce "cessazione della pesca". In accordo con la terza legge, cosa dovrebbe avere comportato in termini di aumento/diminuzione dei pesci preda/predatore?
6. Tenendo presente che il termine "fluttuazioni" indica le variazioni del numero di individui di una popolazione, perché l'autore scrive che le "statistiche della pesca forniscono dei dati sulle fluttuazioni"?
7. La frase conclusiva "I risultati delle statistiche si mostrano in accordo colle previsioni matematiche" evidenzia l'applicabilità della matematica ai problemi biologici. Spiega perché, secondo te, Volterra sottolinea questo punto, tenendo presente il suo pensiero che hai scoperto nel MOOC.
8. Il seguente grafico rappresenta un modello semplificato dell'andamento di prede e predatori.

Prova spiegare questo grafico alla luce delle tre leggi fondamentali di Volterra.

Figura 2. Scheda di lettura del modulo del MOOC *La 'golden age' della biomatematica: V. Volterra, A. Lotka, M. Brelot*.

Cogliendo il suggerimento di L. Radford[4] di portare la storia della matematica all'interno dell'insegnamento attraverso l'analisi dei testi originali, accanto alla piattaforma di fonti storiche digitalizzate, sono state elaborate alcune schede che guidino l'utente nella lettura dei testi. Come nel caso delle tre leggi del modello preda-predatore di Volterra (Fig. 2), le schede si articolano in domande di tipo diverso, alcune delle quali fanno riferimento a particolari espressioni del brano di partenza che sono evidenziate nel testo per facilitarne l'analisi. Lavorare in questa direzione può essere utile per promuovere lo sviluppo non solo delle competenze matematiche, ma anche di quelle linguistiche.

ULTERIORI ASPETTI CARATTERISTICI

Nella creazione dei vari moduli del MOOC si è tenuto conto di diversi aspetti che saranno qui illustrati. Ricollegandosi all'importanza educativa delle attività sulle fonti, è stata posta particolare attenzione alla lettura e all'interpretazione dei lavori originali, attività che sposta l'attenzione sul processo che ha portato alla nascita dei concetti matematici. Accanto ai passi dei matematici inseriti all'interno delle schede di lettura, viene lasciato ampio spazio anche alle fonti iconografiche: ad esempio, all'interno del modulo sulla diadica si propone l'interpretazione di G.W. Leibniz dei 64 esagrammi dell'*I Ching* e si illustrano le tre cartoline di G. Peano a G. Vailati, scritte tra il 1898 e il 1903 con la macchina fonostenografica di sua invenzione. Agli scritti e ai discorsi dei protagonisti sono accostate – all'interno del MOOC – le diverse opinioni e reazioni scaturite all'interno della società e nella cerchia degli intellettuali in seguito agli studi e alle scoperte scientifiche, come nel caso delle varie posizioni assunte dopo la pubblicazione del saggio *Forme organiche naturali e forme geometriche pure* di Schiaparelli.
Richiamando il pensiero di B. Mazur (2013, p. 2) – secondo il quale la matematica è un'attività che può essere descritta come un'unica lunga conversazione nel corso dei millenni – ci si è concentrati sulla genesi e sullo sviluppo storico delle tradizioni di pensiero e dei filoni di studio, oltre che dei concetti. A titolo esemplificativo, si possono citare le parti del MOOC incentrate su: la storia dello studio dei fiocchi di neve; l'analisi del contesto europeo in cui nacque il dibattito sui vantaggi dell'inoculazione del vaiolo all'inizio del XVII secolo; lo sviluppo della diadica nel corso dei secoli.
All'interno dei vari moduli si è cercato di inserire il maggior numero possibile di collegamenti tra i temi affrontati e l'attualità con un duplice scopo: evidenziare le applicazioni della matematica alla realtà e contrastare la tipica visione della matematica come una disciplina statica e immutabile nel tempo. Nel MOOC compaiono così alcuni spunti relativi al dibattito sui vaccini e al concetto di immunità di gregge, oltre ad alcuni esempi di impiego dei modelli introdotti al fenomeno – purtroppo decisamente attuale – del Covid-19. In tale ambito rientrano l'applicazione del modello esponenziale di Malthus alla prima fase della crescita dei contagi da Coronavirus così come il calcolo del picco degli infetti e il suo valore massimo utilizzando un'opportuna generalizzazione del modello SIR.

Figura 3. Alcuni esempi di collegamenti tra matematica e arte inseriti all'interno del MOOC.

Un altro tratto distintivo di questo progetto è costituito dalla forte interdisciplinarità. La storia infatti può contribuire a individuare e creare collegamenti tra la matematica e altre discipline, come l'arte. In

[4] Radford 2014, p. 97: *I would suggest that bringing history of mathematics into mathematics education in such a way that it is both mathematics and also truly history of mathematics consists, first of all, in the study of original texts.*

quest'ottica è stato inserito, ad esempio, un percorso tra monumenti antichi e moderni – dal Partenone di Atene alla cattedrale di Notre-Dame di Parigi – nella cui struttura architettonica compare il rettangolo aureo. O, ancora, sono state inserite alcune opere dell'artista contemporaneo Mario Merz (1925-2003) che contengono i primi termini della famosa successione di Fibonacci, cui egli si appassionò alla fine degli anni Sessanta a partire dalla lettura dei testi di Leonardo Pisano. Tra le sue opere, spicca la scultura luminosa *Il volo dei numeri* installata sul fianco della cupola della Mole Antonelliana di Torino. Nella stessa ottica, è elaborato un approfondimento sulla rappresentazione della neve nell'arte: un percorso dai quadri del fiammingo P. Bruegel il Vecchio a quelli di M. Chagall, passando attraverso i numerosi quadri di matrice impressionista con questo soggetto (C. Monet, P. Gauguin, …).
Naturalmente, un altro collegamento interdisciplinare cui è stato dato particolare rilievo è quello con le scienze naturali. Infatti, ad esempio, la successione di Fibonacci e la spirale aurea rivestono un ruolo fondamentale nella fillotassi, branca della botanica che studia l'ordine in cui le entità botaniche (foglie, petali, squame, ecc.) si distribuiscono nello spazio, conferendo una struttura geometrica alle piante. Analogamente, può essere significativo far esplorare i diversi elementi naturali che 'contengono' i numeri di Fibonacci: diversi tipi di fiori, pigne, ananas, cavolo, piante grasse…. È inoltre proposto un esperimento per creare un modello di fiocco di neve a partire dalla cristallizzazione dell'acido borico o, ancora, un confronto tra la tassonomia di Linneo, basata sui nomi binomiali, e quella moderna che contempla invece sei regni raggruppati in tre domini (Bacteria, Archaea, Eukarya).

Figura 4. Alcuni esempi di collegamenti tra matematica e scienze inseriti all'interno del MOOC.

All'interno del MOOC non mancano inoltre le proposte di attività manuali e manipolative che tengono conto anche degli aspetti *embodied* dell'insegnamento della matematica (Nemirovsky & Ferrara, 2009); fra queste figurano:

- la creazione di un fiocco di neve di carta, utile anche per promuovere una riflessione sul tema delle simmetrie;
- la realizzazione, attraverso la tecnica degli origami, di un pentagono regolare a partire da una striscia di carta (poligono decisamente più difficile da ottenere con gli strumenti 'classici' quali riga e compasso);
- la costruzione del 'compasso aureo' che permette di individuare il rapporto aureo tra due lunghezze.

Tenendo poi presente che all'interno del processo di costruzione della conoscenza è anche importante l'aspetto della discussione collettiva, sono state pensate progettate alcune attività didattiche con l'obiettivo di favorire il confronto e il dialogo tra gli studenti. All'interno del MOOC sono quindi presenti alcune proposte di attività che vanno dalla risoluzione di problemi applicando i vari modelli matematici studiati alle operazioni elementari nel sistema di numerazione in base due.
Nella progettazione di alcune fra queste attività è stato adottato il metodo della ricerca variata (Marton, Runesson & Tsui, 2004; Arzarello, 2019) con l'obiettivo di favorire una comprensione profonda dei concetti appresi: è in quest'ottica che è stato inserito il cosiddetto "problema delle api" che si può vedere, in un certo senso, come 'opposto' di quello dei conigli di Fibonacci. Un alveare, infatti, è composto di maschi (i fuchi) e di femmine (le operaie) oltre naturalmente all'ape regina. La nascita delle api ha luogo sia da uova fecondate che da uova non fecondate: le uova fecondate danno origine alle operaie o alla

nuova regina (quindi l'ape femmina ha due progenitori) mentre le uova non fecondate danno origine ai fuchi (ossia: il maschio ha un solo progenitore). Partendo da un'ape operaia, bisogna capire quanti sono i suoi antenati di prima, seconda, terza, quarta… generazione, e così via (Fig. 5).

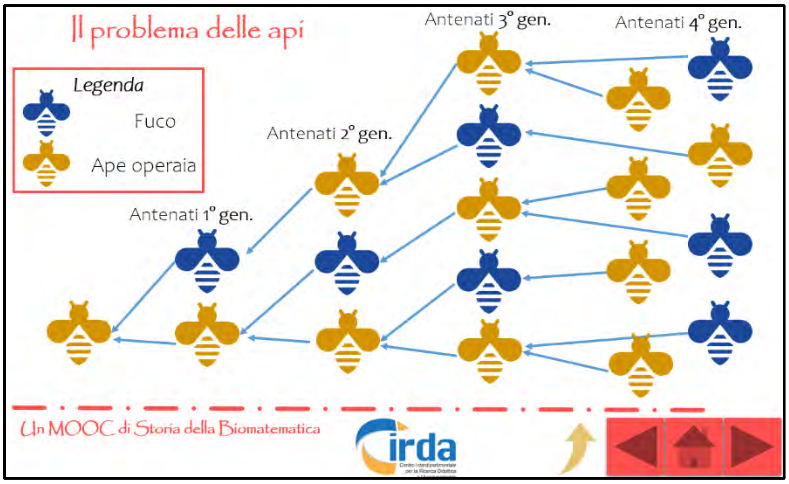


Figura 5. Schema del "problema delle api" tratto dal modulo del MOOC *I conigli di L. Fibonacci*.

Un ultimo aspetto da sottolineare è la presenza di collegamenti ad altri materiali multimediali o a programmi online open source. È quest'ultimo il caso di *GeoGebra* utilizzando il quale gli utenti sono guidati nella costruzione della spirale aurea e invitati ad esplorare il grafico del modello SIR al variare dei parametri. Vi sono poi dei rimandi ad alcuni video, differenziati in base al target di riferimento: ad esempio, per introdurre la figura di Fibonacci agli insegnati viene proposto l'intervento di uno storico della matematica, mentre per gli studenti dei primi anni di scuola secondaria è consigliata la visione di un breve cartone animato. All'interno del MOOC compaiono infine dei collegamenti a canzoni inerenti agli argomenti affrontati – tra cui le leggi di Keplero raccontate attraverso la canzone di L. Baglioni – e alle risorse digitali di enti e musei, come il contenuto multimediale sul modello tolemaico a cura del Museo Galileo di Firenze

CONCLUSIONI

Con questo progetto è stato dunque messo a punto un ambiente integrato di apprendimento con l'obiettivo di favorire la comprensione del significato concettuale e culturale delle teorie che si sono sviluppate nell'ambito della matematizzazione delle scienze della vita. Se da un lato le ricerche relative alla storia della biomatematica sono molteplici (Freguglia, 1998; Israel & Millan Gasca, 2002; Israel, 2004, …), d'altra parte si avvertiva la necessità di un'adeguata trasposizione didattica di queste tematiche, a diversi livelli, cui questo MOOC cerca di soddisfare.
Naturalmente questo tipo di azione didattica può essere ulteriormente sviluppata e ampliata in più direzioni: dalla sperimentazione con i docenti e all'interno delle classi – recentemente avviata in sinergia con il modulo del PLS "La Storia delle Matematiche in classe – all'inserimento di nuovi moduli relativi ad argomenti non ancora considerati. L'auspicio è che questo progetto possa costituire una buona base di partenza per successivi interventi in questa direzione, che pare ancora più promettente nella prospettiva in cui *"studying the evolution of concepts is sometimes the best way of coming to an understanding of those concepts"* (Mazur, 2013, p. 1).
Inoltre, all'interno di questo contesto, il ruolo di 'ponte' della storia della matematica emerge in maniera importante: ponte tra diverse epoche storiche, tra differenti luoghi geografici, tra discipline scolastiche. Infine, la struttura dinamica e in continua evoluzione tipica dei MOOCs favorisce l'interazione e lo scambio tra le diverse comunità (docenti, studenti, ricercatori in didattica della matematica, storici della matematica) coinvolte nel processo di insegnamento-apprendimento e, più in generale, di trasmissione della cultura matematica a vario livello.

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo esprimere il più vivo ringraziamento a tutti coloro che hanno contribuito, in vario modo, alla realizzazione di questo progetto: il CIRDA, gli insegnanti che hanno avviato varie sperimentazioni nelle loro classi, gli studenti e i laureati del Corso di Laurea in Matematica che hanno partecipato attivamente alla prima stesura di alcune parti del MOOC (A. Boero, G. Bordet, E. Fagiolo, F. Farcomeni, L. Ferrero, F. Lucco-Castello, L. Martino, M. Noero).

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. (2019). Variare le sensate esperienze per costruire le necessarie dimostrazioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **42-**A-B (5), 542-554.

Freguglia, P. (1998). Considerazioni sul modello di Giovanni V. Schiaparelli per una interpretazione geometrica delle concezioni darwiniane, *Atti e Memorie dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Modena*, s.7, **14**, 135-158

Israel, G., and Millan Gasca, A. (2002). *The Biology of Numbers. The Correspondence of Vito Volterra on Mathematical Biology,* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.

Israel, G. (2004). Oltre il mondo inanimato: la storia travagliata della matematizzazione dei fenomeni biologici e sociali, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, s.8, **7**-B(2), 275-304.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, **71**(3), 235-261.

Katz, V.J., Jankvist, U.T., Fried, M.N., and Rowlands, S. (2014). Special Issue on History and Philosophy of Mathematics in Mathematics Education, *Science & Education*, **23**(1), 1-6.

Koyré, A. (1968). *Metaphysics and Measurement: Essays in the Scientific Revolution*. London, UK: Chapman & Hall.

Mazur, B. (2013, February 17). *History of Mathematics as a tool* [Paper presentation]. History of Mathematics seminar of Harvard University, Cambridge, MA, USA.

Marton, F., Runesson, U., and Tsui, A.B.M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A.B.M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-40). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Nemirovsky, R., and Ferrara F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition, *Educational Studies in Mathematics*, **70**(2), 159-174.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **17**(1), 26-33.

Radford, L. (2014). Reflections on History of Mathematics. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp. 89-109). New York, USA: Springer.

Taranto, E., Arzarello, F., and Robutti, O. (2017). MOOC: repository di strategie e metodologie didattiche in Matematica, *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, **9**(14), 257-279.

Taranto, E., Robutti, O. and Arzarello, F. (2020). MOOCs-UniTo: Theoretical Framework and Research Lines on Teachers and Researchers, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, numero speciale n. 8, 31-42.

Volterra, V. (1902). Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali. Discorso inaugurale, *Annuario della R. Università degli Studi di Roma*, 5-28.

Wigner, E.P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13**(1), 1-14.

LA CASA DI CARTE: PROBABILITÀ PEER TO PEER DAL SECONDO AL PRIMO GRADO

Massimo Borsero[1 2], Raffaele Casi[1 3], Chiara Pizzarelli[1 4], Saverio Tassoni
[1] Università di Torino; [2] I.C. Parri-Vian, Torino; [3] I.C. Andezeno; [4] I.C. Alberti-Salgari
saveriotassoni@gmail.com

Abstract
Si propone un'attività di *peer education* sperimentata con gruppi di studenti di licei piemontesi del secondo biennio, nata e sviluppata all'interno del Piano Lauree Scientifiche. Il lavoro nasce dalla constatazione di quanto la probabilità sia talvolta sacrificata all'interno della comune pratica didattica nei licei e dalla volontà di coinvolgere e far interagire tra loro i diversi gradi della Scuola Secondaria con un progetto di *peer to peer* verticale. Dopo una prima serie di incontri con attività di introduzione alla probabilità rivolte a studenti del secondo grado, questi ultimi, lavorando in gruppi, hanno progettato personali laboratori destinati alle scuole di primo grado, rielaborando quanto appreso nei primi incontri. Successivamente, questi laboratori sono stati concretamente realizzati dagli stessi studenti, grazie alla disponibilità di scuole di primo grado che hanno accettato di prestarsi a come pubblico fruitore. L'ultima fase del progetto è stata costituita da un momento collettivo di commento e revisione del lavoro svolto, analizzando tutti i vari aspetti che hanno caratterizzato la realizzazione dei laboratori.

Parole-chiave
Probabilità; Peer education; Piano Lauree Scientifiche; PCTO; DDI.

METODOLOGIA DIDATTICA

In questa comunicazione intendiamo relazionare sulle attività di PCTO (Percorsi per le Competenze Trasversali di Orientamento), svolte dagli autori nell'ambito del progetto Piano Lauree Scientifiche degli a.s. 2019-20, 2020-21, coordinato dalla professoressa Ornella Robutti. L'obiettivo del percorso è duplice: *in primis* si intende offrire a studenti di Scuola Secondaria di secondo grado una formazione di base sui temi della probabilità a partire da problemi classici in situazioni laboratoriali; in seconda istanza si dà loro l'opportunità di fare esperienza di divulgazione matematica nei confronti di ragazzi e ragazze di Scuole Secondarie di primo grado.
Nei primi incontri, dedicati ad attività di introduzione alla probabilità, gli studenti hanno affrontato alcuni problemi classici, che - con una discussione fra pari e con i docenti formatori - sono stati gradualmente approfonditi e ampliati con il *metodo della ricerca variata*. Questa metodologia ha permesso agli studenti di apprezzare il tipico approccio alla ricerca del matematico, caratterizzato dal porsi domande, formulare congetture, autoanalizzare i propri ragionamenti; un metodo che si allontana dunque dalla risoluzione di problemi per procedure predefinite.
A partire dalla soluzione di un singolo problema si è cercato di ampliare la discussione proponendo varianti numeriche che hanno favorito l'astrazione e la classificazione delle tecniche e delle procedure. Gli studenti coinvolti, da semplici risolutori, sono diventati creatori di nuovi problemi, assumendo lo spirito del ricercatore scientifico, valorizzando il processo di scoperta.

Il cuore dell'attività, tuttavia, è stato il lavoro *peer to peer* tra gli studenti dei diversi gradi scolastici.
La *peer education* è una metodologia didattica che significa letteralmente *educazione tra pari*. Si basa sul processo di trasmissione di esperienze e contenuti tra i partecipanti di un gruppo che, per certi parametri, può essere considerato di pari livello. Il tipo di comunicazione che si può instaurare tra pari spesso può rivelarsi più efficace rispetto a quella tra ragazzi e adulti. La metodologia della *peer*

education implica - come per altre metodologie, ad esempio la *flipped classroom* - un cambio di prospettiva rispetto ad un classico modello di apprendimento: gli studenti sono protagonisti diretti dell'azione educativa, ribaltando i ruoli ordinari.
Il gruppo dei pari costituisce un laboratorio sociale all'interno del quale sviluppare nuove consapevolezze, testare attività sconosciute, progettare e condividere insieme. In questo modo si crea l'opportunità di migliorare le proprie capacità sociali e relazionali, le abilità comunicative e la propria autostima favorendo l'integrazione scolastica.
Altrettanto importante è la fase di *peer tutoring* verso gli studenti del grado precedente. Entrambe le categorie di partecipanti traggono benefici dalla metodologia: lo studente-tutor sarà valorizzato e responsabilizzato da questo ruolo e, conseguentemente, svilupperà un comportamento sempre più propositivo nei confronti della scuola e del percorso didattico; inoltre si sottolinea come generalmente chi si preoccupa di veicolare contenuti e competenze generalmente assimila ancor di più e in maniera più efficace rispetto a chi la riceve. Dall'altra parte lo studente ricevente trarrà vantaggio dal lavorare in un ambiente protetto con una persona considerata più vicina a lui e alle sue necessità.

IL PERCORSO DIDATTICO

Il progetto *La casa di carte: probabilità peer to peer dal secondo al primo grado* è stato pensato in quattro fasi di lavoro. Il titolo vuole essere un semplice gioco di parole tra la serie televisiva "*La casa di carta*" e le comuni "carte" da gioco intese come paradigma del calcolo delle probabilità. Il percorso didattico così denominato, il cui dettaglio è consultabile in Tabella 1, è stato composto in totale da 6 incontri della durata di due ore e mezza l'uno, più un'ora per ciascuna delle 20 conferenze-laboratori tenute dagli studenti di secondo grado, oltre al tempo necessario per lo svolgimento dei compiti assegnati e per la preparazione a gruppi delle conferenze.

Tabella 1. Prospetto con le 4 fasi del percorso didattico "La Casa di carte".

I Fase - Introduzione	1. Il problema di Galileo
	2. Il paradosso delle tre carte 3. Il paradosso delle maschere 4. Monty Hall
	5. Il problema del Professore
II Fase - Progettazione	Predisposizione del lavoro in gruppi
	"Prova generale" della conferenza, in piccoli gruppi alla presenza delle insegnanti delle classi coinvolte
III Fase - Realizzazione	Conferenze nelle scuole
IV Fase - Analisi del lavoro svolto	Rielaborazione individuale e discussione collettiva

I Fase - Introduzione.

Questa prima fase ha avuto come protagonisti gli autori, nel ruolo di docenti, ed una comunità di 95 studenti provenienti da cinque classi III e IV di licei scientifici tradizionale e scienze applicate della provincia di Torino. Si sono tenuti tre incontri introduttivi sul calcolo delle probabilità. Gli incontri hanno avuto una struttura simile: si sono sottoposti agli studenti dei problemi da risolvere, si è lasciato il tempo per ragionare in autonomia, si sono discusse collettivamente le soluzioni. Una volta consolidata la comprensione dell'attività e della sua soluzione si sono riproposti agli studenti gli stessi problemi con alcune modifiche delle condizioni iniziali. Con il metodo della ricerca variata quindi, quella che era la ricerca di una soluzione di *un* problema è diventata la ricerca di risoluzione di *una classe* di problemi.

Al termine di ciascuna lezione si è assegnato un problema da svolgere a casa. I lavori degli studenti sono stati raccolti tramite la piattaforma Moodle e la discussione e la correzione di questi è servita come punto di partenza nell'incontro successivo.
In particolare, i problemi sottoposti nelle varie lezioni sono stati i seguenti:

1- Il problema di Galileo:

Si propone agli studenti il problema tramite la domanda stimolo:

> *Lanciando tre dadi a sei facce, l'esperienza insegna che la somma 10 esce più spesso della somma 9. Com'è possibile?*

Il ragionamento sul problema dovrebbe essere condotto in autonomia tra i gruppi, ma in caso di difficoltà abbiamo dato agli studenti la possibilità di valersi dell'aiuto del testo *Sopra le scoperte de i dadi* (1620)[5], che Galileo Galilei scrisse in risposta a giocatori d'azzardo fiorentini che gli posero il problema. Una volta risolto il problema e compresa l'importanza di considerare triplette di numeri per formare le somme 9 e 10 che tengano conto anche della disposizione dei numeri, la discussione è proseguita sul tema dei metodi possibili per affrontare simili problemi (grafico ad albero, tabelle a doppia entrata, …).
Tale fase "classica" del lavoro è propedeutica a quella successiva, in cui si applica il metodo della ricerca variata e si chiede agli studenti di considerare come cambiano le probabilità: *se si aumentasse il numero dei dadi*, e *se si aumentasse il numero di facce dei dadi*.
È stato interessante discutere sulla probabilità teorica e sulla probabilità frequentista. Alcuni studenti sono ricorsi all'uso di un foglio di calcolo elettronico per simulare un numero elevato di lanci e si sono osservate le occorrenze confrontandole con la probabilità teorica.
In linea con l'approccio teso a variare il problema ricercando configurazioni differenti, si è scelto di far lavorare gli studenti a casa (sempre a gruppi), ponendo loro il seguente quesito:

> *Si lanciano tre dadi, si esclude quello con il valore minore (nel caso in cui il valore minore sia presente su due dadi se ne esclude solo uno) e si sommano i due rimanenti. Come cambiano le probabilità di uscita delle diverse somme? E se invece si escludesse quello con il valore maggiore come sarebbero distribuite?*

2- Il paradosso delle tre carte:

Il problema stimolo che ha introdotto il secondo incontro è stato così presentato:

> *Una carta può avere sulle sue due facce due illustrazioni distinte: una con la maschera di Dalì (A) o con il logo del PLS (B). Le carte del problema sono tre e sono con lo schema A/A, A/B e B/B. Scegliendone una a caso si osserva su uno dei due lati la faccia di Dalì. Quante probabilità ci sono che anche l'altra faccia della stessa carta abbia lo stesso disegno?*

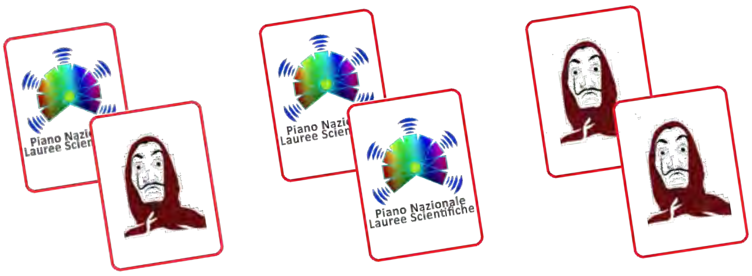


Figura 1. Carte utili per il problema delle 3 carte.

Coerentemente con la metodologia adottata nell'incontro precedente, la riflessione che è seguita alla risoluzione del problema (individuale) verteva sul tema della variazione dello spazio campionario a

[5] G. Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi [1620]*, in *Le opere di Galileo Galilei*, vol. VIII, Firenze, Barbera, 1933.

seguito della conoscenza di uno dei lati delle carte. Il termine “paradosso”, pur essendo improprio rigorosamente parlando, ha permesso di sottolineare quanto fosse controintuitiva la soluzione corretta (due terzi) rispetto all’ipotesi di risposta apparentemente giusta (un mezzo).

3- Il paradosso delle maschere:

Nello stesso incontro del paradosso delle carte, si presenta agli studenti il seguente problema da affrontare a gruppi:

> *La polizia ha arrestato due membri della banda. Almeno uno dei due ha la maschera. Qual è la probabilità che entrambi abbiano la maschera? (Avere o non avere la maschera sono eventi equiprobabili).*

Anche in questo caso si è ragionato sullo spazio degli eventi, e si è approfondito a livello teorico il tema della probabilità condizionata, accennato nella discussione al problema precedente. In seguito, sono state proposte e risolte alcune variazioni: *quale sarebbe la probabilità se i membri fossero tre e almeno uno avesse la maschera?* E *se i membri fossero tre e almeno due di loro avessero la maschera?* Nuovamente, il termine “paradosso” è usato in maniera impropria, per sottolineare ancora una volta quanto possano emergere aspetti contro-intuitivo nello studio del calcolo delle probabilità.

4- Monty Hall:

Si è scelto di proporre il problema del Monty Hall, che - seppur piuttosto noto - si presta a interessanti riflessioni sia sul tema della probabilità condizionata, sia su quello della ricerca variata. Il contesto narrativo è stato riadattato per rientrare nel tema de “La Casa di carta”: al posto di porte, capre e macchine si è quindi parlato di scrigni pieni e vuoti. Evidentemente ciò non ha alterato il contenuto matematico.

> *Per smaltire le banconote tracciate decidiamo di giocare all’interno di un casinò. Il gioco che troviamo è molto semplice: bisogna scegliere uno scrigno su tre disponibili sapendo che dentro soltanto uno di essi si nasconde il tesoro. Successivamente alla nostra scelta il direttore del casinò, che conosce preventivamente il contenuto dei tre scrigni, ne apre uno fra i due che non sono stato scelti e ci mostra che è vuoto. Alla luce di questo, ci chiede se vogliamo cambiare la nostra scelta iniziale.*
> *È conveniente la scelta di cambiare oppure è ininfluente?*

Monty Hall si è rivelata essere l’attività che, a posteriori, ha riscontrato il più alto indice di gradimento tra i ragazzi, visti i loro feedback. Oltre all’importanza dell’impostazione del grafico ad albero come strumento per affrontare questo genere di quesiti di probabilità, il problema si è rivelato adatto all’approccio variazionale, su cui gli studenti erano ormai abituati a ragionare. Si è dunque chiesto loro di immaginare come varierebbe il problema se:

- *Invece di scegliere un solo scrigno il direttore ci concede di sceglierne due e subito dopo indica una delle nostre scelte mostrandoci che è vuota. Conviene cambiare o stare?*
- *Gli scrigni totali fossero n, ne scegliessimo uno e il direttore ne aprisse $(n-2)$ tra i restanti mostrandoci che sono vuoti. Conviene cambiare o stare?*
- *Gli scrigni sono 4: due hanno il tesoro e due sono vuoti. Il direttore ci fa scegliere uno scrigno. Poi ci apre uno scrigno vuoto e ci propone di cambiare la nostra scelta. Conviene cambiare o stare? Come cambia lo spazio campionario?*

Come esercizio da svolgere a casa si è chiesto di inventare una nuova variazione per il problema Monty Hall e di analizzare come variassero le probabilità di vittoria del gioco. Per affrontare questo genere di problemi si è rivelato di fondamentale importanza l’utilizzo del diagramma ad albero, con cui gli studenti a questo punto del percorso avevano più dimestichezza.

5- Il gioco del professore:

Un ultimo problema proposto agli studenti in questa fase introduttiva del percorso è il seguente:

> *Ci sono due urne vuote, due palline nere e due bianche. Bisogna inserire tutte le palline nelle urne nel modo che si ritiene opportuno senza particolari vincoli. Una volta inserite le biglie, si estrae una singola pallina da una delle due urne. Se nell'urna non ci sono palline allora si procede estraendo dall'altra urna. Se la pallina estratta è bianca si ottiene la promozione, se è nera si viene bocciati. Alla luce di questo, come conviene distribuire inizialmente le 4 palline nelle due urne per ottimizzare l'estrazione di una biglia bianca? Qual è la probabilità di essere promosso?*

Anche in questo caso abbiamo chiesto agli studenti di riflettere su alcune variazioni:

- *Se il numero di palline aumentasse (mantenendo la proporzione tra bianche e nere), quale sarebbe la disposizione più vantaggiosa? Quale sarebbe in questo caso la probabilità di essere promosso?*
- *Se aumentasse sia il numero di urne, sia il numero di palline (mantenendo la proporzione tra bianche e nere)?*

Si tratta di un problema che, a differenza del Monty Hall, non era noto agli studenti e che si è prestato particolarmente bene ad essere trattato con il metodo della ricerca variata.

II Fase – Progettazione delle conferenze.
In questa fase, della durata di due incontri, gli studenti sono stati divisi in gruppi di lavoro da 4 o 5 componenti e hanno lavorato in stanze interattive della piattaforma Webex. La proposta in questi incontri è stata di progettare un'attività laboratoriale della durata di un'ora sul calcolo delle probabilità, da destinare ad un pubblico di studenti delle Scuole Secondarie di primo grado.
L'obiettivo di questa fase è stato duplice: consolidare i concetti matematici incontrati e affrontati nei precedenti incontri, e, successivamente, rielaborarli in modi diversi, tenendo presente i possibili livelli di preparazione di chi si sarebbero trovati di fronte. Gli alunni delle scuole fruitrici non sono stati preparati in nessun modo particolare, quindi, gli studenti liceali hanno dovuto tenere debito conto di questo. Nei giorni che sono trascorsi tra il primo e il secondo incontro di questa fase i gruppi di studenti hanno lavorato autonomamente. Nell'incontro seguente, gli studenti hanno testato il loro laboratorio in una sorta di "prova generale": ogni gruppo ha esposto la propria conferenza agli altri studenti, ai loro docenti di matematica e ai docenti formatori del progetto, chiamati a fare da pubblico, sempre attraverso le stanze interattive. In questo modo sia gli altri partecipanti sia i docenti hanno potuto fornire rimandi e spunti di miglioramento, evidenziando eventuali criticità delle presentazioni, sottolineando passaggi poco chiari e imprecisioni matematiche.

III Fase – Realizzazione delle conferenze.
I 20 gruppi di 5 o 6 studenti hanno realizzato altrettante conferenze, che hanno avuto luogo grazie alla disponibilità di varie Scuole Secondarie di primo grado. Durante gli incontri, dopo una breve introduzione iniziale da parte dei docenti formatori, gli studenti liceali hanno gestito autonomamente la presentazione, le proposte di attività, l'interazione con la classe e i tempi.
Considerata la situazione pandemica in cui è stato realizzato il progetto, per le attività di *peer tutoring* fra il secondo e il primo grado si è resa necessaria la didattica in modalità *blended*. In particolare, si sono verificate situazioni molto diverse fra loro: alle volte gli studenti fruitori erano fisicamente nella stessa classe con una videocamera che li riprendeva tutti in un'unica schermata, altre volte erano già in DDI ciascuno dalla propria abitazione. In alcuni casi sono stati gli studenti-tutor ad essere in singole stanze piuttosto che in un'unica classe. Sono capitate altresì situazioni ibride con parte del gruppo in una stanza e singoli studenti isolati a causa della pandemia. Questo ha portato ad interessanti considerazioni. Quando gli studenti-tutor sono stati in un'unica stanza sono riusciti più efficacemente a comunicare e a collaborare, adeguando la lunghezza del laboratorio alle diverse necessità. Evidentemente, stando a distanza, hanno dovuto comunicare tra loro attraverso altri canali, rendendo il laboratorio meno fluido. La classe ricevente era sempre accompagnata dal rispettivo docente, che, in base alla situazione ha sempre cercato di collaborare per la riuscita del laboratorio.
Come richiesto, gli studenti hanno progettato ed erogato attività laboratoriali incentrate sul calcolo delle probabilità, adattando i concetti più semplici incontrati nella fase introduttiva del progetto. Gli studenti

hanno curato la parte matematica cercando di adattare la parte laboratoriale in modo che fosse sostenibile a distanza. Alcuni sono ricorsi a semplici domande da porre agli studenti lasciando all'immaginazione la situazione descritta, altri hanno mostrato in video l'eventuale estrazione da un'urna o lancio di un dado eseguita da loro alternando le slide alla videocamera. Altri gruppi di lavoro hanno anche recuperato e adattato dei piccoli *applet* digitali, per simulare l'estrazione di carte o il girare di una ruota della fortuna. Questo ha favorito la partecipazione attraverso piccoli giochi interattivi. Gli studenti-tutor hanno anche prestato attenzione a curare gli aspetti narrativi del laboratorio. Tenendo ben presente il loro pubblico hanno realizzato lavori in contesti familiari a ragazzi delle Scuole Secondarie di primo grado: non è un caso che un espediente narrativo ben scelto abbia fatto più presa sugli studenti fruitori. A titolo di esempio citiamo due lavori fatti dai ragazzi incentrati sul mondo di Harry Potter e del videogioco Among us.

IV Fase – Analisi del lavoro svolto.
In questa ultima fase, della durata di un singolo incontro, abbiamo chiesto ai ragazzi un feedback delle loro lezioni, discutendo anche i commenti raccolti precedentemente dagli insegnanti che hanno ospitato l'attività nelle loro classi. È stato un momento collettivo di riflessione su quanto sperimentato, in cui sono emersi aspetti positivi e costruttivi, ma anche criticità legate sia ai concetti matematici da trasporre, sia alle difficoltà didattiche, sia infine alle condizioni di lavoro a distanza. Naturalmente, sono emerse le classiche problematiche che la didattica in modalità *blended* comporta, che ha portato a riflettere su quanta differenza facciano, ai fini della partecipazione e del coinvolgimento, dettagli quali: l'orario in cui si svolge l'attività, la disponibilità o meno di un microfono, la qualità del video, e persino la semplice scelta dell'inquadratura della classe.
Vista la pluralità delle condizioni, dopo un primo momento collettivo, ad ogni singolo studente è stato richiesto di compilare personalmente un questionario approfondito sull'esperienza svolta. Dall'analisi di tali feedback è emerso un certo interesse per tutte le fasi del progetto (cfr. Figura 2).
Il problema di Monty Hall ha destato particolare interesse negli studenti, probabilmente per la sua notorietà, per il contesto narrativo e per la soluzione controintuitiva. Inoltre, sembra che gli studenti liceali siano particolarmente appassionati di *'21'*, un film nel quale i protagonisti discutono della risoluzione del problema di Monty Hall in una scena divenuta famosa. Oggetto di diverse riflessioni teoriche durante la fase introduttiva, il problema è stato tra i più utilizzati nelle attività progettate dagli studenti del secondo grado per il primo grado.
Un aspetto a cui abbiamo voluto dare importanza nel feedback è stato quello di provare a quantificare la preparazione degli studenti del primo grado da parte di quelli del secondo, con risultati interessanti (cfr. Figura 3).

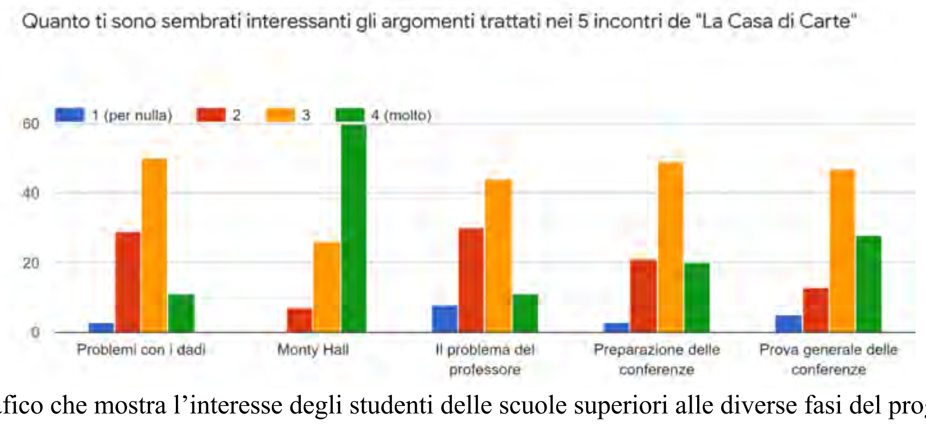


Figura 2. Grafico che mostra l'interesse degli studenti delle scuole superiori alle diverse fasi del progetto, in una scala da 1 (per nulla) a 4 (molto). Popolazione: 93 studenti.

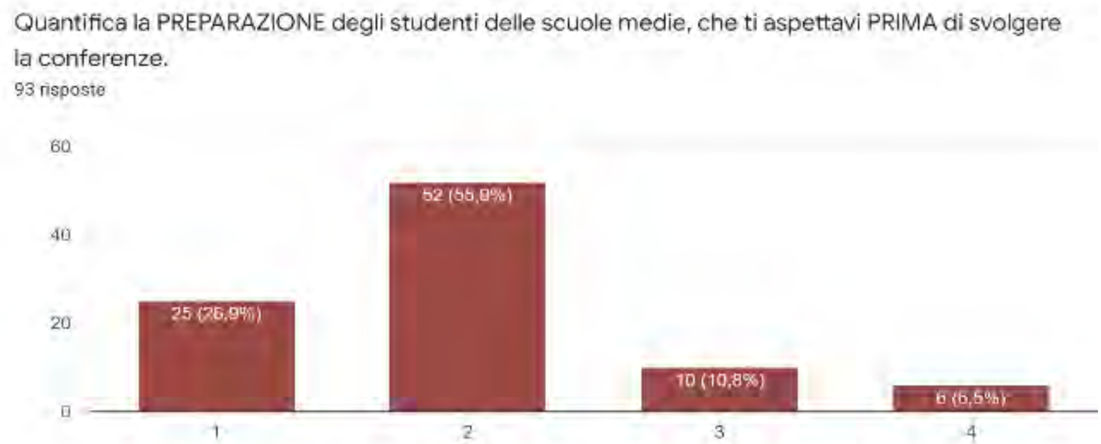


Figura 3. Grafico che mostra la preparazione stimata degli studenti delle scuole di I grado, in una scala da 1 (per nulla) a 4 (molto).

Si può osservare come più della metà degli studenti ritenesse il loro pubblico non particolarmente preparato, o per nulla preparato, sui temi di probabilità. In seguito allo svolgimento del laboratorio gli studenti si sono completamente ricreduti ed hanno constatato quanto la preparazione soprattutto di alcuni ragazzi e ragazze delle scuole di primo grado fosse molto sopra le loro aspettative (cfr. Figura 4).

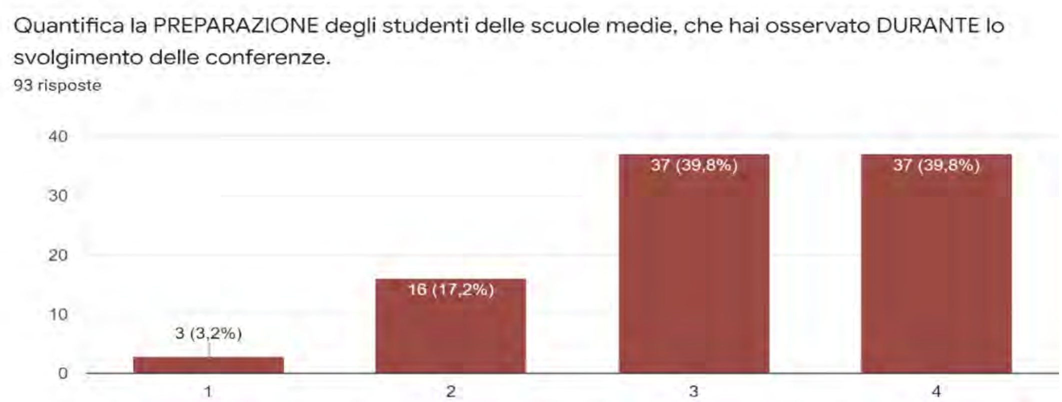


Figura 4. Grafico che mostra la preparazione degli studenti delle scuole di I grado osservata da parte degli studenti delle scuole di II grado, in una scala da 1 (per nulla) a 4 (molto).

CONCLUSIONI

Inizialmente pensate per essere realizzate in presenza, tutte le fasi del lavoro si sono dovuto svolgere interamente a distanza a causa delle restrizioni imposte dalla pandemia. Questa condizione di necessità ha portato con sé i ben noti svantaggi di una didattica digitale, dalle difficoltà logistiche a quelle di partecipazione e di coinvolgimento. Fondamentale è stato l'ausilio della piattaforma Webex con l'utilizzo delle stanze interattive, attraverso le quali è stato possibile gestire con buona efficacia il gran numero degli studenti partecipanti durante le prime fasi del lavoro. È interessante osservare come, dall'esperienza forzata degli incontri a distanza siano emerse opportunità inaspettate: non dovendo essere in presenza, il progetto ha potuto avere un respiro più ampio di quello cittadino o regionale. Sfruttando le potenzialità della didattica digitale, infatti, abbiamo potuto raggiungere scuole secondarie di primo grado sparse in tutta Italia rendendo il lavoro molto più interessante, non solo dal punto di vista matematico.

Alcuni docenti delle scuole secondarie coinvolte hanno voluto condividere con noi delle considerazioni sul lavoro svolto. Interessante è stato il caso di una classe che non ha partecipato con tutti i suoi componenti. Successivamente all'attività, allora, c'è stato un ulteriore momento di tutoring con gli studenti liceali partecipanti che hanno raccontato e spiegato l'attività ai loro compagni che non avevano partecipato. In questo modo si è avuto un *peer to peer* perfettamente orizzontale. Dagli altri feedback dei docenti è emerso che gli studenti hanno apprezzato un linguaggio più vicino alla loro età e l'interattività nonostante la distanza. Alcuni genitori hanno riferito che i temi di probabilità sono stati anche oggetto di discussioni a casa. Un singolo docente delle scuole secondarie di primo grado ha invece ritenuto l'attività troppo difficile per ragazzi totalmente a digiuno di probabilità. Anche solo capire che essa può essere definita come un rapporto o una percentuale non è stato semplice a suo avviso. A posteriori avrebbe voluto preparare di più i propri ragazzi per valorizzare al meglio l'attività. Altri docenti durante lo svolgimento del progetto quasi settimanalmente hanno chiesto ai ragazzi di raccontare loro le attività che erano state proposte e gli argomenti trattati. In alcune occasioni, quando la classe era in presenza, il racconto di quanto fatto ha incuriosito i compagni di classe che non partecipavano al progetto ed ha innescato vivaci discussioni su alcuni aspetti curiosi e "controintuitivi" dal calcolo delle probabilità. Altre considerazioni sono riguardate il fatto di ritenere positiva la scelta di proporre il progetto a studenti di classe terza di scuole di primo grado, perché ancora di fatto digiuni sull'argomento probabilità e quindi più aperti al processo di scoperta.
Un'ultima considerazione va fatta sulla gestione delle emozioni. La maggior parte degli studenti è stata soddisfatta del proprio laboratorio ed anche noi docenti, presenti durante la loro proposta didattica, possiamo confermare la bontà del successo della maggior parte degli incontri. Nei commenti a caldo dopo la loro lezione, gli studenti-tutor hanno mostrato una palpabile soddisfazione. D'altro canto, ci sono stati alcuni gruppi che non sono riusciti ad essere particolarmente efficaci in termini comunicativi e di coinvolgimento del pubblico. Questo ha portato ad una spirale di scoramento che ha determinato la scarsa riuscita dell'esperienza. In questo caso si è dovuto fronteggiare emotivamente un insuccesso, comunque uno step a suo modo fondamentale nel percorso formativo dello studente.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. (2016a). Modellizzare il cambiamento: le radici cognitive e culturali della matematica e della scienza. In Bonino, Marocchi, Rinaudo e Serio (Eds.), *Atti del VIII Convegno Di.Fi.Ma 2017*. pp. 11-26.

Arzarello, F. (2016b). Apprendere la matematica: gli studenti come ricercatori. Relazione presentata alla Terza scuola estiva per insegnanti UMI-CIIM AIRDM, Bardonecchia, 26 agosto 2016 (http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2016/09/ARZARELLO.pdf).

Baldi P. (2007). *Calcolo delle Probabilità e Statistica (Seconda Edizione)*. Milano: McGraw-Hill.

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside school. *Teacher College Record* **110** (3), 608-645.

Galilei, G. (1933). Sopra le scoperte de i dadi [1620], in *Le opere di Galileo Galilei*, vol. VIII, Firenze: Barbera.

Goodlad, S., & Hirst, B. (1989). *Peer Tutoring. A Guide to Learning by Teaching*. New York: Nichols Publishing.

INTRODUZIONE AL CALCOLO COMBINATORIO: UN'ESPERIENZA DI LESSON STUDY IN PRESENZA E A DISTANZA

V. Andriano – C. Dané – A. Doveri – N. Nurisso – F. Piazza
Liceo Scientifico Galileo Ferraris - Torino
valeria.andriano@yahoo,com , flavia_piazza@yahoo.it

Abstract
Si presenta una lezione di introduzione al calcolo combinatorio svolta in classi quarte e seconde del liceo scientifico. La lezione è stata progettata attraverso un ciclo di Lesson Study, che è una modalità di formazione docenti diffusa in Cina e in oriente, nella quale un gruppo di docenti della stessa scuola progetta dettagliatamente una lezione di un'ora che viene poi proposta in classe, osservata dagli altri insegnanti e immediatamente dopo discussa all'interno del gruppo di docenti. L'attività è stata svolta in una scuola in un periodo in cui, a causa della pandemia, metà del gruppo classe seguiva in presenza e metà a distanza, per cui l'osservazione della lezione è stata fatta contemporaneamente nelle due modalità. Nella presentazione si analizzano brevemente le scelte didattiche per un primo approccio al calcolo combinatorio soffermandosi poi sulle differenze che sono emerse nelle dinamiche tra studenti, e tra studenti e docente a seconda della modalità di partecipazione, da scuola o da casa.

Parole-chiave
Lesson Study - Sviluppo Professionale Docenti - Calcolo Combinatorio

INTRODUZIONE

L'idea iniziale del progetto nasce dall'esperienza di un'insegnante del gruppo che ha vissuto per un periodo in Cina e ha avuto la possibilità di visitare delle scuole e osservare delle lezioni e le attività di discussione tra docenti, normalmente conosciuta come Lesson Study. Tornando in Italia si è proposta un'attività analoga tra colleghi. Il primo anno ci si è limitati a un solo ciclo a causa della pandemia. In questo articolo viene descritta l'attività che si è svolta nel secondo anno, in cui gli studenti, per le restrizioni imposte a causa della pandemia, seguivano in parte in presenza e in parte a distanza. Per questa ragione è sembrata un'occasione particolare per osservare le differenze nell'interazione a distanza e in presenza.

IL LESSON STUDY

Il Lesson Study è una modalità di formazione in servizio tradizionalmente molto diffusa in alcuni paesi orientali, quali Giappone, Cina, Singapore. Attualmente tale modalità sta suscitando grande interesse nel mondo della ricerca in didattica e si sta diffondendo in altri paesi come Stati Uniti, Inghilterra, Germania, Norvegia, Portogallo. In Italia sono state fatte esperienze essenzialmente nella scuola primaria e secondaria di primo grado, mentre sono poche le scuole secondarie coinvolte. Per un sommario analitico degli articoli di ricerca apparsi ultimamente sul Lesson Study si veda [Huang-Shimizu, 2019], che mostra anche che il Lesson Study assume caratteristiche diverse a seconda dei paesi in cui viene introdotto. L'idea generale è la seguente: un gruppo di docenti progetta una lezione. Uno dei docenti tiene la lezione nella sua classe mentre gli altri docenti osservano. Infine i docenti si riuniscono e discutono quali miglioramenti si possono apportare alla lezione. Questo ciclo può essere ripetuto diverse volte. Quindi si distinguono 3 fasi: progettazione, implementazione/osservazione, discussione. La prima fase di progettazione viene fatta dal gruppo che scrive un Lesson Plan, ossia un documento sul quale si riportano le varie fasi della lezione, i tempi, i lavori proposti agli studenti e le modalità (in gruppo, individuale….), gli esercizi, ecc. La fase di implementazione/osservazione prevede che un docente del gruppo svolga la lezione nella sua classe mentre gli altri docenti osservano. E' importante che i docenti si accordino preventivamente sull'oggetto dell'osservazione e talvolta può essere utile una scheda di osservazione. Nella discussione successiva, i docenti confrontano le osservazioni effettuate durante la lezione e propongono modifiche e miglioramenti da apportare. Normalmente la discussione avviene immediatamente dopo la lezione. Si prevede che il ciclo venga ripetuto almeno una volta, cioè che un altro docente ripeta la lezione modificata nella sua classe, con l'osservazione degli altri insegnanti e ci si ritrovi per discutere il risultato delle modifiche.

IL CONTESTO

Nell'a.s. 2019/20 abbiamo sperimentato una prima attività di Lesson Study insieme ad altri colleghi del Liceo scientifico Galileo Ferraris, progettando una lezione sulle disequazioni in due variabili, ma dopo lo svolgimento di un'attività in una classe terza, la sua osservazione e la discussione, abbiamo dovuto sospendere il progetto a causa della pandemia. Con questo primo assaggio abbiamo colto le potenzialità del metodo di lavoro che permette un confronto tra colleghi su argomenti concreti e abbiamo deciso di proseguire l'anno dopo ampliandolo e ripetendo la stessa lezione in più classi.
In una prima riunione abbiamo scelto l'argomento da trattare e la scelta è caduta sull'introduzione al calcolo combinatorio perché:

- è un tema che può essere affrontato in ogni anno scolastico, nel nostro caso in seconda e in quarta;
- non richiede prerequisiti e quindi può essere svolto nello stesso modo in classi che hanno storie diverse;
- necessita una particolare attenzione al linguaggio e abilità di problem solving che sono interessanti da osservare e su cui è utile per i docenti la riflessione e la discussione;
- è un argomento che non tutti i docenti amano e questo può rendere più stimolante e proficuo il confronto.

Siamo riusciti a tenere la "stessa" lezione in quattro classi quarte e in due seconde, ma anche questa volta il progetto ha dovuto fare i conti con il coronavirus… Nella nostra scuola non abbiamo quasi mai avuto la possibilità di avere le classi completamente in presenza; in tutte le lezioni un gruppo di studenti ha partecipato stando a scuola, mentre un altro gruppo seguiva contemporaneamente a distanza, utilizzando la piattaforma Zoom. Abbiamo così deciso che durante la sperimentazione alcuni dei docenti-osservatori rimanevano in classe, mentre altri si collegavano a distanza proprio come alcuni degli allievi, riuscendo così a vivere le loro stesse sensazioni e potendo analizzare le loro modalità di lavoro.
Le discussioni tra gli insegnanti dopo ogni lezione hanno così permesso di analizzare non solo come è andata l'attività didattica in relazione alle aspettative del Lesson Plan, ma anche le diverse interazioni e la partecipazione durante questa modalità di didattica ibrida, cercando spunti su come migliorare l'efficacia dell'insegnamento.

IL PROGETTO DELLA LEZIONE

La lezione che abbiamo progettato è la prima lezione di calcolo combinatorio e ha la durata di 60 minuti.
La fase di progettazione è avvenuta con riunioni a distanza su Zoom.
Dal punto di vista metodologico ci siamo trovati naturalmente d'accordo a fare una lezione dialogata in modo da stimolare la partecipazione attiva degli studenti, alternando attività individuali a lavori in gruppo. Per quanto riguarda le scelte didattiche, abbiamo trovato utile scrivere un Lesson Plan che ci permettesse di mettere a fuoco i perché delle scelte e le reazioni che ci aspettavamo dagli studenti. Questo strumento risulta importante anche nella fase di osservazione e discussione successiva, perché ricorda le motivazioni delle scelte effettuate in fase di progettazione.
Di seguito alleghiamo il Lesson Plan della prima lezione, che è stato poi modificato dopo la discussione. Nello sviluppo della lezione si trovano i tempi, le attività proposte, e le motivazioni didattiche delle scelte effettuate.

LESSON PLAN CALCOLO COMBINATORIO

Tipo di lezione: Nuovo contenuto. Lezione introduttiva.
Argomento: Introduzione al calcolo combinatorio: permutazioni, disposizioni semplici, disposizioni con ripetizione.
Classe: IV^B Liceo Scientifico Galileo Ferraris, Torino
Data: 24 febbraio 2021
Analisi del curriculum: l'argomento fa parte delle IINN per il secondo biennio. Il dipartimento della nostra scuola lo inserisce tra gli argomenti da svolgere in quarta
Analisi della classe: la classe ha avuto un percorso scolastico abbastanza lineare, con parecchi cambi di docenti, più accidentato durante la pandemia; gli studenti sono in generale curiosi e partecipativi, alcuni hanno buone potenzialità, altri fanno più fatica. Nel periodo in cui viene svolta la lezione gli studenti frequentano metà in presenza e metà a distanza.
Obiettivi: a) Capire i concetti di permutazione e il fattoriale;
b) Procedere in modo induttivo e saper costruire rappresentazioni adeguate
c) Stimolare il confronto autonomo tra problemi diversi
d) Mettere in relazione la conoscenza matematica e la vita reale
Difficoltà: trovare una rappresentazione significativa del problema, distinguere i casi in cui conta l'ordine e in cui è ammessa la ripetizione, scindere il problema in sotto-problemi significativi.

Processo didattico	Commenti
1) **Introduzione** (10')	
a) Problema introduttivo: "quanti sono i possibili anagrammi di ABC" (oppure: in quanti modi diversi posso disporre le lettere ABC). Lavoro individuale (2,3 minuti). Risposte anche senza commento.	*Serve a introdurre l'argomento in modo semplice: tutti sono in grado di lavorare*
b) Domanda del docente: quanti sono gli anagrammi di ABCD? Di nuovo lavoro individuale. Questa volta si commentano le risposte. Discussione.	*Serve a far nascere l'esigenza di generalizzazione e schematizzazione, metodo induttivo, upward*
c) Diagramma a grafo (completo per il caso ABC) d) Definizione di permutazione di n elementi, Pn=n(n-1)(n-2)…1=n! e introduzione del simbolo di fattoriale. 0!=1 e) Problema di controllo: anagrammi della parola CUORE (chiedere a uno studente)	*Il diagramma va fatto in orizzontale per creare corrispondenza con le caselle vuote*
2) **Variare il problema nel linguaggio** (5'): discussione a classe intera a) 5 amici vanno al cinema e ci sono 5 posti liberi. In quanti modi diversi possono sedersi? b) Ho sei libri. In quanti modi diversi si possono disporre sullo scaffale di una libreria? c) Ad una gara di nuoto partecipano 8 concorrenti. Quanti sono i possibili ordini di arrivo?	*le variazioni servono a riconoscere la stessa struttura in situazioni pratiche diverse. Si vuole anche che gli studenti prendano consapevolezza di quanto cresce il fattoriale*

3) **Problema stimolo** (20’-25’) Lavoro a gruppi (10 minuti) 8 alpinisti si legano in cordata per attraversare un ghiacciaio. Due di loro sono principianti, per cui si vuole che non siano né al primo né all’ultimo posto. In quanti modi può essere formata la cordata? Discussione a classe intera (10’)	*Nel lavoro a gruppi gli studenti a casa lavorano nelle Room di Zoom.* *E’ un problema di ragionamento combinatorio in cui si attivano le abilità: understanding, applying, analyzing* *Ogni gruppo presenta la sua soluzione (se possibile condivisa)* *Confronto su soluzioni per addizione o per sottrazione*
4) **Problema di valutazione** (5’) A classe intera o a gruppi? Proiettato. Analizzare due soluzioni e stabilire qual è quella giusta. 6 amici, 3 ragazzi e 3 ragazze, vanno al cinema e ci sono 6 posti liberi. In quanti modi diversi possono sedersi se le ragazze voglio stare sedute vicine e i ragazzi anche? Soluzione 1): I tre ragazzi, stando vicini, possono sedersi in 3! modi diversi e anche le tre ragazze possono sedersi in 3! modi diversi. Inoltre i due gruppi possono scambiarsi. Quindi gli amici possono sedersi in 2(3!+3!)=24 modi diversi. Soluzione 2): I tre ragazzi, stando vicini, possono sedersi in 3! modi diversi e anche le tre ragazze possono sedersi in 3! modi diversi. Inoltre i due gruppi possono scambiarsi. Quindi gli amici possono sedersi in 2(3!x3!)=72 modi diversi.	*Evaluating* *I problemi 3), 4), 5) sono stati scelti per attivare le abilità alte della piramide di Bloom (dal basso verso l’alto: remembering, understanding, applying, analizing, evaluating, creating). Le ultime tre sono quelle considerate high order thinking.*
5) Inventa un problema che abbia per soluzione 4!·3! (per compito)	*“creating”*
6) **Revisione** Compiti: (in aula virtuale di matematica) a) 6 amici vanno al ristorante e si siedono ad un tavolo rotondo. In quanti modi diversi possono disporsi? b) 5 amici vanno al cinema. In quanti modi diversi possono sedersi se Luca e Anna vogliono stare vicini?	

Le ultime due lezioni sono state proposte in due classi seconde. La struttura del Lesson Plan proposto nelle seconde è sostanzialmente la stessa di quello proposto nelle quarte, sia nella scansione dei tempi che per la scelta dei problemi proposti. La differenza più significativa riguarda il problema introduttivo, sulle permutazioni di tre elementi. Nelle classi seconde il problema è stato proposto attraverso una manipolazione di oggetti: sassolini colorati in una classe e carte in un’altra, usati come strumenti di mediazione semiotica.

Il problema scelto

Come si può notare dal Lesson Plan, i problemi proposti nelle prime fasi della lezione servono a introdurre l'argomento e a sviluppare una lezione dialogata, ma tengono impegnati i ragazzi per pochi minuti. La parte centrale della lezione è occupata da un problema, il problema stimolo, su cui gli studenti lavorano a gruppi di 4–5 persone per un po' di tempo, e che poi prevede una discussione a classe intera sulle diverse soluzioni. Cercavamo un problema non banale, semplice nella formulazione, ma che desse la possibilità a tutti di provare. La scelta è caduta sul "Problema degli alpinisti" [Sasso (7)]:

> 8 alpinisti si legano in cordata per attraversare un ghiacciaio. Due di loro sono principianti, per cui si vuole che non siano né al primo né all'ultimo posto. In quanti modi può essere formata la cordata?

La scelta si è rivelata azzeccata, perché in tutte le classi in cui è stato proposto, sia quarte che seconde, ha suscitato interesse, ha permesso a tutti gli studenti (bravi e meno bravi) di lavorare, e ha dato spunti interessanti nelle discussioni perché sono emersi approcci differenti, cioè diversi modi di contare. Di seguito mostriamo diversi tipi di soluzioni (corrette) che sono state proposte nelle varie classi:

- $6 \cdot 5 \cdot 6! = 21600$: "al primo posto ho 6 possibilità, all'ultimo 5, e poi 6! per i sei posti centrali"
- $8! - 2 \cdot 7! - 2 \cdot 7! + 2 \cdot 6!$: "tutte le permutazioni degli 8 alpinisti sono 8!, poi devo togliere quelle in cui i 2 principianti sono al primo posto, poi quelle in cui sono all'ultimo posto, e poi aggiungere quelle che sono state tolte 2 volte"
- $8! - 26 \cdot 6!$: "Devi fare 8! come base ed eliminare i casi in cui A e B sono agli estremi. 7 A all'inizio, 7 B all'inizio, 6 A alla fine, 6 B alla fine. 7+7+6+6=26"
- $8! - 2 \cdot (1+12) \cdot 6!$: "x1 inizio e x2 fine per 6 posizioni, li scambio 12·6!. x1 e x2 inizio e fine fa 2·6!"
- $6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$: "Metto in fila gli alpinisti partendo dai due principianti e gli assegno il posto in cordata. Al primo (principiante) posso assegnare 6 posti, al secondo anch'esso principiante 5, al terzo uno qualunque dei sei posti rimanenti e così via…". Si noti che questa soluzione, formalmente identica alla prima, inverte gli oggetti: nella prima gli oggetti sono gli alpinisti, in questa gli oggetti sono la posizione in cordata

OSSERVAZIONE E DISCUSSIONE

Come è stato detto, nel periodo in cui abbiamo svolto l'esperienza, la modalità di frequenza nella nostra scuola era al 50%, nel senso che la classe era divisa in due gruppi che frequentavano a giorni alterni, mentre gli altri seguivano a distanza. Abbiamo quindi deciso di dividerci per osservare in due in presenza e in due a distanza. Nel momento di lavoro a gruppi, i ragazzi che seguivano a distanza erano divisi in stanze con Zoom e gli insegnanti osservatori entravano in una stanza (quindi ogni insegnante osservava un solo gruppo).
Per l'osservazione era stata preparata una scheda con l'obiettivo di stimolare l'osservazione di alcuni aspetti che ritenevamo importanti. In particolare i nostri obiettivi erano:

a) osservare l'interazione tra studenti nei gruppi e tra studenti e docente;
b) osservare come gli studenti attivano il pensiero combinatorio, quali dinamiche sono presenti (pensiero orizzontale, verticale upward, downward), quali errori tipici;
c) osservare l'aderenza e l'adeguatezza del Lesson Plan.

Di seguito riportiamo la scheda:
Dopo ogni lezione ci siamo trovati, nella stessa giornata, a fine mattinata, per discutere le osservazioni effettuate e proporre modifiche al Lesson Plan. Il Lesson Plan è stato modificato 4 volte, ma in realtà le maggiori modifiche sono state apportate dopo la prima lezione. La struttura è rimasta grosso modo inalterata, ma gli argomenti sono stati ridotti per lasciare maggior spazio al problema stimolo, dopo che ci si è resi conto che richiedeva maggiore tempo rispetto a quanto previsto.
Ci si era accordati preliminarmente sul fatto di dare alla discussione tra docenti una struttura, che ricalcava quanto visto nell'osservazione in Cina. La discussione veniva introdotta dal docente che aveva svolto la lezione che esponeva le sue impressioni, cosa si era svolto secondo quanto previsto dal Lesson Plan, e in cosa si era invece discostato, e per quali ragioni. Poi ordinatamente gli altri docenti esponevano le loro impressioni e solo alla fine si apriva a una discussione libera.
Nella discussione, poiché i docenti osservavano in parte in presenza e in parte a distanza, un elemento che è emerso e ha acquistato grande importanza è stato il confronto tra le due modalità di interazione.

SCHEDA OSSERVAZIONE

CLASSE …………. **DATA** …………… **DOCENTE** …………………………………

GLI STUDENTI	
Il loro comportamento. *Come emerge il più disponibile, come si isola un altro.* *Chi lavora* *Con chi lavora* *Come si esprime con i compagni* *Come si esprime con la classe* *Come si esprime con il docente*	
IL RAPPORTO DOCENTE/STUDENTI	
Il modo in cui chi tiene la lezione riesce a coinvolgere i ragazzi. *Il modo in cui i ragazzi reagiscono.* *Il loro comportamento.* *L'abilità di essere tra i ragazzi.*	

<table>
<tr><td>La risposta degli studenti, la cosa detta.
Le reazioni dei ragazzi, sia fisiche (sguardo, modo) che l’interazione verbale. Osservare la situazione e poi l’interazione.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">SUL PENSIERO COMBINATORIO</td></tr>
<tr><td>Lo studente, per risolvere il problema usa un pensiero:
a) Orizzontale (usando problemi tipici, dividendo in sotto-problemi…)
b) Verticale verso il basso (usa esempi numerici, rappresentazioni su piccoli numeri…)
c) Verticale verso l’alto (generalizza)
d) …altro tipo di strategia non compresa nella classificazione precedente….
Errori tipici:
a) Ordine
b) Ripetizione
c) Distinguibilità
d) Sovra o sotto stimare
e) Errore di formula
f) Errore di generalizzazione
g) …altro errore non compreso nella casistica...</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">IL LESSON PLAN</td></tr>
<tr><td>La coerenza con la pianificazione
L’esercizio proposto è quello giusto? Serve a tutti? Serve in generale alla classe?
E’ il docente che guida, o si lascia trasportare dalle domande degli studenti
Adeguatezza dei tempi
Consapevolezza dei vari registri utilizzati</td><td></td></tr>
</table>

L’INTERAZIONE IN PRESENZA E A DISTANZA

Interazione docente studenti

Come si è detto la modalità di frequenza nella scuola era mista e tutti i docenti hanno osservato in entrambe le modalità. Il fatto di aver osservato la stessa lezione sia a distanza che in presenza, ha permesso di evidenziare alcune differenze nelle dinamiche tra docente e studenti e tra studenti.

Nella didattica a distanza esiste un’oggettiva difficoltà a “raggiungere” e coinvolgere gli studenti e questo rende ancora più importante il ruolo del docente sia nella gestione della lezione che nella scelta e nell’uso degli strumenti di mediazione, come la scelta del supporto (lim, schermo, tavoletta ...), del software (openboard, starboard, …), ma anche come usare questi strumenti. Per esempio sia openboard che starboard permettono di preparare in anticipo le lavagne da riempire. L’idea di predisporre in anticipo la lavagna, con la proposta di lavoro e il resto dello spazio da riempire non era stata prevista nella progettazione. Uno dei docenti l'ha introdotta e in seguito altri docenti l'hanno adottata. Allo stesso modo non era nota a tutti la possibilità di stabilire in anticipo il tempo di apertura delle stanze. Questi, come altri aspetti tecnici, sono stati condivisi nella pratica osservata in classe, e hanno poi modificato le pratiche dei docenti. L'osservazione delle lezioni a distanza ha posto i docenti nelle condizioni di uno studente a casa e ha permesso di comprendere quanto, nella didattica a distanza, sia fondamentale la progettazione delle lavagne, nel senso di progettare in anticipo quello che verrà scritto e come verrà scritto, e di scrivere tutto. Questo perché sullo schermo del computer quanto viene scritto assume un'importanza molto maggiore che nella didattica in presenza in cui la gestualità, lo sguardo, il tono della voce, la presenza dei compagni concorrono all'atmosfera della lezione e alla sua comprensione.

Interazione tra studenti

L'interazione tra studenti è stata osservata principalmente mentre gli studenti lavoravano in gruppo in classe o nelle stanze di Zoom. Il primo aspetto tecnico ha riguardato i tempi, che nelle stanze di Zoom sono fissi e quindi vanno decisi con sicurezza in anticipo e non si può "stare a guardare" come va la classe. Secondo aspetto è quello che riguarda come formare i gruppi, quanti studenti per gruppo. In classe normalmente i gruppi di 3 funzionano bene, mentre si è visto che a distanza è meglio lavorare con gruppi più numerosi. I docenti hanno osservato che: *"3 sono troppo pochi", "c'è troppo silenzio, quello che dici si sente". "A distanza aprire la bocca li imbarazza. In classe c'è rumore di sottofondo, aprire la bocca non li imbarazza ".* In effetti si è visto che nel lavoro in classe, il contributo di un allievo in alcuni casi è solo un gesto, un cenno di conferma, un segno sul foglio. A distanza la cosa detta assume un peso maggiore, si ha più paura di sbagliare e manca quella sensazione di assenso che in alcuni casi è solo gestuale. Nella pratica abbiamo capito che a distanza è meglio formare gruppi più numerosi. Inoltre in classe i ragazzi lavorano su un materiale condiviso, il foglio
o i fogli, su cui fanno segni, schemi, gesti che contribuiscono al processo risolutivo.. Tutto questo lavoro di condivisione a distanza manca: non c'è materiale condiviso, non c'è il gesto, non c'è il segno. Il ragionamento deve essere quasi sempre mediato verbalmente. Abbiamo provato a invogliare i ragazzi a casa ad utilizzare la lavagna condivisa di Zoom, ma è stata utilizzata raramente. Più spesso abbiamo osservato studenti che alzavano il proprio foglio verso la telecamera per condividere i segni scritti.

CONCLUSIONI

Le reazioni a questa esperienza di formazione attraverso il Lesson Study sono state positive: *"Bello progettare insieme", "Mi ha costretto a pensare di più" , "E' una cosa concreta"* . Coprogettare ci ha aiutato a definire l'intenzionalità educativa delle nostre scelte, a fare attenzione ai dettagli, ad abituarci a prevedere le reazioni degli studenti. Osservare la lezione ci ha permesso di vedere le differenze tra la didattica a distanza e in presenza, e nello stesso tempo ci ha dato la possibilità di seguire l'apprendimento degli studenti, e osservarne i processi mentali. In conclusione il Lesson Study ci è stato utile perché è una forma di aggiornamento non calata dall'alto ma è un lavoro condiviso che pone al centro l'apprendimento degli studenti e cambia la didattica e le prasseologie dei docenti. Come è stato osservato da uno di noi *"Ci trasforma da professionisti singoli in professionisti che lavorano in equipe".*

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi M. G., Ramploud A., (2018), *Il Lesson Study per la formazione degli insegnanti*, Roma, Carocci

Batanero C., Diaz C., (2007), The meaning and understanding of Mathematcs: the case of probability, En J.P Van Bendegen y K. Francois (Eds), *Philosophical dimensions in Mathematics Education*, 107-128, New York, Springer

Bergamini M., Barozzi G., Trifone A., (2016), *Manuale Blu 2.0 di Matematica*, vol. 4, Zanichelli
Huang R., Shimizu Y., (2016), Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective, *ZDM Mathematics Education*, 48: 393-409, Springer
Ramploud A., Munarini Frenesi R., (2015), Il Lesson Study [guanmo ke]: trasposizione culturale di una metodologia di formazione, *Scuola Italiana Moderna*, 10, 54-61
Salavatinejad N., Alamolhodaei H., Radmehr F., (2021), Towards a model for students' combinatorial thinking, *Journal of Mathematical Behavior*, 61,
Sasso L., (2016), *La matematica a colori – Edizione BLU*, vol. 4, Petrini
Spirito G., (1995), *La matematica dell'incertezza*, Newton Compton

MATHEMEMETHON: UNA ESPERIENZA DI DIDATTICA A DISTANZA CON I MEME MATEMATICI

Giulia Bini
Dipartimento di Mathematica, Università di Torino
giulia.bini@unito.it

Abstract
MathMemeThon è una esperienza di didattica a distanza con i meme matematici strutturata come un hackathon, in cui squadre di studenti e studentesse della scuola secondaria di secondo grado creano, condividono e presentano ad una giuria di esperti dei meme matematici su argomenti curriculari proposti dai docenti. L'attività si è svolta nel secondo quadrimestre dell'A.S. 2020/21 ed ha coinvolto 9 classi del biennio della scuola secondaria di secondo grado, per un totale di circa 180 studenti e 6 docenti provenienti da 3 diversi istituti piemontesi. L'iniziativa si inserisce nel progetto di orientamento studenti promossa dal PLS Matematica in collaborazione con il Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano" dell'Università di Torino. L'obiettivo dell'attività è favorire la rielaborazione e la sistematizzazione di argomenti curriculari di matematica già affrontati in classe, attraverso la creazione di meme matematici originali accompagnati da brevi approfondimenti dei contenuti matematici.
I meme sono oggetti digitali tipici della cultura *social* in cui studenti e studentesse vivono immersi. Un meme matematico è un meme per la cui creazione o comprensione non è sufficiente la cultura digitale ma è necessario anche avere delle conoscenze matematiche: la creazione o comprensione di un meme matematico, quindi, richiedono una padronanza del concetto matematico rappresentato. Se il meme è accompagnato da un approfondimento del contenuto matematico, esso offre agli studenti una occasione per rielaborare le nozioni matematiche al fine di tradurle in linguaggi diversi, quello memetico e quello formale della matematica.
Il linguaggio ibrido dei meme matematici, che combinano cultura social e cultura matematica, il confronto trasversale tra classi e tra diversi istituti scolastici e l'interazione con i giudici esterni hanno reso l'attività coinvolgente per gli studenti che ne hanno apprezzato la creatività insolita in una lezione di matematica, e soddisfacente per gli insegnanti, che hanno visto allievi recuperare l'interesse per la matematica che la didattica a distanza aveva in certi casi offuscato.

Parole-chiave
Meme matematici, oggetti di confine, didattica a distanza, cultura digitale

INTRODUZIONE: RACCONTO DI DUE CULTURE

Douglas Adams, noto autore della "Guida galattica per autostoppisti", nel suo libro "Il salmone del dubbio" scrive (2002, p. 68):

Ho elaborato una serie di regole che descrivono le nostre reazioni alle tecnologie:

- *Tutto ciò che è nel mondo quando sei nato è normale e ordinario ed è solo una parte naturale del modo in cui il mondo funziona.*
- *Tutto ciò che viene inventato tra i quindici e i trentacinque anni è nuovo, eccitante e rivoluzionario e probabilmente ci si può costruire una carriera.*
- *Qualsiasi cosa inventata dopo i trentacinque anni è contro l'ordine naturale delle cose.*

La schematizzazione di Adams ci può apparire drastica, ma descrive molto bene la discontinuità tecnologica tra gli studenti del XXI secolo e i loro insegnanti, separati da pochi decenni anagraficamente ma da un significativo divario in termini di familiarità con la tecnologia digitale. Ciò che appare come *normale e ordinario* agli studenti – creare contenuti digitali, condividerli in rete, interagire con

sconosciuto tramite piattaforme social - spesso è considerato *contro l'ordine naturale delle cose* dagli insegnanti.
La discontinuità tecnologica produce una discontinuità culturale: infatti, grazie alle potenzialità partecipative offerte dal Web 2.0 (Jenkins, 2009), i recenti cambiamenti culturali, tecnologici e sociali hanno favorito la nascita di ambienti di apprendimento informali extra-scolastici. In questi ambienti di apprendimento informali, gli studenti continuano ad *imparare [anche] dopo aver lasciato l'edificio scolastico* (Bronkhorst e Akkerman, 2016, p. 19), con modalità forse meno analitiche, ma più personali e coinvolgenti di quelle adottate in contesti tradizionali (Thomas & Seely Brown, 2011) e sono quindi portati ad aspettarsi il medesimo coinvolgimento anche nelle lezioni scolastiche.
Queste discontinuità tecnologiche e culturali sono alla base delle difficoltà incontrate dagli insegnanti nel coinvolgere efficacemente studenti e studentesse nel contesto di apprendimento a distanza imposto dalla pandemia di Covid-19 a partire dal marzo 2020, evidenziate da studi recenti (Bakker & Wagner, 2020; Fondazione Agnelli, 2021). Nella DAD è infatti diventato evidente che gli studenti, senza lo spauracchio del voto per decreto governativo, studiano solo se interessati. Per intercettare l'interesse degli studenti è necessario fare uno sforzo che ricomponga le discontinuità tecnologiche e culturali descritte sopra: aprirsi al loro mondo, dire loro "dimmi chi sei e cosa sai", e lavorare per caricare i contenuti didattici con marche affettive che rendono significativo l'apprendimento (D'Amore, 2003; McLeod, 1995). Questo lavoro racconta un possibile modo per aprirsi al mondo degli studenti, ricomponendo le discontinuità tramite l'importazione nell'ambiente di apprendimento formale scolastico di un prodotto rappresentativo della cultura digitale extrascolastica: il meme matematico.

COSA SONO I MEME E I MEME MATEMATICI

I meme sono oggetti digitali umoristici pervasivi sul Web, come testimoniano i 218 milioni di occorrenze dell'hashtag #memes su Instagram nel gennaio 2022. Vengono creati dagli utenti di Internet a partire da immagini popolari già conosciute e circolanti nel Web, a cui vengono aggiunti testi originali concepiti dagli autori. I prodotti finiti vengono quindi condivisi in rete per veicolare i più disparati messaggi, dalle idee politiche alle emozioni personali. Secondo gli studiosi della cultura digitale, il meme è il concetto che meglio rappresenta alcuni degli aspetti fondamentali di Internet in generale, e della cosiddetta cultura partecipativa del Web 2.0 in particolare (Shifman, 2014, p. 18).
I meme matematici sono mutazioni matematiche spontanee dei meme descritti sopra. Essi vengono creati dagli utenti di Internet a partire dalle medesime immagini che servono da sfondo ai meme, di cui viene data una lettura matematica tramite l'aggiunta di testi, simboli o immagini che richiamano argomenti matematici. Vengono quindi condivisi in comunità online dedicate, dove sono percepiti come rappresentazioni di enunciati matematici, e rivelano un *potenziale epistemico* in grado di avviare processi di argomentazione (Bini et al., 2020).
Per chiarire meglio il concetto di meme matematico, nella Figura 1 è mostrato a sinistra (1a) un meme che parla di matematica, ma che *non* è un *meme matematico* perché non rappresenta un enunciato matematico e la sua comprensione non richiede conoscenze disciplinari. A destra (1b) si vede invece un *meme matematico*, riconoscibile grazie ai testi che contengono tipici simboli matematici (il segno ^ come elevamento a potenza). Per la decodifica del meme matematico è necessario avere specifiche conoscenze disciplinari: sapere che l'uguaglianza $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ è in generale falsa, mentre l'uguaglianza sempre vera è $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Questa affermazione corrisponde all'enunciato matematico rappresentato dal meme.

Figura 1. Un esempio di meme non matematico (1a) e matematico (1b).

Dall'analisi del meme matematico in Figura 1b appare evidente che la sua traduzione nell'enunciato matematico corrispondente mette in gioco competenze che appartengono sia alla cultura digitale extra-scolastica, sia a quella matematica intra-scolastica. Bini e Robutti (2019) hanno identificato gli elementi che concorrono a comporre la rappresentazione memetica dell'enunciato matematico, definito come il *significato globale* del meme, attraverso la distinzione di tre componenti (Figura 2) che veicolano i livelli di *significato parziale* del meme.

Figura 2. Le componenti social (2a), strutturale (2b) e specializzata (2c) del meme in Figura 1b.

- Un significato parziale *social*, dato da convenzioni condivise sulle immagini di sfondo dei meme, categorizzate in enciclopedie online come Know Your Meme[6]. La Figura 2a mostra l'immagine di sfondo del meme 1b, nota con il nome di *Distracted Boyfriend*: questa immagine viene convenzionalmente usata per rappresentare situazioni in cui una premessa (il fidanzato), invece di essere seguito dalla conclusione corretta (la fidanzata a destra), viene deviato verso una conclusione errata (la ragazza a sinistra)
- Un significato parziale *strutturale*, costituito dall'estetica riconoscibile dei meme, data da una grafica specifica e condivisa in cui la posizione del testo ha un ruolo ben preciso. Nella Figura 2b è evidenziato il collocamento spaziale dei tre testi del meme 1b: si nota che i testi sono sovrapposti ai tre personaggi, che quindi ne incarnano metaforicamente il contenuto.
- Un significato parziale *specializzato*, veicolato da immagini, simboli o testi che si riferiscono a uno specifico argomento matematico, identificato dai segni disciplinari caratteristici in Figura 2c che richiamano il nucleo concettuale dello sviluppo del quadrato del binomio.

Interagire con un meme matematico (cioè decodificarlo o crearlo personalmente) richiede di saper correttamente interpretare e collegare i tre significati parziali descritti sopra: si tratta quindi di una pratica che mette in campo competenze di natura diversa, che provengono da esperienze intra-scolastiche (il significato specializzato) e extra-scolastiche (i significati social e strutturale). È importante sottolineare che il meme si limita a rappresentare l'enunciato matematico, senza fornire dimostrazioni del valore di verità: per questo motivo esso ha un potenziale epistemico in grado di avviare processi di argomentazione (Bini et al., 2020).
Per il ruolo simbolico che i meme rivestono nel discorso social, utilizzare questi oggetti in una attività in classe rappresenta una occasione per aprire la scuola al mondo degli studenti, ricomponendo le

[6] https://knowyourmeme.com/

discontinuità descritte prima. Creare un meme matematico e decodificare i meme creati dai compagni mette infatti in campo conoscenze matematiche, ma allo stesso tempo permette agli studenti di mostrare abilità non standard e dare un "significato personale agli oggetti matematici studiati" (D'Amore, 2003, p. 19) realizzando quella marca affettiva che rafforza il processo di apprendimento (McLeod, 1995).

MATHMEMETHON: STRUTTURA E RAZIONALE DELL'ATTIVITÀ

L'esperienza didattica descritta in questo lavoro, MathMemeThon, è un torneo di creazione di meme matematici, strutturato come un hackathon a squadre in cui studenti e studentesse di classi e scuole diverse si sfidano online creando, condividendo e presentando meme matematici su argomenti curriculari proposti dai docenti. L'attività si è svolta in modalità DAD nel secondo quadrimestre dell'A.S. 2020/21 ed ha coinvolto 9 classi del biennio della scuola secondaria di secondo grado (7 classi prime e 2 classi seconde), per un totale di circa 180 studenti e 6 docenti provenienti da 3 diversi istituti piemontesi. L'iniziativa si inserisce nel progetto di orientamento studenti promossa dal PLS Matematica in collaborazione con il Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano" dell'Università di Torino.
Si è scelto di coinvolgere gli studenti in una esperienza attiva di creazione di meme matematici, e non solo di fruizione passiva di meme creati dal docente o trovati nel Web, per mettere al centro gli studenti, dando valore alla loro cultura e preservando la rappresentatività dei meme come oggetti simbolo della cultura partecipativa (Shifman, 2014) e della creatività (Willmore & Hocking, 2017) del Web. L'obiettivo didattico dell'attività è favorire la rielaborazione e la sistematizzazione di argomenti curriculari di matematica già affrontati in classe. Per istituzionalizzare l'attività nella pratica didattica, rendendo trasparente il contenuto matematico del meme e consentendo agli insegnanti delle classi di fornire una valutazione formativa agli studenti, l'attività di creazione del meme è stata abbinata alla presentazione dell'approfondimento del contenuto matematico, in forma orale o scritta (presentazione Power Point o simili). Questo approfondimento consiste di fatto nella traduzione dal linguaggio memetico al linguaggio matematico dell'enunciato rappresentato e nella esposizione della relativa argomentazione, ed è stata svolta oralmente o tramite brevi presentazioni a cura dei portavoce delle varie squadre. Nella Figura 3 è mostrato un esempio di meme e di approfondimento dei contenuti matematici prodotti da una squadra di prima liceo.

Figura 3. Un esempio di meme con approfondimento dei contenuti matematici.

I meme matematici e i relativi approfondimenti sono stati presentati per via telematica ad una giuria di esperti formata da docenti delle classi, studenti della Laurea Magistrale in Matematica e dottorandi in Matematica che li hanno valutati con criteri e modalità che verranno descritti più avanti. In base a queste valutazioni sono state selezionate le squadre vincitrici dei vari round e infine il vincitore assoluto. A gare concluse, i meme creati nel torneo sono stati pubblicati nella pagina Instagram del progetto @lifeonmath[7], tornando così nel loro habitat naturale nel Web. Ciascun insegnante ha deciso autonomamente se e come tenere conto dei risultati delle squadre nelle valutazioni curriculari.
Il lavoro di squadra che mette in gioco tante abilità diverse e l'elemento competitivo dato dal confronto trasversale tra classi e tra diversi istituti scolastici e dall'interazione con i giudici esterni hanno reso l'attività coinvolgente per gli studenti, contribuendo a intercettarne l'interesse anche in un contesto di

[7] https://www.instagram.com/lifeonmath/?hl=it

apprendimento a distanza.

Organizzazione e pianificazione del MathMemeThon

Il MathMemeThon 20/21 è stato organizzato in due tornei paralleli, differenziati in base al grado scolastico. Far gareggiare tra loro solo studenti dello stesso grado ha reso la competizione più equilibrata e ha permesso agli insegnanti di selezionare per l'attività argomenti curriculari su cui le classi stavano effettivamente lavorando al momento della gara.
Sono quindi stati organizzati due tornei, uno per le classi prime e uno per le classi seconde, che si sono svolti con date e tempistiche indipendenti. Ad ogni torneo hanno partecipato le classi corrispondenti divise in squadre di 4/5 studenti ciascuna, formate dagli insegnanti secondo criteri ritenuti più opportuni per lo specifico contesto: per alcune classi si è trattato di squadre composte spontaneamente dagli studenti e per altre classi di squadre identificate dagli insegnanti in base alle abilità degli studenti. A ciascuna squadra è stato chiesto di individuare un portavoce, incaricato di presentare l'approfondimento del contenuto matematico del meme.
I tornei si sono sviluppati in round successivi, organizzati in funzione della numerosità delle squadre concorrenti. Per tornei con più di 10 squadre (classi prime) si è scelta una struttura a 3 round: una gara eliminatoria da cui emergono quattro squadre semifinaliste, una semifinale che identifica le due squadre finaliste, e una finale che incorona il vincitore (Figura 4a). Per tornei con meno di 10 squadre (classi seconde) la struttura è stata ridotta a soli due round: una gara eliminatoria che identifica le due squadre finaliste e una finale per proclamare il vincitore (Figura 4b).

Figura 4. Schema per l'organizzazione del MathMemeThon a 3 round (4a) e a 2 round (4b).

Per ciascun round i docenti delle classi concorrenti hanno individuato un diverso argomento curriculare su cui far lavorare le squadre, che è stato comunicato solo ad inizio gara.
I vari round di gara hanno previsto una prima parte della durata di un'ora per la creazione dei meme e degli approfondimenti da parte delle squadre, a cui è seguita una seconda parte in cui i portavoce delle squadre hanno presentato i lavori ai giudici. La durata di questa seconda parte è stata calibrata in funzione del numero di squadre in gara: per le presentazioni degli approfondimenti nella gara eliminatoria delle classi prime, a cui hanno partecipato 36 squadre, sono state destinate due ore, mentre in tutte le altre gare è stata sufficiente un'ora.
Infine, la calendarizzazione dei round è stata concordata con i docenti in funzione delle esigenze didattiche specifiche: per le classi prime i docenti hanno scelto di distanziare gli incontri per avere il tempo di affrontare i vari argomenti in classe, mentre per le classi seconde i due round si sono susseguiti con breve distacco uno dall'altro. Un riepilogo della pianificazione dei round è visibile nella Tabella 1.

Tabella 1. Schema per la pianificazione dei round di gara

	GARA ELIMINATORIA			SEMIFINALE			FINALE		
	Partecipanti	**Date e tempi**	**Argomento matematico**	**Partecipanti**	**Date e tempi**	**Argomento matematico**	**Partecipanti**	**Date e tempi**	**Argomento matematico**
Classi prime	148 studenti 36 squadre	17/3 3h	Prodotti notevoli	16 studenti 4 squadre	27/4 2h	Fattorizzazione di un polinomio	8 studenti 2 squadre	20/5 2h	Equazioni lineari
Classi seconde	42 studenti 9 squadre	15/3 2h	Equazioni quadratiche	/	/	/	10 studenti 2 squadre	22/3 2h	Radicali

Progettazione dei round in modalità DAD
I round di gara si sono svolti online utilizzando la piattaforma WebEx[8]. Le gare eliminatorie si sono tenute la mattina in orario scolastico, mentre per la semifinale delle classi prime e per le finali si è scelto di spezzare gli incontri in due parti: la parte creazione dei meme (1h) si è svolta il pomeriggio in orario extra-scolastico alla presenza delle sole squadre partecipanti, e la parte di presentazione dei lavori (1h) si è svolta la mattina seguente in orario scolastico, alla presenza dell'intera classe. Questo ha permesso di non pesare troppo sui tempi scolastici, preservando comunque l'aspetto collettivo di condivisione e approfondimento dei lavori. In apertura degli incontri è stato condiviso con tutti i convenuti (studenti, insegnanti e giudici esterni) il link ad una bacheca virtuale online (Padlet[9]), predisposta per accogliere i meme prodotti dalle squadre concorrenti (Figura 5).

Figura 5. Il Padlet per la condivisione dei lavori.

Lo spazio virtuale offerto dal Padlet svolge diverse funzioni in questa esperienza:

- funzione *tecnico/informativa*: contiene le consegne per l'attività (descritte nel paragrafo precedente) e i criteri di valutazione (descritti nel paragrafo che segue), il collegamento al sito per creare il meme e le istruzioni per pubblicarlo nel Padlet stesso.
- funzione di *socializzazione*: permette a tutti gli studenti in gara di vedere i meme creati dagli altri, di aggiungere *reaction* (*like* e *dislike*) e commenti. In altre parole, il Padlet riproduce in scala ridotta l'ambiente social dai cui proviene la cultura dei meme, preservando così l'aspetto di validazione sociale caratteristico di questi oggetti, che si quantifica in reaction e commenti descritti in letteratura come *tribal reward* (Eyal, 2014).
- funzione *organizzativa*: consente ai giudici di vedere in tempo reale i meme pubblicati, che possono quindi essere subito valutati, e stabilisce l'ordine in cui verranno presentati gli approfondimenti nella seconda parte dell'incontro. L'ordine di pubblicazione infatti corrisponde in modo inverso all'ordine di presentazione: la squadra che pubblica per ultima presenta per prima.
- funzione *didattica*: il Padlet resta accessibile a insegnanti e studenti anche dopo il termine della gara, per ulteriori attività di discussione e approfondimento in classe.

Dopo aver condiviso il Padlet, illustrato alle squadre concorrenti la consegna dell'attività e comunicato l'argomento scelto dagli insegnanti su cui creare il meme, le squadre abbandonano la stanza WebEx e proseguono il lavoro in un altro ambiente virtuale: qui si chiama in gioco la competenza tecnologica degli studenti che sicuramente hanno familiarità con altri strumenti di comunicazione.

[8] https://www.webex.com/it/index.html
[9] https://docentitrepuntozero.padlet.org/topaina/mathmemethon_gara

I giudici invece restano collegati nella stanza WebEx dove possono vedere il Padlet condiviso. A mano a mano che le squadre creano i meme, li pubblicano nel Padlet dove possono essere visualizzati da tutti (concorrenti e giudici). Al termine della fase di creazione, il Padlet viene messo in modalità *read-only* e le squadre rientrano nella stanza WebEx, dove si procede con le presentazioni degli approfondimenti matematici. Nel corso delle presentazioni i giudici possono rivolgere eventuali ulteriori domande agli studenti, per poi procedere alla valutazione secondo criteri e modalità descritti nel paragrafo seguente. Durante e dopo la gara tutti i concorrenti e i giudici possono commentare o aggiungere *like* e *dislike* ai meme condivisi nel Padlet.

Composizione delle giurie, criteri e operazioni di valutazione

In ciascun torneo di MathMemeThon (classi prime e classi seconde) una specifica giuria di esperti ha valutato le produzioni nei vari round di gara. In entrambi i casi la giuria è stata composta da 8 giudici: gli insegnanti di matematica delle classi partecipanti alla gara, l'autore di questo articolo, studenti della Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Torino frequentanti il corso di Didattica della Matematica 1 tenuto dalla professoressa Ornella Robutti, e dottorandi in Matematica presso l'Università di Torino con specializzazione nel settore della Didattica della Matematica.

La giuria così organizzata è una giuria "mista" sia in termini generazionali che in termini relazionali: infatti è composta da elementi conosciuti dai membri delle squadre concorrenti (gli insegnanti della classe e dalla scuola), ma anche da elementi esterni (gli insegnanti di altre scuole e gli studenti universitari). La presenza dell'insegnante della classe è ovviamente un fattore importante per istituzionalizzare l'attività e inserirla nel contesto della pratica didattica della classe; mentre gli elementi esterni sono fondamentali per ricreare l'ambiente dei social network, in cui i contenuti postati sono visibili (e giudicabili) da tutti gli utenti. Infatti, secondo le testimonianze degli insegnanti stessi, è stata proprio l'interazione con i giudici esterni a rendere particolarmente stimolante l'attività per gli studenti, a riprova di quanto sia importante per i ragazzi l'occasione di condivisione *social* offerta da questa esperienza.

I giudici si sono pronunciati in modo sincrono durante le fasi di creazione e presentazione, valutando i lavori proposti tramite l'attribuzione di tre voti in decimi, corrispondenti ai giudizi sulle varie dimensioni dell'attività: contenuto matematico, meme e presentazione dell'approfondimento matematico. I voti sono stati assegnati in base ai seguenti criteri di valutazione preventivamente condivisi:

- contenuto matematico: correttezza, originalità (rispetto agli altri lavori in gara)
- meme: efficacia della battuta, qualità nella realizzazione
- presentazione: correttezza matematica ed efficacia comunicativa

Ai vari criteri è stato dato un uguale peso: ad esempio il voto per il contenuto matematico è stato espresso tenendo conto della correttezza e della originalità in pari misura. Quindi per ogni squadra sono stati sommati i voti in decimi dati dagli 8 giudici per ciascuna dimensione, ottenendo così tre valutazioni parziali in 80esimi, che sommate a loro volta hanno prodotto il punteggio finale in 240esimi, in base al quale è stata stilata la classifica.

Le valutazioni sono state inserite dai giudici in tempo reale in un foglio Google condiviso[10] predisposto per il calcolo dei parziali e dei totali, nel quale erano stati preventivamente inseriti i nomi dei componenti delle squadre concorrenti e i meme prodotti. Al termine delle presentazioni i giudici si sono riuniti in un'altra stanza WebEx per le operazioni di scrutinio finale e sono quindi rientrati nella stanza WebEx principale per la proclamazione dei vincitori. Tutte le valutazioni espresse dai giudici, sia parziali che totali, sono quindi state riportate anche nel Padlet per poter essere condivise con i concorrenti.

I meme tornano nel loro habitat naturale: la condivisione su Instagram

Previa autorizzazione degli autori, al termine di ogni round di gara i meme prodotti sono stati condivisi nella pagina Instagram del progetto, assieme alle segnalazioni dei vincitori. Questo ultimo passaggio non è neutro rispetto al nostro obiettivo iniziale di progettare un'attività che favorisca la ricomposizione delle discontinuità tecnologiche e culturali tra docenti e studenti. Con questo passaggio stiamo infatti

[10] https://docs.google.com/spreadsheets/d/1KhtLvmw9jGYZQrMGQ40_OhjCYE74lyiB3PUN_TpXqRk/copy

ampliando ulteriormente l'orizzonte dell'attività: ci spostiamo non solo fuori dalla singola classe e dalla singola scuola, come è avvenuto durante il MathMemeThon, ma anche fuori dall'ambiente scolastico in generale, per riportare nel loro habitat naturale nel Web i meme prodotti all'interno del setting scolastico. Portando i meme dentro la scuola abbiamo permesso ai ragazzi di mettere a frutto in una lezione di matematica quello che hanno imparato nel Web. Riportando poi i meme creati nel Web, permettiamo loro di esibire nel Web quello che hanno fatto a scuola.

LA PAROLA A INSEGNANTI E STUDENTI: I FEEDBACK

Concludiamo questo lavoro condividendo alcune osservazioni fornite "a caldo" sull'attività e alcuni feedback di insegnanti e studenti raccolti dopo la conclusione tramite Google form.
Gli studenti hanno dichiarato che:

- *la creatività [...] è molta di più rispetto a una normale lezione di matematica perché il lavoro è stato di gruppo, bisognava dare importanza al contenuto matematico ma nello stesso tempo trovare l'idea giusta per farlo.*
- *è stata una cosa originale e diversa dal solito per esprimere un concetto matematico. Creativo e divertente.*
- *Questa attività mi ha permesso di esprimere la mia creatività e di rafforzare concetti matematici divertendomi, anche attraverso errori commessi nella creazione dei meme. Inoltre ha favorito la cooperazione tra compagni di squadra (secondo me fondamentale per andare avanti nella competizione), rafforzando le amicizie tra di noi. È stata l'attività che mi ha colpito più positivamente fra tutte quelle svolte in questo anno scolastico e spero venga riproposta anche l'anno prossimo.*

Gli insegnanti, dal canto loro, hanno osservato che:

- *I ragazzi già utilizzano i meme e sono molto più bravi di noi. Non ci avevano pensato che potevano essere usati anche per la matematica*
- *Particolarmente stimolante per gli studenti la presentazione dei meme in semifinale e finale, soprattutto per l'occasione di interazione con i giudici esterni*
- *Ho visto rinascere l'interesse in studenti che pensavo di avere perso*

Queste testimonianze ci confermano che, anche in modalità DAD, il linguaggio ibrido dei meme matematici ha le potenzialità per intercettare l'interesse degli studenti mettendo in comunicazione la cultura digitale a la cultura scolastica. Si tratta di una occasione unica in cui il mondo virtuale entra in contatto con il mondo scolastico, consentendoci di apprendere qualcosa di nuovo sull'impatto della rivoluzione digitale e delle nuove tecnologie della comunicazione sui percorsi epistemologici e sulle pratiche di apprendimento.

BIBLIOGRAFIA

Adams, D. (2002). *Il salmone del dubbio*, Arnoldo Mondadori Editore.
Bakker, A., & Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educ Stud Math 104*, 1–4. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09946-3
Bronkhorst, L., & Akkerman, S. (2016). At the boundary of school: Continuity and discontinuity in learning across contexts. *Ed. Res. Rev., 19*, 18–35. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2016.04.001
Bini, G., & Robutti, O. (2019). Meanings in Mathematics: using Internet Memes and Augmented Reality to promote mathematical discourse. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of CERME11*, Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422152
Bini, G., Robutti, O., & Bikner-Ahsbahs, A. (2020). Maths in the time of social media: conceptualizing the Internet phenomenon of mathematical memes. *Int. Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1807069
D'Amore, B. (2003) *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

Eyal, N. (2014), *Hooked: How to Build Habit-Forming Products*. Portfolio.
Fondazione Agnelli (2021). *DaD alle scuole superiori, una fotografia con luci e ombre*. https://www.fondazioneagnelli.it/wp-content/uploads/2021/07/Ricerca_La-DaD-as-2020-21_una-fotografia.pdf
Jenkins, H. (2009). *Confronting the challenges of participatory culture. media education for the 21st century*. MIT Press
McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics, teaching and learning* (pp. 575–596). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Shifman, L. (2014). *Memes in digital culture*. Cambridge, MA: MIT Press.
Thomas D., & Seely Brown, J. (2011). *A new culture of learning: cultivating the imagination for a world of constant change*. CreateSpace Independent Publishing Platform, Lexington KY.
Willmore, J., & Hocking, D. (2017). Internet meme creativity as everyday conversation. *Journal of Asia-Pacific Pop Culture, 2*(2), 140-166. https://doi.org/10.5325/jasiapacipopcult.2.2.0140

LE LEZIONI DEI MAESTRI: GEOMETRIA PROIETTIVA E RIFLESSIONI DIDATTICHE SULLE ORME DI BRUNO SPOTORNO

Cristiano Dané
Liceo scientifico Galileo Ferraris di Torino
cristiano.dane@virgilio.it

Abstract
In questo lavoro propongo alcune riflessioni tratte dal corso di Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore che il prof. Bruno Spotorno ha tenuto all'Università di Genova negli anni 80-90. Mi concentro sulla sua idea di didattica della matematica come disciplina scientifica, ma anche come arte e come tecnologia e sull'inquadramento dell'insegnamento all'interno della teoria dei tre mondi di Popper a livello del mondo 3, il mondo delle costruzioni teoriche.
Come esempio di teoria analizzo l'introduzione alla geometria proiettiva e i primi teoremi sui triangoli omologici, seguendo gli appunti scritti a mano dal prof. Spotorno con uno stile formale e asciutto, affiancandoli con figure dinamiche che i software di oggi consentono di realizzare, accennando ai possibili pro e contro dell'uso dei software.

Parole-chiave
Bruno Spotorno, cultura, didattica della Matematica, teoria.

INTRODUZIONE

Il prof. Bruno Spotorno, insegnante e didatta della matematica è stato un vero maestro, in tutte le accezioni del termine maestro; infatti ha iniziato il suo percorso come maestro elementare a Savona per arrivare a essere docente universitario a Genova passando attraverso l'insegnamento in tutti gli ordini scolastici, ma è stato anche maestro nel senso di guida e di punto di riferimento per numerosi suoi allievi e per chi ha a cuore l'insegnamento della matematica. Con Vinicio Villani ha pubblicato nel 1982 il libro di testo per le scuole superiori "Matematica. Idee e metodi" frutto di un progetto e di una sperimentazione iniziata nel 1974 in cui lo studio della matematica parte da situazioni e problemi di interesse reale, per costruire schematizzazioni e strumenti utili a descrivere queste situazioni e questi problemi.
Ho seguito il suo corso all'Università di Genova, durante il quale alternava profonde riflessioni su che cosa sono la matematica, la didattica e l'insegnamento con esempi di segmenti di teorie assiomatiche (geometrie euclidee e non euclidee, geometria proiettiva, aritmetizzazione, …), discutendone le ricadute nella scuola. Mi son reso conto chiaramente oggi di quanto queste lezioni e il suo esempio si siano sedimentati in me incidendo, senza che ne fossi del tutto consapevole, nel mio modo di insegnare.
Le righe che seguono costituiscono un omaggio al prof. Spotorno e un tentativo di ricostruire, attraverso i miei appunti un percorso che, per quanto limitato, possa rendere l'idea del pensiero e della visione di matematica e di scuola che veniva proposta a noi studenti. Tutto quello che segue non è quindi opera mia, salvo pochi commenti, ma una rilettura, spero il più possibile fedele, di una piccola parte delle lezioni che ho seguito a partire dai miei appunti presi a lezione parecchi anni fa.

LA MATEMATICA E LA DIDATTICA

L'idea di fondo che costituiva la base degli insegnamenti del prof. Spotorno è che la Matematica *appartiene alla cultura*, così come avviene per la musica e per l'arte, ne è anzi una delle forme più alte e il segno è il suo strumento.

Si tratta quindi di una visione della matematica legata allo sviluppo del pensiero umano, agli atteggiamenti e ai modi di vivere della società, alle conquiste dell'intelletto.
Le prime lezioni erano una riflessione su che cos'è la matematica: matematica come *scienza* che descrive oggetti astratti o come *linguaggio* indipendente da una realtà fisica, dotato di una sua grammatica.
La didattica della matematica invece *non* è una scienza perché il carattere di una scienza è la ripetibilità e questa è, il più delle volte, impossibile da perseguire; è però una *disciplina scientifica*:
- disciplina perché è un insieme di contenuti;
- scientifica perché si occupa di matematica, dell'insegnamento-apprendimento della matematica; quindi ha a che fare con la scienza.

La didattica è ricerca dei contenuti da usare, dei metodi di insegnamento, è anche ricerca dei metodi dell'apprendimento, è intrecciata con la filosofia, con la pedagogia, … Secondo Spotorno chi si occupa di didattica deve avere una visione culturale ampia, questo non vuol dire che debba essere un filosofo o un pedagogo, ma deve conoscere la filosofia e la pedagogia.
La didattica è *tecnologia* e *arte*:
- tecnologia nella ricerca dei contenuti e nei metodi;
- arte perché si occupa dell'atto irripetibile della comunicazione e nella comunicazione qualcosa è istintivo, ma molto si può anche imparare.

Quindi se la matematica è scienza, la didattica della matematica è invece tecnologia. La scienza ha per obiettivo la descrizione di oggetti per trasformarli in idee, in modelli, la tecnologia utilizza le idee prodotte dalla scienza per costruire oggetti. Per Spotorno è fondamentale che la didattica produca "beni" didattici, non sia ricerca fine a se stessa, ma abbia come obiettivo la costruzione di "oggetti" che dati in mano a degli insegnanti consentano loro di comunicare con gli alunni (ad esempio libri di testo, risorse didattiche, supporti e strumenti didattici).

RIFLESSIONI SULL'INSEGNAMENTO

La finalità dell'insegnamento (ma anche di chi scrive un libro di testo, di chi prepara materiale didattico) è creare attenzione su un oggetto culturale in prospettiva di un prefissato obiettivo pedagogico. Analizziamo le parole chiave utilizzate nella frase precedente:

- l'attenzione è la presa di coscienza del soggetto (lo studente) di una possibile interazione tra sé e l'oggetto culturale;
- oggetto culturale è ogni prodotto generato dall'interazione tra cultura, scienza e tecnologia;
- obiettivo pedagogico: mi pongo il problema: "Quale tipo di uomo voglio?"

Credo sia importante che l'insegnante si faccia davvero spesso questa domanda, quale uomo voglio? Che cosa voglio sviluppare nei miei studenti? Come li vedo? Come li sogno? Che scelte didattiche faccio per essere conseguente con questa idea di uomo?
È poi fondamentale che l'azione dell'insegnamento crei attenzione, crei *meraviglia*, altrimenti non serve a niente. Per imparare c'è l'autodidassi.

Spotorno inquadra l'insegnamento all'interno della teoria dei tre mondi sviluppata dal filosofo Karl Popper intorno al 1970. Popper non dà volutamente un nome ai tre mondi proprio per non etichettare in un modo che potrebbe travisarne il significato.

- Il *mondo 1* è il mondo delle cose (gli oggetti fisici, la natura).
- Il *mondo 2* è quello dei propri pensieri, delle esperienze soggettive, la mente.
- Il *mondo 3* è il mondo dei prodotti della mente umana, è il mondo delle costruzioni teoriche, la cultura.

I mondi sono interconnessi, ad esempio, il mondo 1 (gli oggetti fisici) si percepisce attraverso il mondo 2 (la mente) che produce teorie nel mondo 3 (la cultura).

Secondo Spotorno l'insegnamento avviene nel mondo 3, il mondo dei prodotti dei pensieri, delle costruzioni teoriche; sono però le esperienze soggettive, anche su oggetti fisici, che permettono all'uomo di arrivare alle costruzioni teoriche.
Una conseguenza del fatto che l'apprendimento avviene attraverso le esperienze soggettive è che noi insegnanti non sapremo mai se veramente e quanto l'allievo ha appreso perché non conosceremo mai completamente i suoi pensieri. Una materia si capisce quando diventa sedimentazione e quindi il risultato del nostro lavoro avviene e si potrebbe capire nel lungo periodo. Questo non implica abbandonare verifiche e valutazioni, ma, forse – dico io – non mitizzarle troppo.

LE COSTRUZIONI TEORICHE

Visto che l'insegnamento avviene nel mondo delle costruzioni teoriche, dobbiamo chiederci che cos'è una teoria? La riposta classica è un insieme *organico* di proposizioni su un determinato ambito di esperienze.
Ci sono *teorie contenutistiche* come la biologia, la geologia,… e *teorie assiomatizzate* in cui tra le proposizioni della teoria ne sono state scelte alcune (gli assiomi) da cui le restanti si fanno dipendere.
Che cosa garantisce la validità degli assiomi? Per rispondere distinguiamo tra *teorie scientifiche* in cui la validità degli assiomi è garantita dalle esperienze (ad esempio, la teoria tolemaica, l'atomo di Thomson, quello di Bohr,…) e *teorie matematiche*; nelle teorie matematiche prima di Hilbert gli assiomi sono garantiti dall'evidenza descrittiva (ad esempio, "Per due punti passa un'unica retta"); la soluzione hilbertiana invece è quella formalista: niente garantisce la verità degli assiomi, se non il fatto che la teoria che ne segue deve essere non contradditoria.
Una teoria assiomatizzata formalizzata abbandona ogni riferimento all'intuizione; l'ideale è non usare parole, ma solo simboli e dare delle regole d'uso dei simboli; coi simboli si formano parole, proposizioni e tra queste si scelgono gli assiomi. La teoria intuitiva costituisce un modello della teoria formalizzata e l'esistenza del modello garantisce la non contraddittorietà.
L'analisi del concetto di teoria durante le lezioni del corso di Matematiche elementari era più approfondita delle poche, ma dense, righe precedenti, essendo rivolta a futuri insegnanti aveva anche come scopo quello di riflettere sulle ricadute sull'insegnamento. Secondo Spotorno il problema che si pone *oggi* (dove oggi era trent'anni fa…) è quello della *"doppia parentesi"*: alle scuole medie inferiori e superiori si insegna un certo tipo di Matematica, all'università si insegna una Matematica del tutto diversa, molto più formale, poi, per pervenire all'insegnamento bisogna tornare sui vecchi libri di testo. Questo crea un "disturbo", per superarlo bisogna modificare o i corsi all'università o quelli delle scuole medie; è ovvio che bisogna fare la seconda cosa. Ma è possibile che un ragazzo dai 12 ai 18 anni possa apprendere la Matematica in maniera formale, astratta? Probabilmente sì. Bisogna scegliere quali segmenti di teorie formali presentare, quali sono possibili a seconda dell'età, ad esempio un'idea degli assiomi di Peano si può anche dire ai bambini piccoli della scuola primaria. Alle teorie occorre arrivarci attraverso situazioni reali oppure problemi stimolanti, esperienze che sollecitino il pensiero e lo sviluppo della teoria avviene accostando nello sviluppo la parte intuitiva e descrittiva con la parte più formale.

UN ESEMPIO DI TEORIA FORMALE: LA GEOMETRIA PROIETTIVA

Il corso del prof. Spotorno oltre alle riflessioni sulla didattica e l'insegnamento di cui ho fatto qualche cenno nei paragrafi precedenti, dedicava ampio spazio alla costruzione di alcune teorie formali quali le geometrie euclidee e non euclidee, la geometria proiettiva, la fondazione degli insiemi numerici e l'aritmetizzazione… Ho scelto di presentare qui i primi risultati di geometria proiettiva con lo scopo di far risuonare oggi le lezioni di oltre trent'anni fa cercando di rendere l'idea dello stile con cui venivano presentati gli argomenti e dei raccordi con la visione della matematica e dell'insegnamento che ho esposto in precedenza.

Ovviamente tutto ha inizio con gli assiomi e i primi sono quelli di appartenenza che venivano proposti con tutto il formalismo, quasi senza parole, un po' alla Hilbert, con i simboli e la grammatica della matematica, della matematica come linguaggio con segni e regole d'uso.

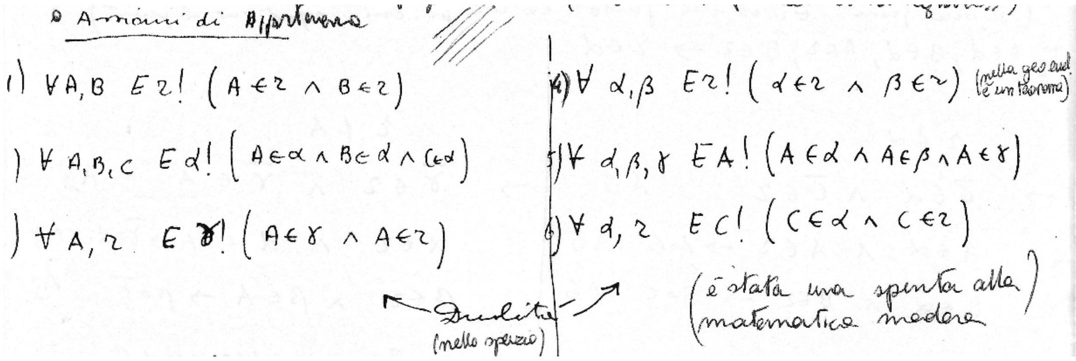


Figura 1. Gli assiomi di appartenenza scritti negli appunti dal prof. Spotorno.

Fin dall'inizio si sottolineava la dualità tra piano e spazio dividendo gli assiomi in due colonne che evidenziavano i legami tra ciò che avviene nel piano a sinistra e nello spazio a destra; ad esempio l'assioma 2, dati tre punti esiste un unico piano a cui essi appartengono, è messo a fianco dell'assioma 5 secondo cui dati tre piani esiste un unico punto appartenente a tutti e tre. La dualità è stata una conquista (culturale) della matematica moderna ed è un bene che questa conquista entri nelle scuole. Qualche pagina dopo, venivano proposti gli stessi assiomi, ma questa volta in forma intuitiva, senza parole, utilizzando il linguaggio iconico, evidenziando così la loro valenza descrittiva.

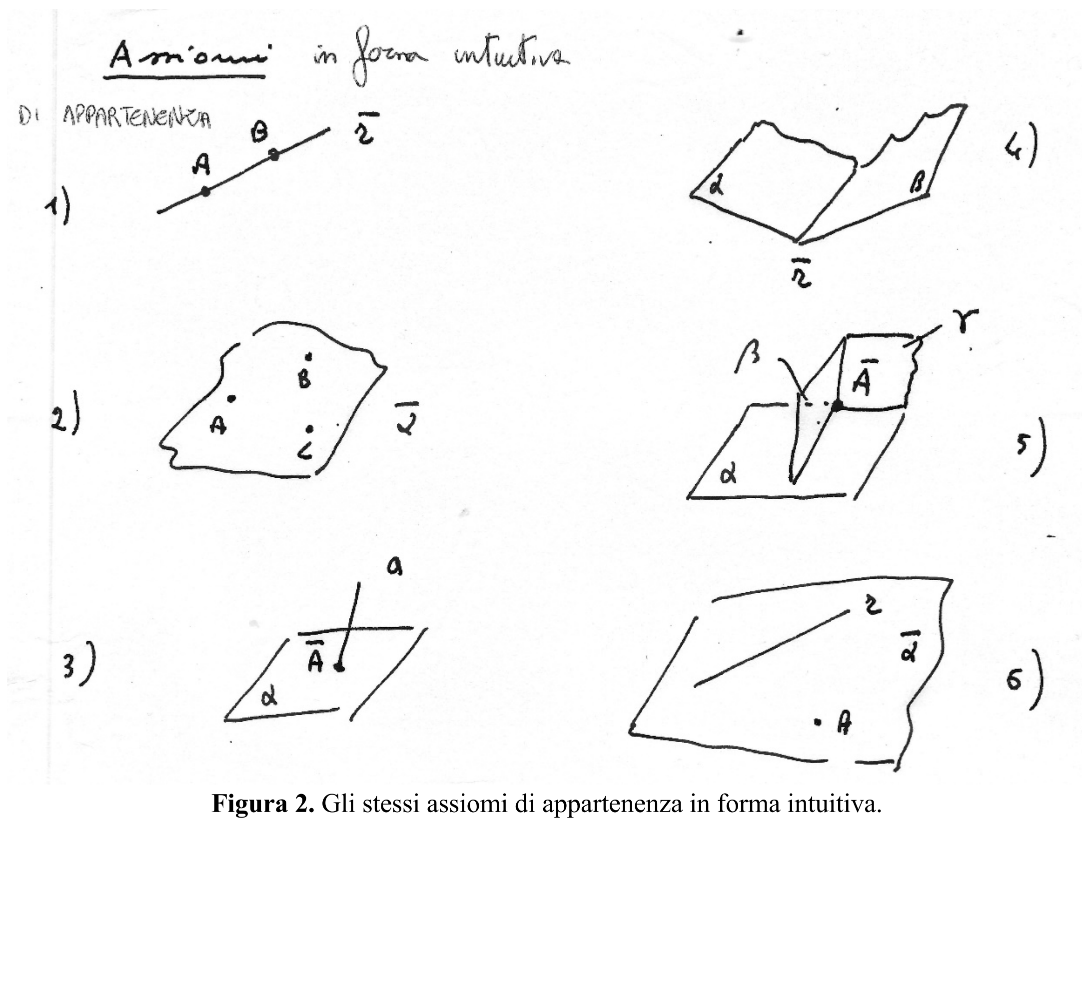


Figura 2. Gli stessi assiomi di appartenenza in forma intuitiva.

Anche i teoremi sono proposti affiancando la forma intuitiva e quella formale. Nela figura che segue vediamo un esempio col primo teorema, il teorema T_1; a sinistra l'enunciato secondo cui la retta passante per due punti è contenuta nel piano a cui tali punti appartengono e, a destra, la dimostrazione per assurdo.

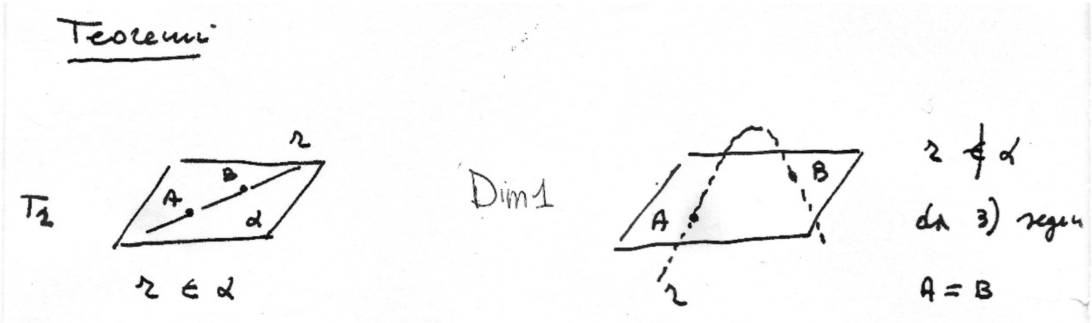


Figura 3. Il teorema T_1.

La teoria si sviluppa con questo stile, direi formale e asciutto, quasi senza parole, ma accompagnato da figure. Al tempo stesso il prof. Spotorno consigliava, per chi voleva approfondire, il testo di Francesco Severi, Geometria Proiettiva, testo vecchiotto, del 1925, che ha uno stile opposto, in esso mancano praticamente le figure, ma si fa uso delle parole con un linguaggio molto ricco e descrittivo.
Riporto come ultimo esempio nella figura che segue, la pagina degli appunti sui due teoremi T_6 e il tuo inverso T_7 sui triangoli omologici nel caso che essi non siano complanari, non siano cioè contenuti nello stesso piano.

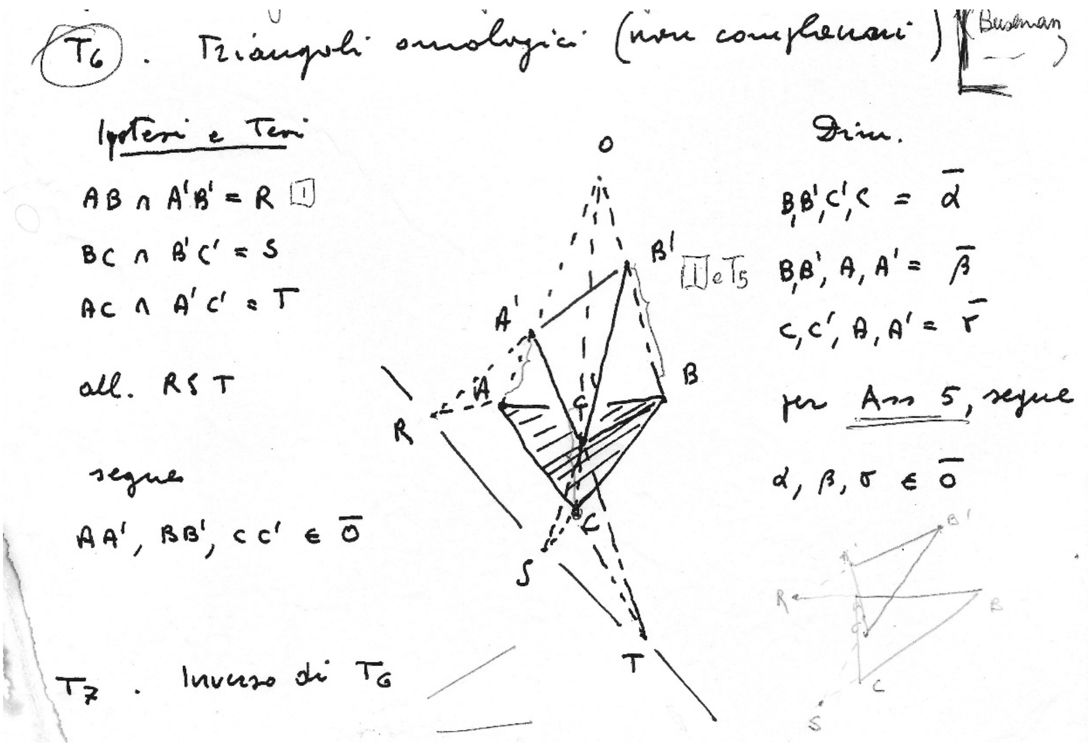


Figura 4. I teoremi T6 e T7.

Mi soffermo sul teorema T_7, riportando l'enunciato del libro di F. Severi, in cui inserisco, per chiarezza, tra parentesi quadre le indicazioni utilizzando le lettere della figura precedente: "Se due triangoli situati in piani diversi [*ABC* e *A'B'C'*], son riferiti in guisa che le tre coppie di vertici omologhi sieno congiunte da rette concorrenti in un punto [il punto *O*], le tre coppie di lati omologhi s'incontrano in tre punti [*R*, *S* e *T*] di una medesima retta".

Oggi abbiamo a disposizione software di geometria dinamica che consentono di rendere questi teoremi decisamente più accessibili a tutti gli studenti, anche delle scuole superiori. È possibile far costruire ai ragazzi una figura da esplorare come quella che segue.

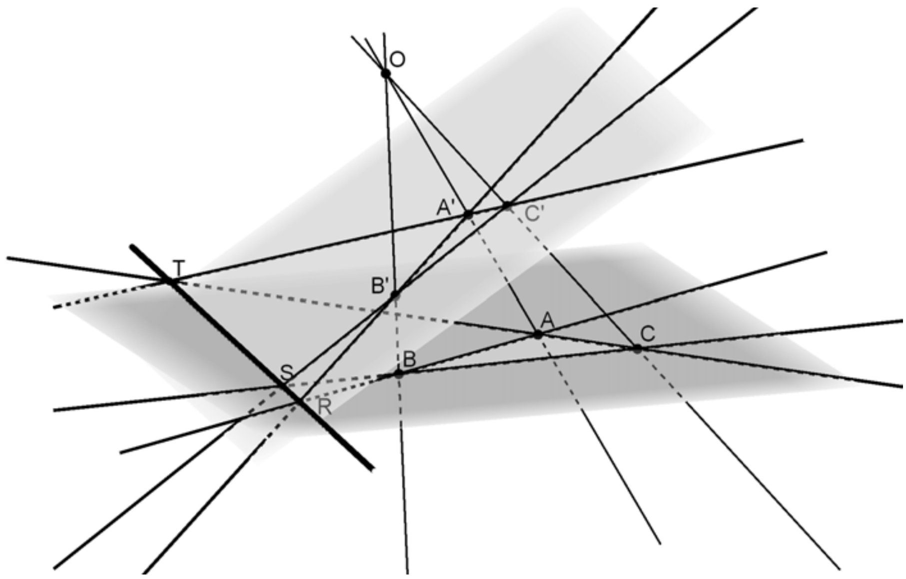


Figura 5. Il teorema T7 con GeoGebra: se due triangoli *ABC* e *A'B'C'* sono prospettici rispetto a *O* allora i prolungamenti dei loro lati si incontrano in tre punti *R*, *S* e *T* che sono allineati.

Penso che la figura dinamica accompagnata da un altro "oggetto didattico", come una scheda di laboratorio, consenta ai ragazzi di scoprire il teorema, congetturandone l'enunciato. Con questo approccio i ragazzi fanno esperienze (nel mondo 2 della teoria di Popper) arrivando da soli a un inquadramento teorico (nel mondo 3). Tra l'altro, in questo caso, il software permette agli studenti di esplorare la figura e di avvicinarsi o arrivare autonomamente alla dimostrazione osservando che ognuno dei due triangoli è contenuto in un piano e che quindi lo sono anche le rette contenenti i lati, di conseguenza i punti *R*, *S* e *T* appartengono alla retta definita dall'intersezione dei due piani.

Purtroppo non ho mai discusso col prof. Spotorno sull'utilizzo dei software di geometria dinamica, certamente era aperto e curioso a tutte le tecnologie, non so se avrebbe approvato quanto ho scritto in precedenza sul ruolo dei software come mediatori tra un mondo e l'altro della teoria di Popper, forse avrebbe pensato che i software sono tecnologie al passo coi tempi, vicini agli studenti, che certe attività laboratoriali possono creare la meraviglia, l'attenzione, ma forse avrebbe messo in guardia dal rischio di perdita di manualità nel disegno, si sarebbe chiesto se i software aiutino o meno la visione spaziale e forse si sarebbe interrogato sulla coerenza perché lavorano con una geometria diversa da quella che mostrano. Alcune di queste osservazioni si trovano nel pensiero di Villani (2007) e chissà qual era il pensiero del prof. Spotorno.

Il percorso di geometria proiettiva proseguiva con lo stesso teorema, ma per i triangoli complanari, contenuti nello stesso piano, con i teoremi sui quadrilateri omologici e così via, in queste pagine ho dato un piccolo assaggio che spero sia bastato per chiarire il tenore delle lezioni del prof. Spotorno, la loro attualità e l'intreccio tra la parte contenutistica e le riflessioni culturali e didattiche.

RINGRAZIAMENTI

Non è stato facile riprendere e ricostruire gli appunti di trent'anni fa. Vorrei ringraziare la prof.ssa Claudia Carli e il prof. Domingo Paola, anche loro studenti del prof. Spotorno con cui ho potuto confrontarmi e le prof.sse Pierangela Accomazzo e Ornella Robutti per i consigli e il supporto.

BIBLIOGRAFIA

Popper, K., (1978). *Tre mondi di Karl Popper*. La conferenza di Tanner sui valori umani. Discorso tenuto presso l'Università del Michigan il 7 aprile 1978.

https://tannerlectures.utah.edu/_resources/documents/a-to-z/p/popper80.pdf

Severi, F. (1926). *Geometria proiettiva*. Vallecchi Editore, Firenze.

http://mathematica.sns.it/media/volumi/321/SEVERI_GEO_PROI.pdf

Spotorno, B., Villani, V. (1979). Matematica. Idee e metodi., *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. marzo 1979, 50-57. http://www.centromorin.it/scrivi/crdm.pdf?c=404003

Spotorno, B. (2009). La didattica della matematica degli anni 70, Seminario ALIMA tenuto a Genova il 4 maggio 2009. http://alima.dima.unige.it/testo_Spotorno.pdf

Villani, V., Spotorno, B. (1982). *Matematica. Idee e metodi per la scuola secondaria superiore*. La Nuova Italia, Firenze.

Villani, V., (2007) Riflessioni su possibili percorsi nell'insegnamento della geometria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Novembre 2007. 623-645. http://www.centromorin.it/scrivi/crdm.pdf?c=368496

MATEMATICA E SCIENZA. SOSTANTIVI FEMMINILI

B. Marola
Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano"
Dipartimento di Scienze economico-sociali e matematico statistiche
Dipartimento di Economia "Cognetti de Martiis"
Università degli Studi di Torino
beatrice.marola@gmail.com

Abstract
"Il progetto "Matematica e scienza: sostantivi femminili", finanziato dal Ministero delle Pari Opportunità, con responsabile la professoressa Robutti del dipartimento di Matematica "Peano", con la partecipazione di Bini, Marola, Scalambro e Durbano, con la collaborazione della professoressa Becchio del dipartimento di Scienze economico-sociali e matematico-statistiche, la professoressa Di Tommaso del Dipartimento di Economia Cognetti De Martiis, si è svolto in modalità DAD nel secondo semestre dell'anno scolastico 2020/2021, coinvolgendo un totale di 239 studentesse e studenti provenienti da 19 istituti piemontesi.
L'obiettivo del progetto è stato sperimentare un insegnamento della matematica e delle STEM volto maggiormente al dialogo e all'esplorazione. A partire da studi sulla math anxiety (Contini, Tommaso, Ferrara, Piazzalunga, & Robutti) che evidenziano come le studentesse siano maggiormente penalizzate in ambienti competitivi e con le prove a risposta chiusa, si è costruito un contesto in cui l'esperienza di ciascuno con la materia venisse accolta e gli errori servissero da spunto.
Sono state proposte 10 attività della durata di 60 minuti circa, secondo una metodologia didattica focalizzata sull'esplorazione e sulla manipolazione, sia per approfondire argomenti già trattati in classe, sia per definire e costruire insieme nuovi concetti.
Il percorso si è svolto in parallelo su otto gruppi costruiti per omogeneità di classi e indirizzi, in modo da incentivare il lavoro cooperativo di esplorazione: durante le attività di frequente venivano suddivisi ulteriormente in gruppetti casuali in modo da permettere agli studenti di formulare congetture in un contesto protetto.
Ad ogni gruppo è stata assegnata una coppia di tutor adeguatamente formati, che rispondevano anche ad eventuali domande in merito al loro percorso, così da creare un ponte spontaneo tra scuola secondaria e mondo universitario.
Durante le attività è stata incentivata la formulazione di congetture, che i tutor hanno aiutato a formalizzare con il linguaggio matematico appropriato. Per tutte le attività che riguardavano i nuclei "spazio e figure" e "relazioni e funzioni", è stato fondamentale l'apporto di GeoGebra: da un lato per confermare o confutare le ipotesi dei ragazzi, dall'altro come occasione di condivisione e di aiuto verso chi avesse meno familiarità col software. Sono poi stati sfruttati altri strumenti tecnologici per incrementare interattività e gamification.

Parole-chiave
Laboratorio, esplorazione, problem solving, dialogo, online

RIFERIMENTI TEORICI

Con *divario di genere in matematica* si intende un fenomeno complesso, articolato in più aspetti. Per quanto riguarda l'aspetto numerico, nelle facoltà scientifiche e nelle carriere STEM, la maggioranza delle presenze è maschile. Anche dal lato qualitativo sono però presenti delle differenze: fin dai primi anni di scuola, nei maschi si riscontra un punteggio nelle prove di matematica superiore a quello delle femmine. Questo divario non fa che aumentare con il progredire del percorso scolastico.

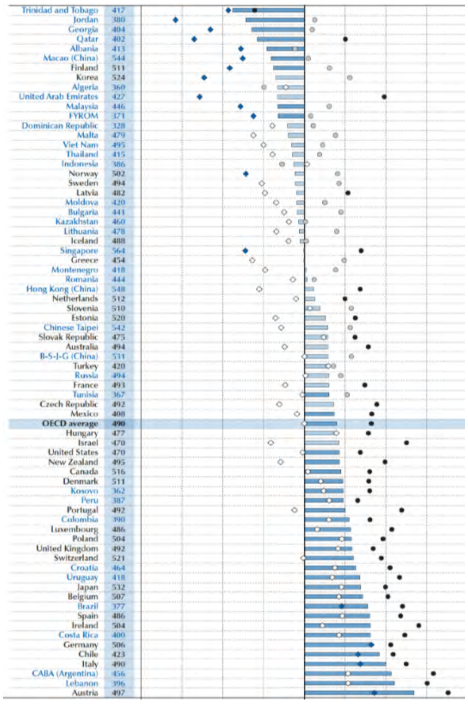


Figura 1. Differenze di performance matematiche in base al genere. Fonte: PISA 2015 Results, Excellence and equity in education (Vol I)

Nella Figura 1 è presente un divario a favore dei maschi ogni volta che il grafico si espande a destra della linea centrale, mentre è a favore delle ragazze quando si espande verso sinistra. È quindi possibile notare quanto il divario di genere nelle performance matematiche non sia uguale in tutti i paesi OCSE, e non sia nemmeno necessariamente sempre a favore degli studenti maschi. Questo aspetto porta a escludere l'eventualità che il divario di genere nelle STEM in generale sia una questione biologica, accreditando la tesi per cui siano le variabili ambientali e sociali a determinare questa differenza.
Un'ulteriore osservazione che scaturisce dal grafico è l'analisi della situazione italiana: la media OCSE è un divario a vantaggio dei ragazzi per 8 punti percentuali, mentre in Italia il vantaggio si assesta a 20 punti percentuali, posizionando il nostro paese al quartultimo posto tra i paesi OCSE.

Cause del divario di genere in matematica
Trattandosi di un fenomeno sociale complesso, le cause sono molteplici e interconnesse. Si divideranno e analizzeranno le cause in tre ambiti, per semplicità, ma sempre tenendo a mente la mutua influenza che queste hanno le une sulle altre. Verranno quindi affrontate come cause: gli stereotipi di genere, la math anxiety e l'assenza di role model.

Stereotipi di genere. Con *stereotipo* si intende un'opinione rigidamente precostituita e generalizzata su persone o gruppi sociali. Di per sé gli stereotipi non sono necessariamente negativi, così come i pregiudizi, sono i primi componenti del modo in cui analizziamo il mondo: diventano però pericolosi nel momento in cui plasmano il mondo, senza lasciare possibilità di evadere da tali stereotipi. Se cioè non sono la base di un giudizio più ampio e complesso su interi gruppi sociali, ma se rimangono l'unico metro di giudizio di tali persone.
In particolare, ci concentriamo sugli stereotipi di genere che riguardano la scienza. È infatti opinione comune che alle ragazze la matematica non piaccia e che non ci siano portate, al contrario dei maschi che invece sarebbero dotati di quella genialità innata necessaria a comprendere le scienze. Sebbene possa

sembrare un problema secondario, è stato studiato (Ertl, Luttenberger, & Paechter, 2017) come questi stereotipi vengano introiettati dalle ragazze e causino una minore stima di sé in relazione alla matematica.
Gli stereotipi agiscono da un lato come giustificazione in caso di insuccesso scolastico, perché la responsabilità del successo è affidata a un talento innato, e non è quindi responsabilità del singolo. D'altra parte, la convinzione che il genio matematico sia prerogativa maschile, fa sì che le ragazze sottostimino le proprie capacità anche in caso di successo, attribuendo un voto alto più alla fortuna o all'impegno, che a una propria predisposizione.

Math anxiety. Come anticipato, gli stereotipi di genere possono portare a una scarsa stima di sé in relazione alla matematica. Questo fenomeno è connesso alla *math anxiety* o ansia matematica, definita come un sentimento di tensione, apprensione o paura che si manifesta in una situazione che richiede l'uso della matematica e che interferisce con la performance matematica (Ashcraft, 2002). Come si evince dalla definizione, l'ansia matematica non è unicamente un atteggiamento negativo nei confronti della matematica, ma va a compromettere la buona riuscita di una prova. Una math anxiety forte si traduce di frequente nell'evitare situazioni in cui sia presente la matematica, da corsi avanzati a facoltà scientifiche. Venendo esposti meno di frequente a stimolazioni matematiche, si va ad alimentare questo atteggiamento negativo e la bassa considerazione delle proprie capacità matematiche. In conclusione, quindi, chi presenta l'ansia matematica sviluppa meno competenze di chi non la ha, da un lato perché è esposto meno alla materia, dall'altra perché l'atteggiamento negativo fa apprendere un minor numero di nozioni.
La math anxiety presenta delle differenze in base al genere (Devine, Fawcett Williams, Szűcs, & Dowker, 2012): le ragazze presentano una maggiore ansia matematica rispetto ai ragazzi. Inoltre, la math anxiety nelle femmine è mediamente più legata alla percezione della materia, mentre nei ragazzi è maggiormente correlata alla perfomance. Le ragazze, cioè, presentano un'alta math anxiety in generale, che inficia i loro risultati, ma è costante. I ragazzi invece sviluppano un'ansia maggiormente legata alla prova di matematica (*test anxiety*) e spesso deriva da precedenti prove scadenti: l'ansia matematica maschile, quindi, è causata più da una consapevolezza di scarsa preparazione, mentre quella femminile è apparentemente ingiustificata. A partire da quanto detto in precedenza è però chiaro che la giustificazione dell'ansia femminile va ricercata in convinzioni sociali e stereotipi, piuttosto che in una scarsa preparazione individuale.

Assenza di role model. La figura di *role model* può essere tradotta come "persona a cui ambire come punto di riferimento". Possono essere role model personaggi reali o immaginari, presenti o passati, sportivi o intellettuali. Tendenzialmente i ragazzi si identificano esclusivamente in personaggi maschili, mentre per le ragazze è indifferente il genere di appartenenza del modello, ma lo scelgono in base al sistema di valori (Meier, 2015). Concentrandoci sui role model scientifici, questa differenza è più che giustificata: sono molto più conosciuti scienziati uomini rispetto a donne, e vengono più spesso rappresentati nei media tradizionali. La genialità scientifica stereotipata a cui si faceva menzione prima, viene spesso estremizzata e resa prerogativa di un protagonista maschile (da Sherlock nell'omonima serie BBC, a Sheldon Cooper in The big bang theory), mentre raramente è affidata a un personaggio femminile. È stato ampiamente studiato però il ruolo che role model femminili scientifiche possono ricoprire nelle scelte delle giovani ragazze. In particolare, si è studiato il così detto *Scully effect* (The Geena Davis institute on gender in media, s.d.), un fenomeno che prende il nome da Dana Scully, co-protagonista di *X-files,* serie-tv anni '90 fantascientifica: un'agente dell'FBI dall'intelligenza analitica e scettica ad ogni fenomeno paranormale. Tali studi hanno dimostrato che l'esposizione a questa serie-tv in giovane età ha portato le ragazze a una maggiore propensione verso le carriere scientifiche, dimostrando quanto vedere rappresentato un certo mestiere da una donna, può davvero far la differenza nell'immaginario giovanile.

IL PROGETTO

Da queste premesse nasce il progetto "Matematica e scienza. Sostantivi femminili", che si è sviluppato nel secondo semestre dell'anno scolastico 2020/2021 con dieci incontri della durata di circa 90 minuti l'uno. Hanno partecipato 19 istituti piemontesi per un totale di 239 partecipanti, divisi in 8 gruppi sotto la supervisione di una coppia di tutor, tra i 12 coinvolti. Al termine degli incontri si è chiesto agli studenti di produrre uno o più prodotti multimediali: meme, podcast, video, presentazioni, immagini, seguendo la propria inclinazione artistica. Sono stati creati 518 prodotti multimediali, alcuni singolarmente altri in gruppo.

Ogni incontro era suddiviso in due parti principali: un'introduzione storica in cui si raccontava la biografia di una scienziata del passato, enfatizzandone il contesto storico e le avversità che ha dovuto subire. Questa parte dell'incontro aveva una durata di circa 30 minuti, e presentava il più possibile strumenti differenti per la narrazione: presentazioni frontali, interviste immaginarie, spezzoni di film quando disponibili, in modo da diversificare il racconto.

Nella seconda metà dell'incontro poi presentava un'attività laboratoriale in ambito matematico, quando possibile correlata alla biografia della scienziata protagonista dell'incontro.

Questa divisione è stata funzionale per agire principalmente sulle cause stereotipi e math anxiety: attraverso le storie di scienziate si è cercato di sfatare il mito per cui le donne non si siano mai occupate di scienza, e attraverso le attività si è raggiunto l'obiettivo di raccontare una matematica più dinamica e interattiva, come fonte di divertimento e scoperta più che di ansia.

Per agire anche sulla carenza di role model, sono state coinvolte alcune ospiti: donne di spicco in ambito scientifico che hanno portato il proprio contributo raccontando la propria storia e quella della loro scienziata preferita. Le ospiti sono state Barbara Preti, fondatrice di *STEM by women*, un'associazione che si occupa proprio di avvicinare le ragazze alle carriere scientifiche; Sara Sesti, docente di matematica e autrice del libro *Scienziate nel tempo. Più di cento biografie*; Gabriella Greison, fisica e scrittrice di romanzi divulgativi con protagonisti i fisici del '900; Celia Hoyles, Dama della Regina ed esperta didattica della matematica.

Tabella 1. Riassunto degli incontri di matematica ed economia con rispettiva attività.

Scienziata protagonista	**Attività**	**Ospite**
Ipazia	Piegatura della carta	
Maria Gaetana Agnesi	Strega di Agnesi	Barbara Preti
Sophie De Grouchy	Dilemma del prigioniero	
Sophie Germain	Numeri complessi	
Katherine Johnson Hedy Lamarr	Funzioni armoniche	Sara Sesti
Maria Castellani	Econometria	
Emmy Noether	*Problema di Varignon*	*Gabriella Greison*
Margaret Reid	Statistica	
Daina Taimina	Geometrie non euclidee	
Celia Hoyles Emma Castelnuovo	Didattica della matematica	Celia Hoyles

Qui di seguito si affronterà il racconto di uno degli incontri, a titolo di esempio: la scienziata protagonista sarà Emmy Noether, raccontata con l'entusiasmo di Gabriella Greison, e l'attività sarà incentrata sul problema di Varignon.

Introduzione storica: Emmy Noether

La storia di Emmy Noether viene raccontata a partire dalle ostilità che ha riscontrato nel partecipare alla vita universitaria, in particolare si è intersecata la sua storia con quella tedesca del diritto delle donne all'accesso universitario. Si è pertanto insistito su come abbia prima dovuto seguire le lezioni senza la possibilità di dare esami, e successivamente, intraprendendo la carriera accademica, abbia dovuto lavorare senza retribuzione. Nel narrare le scoperte di Noether, si è tentato di farne comprendere la rilevanza, anche attraverso le interazioni e i commenti entusiastici dei suoi colleghi uomini.

Si è letto un estratto del discorso funerario che Einstein scrisse per la fisica, in modo da correlare Noether a personaggi più noti alle studentesse, ed accentuarne la rilevanza nel contesto della fisica moderna.

Infine, nella narrazione della vita della protagonista dell'incontro, vale la pena menzionare le persecuzioni razziali che ha subito nella Germania nazista, in modo da contestualizzare anche la componente storica del racconto biografico.

Presenza di ospiti: Gabriella Greison

Greison si è prestata a un'intervista in cui ha raccontato la storia di Emmy Noether, da lei citata nel volume *Sei donne che hanno cambiato il mondo*, dedicato proprio a sei celebri scienziate, che vengono spesso dimenticate nella storia della scienza. L'entusiasmo di Greison e la forma dinamica dell'intervista ha riscosso un notevole successo tra le partecipanti, che hanno riportato un feedback positivo dell'esperienza. Diverse ragazze si sono infatti procurate alcuni libri della scrittrice e ci hanno comunicato la loro decisione di leggerli in seguito all'incontro del progetto.

Nell'intervista all'ospite si è poi parlato della sua esperienza scientifica, di come si sia avvicinata alla fisica e in particolare alla passione per i fisici del '900. Greison ha enfatizzato il ruolo che la sua curiosità fin da bambina ha avuto nella scelta di una facoltà che prometteva di spiegare come funzionasse il mondo, raccontando che la passione per la fisica moderna nasce a partire dalla foto del congresso Solvay che costituisce anche la copertina di *L'incredibile cena dei fisici quantistici*.

Alla domanda se il suo genere sia mai stato percepito come un ostacolo dalle persone intorno a lei, ha confermato che le resistenze maggiori le ha riscontrate all'esterno dell'ambiente scientifico, dove i suoi conoscenti e parenti rimanevano stupiti dal fatto che aveva scelto una carriera scientifica. Al contrario, all'interno della sua carriera scientifica e divulgativa, afferma di essersi sempre sentita rispettata al pari dei propri colleghi.

Si arriva poi a parlare del suo esordio in televisione su *Focus tv* con il programma *Il favoloso mondo della Fisica Quantistica*, nel dicembre 2020. Un format divulgativo scritto e condotto da lei, con protagonista la fisica quantistica e un modo di fare divulgazione che si discosta dalla tradizionale visione statica della fisica. Attraverso questa intervista si è quindi ottenuto un punto di vista interno sulla scienza di oggi e sul mondo divulgativo in televisione e non solo: Gabriella Greison è anche autrice teatrale, dove porta uno spettacolo su Mileva Marić dal titolo *Einstein e me*, e questo aspetto ci ha permesso di mostrare anche una possibilità di far incontrare la passione della scienza con quella letteraria o teatrale. Nell'ottica di proporre role model contemporanee, questo intervento è stato fondamentale anche per riflettere su quali siano le carriere scientifiche oggi, che non si esauriscono necessariamente in un laboratorio o in un'aula, ma possono coesistere con una realtà più ampia, composta di passioni e inclinazioni che paiono lontane dal piano matematico.

Attività: Problema di Varignon

Inizialmente viene fornita una consegna generica: *dato un quadrilatero ABCD, analizzare come varia il quadrilatero costruito unendo i punti medi al variare di ABCD.* Senza ulteriori indicazioni sulla modalità di indagine, si lasciano i partecipanti liberi di esplorare la situazione con i mezzi più congeniali al proprio metodo di apprendimento. Chi sceglie di usare la carta, chi un software come GeoGebra, chi sceglie di iniziare dal caso particolare del quadrato, andando poi verso il generico quadrilatero, chi il percorso inverso, alcuni decidono di lavorare in gruppi, altri singolarmente.

Inoltre, non avendo un punto di arrivo specificato, le congetture possono riguardare ogni aspetto delle figure: angoli, lati, aree, perimetri, a seconda dell'occhio di ognuno.

Questo poter percepire la matematica come indagine, permette di distaccarsi dalla visione della materia come un percorso definito e lineare da un punto A ad un punto di arrivo B, e renderla invece più umana, interattiva e sensibile alle differenti osservazioni di ognuno.

Le congetture degli studenti vengono poi riportate su *Jamboard*, anonimamente, per evitare l'ansia che deriva dall'errore. In questo modo si raccolgono le idee in un unico posto, da cui è più semplice commentarle, correggerle e integrarle.

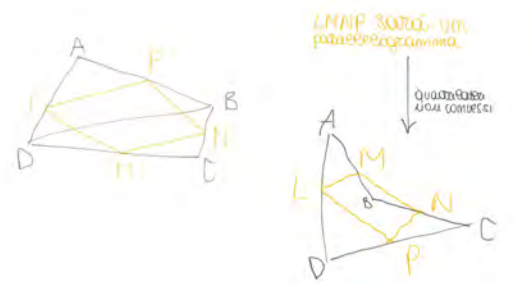


Figura 2. Un esempio di contenuti pubblicati anonimamente su Jamboard. Parte del ragionamento dei partecipanti

L'utilizzo di una lavagna condivisa mette in luce un altro importante aspetto della matematica: il dialogo. Così come nelle scoperte scientifiche è necessario un lavoro di squadra, allo stesso modo nelle esplorazioni matematiche si rende fondamentale la cooperazione in classe: il contributo di ogni membro è cruciale per la buona riuscita dell'attività, anche e soprattutto gli errori. In questo contesto si inserisce anche l'elemento di valorizzazione degli errori compiuti nella fase esplorativa: non qualcosa da condannare, ma piuttosto un'occasione di crescita e scoperta. La speranza è che, non demonizzando gli errori, si arrivi a un approccio più positivo nei confronti della matematica, senza l'ansia di sbagliare, che peggiora le performance.

Infine, per riassumere i vari casi affrontati e quanto si è scoperto insieme, viene proposto un quiz sotto forma di gioco. L'idea è di stimolare la sana competizione con sé stessi, permettendo di ripetere il quiz quante volte si vuole, per migliorare il punteggio, e rendere divertente la matematica.

Figura 3. Esempio di gioco riassuntivo: su Wordwall.net è possibile cambiare anche i temi o le modalità

L'utilizzo del gioco riassuntivo è stato anche un efficace strumento per mantenere alta l'attenzione nonostante la modalità da remoto tenda a essere più limitante per i laboratori didattici.

FEEDBACK

Il riscontro da parte delle studentesse è stato molto soddisfacente, sebbene la componente online sia stata una difficoltà nell'entrare in confidenza con le ragazze. Soprattutto negli incontri iniziali si è notata una scarsa partecipazione e coinvolgimento, che però è andata ad aumentare nel corso dei 10 incontri, fino a costruire un rapporto di fiducia tra i tutor e il proprio gruppo. Di frequente i tutor hanno costituito anche un ponte tra scuola superiore e università, rispondendo alle perplessità in merito al mondo universitario e svolgendo una funzione di orientamento in uscita. In questo senso le diverse esperienze e background degli universitari, sono serviti come occasione di scambio e arricchimento.

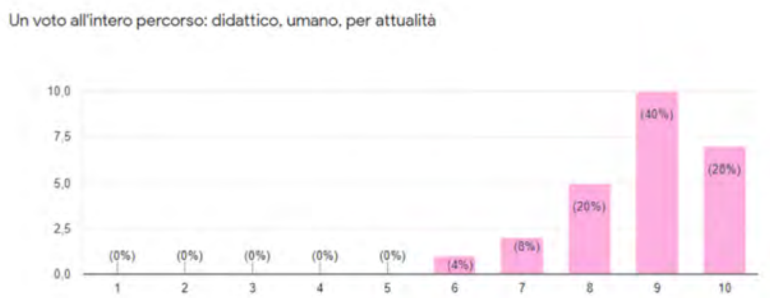


Figura4. Feedback finale dei partecipanti al progetto

Alcuni commenti delle ragazze si sono concentrati sull'entusiasmo e la passione dei tutor, altri sul fatto che certi argomenti erano difficili ma interessanti, altri sul fatto che il percorso abbia permesso di riflettere su alcuni aspetti su cui non si erano concentrate in passato.
L'aspetto di cui siamo particolarmente fiere è l'aver veicolato il concetto che possano coesistere gli aggettivi *difficile* e *interessante* quando si affrontano argomenti matematici. L'intenzione di alcune attività, incentrate su temi extra-curricolari, era proprio quello di stuzzicare la curiosità in merito alla vastità del campo matematico, che non si esaurisce con l'esecuzione meccanica di esercizi in classe, senza necessariamente doverla soddisfare per intero. Affiancare l'aggettivo difficile con un campo semantico legato all'interesse e alla scoperta è indubbiamente un primo passo per discostarsi dalla math anxiety, dove un argomento difficile viene associato a sentimenti negativi, e piuttosto avvicinarsi all'esplorazione scientifica e alla matematica come dinamica e interattiva.

RINGRAZIAMENTI

Un sincero ringraziamento alla professoressa Robutti che ha creduto in questo progetto fin dall'inizio e si è impegnata a renderlo possibile. Un grazie a Giulia Bini che ha condiviso la sua esperienza per rendere le attività più interattive e coinvolgenti, con una pazienza infinita.
E infine un grazie a tutte le persone che hanno collaborato per la buona riuscita di questo percorso, dalle docenti ai tutor, e alle ragazze e ragazzi che hanno partecipato con entusiasmo e serietà.

BIBLIOGRAFIA

Ashcraft, M. (2002). Math anxiety: personal, educational, and cognitive consequences. *Current directions in psychological science*, 181–185.

Devine, A., Fawcett Williams, K., Szűcs, D., & Dowker, A. (2012, Luglio). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and Brain Functions, 8*.

Ertl, B., Luttenberger, S., & Paechter, M. (2017). The impact of gender stereotypes on the self-concept of female students in STEM subjects with an under-representation of females. *Frontiers in psychology, 8*, 703.

Greison, G. (2017). *Sei donne che hanno cambiato il mondo.* Bollati Boringhieri.

Meier, M. (2015, Marzo 02). The value of female sporting role models. *Sport in Society, 18*, 968-982.

The Geena Davis institute on gender in media. (n.d.). *Potray her: reppresentations of women STEM characters in media.*

The Geena Davis institute on gender in media. (n.d.). *The Scully effect: I want to believe in STEM*. Retrieved from seejane.org: https://seejane.org/research-informs-empowers/the-scully-effect-i-want-to-believe-in-stem/

DALLE MATRICI ALLE IMMAGINI DIGITALI - PROGETTO KLEIN ITALIA

Monica Mattei[1], Eleonora Faggiano[2]
[1]International School of Turin (TO), [2]Università di Bari Aldo Moro
eleonora.faggiano@uniba.it

Abstract
Il Progetto Klein Italia mira alla costituzione di una comunità di apprendimento basata sui contatti tra le scuole e la ricerca matematica contemporanea e utilizza come strumento di veicolazione di questo legame le cosiddette "Klein vignettes", ossia dei brevi scritti che illustrano ciascuno uno specifico tema della matematica più moderna. In questo articolo si presenta una possibile trasposizione didattica della vignetta denominata "Matrici e immagini digitali", progettata da un nutrito gruppo di insegnanti e ricercatori nell'ambito del Progetto Klein Italia e del Gruppo UMI Licei Matematici.

Parole-chiave
Trasposizione didattica, Tabelle e Matrici, Immagini Digitali, Python.

INTRODUZIONE

Il tema della elaborazione delle immagini digitali, matematicamente basato sulle matrici, può essere utilizzato lungo tutto l'arco dei cinque anni della Scuola Secondaria di Secondo grado come spunto per introdurre alcuni interessanti argomenti matematici ai margini delle tradizionali pratiche scolastiche. L'idea alla base del lavoro effettuato dal gruppo[11] di insegnanti e ricercatori che ha progettato la proposta descritta in questo articolo è stata quella di partire dal guardare le tabelle come funzioni definite nel prodotto cartesiano di due insiemi di indici e giungere alle tecniche numeriche per il trattamento delle immagini digitali e alle loro implementazioni attraverso un diffuso linguaggio di programmazione quale Python, passando per una introduzione alle matrici come operatori e alle trasformazioni sulle matrici. Le attività sviluppate nel progetto sono pensate per essere proposte in sequenza ma sono allo stesso tempo auto consistenti e autonome l'una dall'altra, a patto che gli studenti posseggano i prerequisiti per affrontarle. Si prestano a essere svolte anche in modalità a distanza e sono accompagnate da suggerimenti per ulteriori approfondimenti disciplinari e interdisciplinari.

IL PROGETTO KLEIN E IL PROGETTO KLEIN ITALIA

Il Progetto Klein è un progetto dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) nato con l'intento di trasferire nel presente le idee del noto libro di Felix Klein "Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore" – la cui versione originale in tedesco è stata recentemente tradotta in inglese da Menghini e Schubring (Klein, 2016) – e presentare agli insegnanti di Scuola Secondaria di Secondo grado temi di matematica contemporanea che possano incuriosire, informare e alimentare l'entusiasmo verso la disciplina e il suo insegnamento. Nell'ambito di tale progetto sono stati prodotti, e anche tradotti in molte lingue, diversi materiali denominati "vignette". Una "vignetta" è un breve testo su un singolo interessante argomento ed è pensata per offrire un senso di connessione tra la matematica del mondo degli insegnanti e la ricerca e le applicazioni contemporanee nelle scienze matematiche.

---

[11] Ferdinando Arzarello, Antonella Azzone, Rosa Buono, Alberto Cena, Paolo Da Pelo, Eleonora Faggiano, Stefano Finzi Vita, Giovanna Guidone, Maria Rosa Marrone, Monica Mattei, Federica Mennuni, Davide Passaro, Gabriella Righetti, Nunzia Santacroce, Michele Somma, Daniela Tondini, Francesca Tovena

Ogni "vignetta" prodotta nel Progetto Klein inizia con un argomento che risulti familiare per l'insegnante e si sposta poi verso una maggiore comprensione dell'argomento attraverso un pezzo di matematica interessante, per concludersi con l'illustrazione di un principio chiave della matematica. Non è una risorsa per l'uso in classe, ma una fonte di ispirazione a cui gli insegnanti possono attingere.
Il Progetto Klein Italia, invece, nasce nell'ambito delle attività del Gruppo UMI Licei Matematici con l'obiettivo di colmare il divario tra la matematica oggetto delle vignette e il loro utilizzo nelle classi attraverso un processo di trasposizione didattica (Chevallard, 1985). Per cogliere gli spunti forniti dalle "vignette" del Progetto Klein, il progetto Klein Italia si propone di realizzare delle cosiddette "vignette ponte", ovvero delle proposte didattiche che possano avvicinare gli studenti alle applicazioni contemporanee nelle scienze matematiche e allo stesso tempo fornire loro interessanti strumenti matematici.
Nell'ambito del Progetto Klein Italia, nel gennaio del 2020 si sono costituiti i primi due gruppi di lavoro e si è scelto di partire con la trasposizione didattica delle vignette "Simmetria passo a passo" e "Matrici e immagini digitali". In questo articolo presentiamo il lavoro fatto dal gruppo, coordinato dal prof. Arzarello, sulla seconda vignetta.
I contenuti della vignetta hanno richiesto una prima fase di studio e di discussione volta anzitutto a identificare gli argomenti che meglio si prestavano a essere presentati e approfonditi per essere fruiti da insegnanti e studenti della Scuola Secondaria di Secondo grado. In particolare, è stato utile comprendere quale e quanta matematica soggiace al trattamento delle immagini digitali e quindi come funzionano i software (come per esempio Gymp, https://www.gimp.org/) di elaborazione delle immagini digitali (Gonzales e Woods, 2017; Dey, 2018).
Ci si è poi suddivisi in gruppi di lavoro per predisporre due diversi percorsi, pensati per essere svolti in sequenza ma auto consistenti, e preparare i materiali che saranno resi disponibili sul sito nazionale dei Licei Matematici (www.liceomatematico.it).

TRASPOSIZIONE DIDATTICA DELLA VIGNETTA "MATRICI E IMMAGINI DIGITALI"

La proposta che presentiamo, come anticipato, trae spunto dalla vignetta Klein "Matrici e immagini digitali"[12]. L'obiettivo generale è quello di delineare un iter matematico specifico che, partendo da attività su griglie e tabelle, e passando per l'introduzione delle matrici e il loro uso come operatori per trasformazioni geometriche, consenta di comprendere come effettuare elaborazioni su immagini digitali e quindi sottolineare l'importanza del pensiero matematico nello sviluppo e nella fruizione della moderna tecnologia.
Le attività sono pensate per essere svolte nel contesto del laboratorio matematico inteso come bottega rinascimentale – ovvero come "insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici" (UMI, 2003) – in cui gli studenti imparano facendo e discutendo tra pari sotto la guida dell'insegnante, che ha il compito di far nascere curiosità e generare un apprendimento effettivo della matematica non ridotto alla riproduzione di pratiche algoritmiche non comprese.
Le schede, predisposte per essere utilizzate in classe con gli studenti, sono corredate da materiali di supporto per il docente, con approfondimenti teorici e suggerimenti metodologici.

Struttura

Le attività sono organizzate in due percorsi che si prestano a essere svolti anche in modalità a distanza.
Il primo percorso, denominato "Tabelle e Matrici", è adatto ad alunni/e del primo biennio della Scuola Secondaria di Secondo grado. Può essere integrato con attività che prevedano l'uso di strumenti tecnologici come Snap! e GeoGebra, facilmente accessibili nel primo biennio. Alcuni approfondimenti possono essere proposti anche alle classi del secondo biennio.
Il secondo percorso, denominato "Python" in quanto interamente costruito utilizzando tale linguaggio di programmazione, fornisce invece un approfondimento interdisciplinare sulle immagini digitali da

[12] La vignetta è disponibile nella versione italiana al seguente link: http://blog.kleinproject.org/?p=1742&lang=it

svolgere prevalentemente a partire dal secondo biennio della Scuola Secondaria di Secondo grado. Può essere visto come una naturale continuazione del percorso Tabelle e Matrici ma anche configurarsi come un percorso autonomo ove gli studenti abbiano i prerequisiti indicati.
Il percorso Tabelle e Matrici risulta così strutturato:

- *Attività 1: Familiarizziamo con indici riga e colonna*

  Attraverso momenti di gioco-sfida, in un percorso di scoperta e riflessione, si fa emergere negli studenti l'importanza di utilizzare una notazione condivisa per indicare le celle di una tabella per introdurre poi gli indici di riga e di colonna. Gli studenti familiarizzano quindi con l'uso delle coppie di indici arrivando a riflettere sulla relazione tra prodotto cartesiano di insiemi e la posizione/rappresentazione delle celle in una griglia.

- *Attività 2: Le tabelle come funzioni*

  Le tabelle vengono viste come funzioni che a ogni cella (o, meglio, alla coppia dei suoi indici) associano un elemento di un insieme prefissato. Obiettivo dell'attività è infatti comprendere che creare un'immagine equivale a comporre una tabella, cioè a definire una funzione in cui a ogni cella si associa un colore.

- *Attività 3: Composizione di funzioni e cambio di colore*

  In questa attività la composizione di funzioni diventa strumento per operare sulle tabelle-immagini e modificare il colore delle sue celle-pixel. Si lavora sulle funzioni con l'obiettivo di comprendere che la composizione di funzioni permette di ottenere alcune modifiche sulle immagini.

- *Attività 4: Trasformare l'immagine con la composizione di funzioni*

  Si analizza la composizione di una funzione dell'insieme delle coppie di indici in sé con una funzione-tabella. Questa trasformazione dell'immagine richiede una elaborazione più articolata e produce effetti che sono più complessi da evidenziare rispetto al "cambio di colori" della precedente attività. Il confronto tra l'immagine iniziale e l'immagine modificata appare come un "movimento" delle caselle: la percezione del movimento viene accentuata quando la figura modificata è ottenuta, per esempio, tramite una rotazione o una simmetria assiale.

  Tale attività pone le basi per affrontare lo studio delle trasformazioni affini, per comprendere come determinare l'equazione cartesiana di una figura trasformata.

- *Attività 5: Matrici, Vettori, Combinazioni Lineari, Trasformazioni Affini e Immagini Digitali*

  Viene introdotto in modo operativo il concetto di vettore che, attraverso le sue coordinate, descriverà uno spostamento da effettuare. Si procede poi a mostrare come si possano raggiungere tutti i punti di una griglia attraverso opportune combinazioni di alcuni passi assegnati. Sarà il modo, questo, di introdurre l'idea di combinazione lineare, di reticolo piano e di involucro lineare (linear span) in modo intuitivo e operativo. Nell'ultima fase dell'attività viene mostrato come una combinazione lineare di due vettori dati si possa esprimere in modo formale attraverso il prodotto di una matrice con un opportuno vettore.

Per il secondo percorso si è scelto di utilizzare Python, in quanto linguaggio di programmazione facile da imparare e introdotto in molte scuole sin dai primi anni, e la piattaforma Colab di Google (una interfaccia interattiva su cui è possibile scrivere i programmi e vederli girare senza dover scaricare Python sul proprio pc) attraverso la gestione di singoli Notebook tematici, uno per ogni argomento.
La flessibilità di Colab consente al docente di decidere, in totale autonomia, di tagliare, modificare o spostare intere celle di testo e codice, potendo così scegliere quali argomenti trattare tra quelli elencati, se eliminare una parte del codice fornito invitando lo studente a completarlo oppure se fornire agli studenti esercizi aggiuntivi sulla base di quelli proposti. Il docente può, in definitiva, comporre il proprio percorso didattico smontando e ricostruendo i Notebook Colab offerti (per questo viene fornito ai docenti anche un Tutorial per l'utilizzo didattico dei Notebook).

In ogni Notebook è richiamata brevemente la parte di teoria relativa all'argomento trattato e in ogni codice sono riportate le spiegazioni relative alle funzioni utilizzate.
Anche il percorso Python è articolato in cinque attività, ciascuna associata a uno o più specifici Notebook:

- *Attività 1: Introduzione all'uso del linguaggio Python in generale*

  Si illustra come importare moduli, cicli, alternative, come creare un vettore o una matrice e come creare un grafico nel piano cartesiano. Sono riportati, inoltre, semplici esempi per familiarizzare con i comandi base e prepararsi alle sfide successive. Si tratta di un modulo da usare qualora non sia stata già svolta un'attività simile.

- *Attività 2: Introduzione al calcolo vettoriale e matriciale con Python*

  Si illustra come effettuare le operazioni tra vettori e matrici. Le matrici, inoltre, vengono trattate come operatori per trasformazioni geometriche di semplici figure piane, con particolare riguardo alle isometrie (traslazioni, simmetrie, rotazioni), alle trasformazioni affini e alle omotetie.

- *Attività 3: Dalla matrice all'immagine digitale e viceversa*

  Dopo aver richiamato i concetti di pixel, immagine vettoriale e immagine bitmap, si illustra come ottenere in Python le immagini binarie (bianco e nero), in scala di grigi e a colori (RGB). Ci si sofferma sui vari formati di compressione (jpeg, png, bmp, gif, tiff) per poi analizzare il passaggio dalla matrice all'immagine e viceversa, nonché sulla costruzione e analisi di semplici immagini binarie, sulla mappa dei colori principali nel sistema RGB e sulla scomposizione di un'immagine nelle tre bande.

- *Attività 4: Manipolazione di immagini digitali*

  Si illustrano le azioni ottenibili con semplici manipolazioni delle tabelle delle immagini, quali la copertura, il taglio o la scalatura di porzioni di un'immagine e il collage, e le azioni sulle bande dei colori per variarne le intensità. Si passa poi ad analizzare gli effetti soglia, il passaggio da RGB a scala di grigi, la transizione da un'immagine a un'altra (somma di immagini) e lo shift di un pixel per l'individuazione dei bordi (differenza di immagini).

- *Attività 5: Modulo di approfondimento su alcune elaborazioni complesse di immagini digitali*

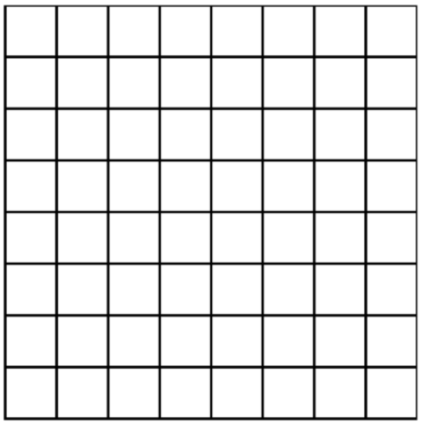
  Si discutono le idee matematiche sottostanti ad alcune elaborazioni complesse di immagini. Ci si sofferma per esempio sui filtri di convoluzione, lineari e non lineari, e sulle azioni locali attorno a ogni pixel con effetto di sfocamento (blur), per determinare i contorni (edge detection) o per rimuovere il rumore (noise filtering). Si analizzano, infine, le trasformazioni geometriche applicate alle immagini digitali e la compressione delle immagini, in particolare la decomposizione SVD.

ESEMPI DI ATTIVITÀ

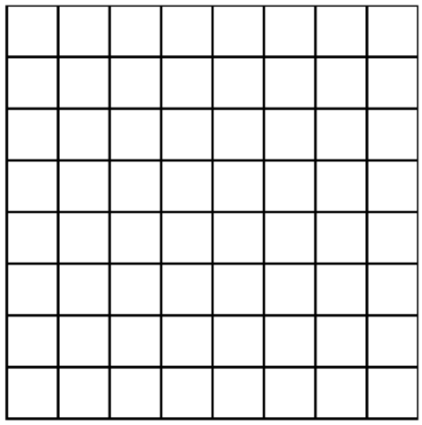
Riportiamo di seguito un paio di esempi di attività tratti dai due percorsi sviluppati.

Dal percorso "Tabelle e matrici" - Attività 1.1: Indovina la lettera o il numero
In questa attività iniziale del Percorso, che si ispira al più famoso gioco di "Battaglia navale", l'alunno deve ricostruire la lettera o il numero così come è stato rappresentato su una griglia dal compagno con cui è in coppia (Fig.1). A differenza del gioco, in questo caso non sono state messe delle etichette alle righe e alle colonne in quanto l'obiettivo principale di tale attività è proprio quello di far riflettere i ragazzi su come "chiamare" le celle in maniera efficace e riconoscere la necessità di introdurre una notazione condivisa (quella degli indici di riga e di colonna).

Attività 1.1 Indovina la lettera o il numero



Griglia 1



Griglia 2

- Disegna sulla Griglia 1 una lettera o un numero, senza farti vedere dal tuo “avversario”. Rappresenta la lettera o il numero colorando di nero i quadratini della griglia.
  Puoi orientare la lettera o il numero come desideri (per esempio può anche essere capovolto, ruotato, …).

- Non indicare al tuo “avversario” se hai disegnato un numero o una lettera (non dire se è una vocale, una consonante, un numero pari o dispari, …).

- Sorteggiate chi deve iniziare a giocare.

- Il primo giocatore (**A**) “chiama” (cioè indica a parole) una cella cercando di indovinare una di quelle colorate dal compagno. Il secondo giocatore (**B**) risponde segnalando se la cella indicata è annerita o no nel disegno da lui fatto.
  Il giocatore **A**, se ha indovinato, colora la corrispondente cella nella sua Griglia 2. Altrimenti, segna con una X la casella chiamata, in modo da ricordare che la casella è stata verificata.

- Che **A** abbia “indovinato” oppure no, i ruoli si scambiano. Il giocatore **B** “chiama” una cella: se indovina colora di nero la corrispondente cella della sua Griglia 2, altrimenti inserisce una X.

- Procedete così a turno, alternandovi, fino a quando tutti e due avrete completato la ricostruzione della lettera o del numero del vostro compagno nella Griglia 2.

Riflettiamo!
Come avete comunicato la posizione delle celle? Avete usato sempre lo stesso metodo o avete cambiato indicazioni andando avanti nel gioco?
……
……
……

Avevate già visto griglie di questo tipo? Se sì, di che cosa si trattava?
……
……
……

Figura 1. Esempio di scheda studente.

Dal percorso "Python" - Attività 3: Dalla matrice all'immagine digitale e viceversa
In questa attività, sviluppata nel relativo Notebook, si inizia a lavorare con immagini in bianco e nero. In particolare, in Figura 2 sono contenute le istruzioni per creare una semplice immagine formata da un quadrato bianco all'interno di un quadrato nero.
Si osservi la struttura comune delle attività proposte: esse sono sempre pensate con una breve parte introduttiva di tipo teorico contenente anche una spiegazione di quanto si andrà a fare in linguaggio Python. In Figura 3 si trova il codice sorgente (che l'insegnante può a sua descrizione nascondere o, al contrario, lasciare allo studente da completare) e l'output prodotto.

Matrici e immagini

Cominciamo dal creare un'immagine in bianco e nero da una matrice

Pensiamo a una tabella di $N \times N$ pixels (quadratini) colorati in uno dei due colori: 0 per il nero e 255 per il bianco. Allora per creare tale immagine basterà definire una matrice $A = \{a_{ij}\}$, dove ogni valore a_{ij} indica il colore del pixel che si trova alla i-ma riga e alla j-ma colonna (con $i, j = 1...N$) della tabella.

N.B. Alle librerie standard di python possiamo aggiungere una serie di librerie molto utili per:

- gestire immagini,
- fare grafici,
- modificare immagini attraverso algoritmi.

1. Creiamo una immagine formata da un quadrato bianco di 32x32 pixels al centro di un quadrato nero di dimensioni 64x64. Poi salviamola ad esempio come file *png* (ma potremmo farlo in altri formati).

N.B. È essenziale scegliere un'opportuna mappa dei colori in grado di associare ai valori numerici i colori desiderati. Per le immagini in bianco e nero (e in generale per quelle in scala di grigi) una possibilità è usare la *colormap* 'gray'.

Figura 2. Esempio di istruzioni per gli studenti.

OSSERVAZIONE CONCLUSIVA IN MERITO ALLA VALUTAZIONE

Il nostro lavoro sul tema delle "Immagini Digitali" ci ha portato a percorrere un terreno inesplorato dal punto di vista didattico e a formulare una proposta per un lavoro in classe centrato su forme di apprendistato cognitivo (Collins, Brown e Newman, 1989).
L'apprendistato cognitivo non è finalizzato solo ad abilità e processi pratici, realizzati fisicamente, ma anche (e principalmente) ad abilità e processi di natura cognitiva e metacognitiva. Quindi, il docente (che nel laboratorio assume il ruolo di esperto-tutor) può strutturare via via le conoscenze di chi apprende, e quest'ultimo può osservare il docente, può correggere e affinare la propria pratica analizzando l'esternalizzazione da parte dell'esperto dei suoi processi e metodi cognitivi interni rilevanti e confrontando tali processi con la propria prestazione intellettuale. Occorre una sorta di autovalutazione continua che il discente può attivare se la sua distanza dalle prestazioni esperte non è troppa (Vygotskij, 1990).

```python
import numpy as np #numeric python
import matplotlib.pyplot as plt #libreria per fare i grafici
from PIL import Image #libreria PIL (Python Image Library) per le immagini

numpy_array=np.zeros([64,64],dtype=np.uint8) #matrice 64x64 di zeri (interi)
numpy_array[16:48,16:48]=255 #cambiamo colore ai pixels centrali
#plt.axis('off')
plt.imshow(numpy_array,cmap='gray')  #usiamo la colormap 'gray'
plt.show()

pil_img=Image.fromarray(numpy_array)
pil_img.save("Image.png") #salviamo l'immagine in formato png
```

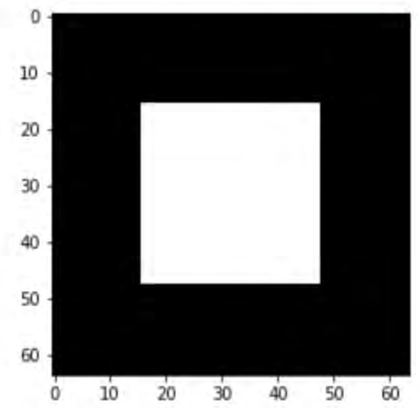


Figura 3. Esempio di codice sorgente e di relativo output.

Pensiamo che, vista la ricchezza di stimoli offerti e le possibilità di approfondimenti, si possa fare di questo laboratorio l'occasione per un approccio valutativo più integrale, in cui aiutare e osservare gli studenti nel loro percorso di esplorazione, costruzione e sistematizzazione di nuovi concetti, secondo le pratiche di un apprendistato cognitivo ricco e produttivo, in cui lo studente percorrerà le varie tappe delle conoscenze e delle pratiche con le immagini digitali. Le attività proposte saranno efficaci se il docente riuscirà a rendere palpabili agli allievi tutti gli ostacoli che una loro lettura puramente algoritmica rischia di produrre e permetterà loro di superare le "trappole epistemiche" che il lavoro con le prime nozioni dell'algebra lineare rischia di produrre.

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia tutto il gruppo di lavoro del Progetto Klein Italia che ha sviluppato la vignetta-ponte "Matrici e immagini digitali".

BIBLIOGRAFIA

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Collins A., Brown J.S. and Newman S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In L.B. Resnik (ed.) *Knowing, learning and instruction* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Dey, S. (2018). *Hands-On Image Processing with Python*. Packt Publishing, ISBN: 9781789343731.
Gonzalez, R.C., Woods, R. E. (2017). *Digital Image Processing*. Fourth Edition, Global Edition.

Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint*. (Translated by Menghini, M., & Schubring, G.) Berlin/Heidelberg: Springer.
Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Direzione Generale per la formazione, UMI, Società Italiana di Statistica, Mathesis, Liceo SA Vallisneri (2003). Matematica 2003. *Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica*. Lucca: Matteoni Stampatore.
Vygotskij, L. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Ricerche psicologiche, a cura di L. Mecacci, Laterza: Roma-Bari (nona edizione del 2001).

STRUMENTI IN SINERGIA PER LA COSTRUZIONE DEL SIGNIFICATO DI ROTAZIONE NELLA SCUOLA "A DISTANZA"

Federica Mennuni e Eleonora Faggiano
Dipartimento di Matematica – Università di Bari Aldo Moro
federica.mennuni@uniba.it, eleonora.faggiano@uniba.it

Abstract

In questo lavoro si intende presentare e analizzare i risultati di una sperimentazione didattica condotta nel Maggio del 2020 in una classe seconda di Scuola Secondaria di Primo Grado~~,~~ in contesti di didattica a distanza. Nel percorso didattico proposto, progettato e sviluppato secondo la Teoria della Mediazione Semiotica, il significato matematico di rotazione e delle sue proprietà caratteristiche è stato costruito attraverso l'uso sinergico di risorse digitali e non, andando oltre la semplice definizione della trasformazione. Gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, hanno lavorato su attività laboratoriali manipolative e sono giunti alla costruzione dei significati grazie all'interazione con un software di geometria dinamica durante la successiva discussione collettiva, orchestrata dall'insegnante. Nonostante le difficoltà riscontrate nelle interazioni tra gli studenti per i limiti dovuti alla DaD, l'analisi dei risultati ha mostrato che la rivisitazione in chiave "dinamica" delle attività, già affrontate mediante l'uso di strumenti manipolativi, ha consentito agli studenti di fissare l'attenzione sulle proprietà caratteristiche delle rotazioni, contribuendo a costruire quei significati che hanno poi ritrovato applicazione diretta nell'attività manipolativa.

Parole-chiave
Rotazione, Teoria della Mediazione Semiotica, Sinergia tra strumenti di diversa natura, Potenziale Semiotico, Significati condivisi.

INTRODUZIONE

A causa dell'emergenza pandemica degli ultimi due anni, la principale preoccupazione degli insegnanti è stata quella di trovare un modo efficace per dar senso e costruire significati matematici anche in contesti di didattica a distanza. Questo ha spinto gli insegnanti a ripensare alle "usuali" pratiche di insegnamento-apprendimento in modo che gli strumenti tecnologici possano essere efficacemente e consapevolmente integrati nelle attività didattiche per favorire la costruzione di significati matematici.
Nel caso della tecnologia come strumento di supporto nei processi educativi, una notevole quantità di ricerche ha mostrato che il suo uso nella pratica didattica può favorire la produzione di congetture e la necessità di verificarle, consentendo poi anche agli stessi insegnanti di creare ambienti di apprendimento adeguati in cui favorire la costruzione condivisa di significati. Inoltre, come evidenziato nel lavoro di Faggiano, Montone e Mariotti (2018), costruendo sequenze costituite da cicli didattici in cui strumenti di diversa natura sono utilizzati in modo alternato, è possibile generare una sinergia che ne potenzia la mediazione e l'efficacia nella costruzione dei significati.
Il lavoro di ricerca che presentiamo in questo articolo mira a studiare come diversi strumenti manipolativi e digitali possano essere utilizzati in sinergia per costruire significati matematici anche in contesti di didattica a distanza. A partire da questo obiettivo, in particolare ci siamo poste la seguente domanda di ricerca: "È possibile che si generi sinergia tra artefatti di diversa natura e che risulti essere efficace nella costruzione di significati matematici, anche se uno di essi (nel nostro caso quello digitale) è introdotto ed usato direttamente dall'insegnante durante la discussione collettiva?"
Per fare ciò, in questo lavoro presentiamo ed analizziamo con la lente offerta dalla Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) un percorso didattico sulle rotazioni,

svolto in un contesto di didattica a distanza con una classe seconda di Scuola Secondaria di Primo Grado, volto a costruirne il significato e a scoprirne le proprietà.

TEORIA DELLA MEDIAZIONE SEMIOTICA

Molti studi nel campo della ricerca in didattica della matematica hanno dimostrato l'efficacia della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) come strumento per progettare e implementare sequenze didattiche volte a costruire corretti significati matematici attraverso l'uso di strumenti. Al tempo stesso tale teoria permette di analizzare i dati raccolti per comprendere il processo di costruzione dei significati da parte degli studenti. Elaborato da Bartolini-Bussi e Mariotti (2008), secondo un punto di vista vygotskiano, questo quadro teorico permette, in particolare, di sfruttare le potenzialità che derivano da un'adeguata integrazione della tecnologia nell'ambiente di apprendimento, mettendo in risalto il ruolo di mediatore svolto dallo strumento in uso durante la costruzione dei significati coinvolti.
Gli elementi chiave della TMS sono la distinzione tra artefatto e strumento (Rabardel, 1995), la nozione di potenziale semiotico di un artefatto e la nozione di ciclo didattico.
Un artefatto è l'oggetto in sé, indipendentemente dal suo utilizzatore, mentre uno strumento comprende sia l'artefatto sia gli schemi d'uso adottati dal soggetto nello svolgere l'attività. Il potenziale semiotico di un artefatto rappresenta la duplice relazione che si instaura tra i significati personali che emergono dal suo uso per svolgere un determinato compito e i significati matematici che potrebbero essere evocati da tale uso. Il termine ciclo didattico, invece, fa riferimento all'organizzazione del processo di insegnamento-apprendimento in tre diverse fasi di attività, come riportato in Figura 1: attività con l'artefatto, attività di produzione individuale di segni ed infine discussioni collettive, orchestrate dall'insegnante per far emergere l'evoluzione dei segni individuali verso la produzione collettiva di segni condivisi (costruzione dei significati matematici).
Strutturando in questo modo un determinato percorso didattico, l'insegnante gioca un ruolo importante durante il processo di insegnamento-apprendimento. Infatti, l'insegnante ha la possibilità di sfruttare il potenziale semiotico dell'artefatto, usato come strumento di mediazione, attraverso una sequenza di attività didattiche specifiche, in modo da far emergere i segni artefatto prodotti dagli studenti per farli evolvere verso la corretta costruzione del significato matematico in gioco attraverso fasi di discussione collettiva.

Figura 1. Ciclo didattico

SINERGIA TRA ARTEFATTI

L'ipotesi principale alla base di questa ricerca è che dall'uso combinato di due artefatti di natura differente (in questo caso artefatti manipolativi e il software di geometria dinamica GeoGebra) si possa creare una sinergia tale da consentire agli studenti di costruire corretti significati matematici, anche in contesti di didattica a distanza. In letteratura sono presenti diversi studi che mostrano la valenza didattica dell'utilizzo di più artefatti in una stessa attività. Nell'utilizzare un artefatto vengono richiamati anche i segni emersi e gli schemi d'uso sviluppati durante la risoluzione del compito con l'altro artefatto, da qui l'utilità di usarli sempre in modo alternato. In particolare, Maschietto e Soury-Lavergne (2013) utilizzano l'espressione "duo di artefatti" in rifermento all'uso combinato di un artefatto fisico e uno digitale, basati sullo stesso oggetto matematico. I loro studi hanno messo in evidenza come sia possibile, sotto opportune condizioni, che l'uso di un "duo di artefatti" amplifichi e migliori l'esperienza di apprendimento e di costruzione di significati matematici degli studenti. Inoltre, Faggiano, Montone e Mariotti (2018) hanno inoltre mostrato come, con una opportuna progettazione di sequenze didattiche, sia possibile sfruttare la sinergia che si genera dall'uso alternato di artefatti di natura diversa e che allo stesso tempo potenzia il ruolo di mediazione e l'efficacia nella costruzione di significati.

METODOLOGIA

Partecipanti, procedura e raccolta dei dati

Il percorso didattico sulle rotazioni che presentiamo in questo lavoro è stato condotto in una classe seconda di Secondaria di Primo Grado dell'Istituto Comprensivo Palazzo Salinari di Montescaglioso (MT), composta da 20 studenti, in contesto di didattica a distanza (attraverso l'uso della piattaforma Microsoft Teams) nel mese di Maggio 2020. Questo percorso, che ha visto la classe impegnata per un totale di circa nove ore, è stato strutturato in una sequenza di tre cicli didattici, ciascuno dei quali articolato in due lezioni. In particolare, suddivisi in piccoli gruppi, gli studenti hanno lavorato su attività laboratoriali che prevedevano l'uso di strumenti manipolativi. Successivamente la fase di discussione collettiva, orchestrata dall'insegnante, ha consentito loro la condivisione dei significati anche mediante l'interazione con un software di geometria dinamica.
Ogni incontro è stato videoregistrato e trascritto in modo da poter fare una analisi dell'evoluzione dei segni secondo la lente offerta dal quadro teorico della TMS.

Descrizione dell'attività

L'intero percorso didattico sulle rotazioni è stato progettato in accordo con la TMS. Attraverso le attività dei tre cicli didattici, progettate per spingere gli studenti verso la scoperta delle proprietà della rotazione, l'obiettivo dell'intero percorso didattico è quello di far costruire il concetto di rotazione intesa come trasformazione isometrica del piano in sé caratterizzata da un punto fisso detto centro di rotazione e dall'angolo di rotazione.
Si descrivono di seguito i tre cicli didattici, evidenziando sia gli obiettivi di ogni ciclo sia le attività caratterizzanti.

Primo ciclo didattico: la costruzione di figure ruotate con carta da forno e fermacampione

L'attività del primo ciclo didattico è stata caratterizzata dalla costruzione di bandierine ruotate utilizzando uno strumento manipolativo costituito da un foglio a quadretti e un foglio di carta da forno, bloccati tra loro con un fermacampione (o anche uno spillo) posizionato prima in un certo punto P e poi in altro punto Q, già disegnati sulla carta da forno. In particolare, agli studenti è stato prima chiesto di ricalcare con il pennarello nero sul foglio da carta da forno la bandierina iniziale già disegnata sul foglio a quadretti e successivamente di ruotare il foglio a quadretti in senso orario portandolo dalla posizione orizzontale alla posizione verticale (rotazione di 90° in senso orario rispetto al punto P), di ricalcare la bandierina sul foglio di carta da forno con il pennarello rosso e di scrivere al centro di questa nuova bandierina il numero 1. Successivamente agli studenti è stato chiesto di ripetere la stessa procedura posizionando il fermacampione nel punto Q e una volta ottenuta questa nuova bandierina rossa sul foglio di carta da forno è stato chiesto loro di scrivere al centro di essa il numero 2. Inoltre, rimanendo sempre con il fermacampione nel punto Q agli studenti è stato chiesto di ruotare il foglio a quadretti a piacere (in senso orario o antiorario, ma in modo che la bandierina rimanesse sul foglio di carta da forno), di ricalcare anche questa nuova bandierina usando il pennarello rosso e di scrivere al centro di quest'ultima il numero 3. Infine, dopo aver ottenuto le quattro bandierine sulla carta da forno agli studenti è stato chiesto di scrivere individualmente cosa avevano in comune e di diverso le bandierine 1 e 2, le bandierine 2 e 3 e come erano le bandierine rosse rispetto a quella nera iniziale.

In accordo con la nozione di ciclo didattico nell'ambito della TMS, al termine di questo primo ciclo didattico è seguita una discussione collettiva, orchestrata dall'insegnante, il cui obiettivo è stato quello di far emergere l'idea di rotazione intesa come movimento rigido dipendente da un punto fisso.

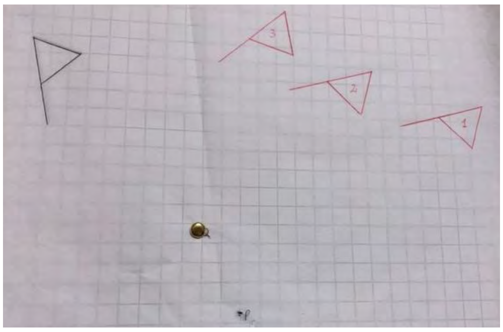


Figura 2. Strumento manipolativo del primo ciclo didattico

Secondo ciclo didattico: la costruzione di figure ruotate senza carta da forno e fermacampione

L'attività del secondo ciclo didattico è stata progettata in due fasi di lavoro, svolto sia in piccoli gruppi sia individualmente. Durante la prima fase dell'attività agli studenti si è chiesto di riprendere lo strumento manipolativo con le quattro bandierine ottenute per completare le richieste del primo ciclo didattico. L'obiettivo è stato quello di spingerli verso la scoperta delle prime proprietà della rotazione: la conservazione delle distanze e degli angoli (pari all'angolo della rotazione effettuata) tra il centro e i punti della bandierina nera iniziale e quelli tra il centro e i punti corrispondenti delle bandierine rosse. In particolare, si è chiesto loro di osservare le distanze e gli angoli che si ottengono congiungendo un punto della bandierina iniziale ed il suo punto corrispondente della bandierina 1 con il punto P e di descrivere su di un foglio ciò che osservavano.

Durante la seconda fase dell'attività, invece, agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, si è chiesto come si potesse costruire sul foglio a quadretti la bandierina 1, cioè la bandierina ruotata di 90° in senso orario a partire da P, avendo a disposizione altri strumenti manipolativi quali: riga, squadrette, compasso e goniometro. Successivamente si è chiesto loro di descrivere individualmente su un altro foglio a quadretti il procedimento di costruzione per ottenere la bandierina ruotata.

In questo caso, l'obiettivo della seconda fase dell'attività è stato quello di spingere gli studenti ad utilizzare le proprietà precedentemente scoperte per costruire, con gli altri strumenti manipolativi a disposizione, la nuova bandierina ruotata della bandierina iniziale rispetto al punto P e all'angolo di 90°. Anche in questo caso, in accordo con la nozione di ciclo didattico nell'ambito della TMS, al termine di entrambe le fasi caratterizzanti l'attività del secondo ciclo didattico, è seguita una discussione collettiva, orchestrata dall'insegnante, il cui obiettivo è stato quello di far evolvere il concetto di rotazione costruito con il primo ciclo didattico. In particolare, si intendeva far evolvere il concetto di rotazione intesa solo come movimento rigido rispetto ad un solo punto fisso verso l'idea di rotazione intesa come isometria del piano dipendente dal centro e dall'angolo di rotazione.

Terzo ciclo didattico: la determinazione del centro di rotazione

Il terzo ciclo didattico è stato anch'esso caratterizzato da un'attività di tipo manipolativo. Infatti, in questa attività agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, è stato chiesto di seguire le indicazioni riportate in Figura 3.a per riprodurre le bandierine nera e rossa su un foglio a quadretti. In particolare, la bandierina rossa (Fig. 3.b) è stata ottenuta da quella nera con una rotazione attorno ad un certo punto P. Dopo aver riprodotto le due bandierine, date come una la ruotata dell'altra, agli studenti si è chiesto di determinare il centro di rotazione utilizzando riga, squadra e goniometro. Successivamente si è chiesto loro di descrivere su un altro foglio la procedura eseguita per determinare il centro di rotazione. Anche alla fine dell'attività caratterizzante il terzo ciclo didattico, in accordo con la nozione di ciclo nell'ambito della TMS, è seguita una discussione collettiva, orchestrata sempre dall'insegnante, il cui obiettivo è stato quello di guidare gli studenti verso la caratterizzazione del centro di rotazione che trasforma una figura nell'altra. In particolare, l'obiettivo di questo terzo ciclo didattico è stato quello di spingere gli studenti a riconoscere il centro di rotazione come l'unico punto che si determina dall'intersezione degli assi dei segmenti congiungenti coppie di punti corrispondenti sulle due bandierine.

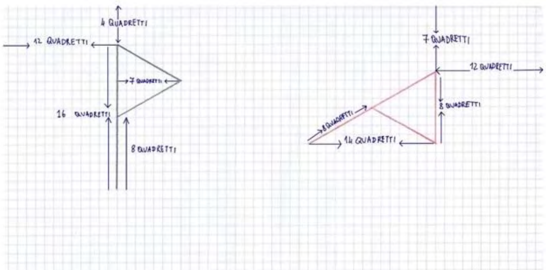


Figura 3.a: Indicazioni da seguire per riprodurre le due bandierine sul foglio a quadretti

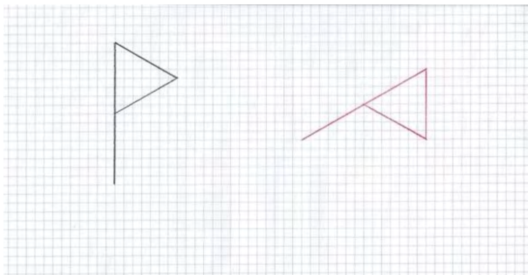
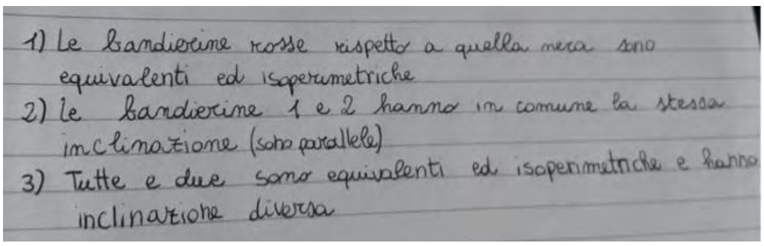


Figure 3.b: Le due bandierine ruotate senza il centro di rotazione

RISULTATI

Durante l'attività con l'artefatto manipolativo caratterizzante il primo ciclo didattico si è cercato di focalizzare l'attenzione degli studenti sull'idea di rotazione intesa come movimento rigido dipendente da un punto fisso. A partire dalle domande poste agli studenti alla fine di questa prima attività con l'obiettivo di confrontare e di osservare cosa avessero in comune e di diverso tra loro le tre bandierine ottenute con lo strumento manipolativo e rispetto a quella nera di partenza (Fig. 2), gli studenti hanno osservato che le bandierine 1 e 2 hanno la *stessa inclinazione*; invece, la 2 e la 3 hanno una *diversa angolazione*, così come riportato, per esempio, nel protocollo degli studenti in Figura 4.



1) Le bandierine rosse rispetto a quella nera sono equivalenti ed isoperimetriche
2) le bandierine 1 e 2 hanno in comune la stessa inclinazione (sono parallele)
3) Tutte e due sono equivalenti ed isoperimetriche e hanno inclinazione diversa

Figura 4: Le risposte di uno degli studenti alle domande poste nel primo ciclo

Alla richiesta di osservare come fossero tra loro le distanze e gli angoli tra coppie di punti corrispondenti e il centro di rotazione, in ogni singolo gruppo, sin da subito, gli studenti sono riusciti ad osservare che le varie distanze tra loro erano uguali e che gli angoli erano sempre uguali all'angolo scelto come angolo di rotazione. Ma, nonostante gli studenti abbiano individuato quelle che sono le proprietà caratterizzanti la rotazione, questo non è stato loro d'aiuto per completare la richiesta dell'attività finale del secondo ciclo didattico. In linea quindi con l'obiettivo alla base del secondo ciclo didattico, ovvero quello di far evolvere il concetto di rotazione inteso come movimento rigido verso l'idea di isometria del piano dipendente dal centro e dall'angolo di rotazione, durante la discussione collettiva l'insegnante ha utilizzato il software di geometria dinamica, il GeoGebra, condividendo il suo schermo.
La discussione è partita con la richiesta dell'insegnante di costruire la bandierina ruotata attorno ad un certo punto P e di un certo angolo α utilizzando lo strumento rotazione presente in GeoGebra, impostato inizialmente con lo slider sui 90°.
Dopo aver costruito la bandierina ruotata, l'insegnante ha chiesto agli studenti cosa fosse possibile osservare tra queste due figure (Fig. 5.a).

Figura 5.a: Screenshot dello schermo condiviso dall'insegnante all'inizio della discussione

Figure 5.b: Screenshot dello schermo condiviso dall'insegnante dopo la verifica sulle lunghezze dei segmenti e le ampiezze degli angoli

L'estratto che segue mostra come gli studenti abbiano evidenziato che, congiungendo i punti delle due figure con il centro P, avrebbero ottenuto sempre coppie di segmenti di uguale misura e angoli uguali all'angolo di rotazione.

Ins.: […] Andiamo a guardare, per esempio il segmento AP e il segmento A'P.
P.: Sono due segmenti che formano un angolo di 90°.
Ins.: Benissimo. Sono due segmenti che avete disegnato anche sulla carta forno ieri, e una delle cose che avete visto è che formano in P un angolo di 90°. […] Che cos'altro possiamo dire di questi *segmenti* AP e A'P?
M.: Che *sono uguali*.
Ins.: Benissimo… Che cosa succede secondo voi, se prendo B e B'? Prendo il segmento BP e ora che vado a prendere il segmento B'P (Figura 5.b), come vi aspettate che siano?
P.: Sono uguali.
Ins.: E *l'angolo* che formano?
P.: *Ancora di 90°*.

Dopo queste osservazioni, nel prosieguo della discussione l'insegnante ha spinto gli studenti ad osservare cosa accadeva quando si chiedeva al GeoGebra di cambiare il valore dell'angolo con lo slider. Gli studenti hanno osservato che, spostando lo slider, la bandierina ruotata cominciava a muoversi:

Ins.: Secondo voi che spostamento farà questo punto A'? Maria, per esempio, secondo te che traccia lascerà questo punto A'?
…
M.: *Tipo un cerchio*, cioè ruotata.
P.: Cioè potrebbe essere tipo un compasso
Ins.: Allora… che cosa farà B'? che traccia lascerà?
P.: Avrà la stessa forma

L'insegnante a questo punto ha di nuovo chiesto se fosse possibile costruire la bandierina ruotata rispetto al punto P e di un angolo di 90° senza usare lo strumento "rotazione". L'estratto riportato di seguito mostra la costruzione proposta dagli studenti per rispondere alla domanda dell'insegnante:

C.: Potremmo usare il compasso
Ins.: Per esempio, col compasso cosa devo fare?
P.: Posso ottenere la misura dal punto A fino al punto P
Ins.: Dove metto il compasso? Dove lo punto?
C.: In P.
Ins.: E quanto lo apro?
M.: Della distanza di A da P.
Ins.: Come posso fare ad ottenere un angolo di 90° in P?

P.: Possiamo usare le rette perpendicolari
Ins.: Ecco, le rette perpendicolari… voglio una retta perpendicolare…
P.: Al punto P
Ins.: Devo disegnare la perpendicolare per P… a quale retta? Quale segmento?
P.: A quello AP. Si è formato un angolo di 90°
Ins.: Ok, si è formato un angolo di 90°, adesso dove devo andare a prendere il punto A'?
C.: Un punto che si interseca, diciamo dove si interseca la retta perpendicolare.
Ins.: Si interseca con che cosa?
D.: Il primo punto che si interseca con la circonferenza
Ins.: Adesso, per trovare gli altri punti, che cosa devo fare?
D.: Lo devo congiungere con il punto in cui si interseca con la retta perpendicolare e la circonferenza.

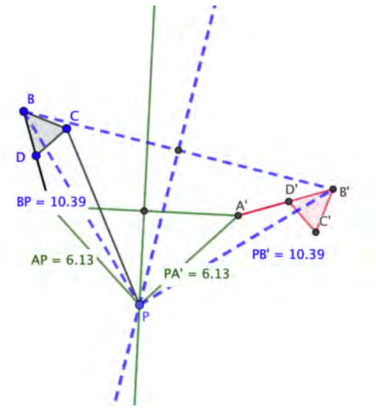


Figura 6: L'emergere dei triangoli isosceli durante la discussione

La Figura 6 è quella su cui gli studenti hanno riflettuto durante questa fase della discussione. In particolare, hanno osservato che i lati di questi triangoli in figura sono sempre a due a due uguali e di conseguenza questi *sono sempre triangoli isosceli*. Quindi, consapevoli di queste osservazioni e della proprietà del triangolo isoscele per cui l'altezza è anche mediana, gli studenti hanno identificato il centro di rotazione:

Ins.: Se io prendo la perpendicolare al segmento BB' che passa per il punto medio… dove va a finire?
D.: Nel centro… cioè in P.
Ins.: In P. Sarà un caso?
D.: Che *l'asse* che quindi si interseca in P, che rappresenta il centro, *passa sempre per quel punto*, in quanto l'asse rappresenta altro che l'altezza del triangolo isoscele, rettangolo BPB' e quindi questa sarà indicata come una parte dell'asse.
Ins.: Ah ok, perfetto. E se io prendo l'asse di AA' che succede?
D.: Lo stesso
Ins.: Secondo voi, questa proprietà cambia se per esempio cambio l'angolo?
D.: No
Ins.: No, perché?
D.: Perché comunque si dovrebbero sempre incontrare…

Queste osservazioni sono risultate determinanti per l'individuazione del centro di rotazione. Durante la discussione collettiva finale, infatti, un altro degli studenti, R., ha evidenziato che: "dobbiamo tracciare i segmenti AA', BB' e CC', e *le perpendicolari per il punto medio* di questi segmenti e poi *si dovrebbero intersecare tutte*… perché… la perpendicolare passava sempre per il punto medio".

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI

I risultati qui presentati possono essere analizzati con la lente della mediazione semiotica per studiare l'uso sinergico di strumenti manipolativi e digitali per la costruzione del significato di rotazione in un contesto di didattica a distanza. Dall'analisi dei video e dei protocolli è anzitutto possibile ricostruire l'evoluzione dei significati durante i tre cicli didattici. Si può osservare, infatti, come dall'uso dell'artefatto manipolativo durante il primo ciclo siano emersi i primi segni legati all'uso dell'artefatto "diversa angolazione" e "stessa inclinazione". A questi primi segni si sono aggiunti quelli prodotti dagli studenti durante la discussione del secondo ciclo: "i segmenti sono uguali" e "l'angolo è ancora di 90°". L'artefatto digitale, GeoGebra, che l'insegnante ha utilizzato durante la discussione ha fatto emergere un ulteriore segno che è risultato determinante per l'evoluzione del significato. L'espressione "tipo un cerchio" che M. usa per descrivere il movimento dei punti della figura ruotata al variare dell'angolo, porta infatti l'attenzione della classe verso il significato di centro della rotazione come centro delle circonferenze descritte dalla rotazione. Questo aspetto sembra essere stato determinato dall'uso sinergico dell'artefatto digitale (grazie in particolare allo slider e allo strumento traccia) con l'artefatto manipolativo, il cui potenziale semiotico è particolarmente connesso all'idea di rotazione come movimento rigido. L'artefatto digitale, infine, è risultato determinante anche nel successivo passaggio in cui l'insegnante ha spinto gli studenti a riflettere sui triangoli che si vengono a formare congiungendo coppie di punti corrispondenti con il centro di rotazione. Le proprietà caratteristiche del centro di rotazione sono dunque emerse dall'osservazione che "sono sempre triangoli isosceli", nel momento in cui D. osserva che, di conseguenza, "l'asse… passa sempre per quel punto". L'evoluzione dei significati ha raggiunto il suo culmine con l'affermazione di R. che "le perpendicolari per il punto medio [dei segmenti congiungenti coppie di punti corrispondenti] dovrebbero intersecarsi tutte".
I risultati della sperimentazione sembrano dunque confermare l'ipotesi che artefatti di natura diversa possano agire in sinergia per la costruzione di significati matematici, anche se uno di essi (nel nostro caso quello digitale) è introdotto ed usato direttamente dall'insegnante durante la discussione collettiva.

RINGRAZIAMENTI

Le autrici ringraziano l'Istituto Comprensivo Palazzo-Salinari di Montescaglioso (MT) per aver consentito lo svolgimento di questa sperimentazione.

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi, M.G. e Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). New York: Routledge.
Faggiano E. e Montone A. (2019) Artefatti digitali e artefatti manipolativi in sinergia: il ruolo di GeoGebra. *Atti del VIII Convegno Nazionale DI.FI.MA 2017*, 46-58
Faggiano E., Montone A. e Mariotti M. A. (2018), Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **49**.**8**, 1165-1180
Maschietto, M., e Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM* **45(7)**, 959-971
Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

STATISTICA IN DAD CON GEOGEBRA

Iolanda Nagliati
Liceo "A.Ròiti", Ferrara
iolanda.nagliati@roiti.istruzioneer.it

Abstract
Durante l'anno scolastico 2020/21 ho svolto il modulo di Statistica con una classe terza di Liceo Scientifico, opzione Scienze Applicate, in un periodo di DAD utilizzando prevalentemente la metodologia Flipped classroom e il software GeoGebra.
L'esperienza di laboratorio di matematica ha sfruttato al meglio le potenzialità della didattica a distanza e ha dato un contributo significativo all'Educazione civica e alle competenze di Cittadinanza, oltre che al PCTO il cui profilo in uscita è il *Comunicatore umanistico scientifico*.

Parole-chiave
Statistica – GeoGebra – DAD

CONTESTO

L'attività è stata svolta in una classe terza del Liceo scientifico delle Scienze applicate (autonomia con lingua tedesca), nuova per me.
Il livello medio dei risultati conseguiti al biennio dalla classe sia in matematica sia in generale è molto buono (ci sono «olimpionici» delle gare individuali e a squadre di matematica e informatica).
La statistica non era stata trattata nel biennio e solo alcuni alunni ne conoscevano i primi elementi dalla scuola secondaria di I grado.
Per quanto riguarda GeoGebra c'era stato poco tempo per mostrarne l'uso che faccio regolarmente per illustrare proprietà geometriche o per rappresentare grafici.
Ne avevo introdotto l'uso sia nella versione scaricabile sia sul web ed è stata affrontata la conoscenza del manuale, fino a che dopo un mese di lezioni in presenza ha inizio la DAD, parziale o totale.

ATTIVITA'

Gli allievi sono stati suddivisi in gruppi di livello omogeneo (ben specificato nella richiesta di formazione a loro cura dei gruppi rispetto alla difficoltà crescente degli argomenti proposti).
L'argomento è stato introdotto con una breve introduzione storica, in parte tratta dal manuale, e dalla presentazione del sito ISTAT che offre moltissimo materiale.
I contenuti disciplinari successivi non sono stati introdotti in classe, per svolgere un'esperienza di tipo *flipped classroom.*
Ho assegnato le parti da sviluppare in relazione al manuale in adozione, affiancandovi alcuni video dal canale YouTube di GeoGebra e altri materiali video di libero uso.
L'attività si è sviluppata su un periodo abbastanza lungo (poco più di due mesi) affiancandosi ad altri argomenti, in particolare di geometria analitica che venivano invece trattati durante le lezioni in presenza che si sono alternate a quelle a distanza in buona parte dell'anno scolastico.
In questo modo c'è stato un tempo adeguato per i contatti all'interno del gruppo e il lavoro da remoto ha consentito una discreta interazione tra gli alunni, in difficoltà su questo versante nella DAD.
È stata possibile la graduale acquisizione dei contenuti precedenti e siamo arrivati a un approfondimento maggiore di quanto inizialmente previsto proprio per l'interesse manifestato.
Le esposizioni hanno proposto ogni volta, dopo una breve introduzione teorica, una serie di esercizi applicativi su fogli di calcolo di GeoGebra con le relative e diverse rappresentazioni grafiche.

I materiali preparati sono stati condivisi tramite Meet e raccolti su Classroom, dove sono state svolte anche le verifiche formative.
Ad ogni gruppo è stato anche chiesto, al termine del lavoro, di valutare sé stesso e gli altri gruppi.
Non è stato possibile raccogliere dati "originali" da esperimenti, ad esempio, del laboratorio di fisica; quindi, abbiamo usato esercizi del testo e, in raccordo con la materia Informatica sono stati utilizzati software per simulare situazioni.
Il primo tema affrontato è stata la creazione di un campione, la raccolta e la rappresentazione dei dati.
È stata quindi presentata la gamma delle possibilità offerte da GeoGebra (Figura 1).

Figura 1: Funzioni di GeoGebra per l'analisi dei dati

Ogni gruppo ha preparato un breve tutorial sui comandi del software opportuni per la propria parte (Figura 2).
Gli indici centrali non hanno presentato particolari difficoltà, così come la creazione di istogrammi e diagrammi a barre.
È stato approfondito il confronto fra le diverse medie calcolabili su un gruppo di dati, esaminando anche l'interpretazione geometrica che se ne può dare, oltre che quella più strettamente numerica.

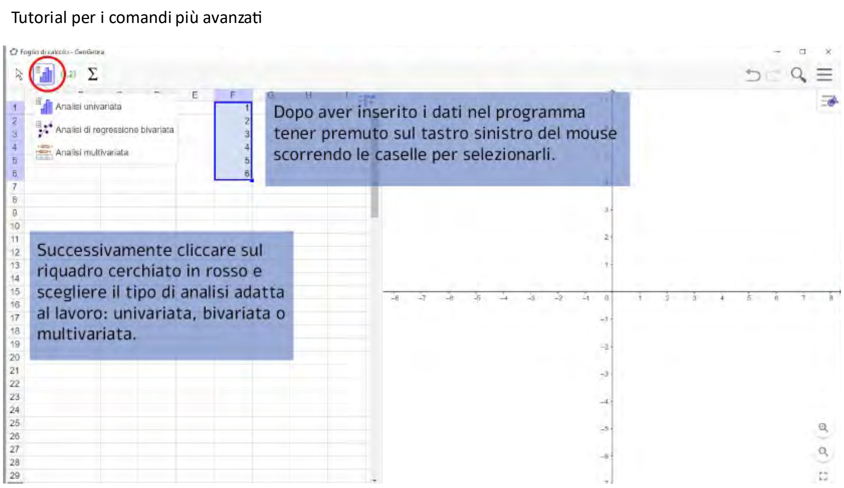


Figura 2: Tutorial per comandi avanzati

Per affrontare i primi elementi di analisi bivariata sono stati introdotti anche i concetti di rappresentazione con BoxPlot (figura 3).

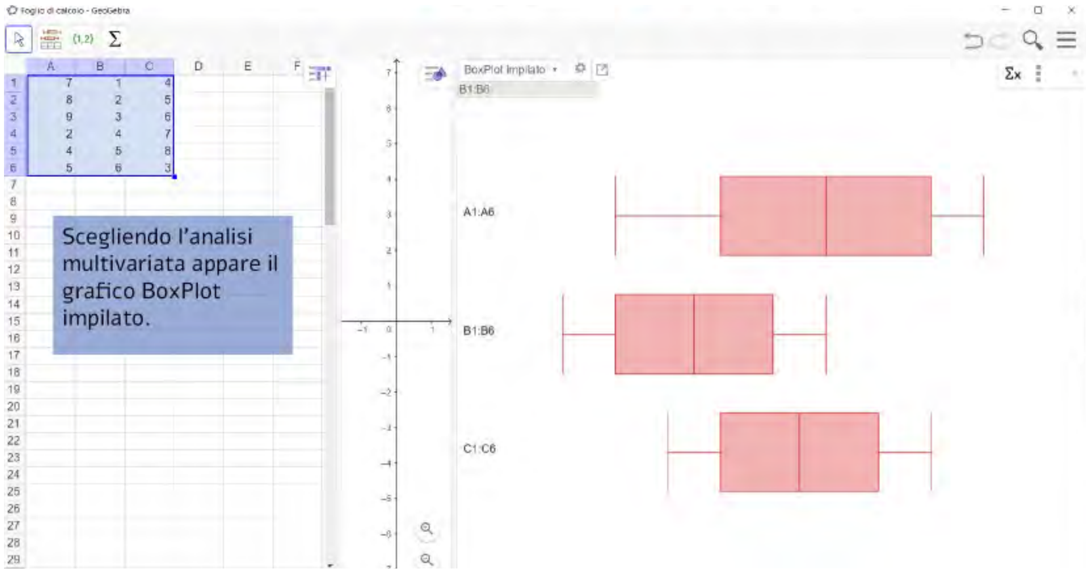


Figura 3: Rappresentazione con box-plot

L'analisi della dipendenza e indipendenza statistica era prevista inizialmente per i soli dati quantitativi, ma ha riscosso un notevole interesse e si è quindi scelto di proseguire con la determinazione dell'indice Chi-quadro anche per caratteri qualitativi.
L'ultimo argomento è stato relativo alla correlazione e regressione lineare, utilizzando la retta di regressione i cui elementi erano ben interpretabili dal punto di vista della geometria analitica affrontata nel primo periodo dell'anno (Figura 4).

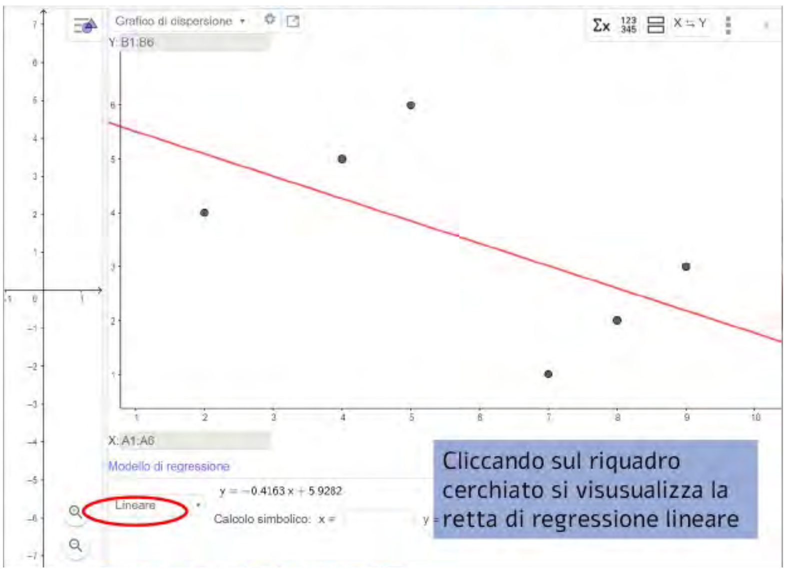


Figura 4: Visualizzazione della retta di regressione lineare

Accanto agli esercizi proposti dal manuale, per visualizzare alcune situazioni si è fatto uso come si è detto di software di simulazione come nell'esempio seguente ottenuto dal sito (Figura 5) https://polystatistic.franfill.repl.co/?p=n&example=0

Indipendenza tra X e Y

Visualizzazione

Per vedere se X e Y sono indipendenti usiamo la seguente formula::
frequenza della coppia $x_k;y_h$ = (frequenza di x_k * frequenza di y_h) / popolazione.

X e Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Totale
x_1	2	3	3	6	1	4	23
x_2	9	6	4	2	3	8	30
x_3	3	6	0	5	7	7	24
Totale	12	15	7	13	11	19	77

Verifichiamo che X e Y siano **indipendenti**:
$f(x_2;y_1) = [\ f(x_2) * f(y_1)\ ] / n$
9=(30 * 12) / 77
9= 4,67 ? NO → Quindi X e Y **non** sono statisticamente indipendenti

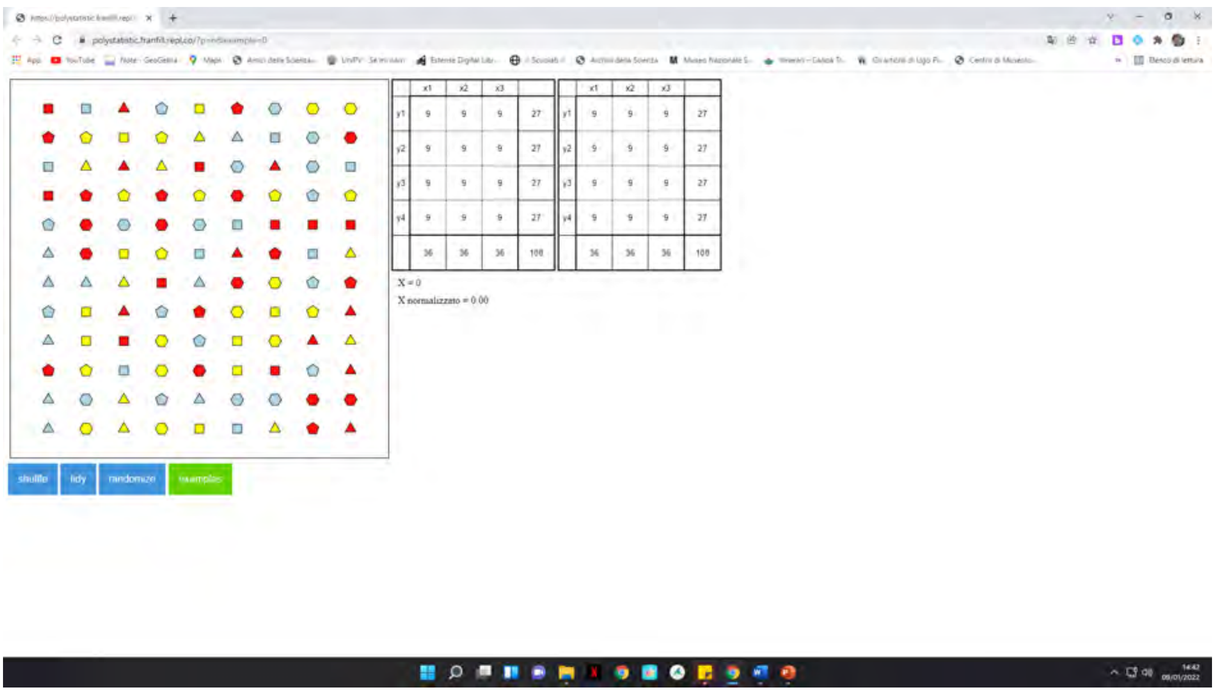


Figura 5: Esempio di esercizio con il software di simulazione

Abbiamo potuto usare al meglio la necessità di lavorare a distanza con i ragazzi, i quali normalmente non dispongono di computer o tablet durante le attività in aula, mentre a casa disponevano di dotazioni adeguate.

Quindi i giorni di esposizione ed esercizi hanno coinciso con le lezioni a distanza anche durante i periodi in cui erano alternate, affinché potessero essere autonomi nel recuperare le tabelle dei dati grezzi ed elaborarle secondo le consegne come nell'esempio che segue.

106 Traffico e condizioni meteo. In una città sono stati osservati giornalmente le condizioni meteo X e il livello di traffico Y per un periodo di un anno. I dati ricavati sono riassunti nella seguente tabella.

a. Calcola l'indice χ^2.

b. Normalizza l'indice χ^2 e determina una percentuale che esprima la misura della connessione tra i due caratteri.

c. Puoi sostenere che, statisticamente, quanto più il tempo è bello tanto più il traffico è ridotto?

X \ Y	Basso	Medio	Alto	Totale
Sereno	80	28	12	120
Variabile	32	92	30	154
Perturbato	8	25	58	91
Totale	120	145	100	365

[a. Circa 152,31; b. circa 21%]

$$\chi^2 normalizzato = \frac{\chi^2}{n \times min(k-1, h-1)} = \frac{152,31}{365 \times 2} = 0,21$$

Visualizzazione

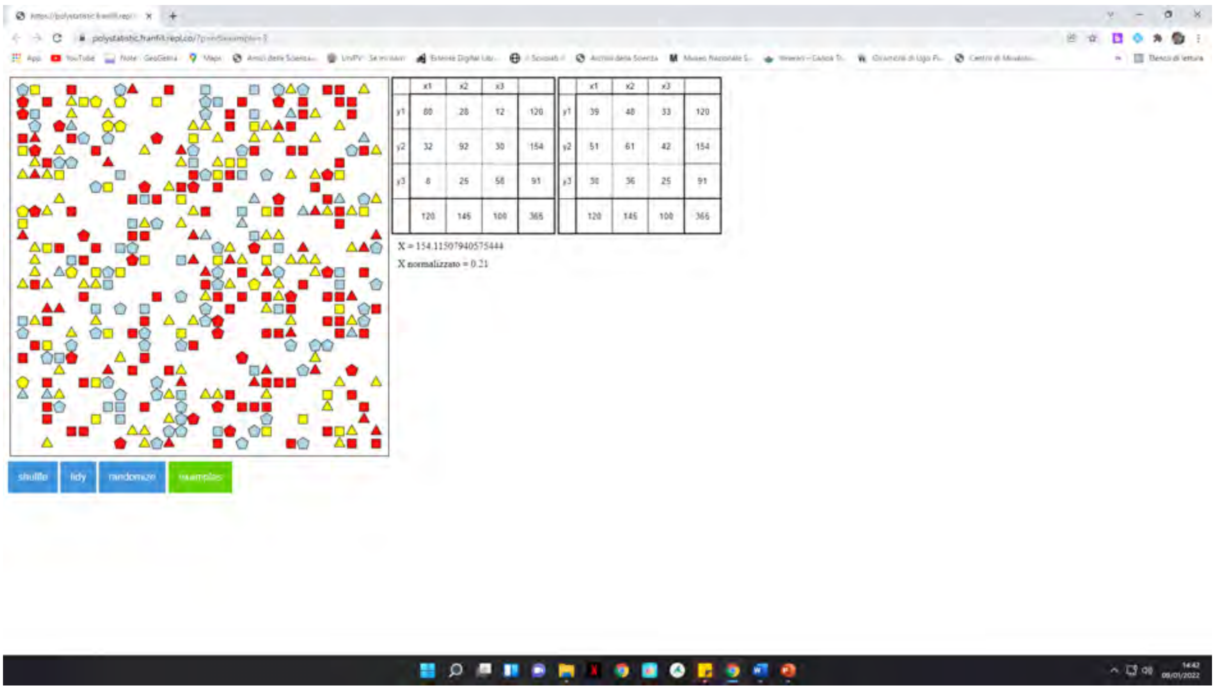


Figura 6: Esempio di esercizio

Il buon esito dell'attività ha consentito di mettere in programma attraverso anche i finanziamenti previsti per le scuole di quest'anno l'acquisto di un laboratorio mobile a carrello con tablet per questo tipo di lavoro nelle classi, che non hanno in generale la possibilità di accedere ai laboratori di informatica durante ore di altre materie.

Abbiamo concluso l'attività con alcune osservazioni sull'uso distorto che si può fare delle rappresentazioni statistiche per dimostrare tesi scorrette, con applicazioni alla realtà in cui siamo immersi che hanno colpito molto e hanno costituito un buon contributo all'insegnamento della Educazione civica della classe.
A questo scopo ho usato alcune pagine del testo «Mentire con le statistiche» di Huff Darrell, che sono state facilmente messe in relazione ad esperienze quotidiane, in particolare alla questione che iniziava a porsi sull'opportunità della vaccinazione contro il Coronavirus e i rischi correlati.
Si è quindi potuto riflettere su quanto la rappresentazione visiva possa influenzare il lettore (Figura 7):

Figura 7: Grafico fantasmagorico

E abbiamo riflettuto sul significato e i rischi del ragionare secondo il principio "Post hoc, ergo propter hoc" (Figura 8).

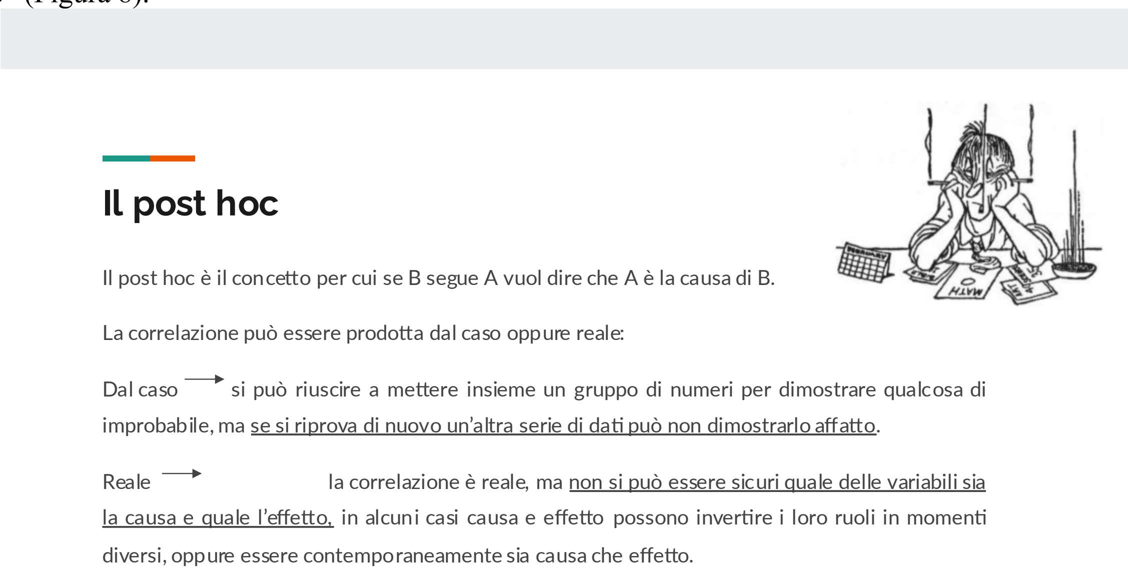


Figura 8: Rsppresentazione del principio "Post hoc, ergo propter hoc".

A partire da questa riflessione ci siamo ripromessi di affrontare di nuovo l'argomento prima della fine del corso, ad esempio progettando attività con questo modello http://www.tylervigen.com/spurious-correlations che mostra pseudocorrelazioni tra eventi del tutto indipendenti (Figura 9):

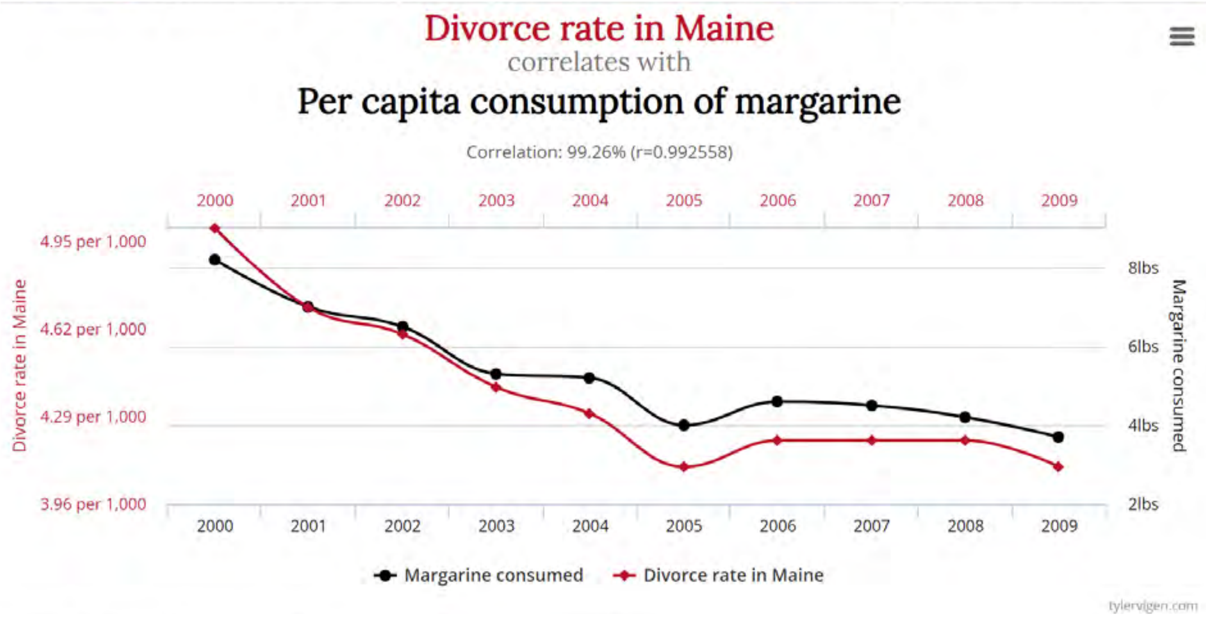


Figura 9: Modello che mostra pseudocorrelazioni tra variabili del tutto indipendenti

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare i colleghi Daniela Gambi e Alessandro Spagnuolo, che in un corso di aggiornamento per la sezione Mathesis di Ferrara mi hanno fatto conoscere le potenzialità di GeoGebra nell'ambito della statistica.

BIBLIOGRAFIA

Leonardo Sasso, Claudio Zanone, *Colori della matematica*, DeA scuola, 2019, vol 3 Gamma
Darrel Huff, *Mentire con le statistiche*, Monti e Ambrosini editore, 2007

E-LEARNING E GEOMETRIA NEL BIENNIO DELLA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Stefania Pancanti
I.I.S. "Leonardo Da Vinci- Fascetti", Pisa
stefania.pancanti@davincifascetti.it

Abstract

Nell'ambito del Piano Nazionale Lauree Scientifiche è stato progettato e realizzato un percorso didattico sulla geometria per il primo biennio con la finalità di promuovere la partecipazione attiva all'apprendimento matematico attraverso l'uso di ambienti digitali, con particolare attenzione a studenti con difficoltà. Nello specifico, è stato realizzato un percorso di geometria di tipo laboratoriale, come suggerito dalle Indicazioni Nazionali e dalle Linee Guida, in un ambiente di geometria dinamica (Geogebra), in modalità E-Learning di tipo blended, su piattaforma Moodle. Il percorso è stato sperimentato in un Istituto Tecnico Industriale, in una classe seconda (anno scolastico 2019-2020) ed, in una prima parte, in una classe prima (anno scolastico 2020-2021).

Parole-chiave
Ambienti digitali, Apprendimento matematico, Inclusione.

INTRODUZIONE

Nell'ambito del Piano Nazionale Lauree Scientifiche per la realizzazione di "Azioni per il miglioramento dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado" del Dipartimento di Matematica di Pisa[13] è stato progettato e realizzato un percorso didattico sulla geometria per il primo biennio con la finalità di promuovere la partecipazione attiva all'apprendimento matematico attraverso l'uso di ambienti digitali, con particolare attenzione a studenti con DSA o difficoltà di apprendimento. Per quanto riguarda le modalità utilizzate per il raggiungimento delle finalità del progetto, è stato realizzato un percorso di geometria di tipo laboratoriale, come suggerito dalle Indicazioni Nazionali e dalle Linee Guida per la Scuola Secondaria di Secondo Grado, in un ambiente di geometria dinamica (Geogebra), in modalità E-Learning, di tipo blended, su piattaforma Moodle.

CARATTERISTICHE DEL PERCORSO

Gli obiettivi contenutistici di questo percorso, facendo riferimento alla descrizione in contenuti ed abilità alle Linee Guida per la geometria del primo biennio, sono stati: il significato dei termini definizione e teorema; nozioni fondamentali di geometria del piano; le principali figure del piano: triangoli e quadrilateri. Per quanto riguarda le abilità, gli obiettivi sono stati: eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti informatici; conoscere e usare misure di grandezze geometriche; porre, analizzare e risolvere problemi del piano utilizzando le proprietà delle figure geometriche; comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive. Tali obiettivi, indicati come obiettivi specifici di apprendimento, si ritrovano anche nelle Indicazioni Nazionali per i Licei. Per quanto riguarda l'approccio utilizzato nelle attività proposte, è stato sia quello delle costruzioni geometriche, rivisitato in un ambiente di geometria dinamica, sia quello fondato sulla nozione di problema aperto. Da un punto di vista teorico, le diverse attività sulla definizione in matematica e sul significato di teorema, fanno riferemento a (Villani, 2003), (Villani, 2006) e (Villani, Bernardi, Zoccante, Porcaro, 2010), mentre il

[13] Responsabile del Progetto Prof. Di Martino

tipo di percorso fa riferimento alla modalità di lavoro proposte in (Mariotti, Paola, Robutti, Venturi, 2004).
Il tipo di attività proposte, inoltre, ha avuto anche obiettivi metacognitivi, cercando di rendere i ragazzi più consapevoli delle proprie risorse, delle strategie di controllo attivate e ponendo particolare attenzione alla individuazione di eventuali difficoltà.
Il percorso è stato realizzato in modalità E-Learning perché questa modalità di apprendimento favorisce la realizzazione di percorsi di studio personalizzati, la creazione di contesti collettivi di apprendimento e permette la personalizzare della sequenza dei percorsi didattici sulla base delle performance e delle interazioni dell'utente con i contenuti on-line. Il percorso è in modalità E-Learning di tipo blended, prevedendo una parte delle attività da svolgere in autonomia e una parte da svolgere in classe, soprattutto in riferimento alle discussioni collettive e con lo scopo di produrre un testo unico di riferimento per la classe, dove sono stati raccolti i risultati teorici condivisi e discussi con i ragazzi.
Le attività proposte e le discussioni collettive hanno permesso di favorire sia lo sviluppo del linguaggio matematico sia competenze di tipo argomentativo.

Un ambiente digitale di geometria dinamica: Geogebra

L'utilizzo di un ambiente digitale per l'apprendimento di geometria dinamica permette la mediazione di concetti geometrici, la scoperta di proprietà geometriche e quindi di teoremi.
In questo percorso è stato utilizzato l'ambiente di geometria dinamica Geogebra, software gratuito e facilmente reperibile, dove gli elementi e le relazioni tra questi sono definiti usando i comandi disponibili nei menù. In questo ambiente, i significati degli oggetti matematici e le loro relazioni rappresentano gli enti e le proprietà della Geometria Euclidea e le relazioni "scoperte" durante le attività sono conseguenze del processo di costruzione della figura considerata. Le modalità fondamentali di azione sono il trascinamento e la costruzione di nuovi elementi dipendenti da quelli definiti o precedentemente costruiti. In particolare, nelle costruzioni risulta importante la distinzione tra punti liberi e punti dipendenti:

- Punti liberi: sono i punti da cui dipende la costruzione ed a partire dai quali gli altri oggetti sono costruiti; questi punti sono trascinabili sullo schermo e come conseguenza del loro trascinamento si muovono altre parti della figura.
- Punti dipendenti: quelli che nascono dall'intersezione di oggetti costruiti a partire da punti liberi; non possono essere selezionati e trascinati e possono essere mossi soltanto trascinando i punti base da cui dipendono.

Attualmente la ricerca ha messo in luce come la sola interazione studente-ambiente digitale per l'apprendimento può agevolare la formazione di significati situati ma questo non è sufficiente perché lo studente si appropri di significati matematici che costituiscono lo specifico obiettivo didattico (Baccaglini-Frank, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2017). La costruzione dei significati matematici con cui le attività consentono di mettersi in relazione avviene attraverso la discussione collettiva mediata dall'insegnante.

La piattaforma Moodle e i principali "strumenti" utilizzati nel percorso

L'utilizzo della Piattaforma Moodle permette di realizzare percorsi di apprendimento personalizzati e rende possibile la realizzazione di un ambiente orientato ad una discussione collettiva sia in presenza, sia a distanza. Inoltre, questo tipo di piattaforma, permette la condivisione dei materiali prodotti attraverso la realizzazione di attività di tipo collaborativo.
Per la realizzazione della piattaforma del percorso sono stati utilizzati i seguenti "strumenti" di Moodle (Moodle Documentation, 2021):

➢ Lezione: è un tipo di attività che permette la realizzazione di percorsi personalizzati in base alle risposte ed alle esigenze dei partecipanti. Consiste in una serie di pagineweb che presentano una o più domande e la pagina successiva dipende dalla rispostadell'utente. In alcune pagine web sono state inserite attività dinamiche di Geogebra nelle quali viene riportata la consegna dell'attività da svolgere. Vi sono anche domande di tipo metacognitivo, che riguardano le decisioni che l'utente è chiamato a prendere rispetto al completamento della specifica consegna.

- Compito: consiste in uno stimolo proposto al quale gli studenti rispondono con la sottomissione di un file, la compilazione di un modulo o più in generale l'elaborazione di un testo. Nel nostro percorso questo modulo è stato utilizzato per il caricamento in piattaforma delle costruzioni realizzate dai ragazzi con il software Geogebra.
- Wiki: rappresenta un'attività di tipo collaborativo, basata sulla creazione a più mani di pagine web con contenuti che possono essere inseriti e/o modificati da tutti gli utenti del corso. In questo percorso i wiki sono stati utilizzati per raccogliere i contributi dei ragazzi nelle diverse attività, contributi che poi sono stati discussi e condivisi non solo on-line ma anche in presenza per individuare definizioni e teoremi che sono stati poi riportati nella risorsa "Libro".
- Libro: il modulo libro consente ad un docente di creare risorse multi pagina componendole, similmente ad un libro. In questo percorso sono state riportate sul libro le definizioni, i teoremi e le proprietà discusse in classe nelle singole attività.

LE ATTIVITA' DEL PERCORSO E LE LORO CARATTERISTICHE

Le attività del percorso sono dieci. La prima attività (ATTIVITA' 0) è introduttiva alla conoscenza di Geogebra e all'utilizzo di alcuni strumenti di Moodle necessari allo svolgimento delle attività successive. Le altre attività si suddividono in problemi di costruzione e in problemi aperti. I problemi di costruzione sono caratterizzati da una consegna, presentata attraverso un testo, seguita dal tentativo di costruzione realizzato nell'ambiente di geometria dinamica. Viene poi richiesto di indicare le eventuali difficoltà incontrate nella comprensione o nella realizzazione dei passi della costruzione ed, infine, a livello metacognitivo, si richiede il confronto tra la costruzione ottenuta e quella attesa dallo studente.
Nel caso di problemi di costruzione, la consegna consiste in un testo inserito in un'attività di lavoro dinamica, realizzata con l'utilizzo di Geogebra, e prevede una prima fase, che riguarda la comprensione del testo, una seconda fase, che riguarda la sua riformulazione e da una terza fase, in cui si richiede la realizzazione di quanto richiesto, con la possibilità di avere eventuali suggerimenti o spiegazioni prima di fornire la propria risposta.
Se l'obiettivo della consegna è una costruzione, questa sarà caricata in piattaforma; se invece la risposta consiste in una congettura, questa potrà essere fornita come testo libero argomentato individuale oppure come contributo in un wiki. Mentre le risposte libere individuali permettono l'assegnamento da parte del docente di approfondimenti individualizzati in base alle risposte fornite, le risposte raccolte nei wiki preparano l'attività di discussione in classe. Tutti i diversi contributi vengono raccolti nella risorsa libro messa a disposizione dalla piattaforma Moodle.
Di seguito sono descritte le singole attività, con l'indicazione dei tempi previsti per la loro realizzazione:
ATTIVITA' 0. Attività introduttiva sulla conoscenza di Geogebra e sulla conoscenza di alcuni elementi di Moodle necessari per il percorso (Compito, Forum e Wiki) (tempo previsto 1 ora di laboratorio in presenza).
ATTIVITA' 1. Attività introduttiva sul trascinamento con Geogebra: utilizzando lo strumento Lezione di Moodle si propone un'attività che permette di esplorare una caratteristica importante dei software di geometria dinamica. Questa caratteristica consiste nella possibilità di mantenere nel trascinamento le proprietà geometriche con le quali gli oggetti sono stati costruiti, distinguendo tra punti o oggetti liberi e punti dipendenti o vincolati. Questa proprietà è stata utilizzata nelle attività successive per verificare la correttezza delle costruzioni realizzate e per studiare alcune proprietà geometriche delle figure. (tempo previsto: 40 minuti di lavoro autonomo; 1 ora di discussione in classe)
ATTIVITA' 2. In questa attività è richiesta la costruzione per passi di due triangoli, assegnate le misure dei lati, dei quali uno risulterà costruibile e l'altro no. Si richiede la successiva consegna in piattaforma delle costruzioni realizzate, con relativa spiegazione da parte dei ragazzi dei risultati ottenuti (tempo previsto: 1 ora di lavoro autonomo; 1 ora di discussione in classe).
ATTIVITA' 3. Partendo dai risultati ottenuti e discussi nell'attività precedente, in questa attività è affrontato il problema delle condizioni che assicurano la costruibilità di un triangolo, chiedendo ai

ragazzi di provare, attraverso un foglio di lavoro dinamico, a mettere in relazione la costruibilità di un triangolo con la misura dei lati, riportando poi in un wiki le proprie osservazioni. Questa attività ci ha permesso la discussione della definizione di triangolo e la distinzione tra la definizione di un oggetto e le sue proprietà geometriche (tempo previsto: 1 ora di lavoro autonomo; 2 ore di discussione in classe)

ATTIVITA' 4. In questa attività è affrontato il problema della costruzione di un triangolo isoscele dato un lato non orizzontale (INDIRE, 2021). Viene richiesta la costruzione di un triangolo isoscele, motivando la propria risposta. Successivamente, sempre in relazione alla costruzione eseguita, è stata discussa in classe la definizione di asse di un segmento come luogo geometrico (tempo previsto: 40 minuti di lavoro autonomo; 1 ora di discussione in classe)

ATTIVITA' 5. In questa attività si affrontano i criteri di congruenza dei triangoli. Attraverso due fogli di lavoro dinamici, i ragazzi "scoprono" come verità evidenti i primi due criteri di congruenza e successivamente, aiutati dall'insegnante, utilizzano i risultati delle attività proposte per dimostrare il terzo criterio. Questa attività risponde ad un problema di unicità della costruzione di un triangolo assegnati i lati rimasto aperto per i ragazzi dall'Attività 2 (tempo previsto: 40 minuti di lavoro autonomo; 1 ora di discussione in classe)

ATTIVITA' 6. In questa attività è richiesta la costruzione autonoma di un rettangolo con Geogebra, verificando la correttezza della costruzione con il trascinamento dei vertici. Questa attività ci ha permesso di riflettere sulla definizione di quadrilatero, più in generale, di poligono e, in particolare, di rettangolo (tempo previsto: 40 minuti di lavoro autonomo; 1 ora di discussione in classe).

ATTIVITA' 7. In questa attività è richiesta la costruzione per passi di un quadrilatero con misure dei lati assegnati. Questa attività ha permesso la discussione sulle condizioni di costruibilità nel caso dei quadrilateri, arrivando a formularne il teorema di costruibilità, rilevando analogie e differenze rispetto alla costruibilità dei triangoli (tempo previsto: 40 minuti di lavoro autonomo; 2 ore di discussione in classe).

ATTIVITA' 8. In questa attività è stato proposto ai ragazzi lo studio della somma degli angoli interni ed esterni di un quadrilatero e la sua generalizzazione al caso di poligoni con più di quattro lati, formulando i risultati ottenuti come teoremi (tempo previsto: 40 minuti di lavoro autonomo; 1 ora di discussione in classe)

ATTIVITA' 9. In questa attività sono stati proposti i seguenti problemi aperti che riguardano i quadrilateri che fanno riferimento a (Baccaglini-Frank, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2017) e (INDIRE, 2021):

1) Costruire un quadrilatero ABCD in cui D è un punto scelto sulla retta parallela a BC, passante per A. Quali tipi di quadrilatero può diventare ABCD?

2) (Teorema di Varignon): Sia ABCD un quadrilatero convesso generico. Su ogni lato traccia il punto medio. Unendo i punti così trovati individuerai un nuovo quadrilatero. Che tipo di quadrilatero hai ottenuto?

L'obiettivo è stato di caratterizzare e descrivere i diversi tipi di quadrilatero e alcune loro proprietà geometriche (tempo previsto: 1 ora di lavoro autonomo; 2 ore di discussione in classe).

PUNTI DI FORZA E CRITICITA' DEL PERCORSO

Per quanto riguarda gli obiettivi contenutistici, il percorso ha permesso di affrontare il problema della definizione degli oggetti matematici come necessità di risposta al conflitto emerso tra le convinzioni degli studenti, in seguito allo svolgimento delle attività proposte. In relazione al significato di teorema, i teoremi condivisi con i ragazzi ed interpretati come proprietà non evidenti da giustificare, sono risultati punti di arrivo di un percorso di esplorazione e argomentazione.

L'utilizzo della Piattaforma Moodle ha permesso di realizzare percorsi di apprendimento personalizzati, che si modellano in base alle scelte, e dunque, alle necessità degli studenti, garantendo sia l'inclusione sia la possibilità di ulteriori approfondimenti. In particolare ha permesso di valorizzare i contribuiti anche parziali degli studenti e di intervenire sulle difficoltà individuali. Inoltre la possibilità di condividere i materiali prodotti attraverso la realizzazione di attività di tipo collaborativo ha reso possibile la realizzazione di un ambiente orientato ad una discussione collettiva sia in presenza, sia a

distanza. Nello specifico, dall'inizio del percorso alla sua conclusione si è rilevato un generale miglioramento nell'utilizzo del linguaggio matematico e nelle capacità di argomentazione sia scritta, sia orale. Le definizioni ed i teoremi formulati e discussi nelle diverse attività del percorso, riportati nel modulo libro di Geogebra, hanno permesso di rendere visibile il percorso svolto ed, in ogni fase del percorso, sono stati di riferimento per le argomentazioni e le dimostrazioni successive.
La partecipazione dei ragazzi, dopo un primo periodo di familiarizzazione con la piattaforma, è stata positiva e interessata, anche per un significativo gruppo di ragazzi con DSA.
Più in generale, il percorso sia per le modalità di progettazione e realizzazione sia per i contenuti proposti, si è mostrato in grado di realizzare quella centralità dello studente riconosciuta come obiettivo essenziale sia nella didattica in presenza sia nella didattica a distanza . Per quanto riguarda le criticità emerse, come già anticipato, è stato necessario un po' di tempo perché i ragazzi prendessero familiarità con la piattaforma ed il tipo di lavoro richiesto. Questo ha comportato, almeno inizialmente, un tempo di lavoro più lungo rispetto al previsto nello svolgimento delle attività. Anche la richiesta di riportare in piattaforma le osservazioni effettuate nei fogli di lavoro dinamici e le proprie spiegazioni alle risposte sulle attività proposte ha comportato diverse difficoltà iniziali che però sono andate diminuendo nel procedere del percorso. Un altro aspetto problematico ha riguardato l'impossibilità di lavorare nel laboratorio informatico, sia per le difficoltà legate all'emergenza sanitaria sia per la mancanza di ore curriculari di Matematica in laboratorio. Le attività del percorso sono state svolte dai ragazzi, in parte, durante le ore di didattica a distanza e quindi con la presenza dell'insegnante in remoto che, attraverso la condivisione dello schermo da parte dei ragazzi in difficoltà, poteva intervenire sulle problematiche individuali, oppure in modo completamente autonomo nel pomeriggio.

CONCLUSIONI

Il percorso di geometria per il biennio della Scuola Secondaria di Secondo Grado descritto in questo contributo si è mostrato efficace nel realizzare una partecipazione attiva degli studenti all'apprendimento matematico attraverso l'uso di ambienti digitali, rendendoli più protagonisti e responsabili del loro percorso formativo.
Per questo motivo una prospettiva futura sarebbe quella di progettare e realizzare un nuovo percorso con le stesse modalità riguardante la geometria dello spazio, sempre facendo riferimento alle Indicazioni Nazionali ed alle Linee Guida. Naturalmente questo tipo di attività sarebbe favorita dalla possibilità di usufruire di ore curriculari di matematica in laboratorio informatico.

BIBLIOGRAFIA

Baccaglini-Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2017): *Didattica della Matematica*, Mondadori Università, Roma.
Indicazioni Nazionali per i Licei,
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf, ultimo accesso 07/09/2021
Linee Guida per gli Istituti Tecnici,
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI.pdf, ultimo accesso 07/09/2021
Linee Guida per gli Istituti Professionali,
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/INDIC/_LINEE_GUIDA_PROFESSIONALI.pdf accesso 07/09/2021.
Mariotti M. A., Paola D., Robutti O., Venturi D. (2004), *Quaderno interattivo di Geometria*, Media Direct distrib., Bassano del Grappa (VI)
Moodle Documentation, https://docs.moodle.org/ , ultimo accesso 14/09/2021
Scuola Valore INDIRE,
http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/esplorazione-di-figure-piane-dalle-con getture-alla-dimostrazione-2/, ultimo accesso 12/09/2021

Villani, V. (2003), *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Aritmetica e Algebra),* Pitagora Editore, Bologna

Villani, V. (2006),*Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria),* Pitagora Editore, Bologna

Villani, V. ,Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. (2012), *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della Matematica*, Springer, Milano

GEOGEBRA PER UN LABORATORIO SULLE EQUAZIONI DIOFANTEE

Paola Palestini
Liceo Scientifico Statale B. Rosetti, San Benedetto del Tronto (AP)
paolapalestini2@gmail.com

Carlo Toffalori
Scuola di Scienze e Tecnologie, Università di Camerino
carlo.toffalori@unicam.it

Abstract
Questo articolo descrive un percorso didattico realizzato con gli studenti di una classe terza del Liceo Scientifico Matematico. Si tratta di un laboratorio sulle equazioni diofantee che vede gli studenti cimentarsi nella risoluzione di problemi e giochi diofantei. In questo contesto, l'utilizzo di Geogebra è finalizzato a portare alla scoperta di proprietà mediante attività che preparano la strada alla successiva fase di dimostrazione. Consideriamo ad esempio il caso delle equazioni diofantee lineari in due variabili. Dal punto di vista geometrico risolvere l'equazione diofantea lineare $ax + by = c$ a coefficienti interi equivale a determinare i punti a coordinate intere della retta corrispondente o, eventualmente, considerando ulteriori vincoli sulle variabili, quelli di un segmento che ha tale retta come sostegno. Geogebra può essere utilizzato per favorire l'indagine sulla relazione che lega le soluzioni intere di $ax + by = c$, quando esistono, quindi per portare ad intuire che l'esistenza di una soluzione implica che ne esistano infinite. In questo caso Geogebra è utilizzato per rappresentare funzioni lineari da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Nell'ultima parte viene brevemente descritta la parte di laboratorio relativa allo studio delle equazioni diofantee in due variabili riconducibili a differenze di quadrati.

Parole-chiave
Equazioni diofantee, giochi diofantei, Geogebra, differenze di quadrati.

ESEMPIO DI LABORATORIO

Premessa

Le equazioni diofantee, che legano il proprio nome a quello di Diofanto, matematico alessandrino del III secolo, sono equazioni a coefficienti interi di cui si cercano soluzioni intere o naturali. Sono sorprendentemente insidiose e spesso difficili, anche perché la restrizione sull'ambito in cui trovare le soluzioni le fa sembrare più semplici. I rischi che esse nascondono sono illustrati brevemente in [2].
Nel percorso qui descritto, le introduciamo agli studenti facendo ricorso a situazioni problematiche o a giochi diofantei. Per un'introduzione a questi giochi, rimandiamo ancora a [2]. Gli studenti della scuola secondaria del secondo ordine, pur abituati nel loro corso di studi ad avere a che fare con problemi di matematica, generalmente non li conoscono. Introdotti da James Jones nel 1982, i giochi diofantei rappresentano un intrigante modo per svagarsi con le equazioni e, al tempo stesso, forniscono al docente un'occasione per introdurre argomenti di matematica moderna, come

- la teoria dei giochi,
- la teoria della calcolabilità (il decimo problema di Hilbert H10),
- la teoria della complessità computazionale (P e NP),
- oltre naturalmente alla teoria dei numeri e ai molti misteri dei numeri primi.

Ci limitiamo a proporne un esempio.

Si hanno due sfidanti, diciamo A e B.
Il campo di battaglia è un'equazione a coefficienti interi, come $x_1 + y_1 + x_2 = y_2^2$.
La cronaca di una partita:

- A sceglie un valore naturale per x_1, per esempio $X_1 = 3$, così l'equazione diventa $3 + y_1 + x_2 = y_2^2$;
- B sceglie un valore naturale per y_1, per esempio $Y_1 = 6$, così che l'equazione diventa $9 + x_2 = y_2^2$;
- A sceglie per x_2 il valore $X_2 = 1$, così che l'equazione diventa $10 = y_2^2$;
- a questo punto B non ha modo di replicare con nessun valore naturale Y_2 per y_2 che soddisfi $10 = Y_2^2$ perché 10 non è un quadrato.

Dunque vince A.
In realtà A ha sempre una strategia vincente, gli basta scegliere x_2 in modo che la somma $x_1 + y_1 + x_2$ non sia un quadrato. Infatti ci sono numeri naturali arbitrariamente grandi che non sono quadrati.
Più in generale in un gioco diofanteo si fa riferimento a un polinomio arbitrario a coefficienti interi $p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Tra i numeri naturali, dunque all'interno di $\mathbb{N}$,

- A sceglie un valore X_1 per x_1,
- B gli oppone un valore Y_1 per y_1,
- A sceglie X_2 per x_2,
- B gli oppone un valore Y_2 per y_2,

e così via, fino a X_n, Y_n rispettivamente per x_n, y_n.
Alla fine della procedura

- se $p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = 0$ vince B,
- se $p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) \neq 0$ vince A.

Laboratorio sulle equazioni diofantee lineari in due variabili
Già le equazioni diofantee lineari in due variabili esemplificano i trabocchetti delle equazioni diofantee. Per introdurle si propone agli studenti di lavorare in gruppo sui seguenti problemi.

- Un mercante vuole acquistare buoi e cavalli spendendo esattamente 1770 talleri. Un bue costa 31 talleri e un cavallo ne costa 21. Quanti buoi e quanti cavalli può acquistare il mercante? (Un problema classico, perché corrisponde all'Esercizio 10, capitolo 2 della seconda parte dell'*Algebra* di Eulero).

Seguono altri esempi della stessa natura.

- Un cilindro con la capacità di 147 litri può essere completamente riempito versando in esso il contenuto di x contenitori da 7 litri e y contenitori da 5 litri. Quanto valgono x e y?
- La massa di 5 campioni di tipo I e 3 campioni di tipo II è 88 kg. Determina le masse unitarie dei due tipi di campioni sapendo che sono espresse da un numero intero di kg.
- Mario acquista una penna e 3 matite spendendo complessivamente 20 euro. Sapendo che le tre matite sono tutte uguali fra loro ed il costo di una penna e di ogni matita è espresso da un numero intero di euro, determina il costo di una penna e di una matita.

Nel primo caso, gli studenti, indicando rispettivamente con x e y il numero dei buoi e dei cavalli, possono riuscire a individuare l'equazione diofantea lineare $31x + 21y = 1770$ associata al primo problema, ma senza conoscenze pregresse sulle equazioni diofantee è difficile che riescano a trovare anche una sola delle soluzioni del problema.
Diversi i casi del secondo e del terzo problema, dal momento che delle equazioni diofantee ad essi associate, $7x + 5y = 147$ e $5x + 3y = 88$, possono essere individuate con non troppa difficoltà le soluzioni (21, 0) per la prima e (11, 11) per la seconda. Nel caso di $7x + 5y = 147$ uno dei due coefficienti, quello della x, divide il termine noto 147. Dal momento che 147:7=21 si ha che (21,0) è soluzione. Nel caso di $5x + 3y = 88$, la somma dei coefficienti divide il termine noto ed essendo 88:(5+3) =11 si ha che (11, 11) è soluzione.
Nel caso del quarto problema, indicando rispettivamente con x e y il prezzo in euro di una penna e di una matita, l'equazione diofantea associata al problema è $x + 3y = 20$, con il vincolo x e y interi positivi (è ragionevole pensare di non considerare accettabile il caso di matite a costo zero). Gli studenti

possono arrivare a determinare in questo caso tutte le soluzioni (17, 1), (14, 2), (11, 3), (8, 4), (5, 5), (2, 6) ed anche la forma generale della soluzione $(20-3h, h)$, con h intero, di $x+3y=20$ con x, y interi.
Analogamente a quanto visto nel caso del quarto problema, anche nel caso del secondo e del terzo problema, esistono altre soluzioni (X, Y) diverse da quelle individuate precedentemente? Quante e quali sono? Qual è la forma della più generale della soluzione (X, Y) dell'equazione diofantea associata al problema col solo vincolo che x, y siano interi?
Risolvere un'equazione diofantea del tipo $ax+by=c$ con x, y interi corrisponde a trovare i punti a coordinate intere della retta di equazione $ax+by-c=0$ (rispetto a un fissato sistema di riferimento cartesiano nel piano). Nel caso del quarto problema un disegno rigoroso su un foglio a quadretti può permettere di trovare tutte le soluzioni (X, Y) con X, Y interi positivi. La cosa è meno immediata nel caso dei primi tre problemi. È a questo punto che può essere utile il ricorso a Geogebra. Rappresentata, ad esempio, con questo software la retta $7x+5y=147$ attraverso l'opzione Zoom è possibile identificare i punti con entrambe le coordinate intere non negative. Per aiutare gli studenti a capire come sia possibile, data una soluzione di $ax+by=c$ con x, y interi, determinare una formula che permetta di trovare tutte le altre, può essere utile farli lavorare con Geogebra facendo ricorso alla funzione Successione. Mediante Geogebra è possibile in questo modo rappresentare solo i punti a coordinate intere di una retta compresi in un certo intervallo. Variando a, b e c interi mediante la funzione Slider, lo studente viene sollecitato a comprendere in corrispondenza di quali valori dei coefficienti l'equazione $ax+by=c$ non ammette soluzioni. Visto che ciò si verifica quando $d=MCD(a,b)$ non divide c, lo studente viene portato a intuire, e quindi a dimostrare, che $ax+by=c$ ammette soluzioni se e solo se d divide c e che se a e b sono primi fra loro allora $ax+by=c$ ammette sempre soluzioni. Si vanno poi a considerare i casi in cui d divide c e, ancora mediante Geogebra, si va a cercare il legame che c'è fra una soluzione particolare di $ax+by=c$ ed il coefficiente angolare della retta $ax+by=c$ espresso mediante frazione ridotta ai minimi termini (Figura 1).

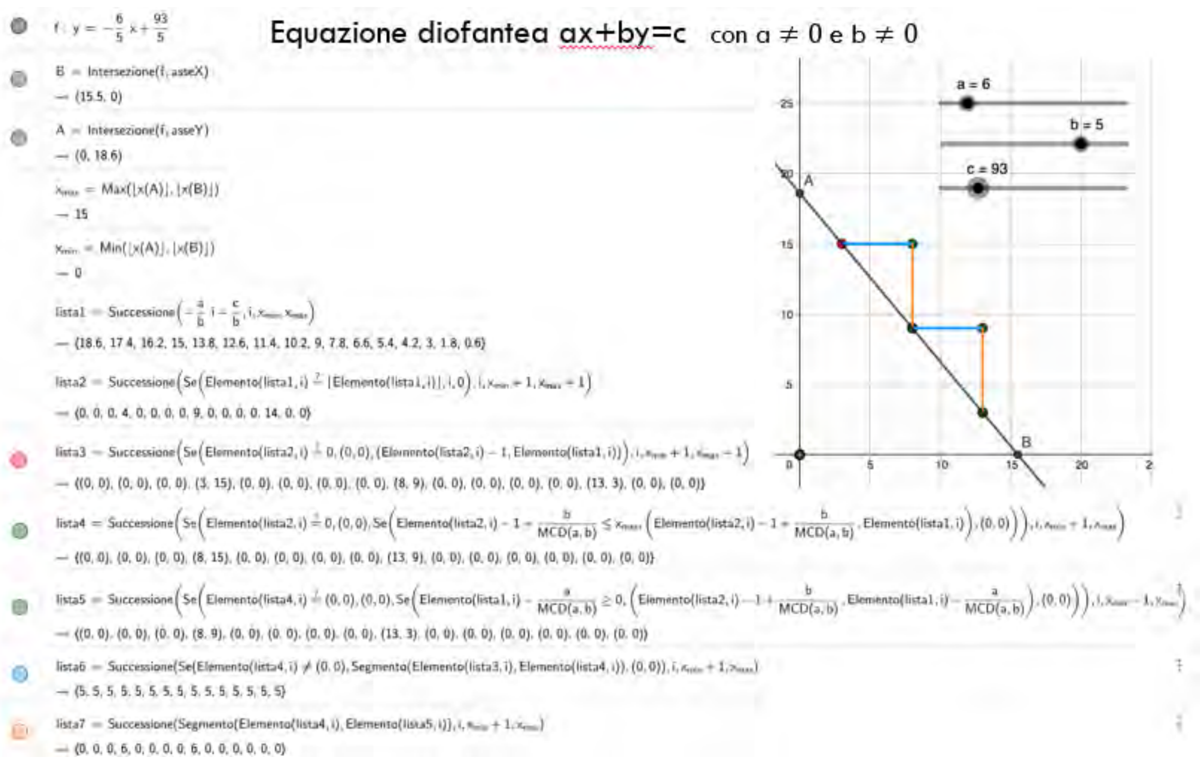


Figura 1. Studio con Geogebra delle soluzioni dell'equazione $ax+by=c$ con a, b, c interi, a, $b \neq 0$.

Dopo aver guidato gli studenti a formalizzare la proprietà che hanno intuito, il docente dimostra con loro il teorema seguente: Se (X, Y) è una soluzione particolare di $ax + by = c$ tutte e sole le soluzioni intere di $ax + by = c$ sono della forma $(X + kb/d, Y - ka/d)$ con k intero e $d = MCD(a, b)$.
Attraverso l'uso proposto, Geogebra ha quindi permesso di esaminare un gran numero di casi con maggior rapidità di quanto si possa fare con carta e penna, guidando lo studente-ricercatore alla scoperta di proprietà preparando la strada alla successiva fase di dimostrazione.
Appurato che se l'equazione diofantea $ax + by = c$ ammette una soluzione ne ammette infinite e compreso come fare a determinarle, la questione della risoluzione di $ax + by = c$ si sposta a quella della determinazione di una soluzione particolare della stessa equazione, nell'ipotesi che esista. Nel caso degli ultimi tre problemi proposti inizialmente è abbastanza semplice trovare una soluzione particolare ma emerge l'esigenza di trovare un modo per individuarla in casi come quello del primo problema. Il docente introduce quindi l'identità di Bézout e spiega come applicare l'algoritmo euclideo delle divisioni successive per determinare il massimo comun divisore fra due interi.
Acquisita una certa padronanza dell'argomento, gli studenti vengono invitati ad organizzarsi in squadre e a sfidarsi mediante la proposta della seguente variante di giochi diofantei basati su equazioni lineari. Ogni squadra presenta un gioco all'altra, che sceglie se svolgere il ruolo del giocatore A o del giocatore B. Se la squadra che ha proposto il gioco vince la partita conquista due punti, se la perde l'altra squadra conquista un punto. Vince la squadra che totalizza più punti in due partite.
Quello seguente è un esempio di sfida.
La prima squadra propone il gioco: $2x_2 + 3y_1 = x_1$ con x_i, y_i interi per $i = 1, 2$. Si noti che in questo caso è B a possedere la strategia vincente. Gli basta scegliere Y_1 di parità diversa da X_1 di modo che $X_1 - 3Y_1$ è dispari. (Si noti che nell'equazione manca la seconda indeterminata y_2 di B, come dire che questo giocatore rinuncia al suo secondo intervento).
La seconda squadra propone il gioco: $3(y_1 + x_2) + 5\,y_2 = x_1$ con x_i, y_i interi per $i = 1, 2$. In questo caso è A a possedere la strategia vincente. Gli basta scegliere X_1 multiplo di 5 e X_2 tale che $Y_1 + X_2$ non sia multiplo di 5.

Laboratorio sulle equazioni diofantee di secondo grado in due variabili riconducibili a differenze di quadrati

Per introdurre questo argomento si propone agli studenti di lavorare in gruppo sui seguenti problemi:

- Trova la misura dei raggi di due cerchi sapendo che sono espresse da numeri interi e che la differenza delle aree è 63 π.
- Un prigioniero si salva solo se riesce a vincere nel ruolo di A uno dei seguenti giochi diofantei
  a) $x_1^2 - y_1^2 = 63$,
  b) $x_1^2 - y_1^2 = 48$,
  c) $(x_1 + y_1)^2 - y_2^2 = 34x_2$.
  Quali equazioni, allora, deve evitare? E quale strategia vincente può applicare negli altri casi?

Si può iniziare col ragionare sulla questione seguente: quali sono i valori di un intero positivo n per cui l'equazione $x^2 - y^2 = n$ ammette soluzioni intere non negative per x e y? Ovviamente dovrà essere $x > y$.
Anche in questo caso si può consigliare agli studenti di fare di Geogebra un uso analogo a quello visto nel caso lineare, andando a rappresentare i punti a coordinate intere non negative dell'iperbole $x^2 - y^2 = n$, al variare di n intero positivo in un intervallo fissato (Figura 2). Dal momento che $x^2 - y^2 = n$ è un'equazione omogenea, le soluzioni si preservano per cambio di segno quindi, note le soluzioni (x, y) con x, y interi non negativi, è possibile trovare tutte le soluzioni intere.

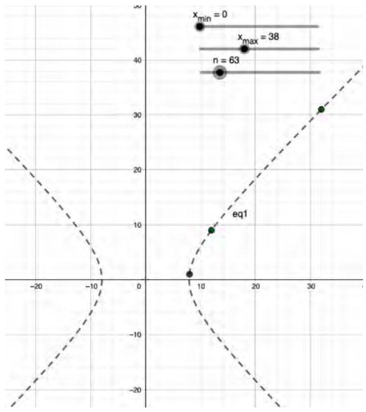


Figura 2. Determinazione con Geogebra dei punti a coordinate intere non negative $x^2 - y^2 = n$.

D'altro canto si può suggerire anche un altro tipo di approccio. Ricordando che per passare da y^2 a $(y+1)^2$ bisogna aggiungere $2y+1$, per passare da $(y+1)^2$ a $(y+2)^2$ bisogna aggiungere $2y+3$ e così via, si deduce che n si rappresenta come differenza di quadrati $x^2 - y^2$ se e solo se n può essere espresso come somma di un numero h di dispari consecutivi (nel qual caso $x - y = h$). Fissato n, Geogebra può essere utilizzato per determinare quali sono, se esistono, i valori di h per cui n può essere scritto come somma di h dispari consecutivi (Figura 3).

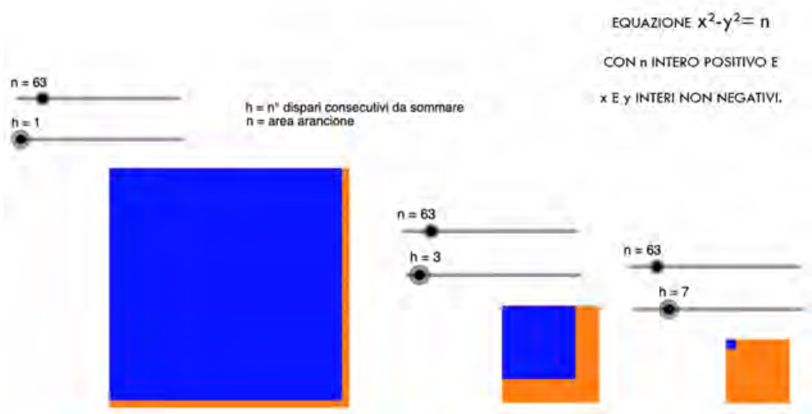


Figura 3. Studio con Geogebra delle soluzioni dell'equazione $x^2 - y^2 = n$.

Utilizzando Geogebra per esaminare di vari esempi di equazioni diofantee del tipo considerato, gli studenti vengono invitati infine ad indagare sulle questioni seguenti.
Si consideri l'equazione diofantea $x^2 - y^2 = n$ con n intero positivo e x e y interi non negativi.

- $x^2 - y^2 = n$ con n dispari, cioè della forma $n = 2k + 1$, ha soluzioni?
- $x^2 - y^2 = n$ con n multiplo di 4, cioè della forma $n = 4k$, ha soluzioni?
- $x^2 - y^2 = n$ con n pari ma non multiplo di 4, cioè della forma $n = 2k$ con k dispari, ha soluzioni?
- Quante sono le soluzioni di soluzioni $x^2 - y^2 = n$ con $n = 2k + 1$?
- Quante sono le soluzioni di soluzioni $x^2 - y^2 = n$ con $n = 4k$?

Si può arrivare a intuire che $x^2 - y^2 = 2k + 1$ ha tante soluzioni quanti sono i modi diversi di fattorizzare k nel prodotto di due dispari e che $x^2 - y^2 = 2k$ ha soluzioni solo se k è pari. Sicuramente più impegnativa è invece la questione proposta dagli ultimi due quesiti. Un'indagine dettagliata di queste tematiche si può trovare in [1].

Torniamo a considerare gli esercizi proposti per introdurre le equazioni diofantee di secondo grado in due variabili riconducibili a differenze di quadrati.
Nel caso del problema dei due cerchi, indicate con $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ le misure dei raggi dei due cerchi, le soluzioni per $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sono tutte e sole le coppie di interi $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ di interi positivi, con $\boldsymbol{X} > \boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{Y}^2 = \mathbf{63}$: un valore dispari di per sé, che però è anche la somma dei 3 numeri dispari consecutivi 19, 21, 23 e dei 7 numeri dispari consecutivi 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Si vede allora che queste soluzioni coincidono con (32, 31), (12, 9), (8, 1).
Nei giochi diofantei della seconda domanda non si pongono restrizioni su $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1$, che dunque possono assumere valori interi, non necessariamente positivi.
Il prigioniero deve evitare la scelta dell'opzione $\boldsymbol{x}_1^2 - \boldsymbol{y}_1^2 = \mathbf{63}$ perché in questo caso è il giocatore $\boldsymbol{B}$ ad avere la strategia vincente. Infatti per le precedenti considerazioni basta a $\boldsymbol{B}$ di scegliere un valore $\boldsymbol{Y}_1$ diverso da 31, 9, 1 e stavolta anche da –31, –9 e –1.
Il prigioniero deve evitare anche la scelta dell'opzione $\boldsymbol{x}_1^2 - \boldsymbol{y}_1^2 = \mathbf{48}$ perché anche in questo caso è il giocatore B ad avere la strategia vincente. Infatti 48 è multiplo di 4 e in effetti, procedendo come prima, si vede che soluzioni intere positive sono (13, 11), (8, 4), (7, 1), per cui a $\boldsymbol{B}$ basta scegliere $\boldsymbol{Y}_1$ diverso da ±11, ±4 e ±1.
Il prigioniero può salvarsi scegliendo l'ultima opzione. La strategia vincente per il prigioniero consiste in questo caso nello scegliere $\boldsymbol{X}_2$ dispari. In tal caso infatti $34\boldsymbol{X}_2$ è pari ma non è divisibile per 4 e non c'è alcun valore di Y_2 tale che $(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{Y}_1)^2 - \boldsymbol{Y}_2^2 = \mathbf{34}\boldsymbol{X}_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Nyblom, M. A. (2002). On the Representation of the Integers as a Difference of Squares, *Fibonacci Quart.* 40 (3), 243–246.
[2] Toffalori, C. (2020). Giocando coi polinomi, *MatematicaMente* 279-280.

LA MATEMATICA DELLO SPIROGRAFO: UN PERCORSO A "DISTANZA" NEL LICEO MATEMATICO

Silvia Rizzi, Federica Mennuni e Eleonora Faggiano
Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"
s.rizzi16@studenti.uniba.it – federica.mennuni@uniba.it - eleonora.faggiano@uniba.it

Abstract

In questo lavoro si presenta un'attività, progettata e sviluppata in accordo con il Metodo della Ricerca Variata (MRV), condotta in didattica a distanza in una classe seconda di Liceo Matematico e basata sull'utilizzo dello spirografo digitale. Agli studenti, divisi in piccoli gruppi, sono state proposte delle opportune schede di lavoro finalizzate a porre la loro attenzione su come cambiano le caratteristiche della curva ottenuta al variare dell'anello e della ruota. Al lavoro nei gruppi è seguita una discussione collettiva orchestrata dall'insegnante, durante la quale sono state condivise le congetture emerse nei vari gruppi e si è dato spazio alla produzione delle argomentazioni. I lavori dei gruppi e la discussione sono stati videoregistrati, trascritti ed analizzati assieme ai protocolli degli studenti, facendo riferimento alla teoria delle variazioni di Marton alla base del MRV. L'analisi ha permesso, inoltre, di verificare l'efficacia dell'attività nel promuovere lo sviluppo del pensiero razionale e nel contribuire a sradicare l'idea che la matematica sia solo un insieme di regole e formule da imparare a memoria. In particolare, gli studenti hanno scoperto un risvolto applicativo del mcm e del MCD, diverso dalle usuali situazioni in cui questi oggetti matematici sono utilizzati per esercizi puramente meccanici.

Parole-chiave
Spirografo, Metodo della Ricerca Variata, teoria delle variazioni, minimo comune multiplo, massimo comune divisore

INTRODUZIONE

Le tecnologie e i software digitali hanno svolto un ruolo fondamentale nella didattica durante la pandemia permettendo agli insegnanti di continuare a svolgere il loro ruolo con gli studenti. Nel percorso didattico che verrà illustrato nel seguito si è fatto uso di una risorsa digitale che non è nata per essere impiegata per la didattica, ma grazie alla quale il suddetto percorso non si sarebbe potuto svolgere in situazione di didattica a distanza: lo spirografo digitale.Questo lavoro per studenti liceali nasce dall'idea illustrata nel IX Convegno Di.Fi.Ma. in cui Ferrara, Ferrari e Savioli (2020) hanno presentato una sperimentazione basata sull'utilizzo dello spirografo svolta all'interno di una Scuola Primaria, incentrata sulla matematica in movimento. Nel suddetto lavoro verrà presentata un'attività, condotta in didattica a distanza, che ha permesso ad una classe di studenti di seconda di Liceo Matematico di "agire da ricercatori", favorendo la scoperta degli oggetti matematici in gioco e lo sviluppo delle fondamentali competenze trasversali di analisi, argomentazione e confronto. Il percorso è stato progettato in accordo con il Metodo della Ricerca Variata (MRV) (Arzarello, 2016a; 2016b). Agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, sono state proposte delle opportune schede di lavoro finalizzate a porre la loro attenzione sullo spirografo e sul suo funzionamento. Al lavoro nei gruppi è seguita una discussione collettiva orchestrata dall'insegnante, durante la quale sono state condivise le congetture emerse nei vari gruppi e si è dato spazio alla produzione delle varie argomentazioni. Tutti i lavori dei vari gruppi e la discussione sono stati analizzati assieme ai protocolli degli studenti, facendo riferimento, in particolare, alla teoria delle variazioni (Marton et al. 2004) che è alla base del MRV. L'analisi, inoltre, ha permesso di verificare l'efficacia dell'attività nel promuovere lo sviluppo del pensiero razionale, la formulazione di congetture e la produzione di argomentazioni e nel contribuire a sradicare l'idea che la matematica sia solo un insieme di regole e formule da imparare a memoria. In particolare, gli studenti hanno scoperto un risvolto applicativo del minimo comune multiplo (mcm) e del massimo comune divisore (MCD), diverso delle usuali situazioni in cui questi oggetti matematici vengono utilizzati per fare esercizi meccanici di scomposizione. Percorsi didattici simili a quello qui presentato, attraverso l'utilizzo di strumenti manipolativi o digitali, permettono agli studenti di comportarsi come ricercatori per scoprire gli oggetti matematici in gioco. Da non trascurare, inoltre, il fatto che questo tipo di attività consentono di sviluppare negli studenti spirito critico, capacità di argomentazione e di confronto e permettono, nell'ambito della ricerca, di studiare l'efficacia dell'utilizzo delle risorse digitali in situazioni laboratoriali e a distanza finalizzate alla costruzione di significati matematici.

I RIFERIMENTI TEORICI

La sequenza didattica è stata progettata tenendo conto del Metodo della Ricerca Variata (MRV) come metodologia efficace per far "agire gli studenti da ricercatori", promuovendo lo sviluppo del pensiero razionale, la formulazione di congetture, la produzione di argomentazioni. Il Metodo della Ricerca Variata è un approccio all'insegnamento della matematica che punta a proporre agli studenti problemi dinamici, accompagnati da domande del tipo "*che cosa succede se...?*"; l'obiettivo didattico è promuovere la formazione del "senso degli studenti per la matematica", stabilendo un circolo virtuoso che insegni a passare da una situazione particolare al caso generale e viceversa. Il MRV consiste essenzialmente nel seguire uno schema metodologico suddiviso in tre fasi. Nella prima si parte da una situazione iniziale in cui gli studenti sono invitati a osservare, formulare domande, dare delle risposte, rappresentare in forma matematica quanto trovato; accade che le loro produzioni sono sempre oggetto di discussione critica e condivisione in classe. Successivamente si modifica una (o più) delle osservazioni fatte, cambiandola o negandola (quindi *variando* la situazione): si discute di ciò che cambia e di cosa, invece, rimane invariato. Per finire si ottengono nuove osservazioni, domande, risposte, rappresentazioni, ecc. e si itera eventualmente il ciclo. Il principio di base del MRV "*per capire meglio qualcosa, occorre considerarla da più punti di vista e variarne le proprietà, per vedere l'effetto che fa*" è in linea con quelli che per Marton (Marton et al., 2004) sono i quattro schemi necessari per la comprensione di un concetto:

- *contrasto*: per sperimentare o far esperienza di qualcosa, occorre sperimentare e far esperienza con qualcosa di diverso con cui poterlo confrontare;
- *generalizzazione*: si fa esperienza delle diverse rappresentazioni dello stesso concetto o delle differenti situazioni in cui il concetto si manifesta, cogliendone gli aspetti critici che verranno separati da quelli irrilevanti;
- *separazione*: per fare esperienza di un certo aspetto inerente qualcosa o di un certo concetto e al fine di separarli da altri aspetti o concetti, occorre farli variare mentre tutti gli altri aspetti non cambiano;
- *fusione*: se sono presenti più aspetti critici da tenere in considerazione contemporaneamente, questi devono essere vissuti e sperimentati tutti in contemporanea.

Con l'analisi dei risultati e della discussione orchestrata dall'insegnante si riscontreranno proprio questi quattro schemi, che vedremo in dettaglio nel seguito.

DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ

L'attività è stata condotta con studenti di classe seconda del Liceo Scientifico ad Indirizzo Matematico "E. Amaldi" di Bitetto (BA); gli studenti sono stati suddivisi in piccoli gruppi e hanno completato le schede di lavoro in un tempo di circa 3 ore. L'attività, inoltre, è stata videoregistrata e le discussioni sono state trascritte in modo tale da essere oggetto di analisi condivisa per le insegnanti coinvolte, affinché si valutasse l'efficacia del percorso con lo scopo di progettare eventuali modifiche o sviluppi futuri nell'attività. Strumento cardine dell'attività sperimentale è lo spirografo[14], un dispositivo di disegno composto da un insieme di anelli e ruote di differente dimensione che possono essere combinate

[14] Lo spirografo adoperato per l'attività è presente sul sito web https://nathanfriend.io/inspirograph/

tra loro e ruotare l'una con l'altra grazie ai loro bordi dentati. Ogni ruota possiede dei piccoli forellini posti a distanza differente dal centro in cui inserire una penna o un colore per realizzare le figure. Nella sperimentazione, avvenuta in didattica a distanza tramite la piattaforma Google Meet, gli studenti hanno adoperato la versione digitale dello strumento.

Come funziona lo spirografo digitale?

Dopo aver fatto accesso al sito web indicato nella nota a piè pagina e aver scelto un anello e una ruota, si seleziona con un colore uno dei forellini presenti su quest'ultima e si comincia a far muovere la ruota all'interno dell'anello fissato, in modo da tracciare un tratto di curva. È possibile contare innanzitutto il numero di giri che compie la ruota perché il forellino torni nel punto di partenza, ovvero per chiudere la curva, ma anche il numero dei "petali" o delle "punte" che sono state disegnate e il numero dei dentini che determinano la distanza tra due qualunque petali consecutivi. Questi tre numeri rappresentano quelle che d'ora in poi chiameremo le *caratteristiche* della curva generata dallo spirografo: *giri*, *petali* e *distanza*. Indicheremo invece semplicemente con *anello* e *ruota* il numero dei dentini rispettivamente dell'anello e della ruota scelti per generare la curva.

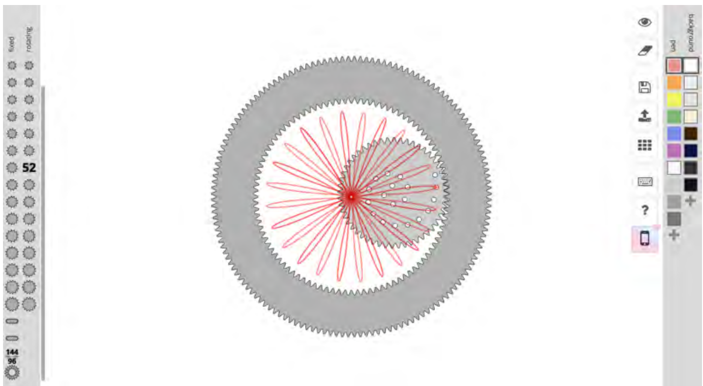


Figura 1. Lo spirografo digitale

Le schede di lavoro

Dopo aver fatto l'accesso al sito web, vi è inizialmente una prima fase esplorativa in cui gli studenti sono stati liberi di esplorare lo strumento; successivamente è stato chiesto loro di rispondere alle domande: "*come è fatto?*" e "*che cosa fa lo spirografo?*". In seguito, è stato chiesto loro di completare la seguente tabella in cui viene richiesto di scegliere una coppia di ingranaggi anello-ruota, prendendo nota del numero dei loro dentini e poi di scegliere due differenti forellini presenti sulla ruota. In ogni gruppo ciascuno studente ha poi inserito, in una riga diversa della tabella condivisa, le due immagini ottenute e gli è stato chiesto: "*che cosa osservate?*"

Tabella 1. Tabella da completare condivisa tra i ragazzi in cui, una volta scelta una combinazione anello-ruota, si prendono in esame due differenti forellini presenti sulla ruota.

Informazioni	**Immagine 1° forellino**	**Immagine 2° forellino**
N° dentini dell'Anello: N° dentini della Ruota: N° primo forellino: N° secondo forellino:		

L'obiettivo è quello di far osservare cosa cambia e cosa non cambia tenendo fissi anello e ruota e facendo variare il forellino per portare gli studenti ad osservare che le caratteristiche della figura sono

indipendenti dalla scelta del forellino sulla ruota. Infatti, il numero dei petali e il numero dei giri compiuti dalla ruota restano invariati al variare del forellino.
Successivamente, è stato chiesto agli studenti di completare una nuova tabella in cui essi dovevano scegliere una ruota e un forellino e utilizzarla con due differenti anelli. Anche in questo caso la richiesta è stata: "*che cosa osservate?*".
L'obiettivo, in questo caso, è quello di far osservare cosa cambia e cosa non cambia tenendo fissi ruota e forellino e facendo variare l'anello per portare gli studenti ad osservare che le caratteristiche della figura sono dipendenti dalla scelta dell'anello.

Tabella 2. In questa tabella viene fatto variare l'anello mantenendo fissa la ruota e il forellino, indicando le caratteristiche delle figure ottenute.

Ruota e forellino:		
Anello 96 dentini	Immagine	N° petali: Distanza: N° giri:
Anello 105 dentini	Immagine	N° petali: Distanza: N° giri:

Analogamente, si può osservare, completando la tabella 3, cosa cambia e cosa non cambia se viene mantenuto fisso l'anello e sono prese in considerazione due differenti ruote, chiedendo ancora una volta ai ragazzi cosa osservano dalla tabella completata.

Tabella 3. In questa tabella viene fatta variare la ruota mantenendo fisso l'anello e il forellino, indicando le caratteristiche delle figure ottenute.

	Ruota 1	**Ruota 2**	
Anello 96 dentini	Immagine	Immagine	N° petali: Distanza: N° giri:
Anello 105 dentini	Immagine	Immagine	N° petali: Distanza: N° giri:

L'obiettivo ora è portare gli studenti ad osservare che le caratteristiche della figura, oltre che essere indipendenti dal forellino e dipendenti dalla scelta dell'anello, sono anche dipendenti dalla scelta della ruota. A conclusione dell'attività, l'ultima parte è pensata per andare più a fondo nella scoperta della matematica dello spirografo ed in particolare, attraverso la compilazione della tabella 4, per far emergere le relazioni tra la coppia di ingranaggi scelta e le caratteristiche della curva ottenuta. In questo caso, viene chiesto agli studenti: "*quali relazioni è possibile trovare tra i numeri presenti su ciascuna riga?*". Si osservi, inoltre, che per il completamento della tabella sono state opportunatamente scelte tre grandezze differenti di ruote, ossia la ruota con 36, 52 e 63 dentini.
È chiaro che l'obiettivo è quello di far emergere le relazioni presenti su ciascuna riga, in modo tale che per ogni coppia di ingranaggi scelta sia possibile conoscere a priori le caratteristiche della curva da raffigurare, ossia il numero dei petali, il numero di giri e la distanza tra un petalo e l'altro. A seguito del completamento di quest'ultima tabella da parte dei vari gruppi, vi è stata la discussione collettiva orchestrata dall'insegnante; qui sono state condivise le congetture emerse nei vari gruppi e si è dato spazio alla produzione delle argomentazioni.

Tabella 4. Tabella riassuntiva per la scoperta della matematica dello spirografo.

Anello	Ruota	Petali	Distanza	Giri
96	36			
96	52			
96	63			
105	36			
105	52			
105	63			

RISULTATI

Nella prima fase esplorativa dell'attività, gli studenti dei vari gruppi hanno compreso facilmente l'uso e il funzionamento dello spirografo digitale, cimentandosi a creare figure con combinazioni di anelli e ruote differenti. Alla domanda "*come è fatto lo spirografo?*", i ragazzi hanno risposto affermando che è uno strumento digitale formato da due oggetti "mobili", da ruote dentate che possono scorrere tra loro e su cui sono presenti dei piccoli buchi in cui poter inserire le penne. Per quanto riguarda il "*che cosa fa lo spirografo?*", gli studenti hanno compreso che i due ingranaggi, incastrandosi tra loro, formano delle figure geometriche, delle curve che cambiano in base alla grandezza e alla forma degli ingranaggi presi in considerazione.

Nel cominciare a valutare gli aspetti varianti e invarianti, invece, ogni ragazzo ha utilizzato una combinazione anello-ruota e forellino differente. L'idea di base, però, è illustrata dall'insegnante nella figura seguente:

> **I.:** Qui ho preso stesso anello, stessa ruota e ho cambiato il forellino.
> **Mi.:** Il numero di petali non cambia.

Gli studenti hanno quindi intuito che nel momento in cui si lasciano fissi sia l'anello che la ruota il numero dei petali resta invariato.

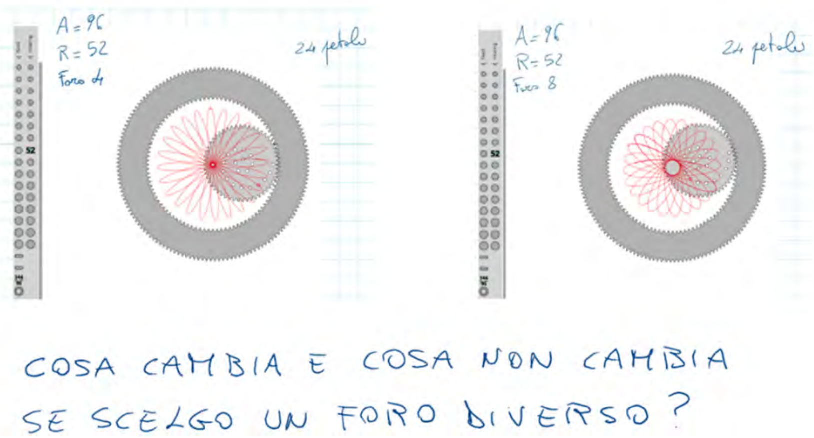


Figura 2. Aspetti varianti e invarianti al variare del forellino.

Nel momento in cui, invece, viene fatto prima variare l'anello e successivamente la ruota mantenendo fissi rispettivamente ruota e anello, i ragazzi, partendo nuovamente dal discorso del cambiamento del forellino, riescono a cogliere che solo a seconda della scelta degli ingranaggi varia il numero dei petali della figura ottenuta come si può evincere dal seguente estratto:

> **I.:** Prendiamo l'anello da 105 e la ruota da 80. Prendiamo un forellino… otteniamo 21 petali. Prendiamo un altro forellino…contiamo i petali.
> **M.**: Sono sempre 21.
> **I.**: Se adesso prendiamo l'anello da 96 e la ruota da 80…prendendo un forellino e poi un altro. Quanti sono i petali?

M.: Sono 6.
I.: Quindi sono sempre 6. Cosa cambia tra questa figura e quella di prima? Cosa abbiamo cambiato?
M.: Il numero dei denti dell'anello.
Mi.: Quindi il numero dei petali dipende dai dentini dell'anello.
I.: Se dipendesse solo dai dentini dell'anello, prendendo l'anello da 96 e cambiando la ruota, dovremmo trovare sempre 6 petali…
Giu.: Dipende sia dalla ruota che dall'anello.
[…]
I.: Quindi in linea di massima ci sembra che il numero dei petali dipenda da cosa? Dipende dal foro?
Mi.: No. Dipende dalla ruota e dall'anello.

Passiamo ora al cuore dell'attività: la matematica dello spirografo. Nel paragrafo seguente mostreremo come sono emerse le relazioni che sussistono tra le caratteristiche della figura e la combinazione di anello-ruota scelta.

La matematica dello spirografo

Mostriamo adesso la tabella completa assegnata ai ragazzi nell'ultima parte dell'attività.

Tabella 5. Tabella completa di dati della matematica dello spirografo.

Anello	**Ruota**	**Petali**	**Distanza**	**Giri**
96	36	8	12	3
96	52	24	4	13
96	63	32	3	21
105	36	35	3	12
105	52	105	1	52
105	63	5	21	3

Come si può osservare, una prima relazione è data dal prodotto tra la distanza tra due petali consecutivi (misurata in dentini) e i petali stessi che mi restituiscono il numero dei dentini dell'anello; quelli della ruota, invece, sono ottenuti moltiplicando la distanza tra due petali consecutivi per il numero dei giri compiuti dalla ruota stessa. In particolare, si osserva che il prodotto tra anello e giri è pari al prodotto tra ruota e petali. Vediamo di seguito l'estratto della discussione collettiva in cui più ragazzi si sono cimentati nel trovare le relazioni suddette.

I.: C'è qualcosa che si può osservare in questa tabella? Avete trovato delle relazioni tra i numeri su ogni riga?
M.: I petali e la distanza sono inversamente proporzionali.
I.: In che senso?
M.: Tipo moltiplicando 8∗12 si ottiene 96 e lo stesso si ottiene se si moltiplica 24∗4 e 32∗3.
Giu.: Anche 35∗5 viene 105.
I.: Quindi state dicendo che: Petali∗Distanza = Anello. Vedete altre relazioni in cui compare la ruota?
Mi.: Distanza∗Giri = Ruota, 12∗3, 4∗13…
Giu.: Io ho provato a fare una cosa un po' diversa. Ho fatto $\frac{Anello}{Ruota} *$ Giri = Petali.
I.: Che potremmo anche scrivere come: Anello∗Giri = Petali∗Ruota. Vediamo infatti che 96∗3=288 e se faccio Ruota∗Petali, cioè 36∗8, ottengo sempre 288.

Ecco, dunque, che i ragazzi hanno scoperto come poter calcolare a priori il numero dei petali e il numero dei giri compiuti dalla ruota se e solo se si conosce a priori anche la distanza tra due petali consecutivi. A cosa corrisponde la distanza? E perché moltiplicando l'anello per il numero di giri e la ruota per il numero dei petali si ottiene la stessa quantità? A cosa corrisponde? E qui entrano in gioco gli elementi chiave dell'attività, ovvero il minimo comune multiplo e il massimo comune divisore. Guidati dall'insegnante, gli studenti sono stati spinti a fare ipotesi e a cercare delle giustificazioni. Dall'estratto che segue possiamo ricostruire il ragionamento fatto per spiegare che Anello∗Giri e Petali∗Ruota altro non sono che il mcm tra il numero dei dentini dell'Anello e il numero dei dentini della Ruota; l'insegnante ha rappresentato graficamente l'idea dello "srotolamento" delle circonferenze dell'anello e della ruota proposta da uno studente.

I.: Cosa c'entra il 288 con la ruota e l'anello? Che legame c'è tra i 96 dentini dell'anello e il 36 della ruota?

Mi.: È il minimo comune multiplo! 288 è il minimo comune multiplo tra 96 e 36.

I.: Secondo te, perché è il minimo comune multiplo?

Mi.: Perché noi dobbiamo riempire lo stesso numero di ruote e anelli, cioè noi dobbiamo occupare con un certo numero dei giri la ruota e l'anello per poi tornare allo stesso dentino. È come se i dentini li mettiamo non come una circonferenza, diciamo... mettiamo tutti i dentini percorsi in successione… *Dobbiamo poi arrivare ad un certo punto in cui i due segmenti formati da tutti i dentini dell'anello e tutti i dentini della ruota sono uguali*.

I.: È come se io avessi una cosa di questo tipo…

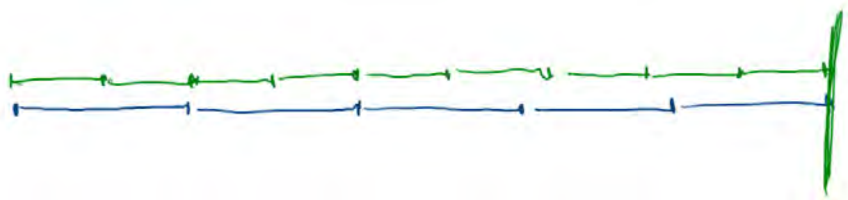


Figura 3. Il segmento di colore verde, in alto, indica le P volte in cui si ripetono i dentini della ruota; il segmento blu, in basso, le G volte in cui si ripetono i dentini dell'anello.

Mi.: Noi dobbiamo riempire con due segmenti diversi una stessa quantità. Quindi quello è il 288.

La stessa rappresentazione del mcm tra Anello e Ruota è stata sfruttata per comprendere che il numero di dentini corrispondente alla distanza tra due petali consecutivi altro non è che il MCD tra Anello e Ruota. Da questo punto alla nota relazione tra mcm e MCD il passo è davvero breve e, soprattutto, "denso" di significato.

I.: Adesso... la distanza tra un petalo e l'altro cosa rappresenta? Lo posso stabilire a priori conoscendo il numero dei dentini dell'anello e della ruota?

Mi.: ... forse il massimo comune divisore. Praticamente è lo stesso ragionamento del mcm solo che dobbiamo ragionare per dividere. Cioè che mentre per il mcm noi dobbiamo trovare un segmento in cui ci siano un certo numero di ruote e un certo numero di anelli, in questo caso noi dobbiamo trovare un segmento che divide in parti uguali sia l'anello che la ruota e quel segmento è la distanza.

I.: Quindi se la distanza è il MCD, il numero dei petali posso ottenerlo facendo: P = $\frac{A}{MCD(A,R)}$ mentre il numero di giri: G = $\frac{R}{MCD(A,R)}$.

ANALISI DEI RISULTATI E DISCUSSIONE

L'analisi dei protocolli dei lavori nei gruppi e delle trascrizioni delle discussioni consente di osservare come durante l'attività si possano distinguere alcuni momenti salienti interpretabili in termini dei quattro aspetti descritti da Marton. Partendo dall'analisi delle risposte emerse dalla richiesta di scegliere un anello, una ruota dentata e due differenti forellini e di mettere a confronto le due figure ottenute, si riscontra lo schema del contrasto individuato da Marton; dalla discussione collettiva, invece, emerge lo schema della generalizzazione. Lo schema del contrasto richiede principalmente di fare esperienza di un concetto, sperimentando anche qualcosa di differente, al fine di poterli mettere a confronto. Infatti, i ragazzi osservano gli aspetti presenti in entrambe le figure, realizzate con la stessa coppia di ingranaggi e forellino diverso, e gli aspetti dove le figure differiscono, mettendo dunque a confronto ciò che hanno realizzato. Lo schema della generalizzazione consiste nel fare esperienza di diverse rappresentazioni delle situazioni in cui il concetto si manifesta, in modo da coglierne gli aspetti critici; durante la discussione collettiva e in particolare, grazie alla figura mostrata dall'insegnante (v. Figura 2), i ragazzi hanno osservato che il numero dei petali ottenuti dalla combinazione anello-ruota fosse del tutto indipendente dalla scelta del forellino. Dall'analisi e dalla discussione delle successive due richieste, emerge come i ragazzi comincino a costruire diversi schemi, in particolare quello della separazione, consistente nella distinzione tra i diversi aspetti critici di uno stesso concetto, osservandone separatamente la variabilità mentre gli altri aspetti non cambiano. Infatti, durante la discussione è emerso un aspetto di variazione presente tra le due figure poste nelle due tabelle: il numero dei petali non cambia al variare della scelta del forellino, bensì dalla scelta dei due ingranaggi. L'ultimo schema di cui parla Marton, ossia lo schema della fusione, compare nella fase conclusiva dell'attività e della discussione collettiva, dove i ragazzi devono ragionare, dopo aver completato la tabella, sulle possibili relazioni presenti al suo interno. Si parla di schema di fusione nel momento in cui si riescono a cogliere differenti aspetti critici di un determinato concetto, andandone ad osservare simultaneamente la variabilità. In questa fase finale dell'attività, a seguito delle precedenti richieste in cui i ragazzi sono stati portati ad analizzare situazioni in cui vi è una separazione di più aspetti, si punta a mettere insieme tutto ciò che si è osservato. Il complesso funzionamento dello strumento è stato compreso tramite le possibili relazioni che intercorrono in ogni scelta di coppia di ingranaggi. Soprattutto durante la discussione collettiva, i ragazzi hanno messo in luce le relazioni presenti tra i numeri riportati in tabella, parlando di mcm e di MCD. Dalle relazioni sopra citate, i ragazzi passano nuovamente ad una generalizzazione: infatti, giungono ad una matematizzazione delle relazioni trovate tra i numeri, partendo dal particolare e arrivando al generale, comprendendo a pieno il funzionamento e la matematizzazione dello spirografo.

CONCLUSIONI

In conclusione, l'attività ci ha permesso di promuovere lo sviluppo del pensiero razionale cercando di sradicare l'idea che la matematica sia solo un insieme di regole e formule da imparare a memoria; e soprattutto, gli studenti hanno potuto sperimentare un nuovo risvolto da un punto di vista applicativo di due operatori utilizzati maggiormente in algebra per esercizi meccanici, ossia il mcm e il MCD.

RINGRAZIAMENTI

Un particolare ringraziamento va ai ragazzi di seconda (a.s. 2020/21) del Liceo Matematico "E. Amaldi" di Bitetto (BA) e alla loro docente per aver permesso la realizzazione di questa attività didattica.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. (2016a). Basing on an inquiry approach to promote mathematical thinking in the classroom. In Maj-Tatsis, B., Pytlak, M. & Swoboda, E. (Eds.), *Inquiry based mathematical education*. Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, Poland. 9-20

Arzarello, F. (2016b). Apprendere la matematica: gli studenti come ricercatori. Relazione presentata alla Terza scuola estiva per insegnanti UMI-CIIM AIRDM, Bardonecchia, 26 agosto 2016 (http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2016/09/ARZARELLO.pdf)

Ferrara F., Ferrari G., Savioli K. (2020). Curve chiuse in movimento: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria. In Bonino R., Marocchi D., Rinaudo M., Serio M. (A cura di), *Matematica e Fisica nella cultura e nella società. Atti del IX Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica* Di.Fi.Ma 2019, Università di Torino, pp. 47-54.

Marton, F., Runesson, U., Tsui, A. (2004). The space for learning. In: Marton, F., Tsui, A. B., Chik, P. P., Ko, P. Y., & Lo, M. L. (Eds.) *Classroom discourse and the space of learning.* Routledge. 3-40

LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA DELLA VIGNETTA "ISOMETRIE PASSO PASSO": PROGETTO KLEIN ITALIA

Antonella Montone[1], Luigi Tomasi[2]
[1]Università di Bari, [2]Università di Ferrara
antonella.montone@uniba.it - luigi.tomasi@unife.it

Abstract
Il progetto Klein Italia, di cui questo lavoro fa parte, mira alla costituzione di una comunità di apprendimento basata sui contatti tra le scuole e la ricerca matematica contemporanea. Inoltre, strumento di veicolazione di questo legame, sono le suddette "vignette Klein", cioè un breve scritto che illustra uno specifico tema della matematica e nel quale ne sono sintetizzate le caratteristiche principali. Attraverso la trasposizione didattica delle "Vignette Klein", si fornisce agli insegnanti un senso di connessione tra la matematica che si insegna a scuola, la ricerca e le applicazioni dei risultati matematici al mondo reale. Questo lavoro prende spunto dalla vignetta "Simmetry step by step" tradotta in italiano nella vignetta "Simmetrie passo passo", che ha ispirato la progettazione di una serie di attività laboratoriali, di proposte didattiche e di approfondimenti storici delineanti un lungo itinerario di insegnamento - apprendimento in continuità nella Scuola Secondaria di Secondo grado.

Parole-chiave
Simmetrie, software di geometria, apprendimento attivo

INTRODUZIONE

Il progetto Klein Italia, di cui questo lavoro fa parte, ha lo scopo di creare una comunità di apprendimento che metta insieme expertise differenti del mondo della scuola e della ricerca universitaria per migliorare la pratica didattica e aggiornare e arricchire le conoscenze matematiche da proporre agli studenti. Attraverso la trasposizione didattica delle "Vignette Klein", brevi testi che sintetizzano le caratteristiche principali di un tema matematico, si fornisce agli insegnanti un senso di connessione tra la matematica che si insegna a scuola, la ricerca e le applicazioni dei risultati matematici al mondo reale. Questo lavoro prende spunto dalla vignetta del progetto Klein [http://blog.kleinproject.org] "Symmetry step by step" [http://blog.kleinproject.org/?p=1381], tradotta in italiano nella vignetta "Isometrie passo passo", che ha ispirato la progettazione di una serie di attività laboratoriali, di proposte didattiche e di approfondimenti storici delineanti un lungo itinerario di insegnamento - apprendimento in continuità nella Scuola Secondaria di II grado. L'obiettivo primario dell'intero percorso, elaborato da un gruppo di insegnanti e ricercatori di varie Università e Scuole in Italia[15], è la scoperta e la descrizione delle proprietà caratterizzanti le isometrie del piano, attraverso l'utilizzo di artefatti digitali e manipolativi, durante il primo e il secondo biennio di scuola secondaria di II grado. Le proposte didattiche mirano a rendere gli studenti in grado di affrontare attività basate sui nodi concettuali delle trasformazioni isometriche attraverso la metodologia del laboratorio di matematica, facendogli assumere un ruolo da protagonisti nella costruzione del sapere. Il laboratorio di matematica a cui si fa riferimento non è definito come un luogo fisico diverso dalla classe, ma come un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Un laboratorio, quindi, che coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni) (UMI, 2003).

[15] Anna Amirante, Ilaria Bencivenni, Luigi Bernardi, Andrea Bruno, Federica Ferretti, Michele Fiorentino, Maria Flavia Mammana, Giuliana Masotti, Marta Menghini, Lorenzo Mazza, Antonella Montone, Ornella Robutti, Luigi Tomasi.

IL PROGETTO

Il progetto ha avuto avvio, in una prima fase, con la traduzione della vignetta in italiano e la relativa individuazione di elementi significativi per una trasposizione didattica nella scuola secondaria di II grado italiana. In seguito sono state elaborate attività prevalentemente per il I biennio della scuola secondaria di II grado.
La tematica affrontata è quella delle isometrie del piano e delle simmetrie nella realtà (arte, natura, architettura, ...), e le finalità principali sono: scoprire e descrivere le proprietà caratterizzanti le isometrie del piano; individuare i nodi concettuali relativi alle trasformazioni geometriche mediante l'utilizzo di artefatti digitali e non; costruire il sapere mediante attività laboratoriali in cui lo studente elabora il suo sapere in modo attivo. Un esempio di attività particolarmente significativa per perseguire le finalità previste riguarda la ricostruzione di fregi e di tassellazioni del piano.
Nello specifico, le attività hanno l'obiettivo di riconoscere le isometrie nel mondo reale presenti nelle regolarità di una pavimentazione, nelle simmetrie di un'opera d'arte, nelle regolarità degli oggetti della natura e così via. Inoltre mirano ad individuare alcuni elementi fondamentali per realizzare e classificare semplici fregi e tassellazioni del piano, anche utilizzando strumenti digitali, per classificare isometrie del piano in base ad elementi invarianti e alla composizione di isometrie (pari e dispari), in particolare delle simmetrie assiali, e per analizzare e risolvere problemi geometrici nel piano, e nello spazio, utilizzando le proprietà delle isometrie.

LE ATTIVITÀ

Le attività, pur traendo spunto dalla vignetta "Simmetrie passo passo", coprono un discorso più ampio sulle isometrie, facendo riferimento alla nostra tradizione didattico-culturale e alle Indicazioni Nazionali (2010) e alle Linee Guida (2010, 2012) per la Scuola Secondaria di II grado.
La seguente tabella sinottica (Tabella 1), presenta l'elenco delle attività proposte, organizzate per righe e per colonne. Le righe della tabella fanno riferimento ai nodi concettuali affrontati, mentre le colonne agli aspetti metodologici e alle competenze su tre filoni, a complessità crescente.

Tabella 1. Le attività

	Esplora e congettura	**Scopri, classifica e generalizza**	**Risolvi problemi, argomenta e dimostra**
La traslazione	**TRA**_attività_a	**TRA**_attività_b	**TRA**_attività_c
La rotazione	**ROT**_attività_a	**ROT**_attività_b	**ROT**_attività_c
La simmetria assiale	**SIM**_attività_a	**SIM**_attività_b	**SIM**_attività_c
La glissosimmetria	**GLI**_attività_a_b		**GLI**_attività_c
Composizione di Isometrie	**ISO**_attività_a	**ISO**_attività_b	**ISO**_attività_c
Approfondimenti ed esercizi	**APP**_isometrie_3D	APP_isometrie_3D_classif	**APP**_triennio_attività_a **APP**_ip3_attività_a

Il colore verde dello sfondo indica un'attività prevalentemente inserita in un contesto nel mondo reale mentre il colore azzurro si riferisce ad un contesto prevalentemente matematico. Le attività presentate possono essere svolte sia singolarmente e indipendentemente le une dalle altre, sia seguendo un percorso progettato e strutturato dall'insegnante tramite la scelta della sequenza di attività che più ritiene adatta alla propria classe.

Ogni attività proposta è strutturata secondo il seguente schema:

- Introduzione
- Obiettivi
- Eventuali artefatti usati nell'attività (software o altro)
- Prerequisiti (con eventuali riferimenti espliciti ad altre attività del percorso)
- Spazi/tempi/modalità
- Descrizione dell'attività
- Indicazioni metodologiche
- Eventuali elementi per prove di verifica
- MATERIALI ALLEGATI:
    - schede studenti
    - prove di verifica
    - altro materiale utile per svolgere l'attività.

Inoltre le attività prevedono delle schede principali, destinate al docente e delle schede studenti con quesiti e problemi da risolvere.
In ciascuna scheda docente si forniscono riferimenti alle Indicazioni nazionali/Linee guida di Matematica e si danno suggerimenti metodologici per proporre l'attività. Inoltre, nelle schede sono evidenziati i prerequisiti, con eventuali riferimenti espliciti ad altre schede progettate, sono presentate le varie fasi dell'attività con suggerimenti per la loro implementazione, e vi è un focus su nodi concettuali ed eventuali approfondimenti.
La scheda studente, invece, conduce lo studente nelle esplorazioni, nelle costruzioni, nelle attività di problem solving, prevalentemente con GeoGebra, o nell'analisi di eventuali costruzioni proposte attraverso domande-guida. Inoltre tale scheda guida lo studente alla produzione di congetture, argomentazioni e riflessioni sulle attività condotte. Lo studente ha anche la possibilità di scegliere se avere "aiuti o suggerimenti" o se intraprendere approfondimenti. La scheda si conclude con l'istituzionalizzazione dei saperi coinvolti.
Per la realizzazione di tutto il progetto sono stati utilizzati diversi software didattici a seconda delle tematiche presenti nelle schede e delle attività in esse proposte. I software usati sono: GeoGebra, Frieze Symmetry, Wallpaper Symmetry, Tales Game, GeoGebra Classroom.
Infine le schede sono state progettate per essere fruibili sia in modalità cartacea sia in modalità digitale - editabili e/o inserite in GeoGebra Classroom.

ESEMPI DI ATTIVITÀ

In questa sezione si forniscono alcuni esempi di attività presenti nella tabella

ESEMPIO 1: LA SIMMETRIA ASSIALE - SCOPRI, CLASSIFICA E GENERALIZZA

L'attività - mediante un gioco a turni tra due giocatori - cerca di far esplorare alla classe il concetto di simmetria assiale. La simmetria - in generale - si inserisce bene in un'ottica di dialogo, visto che tutto ciò che avviene "da un lato" deve avvenire anche dall'altro ed è proprio su quest'ultima osservazione che si basa il gioco proposto.
La simmetria assiale viene proposta in due forme: "implosa", i.e. una figura ripiegata su sé stessa lungo un asse di simmetria, ed "esplosa", i.e. una figura duplicata rispetto a sé stessa secondo un asse di simmetria.
L'attività si pone in primo luogo come obiettivo quello di familiarizzare e operare con le simmetrie assiali nel piano, visualizzandole anche in ambiente reale e artistico. In secondo luogo l'attività ha anche l'obiettivo di creare un catalogo parziale ed intuitivo delle tassellazioni. L'attività propone di utilizzare

il software Tales Game [https://oiler.education/tales] con il catalogo delle tassellazioni annesso [https://oiler.education/tales/catalogo].

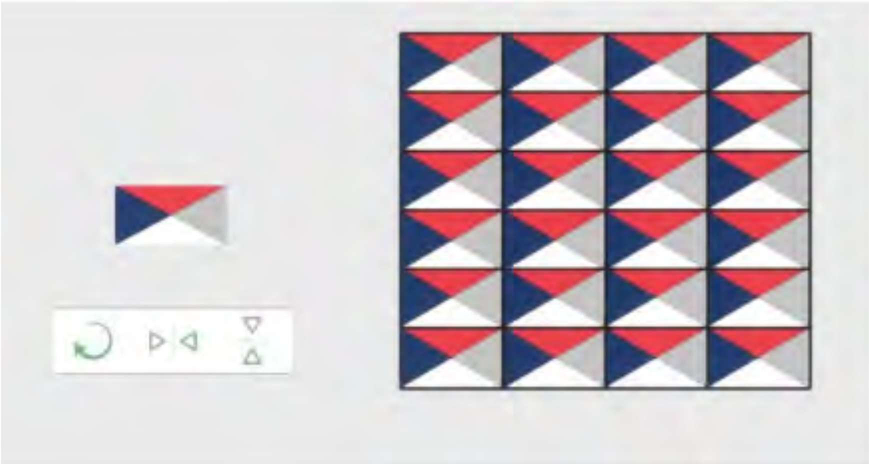


Figura 1. Una tassellazione eseguita con il software "Tales Game".

ESEMPIO 2: LA ROTAZIONE - ESPLORA E CONGETTURA

L'attività si occupa della comprensione di alcune delle principali caratteristiche della rotazione nel piano, attraverso un approccio di scoperta con l'ausilio di un artefatto manipolativo, costituito da un foglio di carta e da uno spillo, in sinergia con un artefatto digitale, GeoGebra.
L'attività proposta ha come obiettivo la concettualizzazione della rotazione come composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti, utile alla costruzione di una figura ruotata di una figura data rispetto al centro, punto di intersezione dei due assi di simmetria.
Il problema consiste nell'individuare gli assi di simmetria necessari per riprodurre, mediante opportune piegature e l'utilizzo di uno spillo, l'immagine di una pavimentazione formata da mattonelle con disegni geometrici, disposte mediante opportune rotazioni (Figura 2). Inoltre, con l'aiuto di alcuni strumenti del software GeoGebra, è possibile riconoscere la tipologia di trasformazione geometrica utilizzata e individuare i suoi invarianti e le differenti modalità per ottenerla. In particolare è possibile scoprire che una rotazione si ottiene sia mediante l'assegnazione del centro e dell'angolo di rotazione, sia mediante due simmetrie assiali con assi incidenti, opportunamente inclinati (Montone et al, DiFiMa 2021 in stampa).

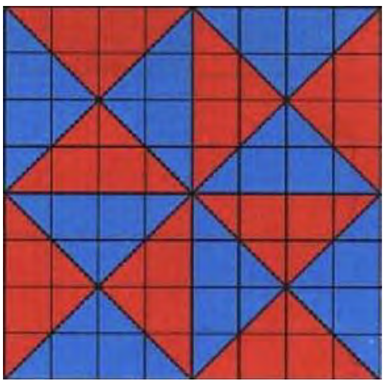


Figura 2. Schema delle piastrelle

ESEMPIO 3: PERCORSO DIDATTICO SULLE TRASLAZIONI

L'attività prevede un percorso sulla traslazione in riferimento agli aspetti metodologici e alle competenze sui tre filoni: esplora e congettura; scopri, classifica e generalizza; risolvi problemi, argomenta e dimostra.
L'attività ripercorre il percorso della vignetta, focalizzandosi sulla scoperta dei fregi, l'equivalente - in una striscia - delle tassellazioni del piano (7 gruppi di isometrie per i fregi e 17 gruppi di isometrie per le tassellazioni del piano). Nello svolgere l'attività si parte dal contesto matematico per arrivare al contesto artistico (e viceversa).

GLI APPROFONDIMENTI

Una sezione del progetto è dedicata ad approfondimenti interdisciplinari con l'arte e la tecnologia, particolarmente legati a un'osservazione attenta delle simmetrie nella realtà che ci circonda. Un ulteriore spunto in questa direzione è rappresentato da 5 schede di lavoro sui seguenti argomenti:
1. il problema di Erone (esame di Stato, Liceo scientifico, 2012),
2. la composizione di simmetrie,
3. le rotazioni con centri diversi,
4. il problema della mappa del tesoro.

Le attività sono state progettate per il II biennio e per la classe V e prevedono come metodologia di lavoro il problem solving e attività laboratoriale per piccoli gruppi.
Inoltre, sono state progettate tre schede di lavoro con l'obiettivo di comprendere attraverso esempi significativi che è possibile semplificare l'argomentazione e la dimostrazione di teoremi di geometria euclidea e problemi, utilizzando le isometrie e utili ad abituare gli studenti a "cambiare punto di vista". le schede invitano gli studenti a risolvere problemi di vita quotidiana utilizzando strategie e approcci differenti da quelli «classici» e a risolvere problemi per sviluppare una delle competenze chiave di cittadinanza.

CONCLUSIONI

Alcune sperimentazioni delle attività proposte sono state già attuate e altre sono in corso di realizzazione nell'ambito delle attività del Liceo Matematico. Inoltre il lavoro di implementazione dell'intera vignetta "Simmetrie passo passo" è in dirittura di arrivo e tutti i materiali saranno disponibili e fruibili dagli insegnanti interessati sul sito del Liceo Matematico.
Altre "vignette" saranno tradotte e sviluppate seguendo la stessa modalità e compariranno gradualmente nel sito del Liceo Matematico, coinvolgendo insegnanti e ricercatori interessati.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Attività del Piano m@t.abel: http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/
Dedò, M. (1999). *Forme, simmetria e topologia*. Padova-Bologna: Decibel-Zanichelli.
Dedò, M. (1996). *Trasformazioni geometriche, con un'introduzione al modello di Poincaré*. Padova-Bologna: Decibel-Zanichelli.
Grunbaum, B. & Shephard G.C. (2016), *Tilings and tessellations*, 2nd ed., New York: Dover.
UMI-CIIM (2004), *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino*. Lucca: Liceo Vallisneri (https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/)

MIGLIORARE IL PENSIERO CRITICO IN UN CORSO DI ANALISI 2 ATTRAVERSO LE APPLICAZIONI

Maria Antonietta Lepellere
Università degli Studi di Udine
maria.lepellere@uniud.it

Abstract
Questo contributo riporta alcuni lavori preparati dagli studenti del secondo anno di Ingegneria Civile e Ambientale, e del primo anno di Ingegneria Gestionale e di Ingegneria Elettronica dell'Università di Udine. La richiesta è stata quella di preparare ed esporre degli esempi, dei concetti presentati a lezione, applicati all'ingegneria e alla fisica. L'obiettivo di questo progetto è stato quello di indagare: la capacità degli studenti di collegare le proprie conoscenze acquisite durante gli studi pregressi o in altri corsi con quelle dell'Analisi 2; la capacità di trasferire le stesse conoscenze a problemi reali; la capacità di utilizzare GeoGebra per rappresentare il problema scelto e risolverlo. Per fare ciò sono state attivate negli studenti abilità di pensiero critico, di problem posing e solving, di modellizzazione matematica; tutto questo indagato sotto il quadro teorico della Teoria Antropologica della Didattica (Anthropological Theory of Didactics o ATD) di Chevallard. Verranno riportate inoltre alcune riflessioni degli studenti sull'attività e sull'utilizzo di GeoGebra dove vengono messi in evidenza i riferimenti a tali abilità.

Parole-chiave
Teoria Antropologica della Didattica; Matematica per ingegneri; Problem posing; Modellizzazione; GeoGebra; Motivazione.

INTRODUZIONE

Per anni, il pensiero matematico e il pensiero critico sono stati considerati componenti integranti dell'apprendimento ingegneristico. Il pensiero matematico è stato utilizzato come strumento di apprendimento essenziale per facilitare la comprensione di materie di ingegneria di base, mentre il pensiero critico costituisce una capacità importante per i laureati in ingegneria. Per Watson e Glizer (1994), il pensiero critico è una combinazione di conoscenza, attitudine e prestazione di un individuo. Sostengono che la capacità di pensiero critico, l'elaborazione e valutazione di informazioni precedenti con nuove informazioni derivano dal ragionamento induttivo e deduttivo utilizzato per risolvere i problemi. Una delle difficoltà evidenziate nei primi anni di un curriculum di ingegneria è che la matematica viene però insegnata come materia separata dal resto (González-Martin ed altri 2021). La ricerca sulle pratiche professionali degli ingegneri (Artigue et al., 2007; Gainsburg, 2006; Kent & Noss, 2003) mostra che, in molti casi, gli ingegneri non riconoscono la matematica che usano. Questa "invisibilità" della matematica può portare gli studenti (e i decisori) a mettere in discussione l'importanza della matematica nell'insegnamento dell'ingegneria. Questa invisibilità è anche dovuta al fatto che la maggior parte dei compiti professionali che richiedono l'uso esplicito della matematica sono svolti da specialisti oppure sono eseguiti utilizzando sofisticati programmi per computer che funzionano come una "scatola nera". Da qui la necessità di fornire agli studenti, il prima possibile, esperienze accademiche atte a promuovere lo sviluppo delle competenze professionali. Un modo in cui questo può essere ottenuto è esporre gli studenti già dei primi anni a esperienze di apprendimento basate sulla progettazione (project-based learning o PBL) in cui sono gli studenti stessi a sviluppare lavori di tipo ingegneristico da soli o in gruppo per risolvere un problema concreto. Il PBL è pertanto un approccio di insegnamento centrato sullo studente, e consente agli stessi di integrare e di costruire le proprie conoscenze, abilità, valori e attitudini attraverso un'ampia varietà di esperienze di apprendimento (Maskell & Grabau, 1998). Come l'uso di PBL, le attività di modellizzazione ad esso correlate sono

solitamente consigliate per colmare il divario tra contenuto matematico e pratiche ingegneristiche (González-Martín ed altri 2021). Niss definisce la competenza matematica come “la capacità di comprendere, giudicare, fare e utilizzare la matematica in una varietà di contesti e situazioni intra ed extra matematici in cui la matematica gioca o potrebbe svolgere un ruolo” (Niss, 2003 p. 120/121). Propone di costruire curricula per futuri ingegneri anche attorno a competenze come “Pensare matematicamente”, “Ragionare”, “Rappresentare”, “Comunicare”, “Modellizzare matematicamente” ecc. I contenuti matematici (concetti, proprietà, procedure) sono identificati a livelli dettagliati ma formulate come competenze matematiche. Tuttavia, rimane il seguente problema: come tenere conto della struttura della matematica come disciplina per la progettazione del contenuto di un corso? Alcuni studi (ad es. Romo-Vazquez, 2009; González-Martín & HernandezGomes, 2018) utilizzano la struttura della Teoria Antropologica della Didattica (ATD; Chevallard, 2006). In questa prospettiva, i corsi di ingegneria sono un'istituzione e i corsi di matematica per futuri ingegneri sono un'altra istituzione. In una data istituzione, la conoscenza è presente come “praxeologie” (tipi di compiti, tecniche per raggiungerli, tecnologie che giustificano le tecniche e le teorie) che sono modellate dall'istituzione. Gli studi sopra citati dimostrano che lo stesso oggetto matematico è associato a diverse “praxeologie” in diverse istituzioni. Gli studenti incontrano “praxeologie” diverse legate allo stesso concetto, e questo può causare incomprensioni e difficoltà concettuali.
GeoGebra integrato nelle lezioni offre maggiore motivazione allo studio degli studenti, migliora le capacità di ragionamento matematico e aiuta nella risoluzione dei problemi. Con GeoGebra è possibile utilizzare più rappresentazioni dello stesso concetto che possono aiutare gli studenti a comprendere meglio concetti astratti (Nobre et al. 2016, Takaci et. al. 2015, Tatar e Zengin 2016, Alessio et al.).
Questo contributo riporta alcuni lavori preparati dagli studenti di Ingegneria Civile e Ambientale, di Ingegneria Gestionale e di Ingegneria Elettronica dell’Università di Udine nell’ambito di un progetto che aveva lo scopo di integrare il corso di Analisi Matematica 2 con le sue applicazioni alla Fisica e all’Ingegneria. Il corso per Ingegnera Civile e Ambientale è previsto al II anno nel primo semestre in concomitanza con Meccanica Razionale e per Ingegneria Gestionale e Ingegneria Elettronica al I anno nel secondo semestre e in concomitanza con Fisica 1. Contiene sia il calcolo differenziale e integrale multivariabile che le equazioni e i sistemi di equazioni differenziali, con un cenno alle Serie di Fourier. La consegna è partita, come una sorta di sfida, nell’a.a. 20/21, con gli studenti del secondo anno di Ingegneria Civile e Ambientale in piena pandemia da Covid19. È stata fatta agli studenti la seguente richiesta: “preparate un esempio di applicazione dell'ottimizzazione di funzioni di più variabili all'Ingegneria. Sarete voi stessi a presentarlo durante la lezione della settimana prossima” e si è trasformata in un vero e proprio laboratorio. Inoltre, alla fine del corso è stato chiesto sia a chi ha partecipato attivamente ai progetti, che a quelli che hanno solo assistito all’esposizione, di scrivere una relazione sull’utilizzo di tale approccio all’interno del corso. In particolare, se e come li ha aiutati nella comprensione degli argomenti teorici e a collegare gli stessi con quelli di altri corsi. È stato anche chiesto di aggiungere se e in che modo l’utilizzo di GeoGebra li ha aiutati nella comprensione degli argomenti del corso.

PROBLEM POSING - PROBLEM SOLVING E LA MODELLIZZAZIONE

Il Problem posing è un approccio didattico importante nell'insegnamento della matematica. Ponendo problemi, gli studenti vengono coinvolti attivamente nei processi di apprendimento. Per Problem posing si intende “sia la generazione di nuovi che la riformulazione, di problemi dati” (Silver 1994, p. 19). Per generare un problema basato su una determinata situazione del mondo reale, gli studenti devono comprendere la situazione e organizzare le informazioni fornite distinguendo i dati che potrebbero essere rilevanti per il loro problema e scoprendo le relazioni tra di essi (Christou et al. 2005). Attraverso la trasformazione, il processo di porre problemi porta a una rete autocostruita di connessioni tra le percezioni individuali degli elementi del mondo reale (Silver 1994). Sulla base di queste connessioni mentali e della loro capacità ed esperienze matematiche, gli studenti creano un'interpretazione personale della situazione data (Bonotto e Santo 2015).

La connessione tra modellizzazione matematica e Problem posing può essere considerata da due diverse prospettive. Da un lato, durante la modellizzazione possono essere sollevate delle domande (Barquero et al., 2019), d'altra, le attività di modellizzazione possono essere già coinvolte nel porre un problema. Essa può essere caratterizzata da un impegnativo processo di traduzione delle informazioni tra il mondo reale e il mondo matematico con l'obiettivo di risolvere un problema del mondo reale con l'aiuto della matematica (Niss & Blum, 2020). Il processo di modellizzazione può essere descritto come un modello teorico circolare costituito da varie attività (Blum & Leiß, 2007): il processo inizia con una situazione data proveniente dal mondo reale, essa deve essere prima compresa leggendo il testo e integrando le informazioni con l'esperienza personale, si ottiene un modello individuale; nella fase successiva, il modello deve essere semplificato e strutturato alla situazione data; attraverso la matematizzazione, inizia la traduzione dal mondo reale al mondo matematico e il modello reale viene tradotto in un modello o problema matematico; infine, il risultato deve essere convalidato rispetto all'adeguatezza dei modelli e dei risultati esistenti. Ciascuna delle attività sopra descritte può essere impegnativa per gli studenti e può rappresentare una potenziale barriera nel processo di soluzione (Blum & Leiß, 2007; Schukajlow et al., 2018). Per questo motivo si è pensato di lasciare che fossero gli studenti stessi a pensare ad una applicazione che fosse alla loro portata in base alle conoscenze pregresse e le loro capacità.

UN ESTRATTO DEI LAVORI

Hanno partecipato al progetto 75 studenti di Ingegneria Civile e Ambientale iscritti su Teams a.a. 20/21 primo semestre, sono stati presentati e discussi in classe 25 lavori (12 preparati da ragazze e 13 da ragazzi, 9 gli studenti del II Anno) 2 sono stati svolti a coppia e 3 studenti hanno presentato 2 lavori, 8 studenti hanno utilizzato GeoGebra nel lavoro e 15 hanno mandato la relazione finale sulle loro impressioni. Mostrerò 2 lavori, uno applicato alla topografia e l'altro di modellizzazione di una situazione reale. Invece gli studenti di Ingegneria Gestionale e di Ingegneria Elettronica iscritti su Teams nel secondo semestre dell'a.a. 20/21 erano 230, 16 sono stati i lavori presentati (4 di ragazze e 12 di ragazzi, 12 presentati da studenti del I Anno, 12 gli studenti di Ingegneria Gestionale), 9 hanno utilizzato GeoGebra nel lavoro, 9 hanno mandato la relazione. Mostrerò 3 lavori: un problema economico di ottimizzazione dell'utilità del consumatore sotto vincoli di bilancio; un problema reale per la progettazione di un ponte radio; una applicazione delle curve alla fisica.

Un modello topografico

Questo esempio può essere visto come un primo approccio alla rappresentazione e modellizzazione della realtà dettato dalla conformazione del terreno.

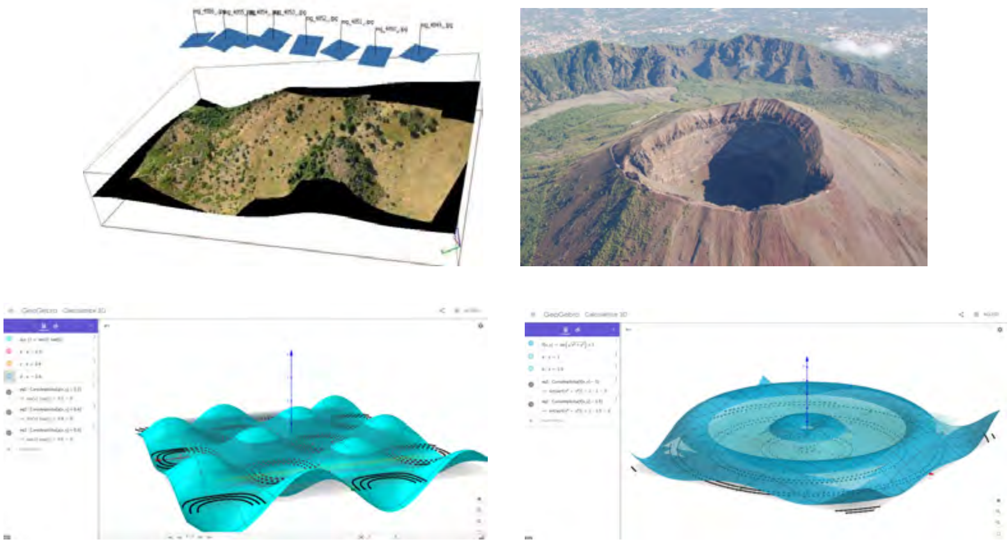


Figura 1. Configurazione del terreno e modelli proposti

L'obiettivo è lo studio del terreno e della sua conformazione con un metodo alternativo matematico (forse ipotetico) che semplifichi le operazioni topografiche solitamente utilizzate: Sviluppare un modello matematico e trovare una funzione che riproduca il terreno; Attraverso lo studio della funzione e la sua ottimizzazione, ottenere una rappresentazione plano altimetrica (curve di livello) e i dati di massimi e minimi dei rilievi territoriali.
Sono state scelte diverse funzioni ne riporto due:

$$f(x,y) = sin\, sin\,(x)\, cos\,(y) \qquad\qquad f(x,y) = sin\,(\sqrt{x^2+y^2}) + 1$$

Sono state accompagnate dalla visualizzazione tramite GeoGebra e delle rispettive curve di livello mediante la loro rappresentazione implicita, vedi Figura 1.

Calcolo delle dimensioni della sezione ideale di taglio per un tronco di albero
Si tratta di un esempio di ottimizzazione risolto sia graficamente che analiticamente. Lo scopo era quello di determinare quali sono le dimensioni del rettangolo, con vertici appartenenti alla circonferenza "tangente" la sezione del tronco, che massimizzano il Modulo di Resistenza (W).

$$W(b,h) = \frac{1}{6}bh^2$$

L'insieme delle coppie (b,h) del primo quadrante che rappresentano i rettangoli inscritti alla circonferenza di diametro d sono proprio le coppie che si trovano a distanza d dall'origine. Il problema è stato risolto sia analiticamente che graficamente tramite GeoGebra.

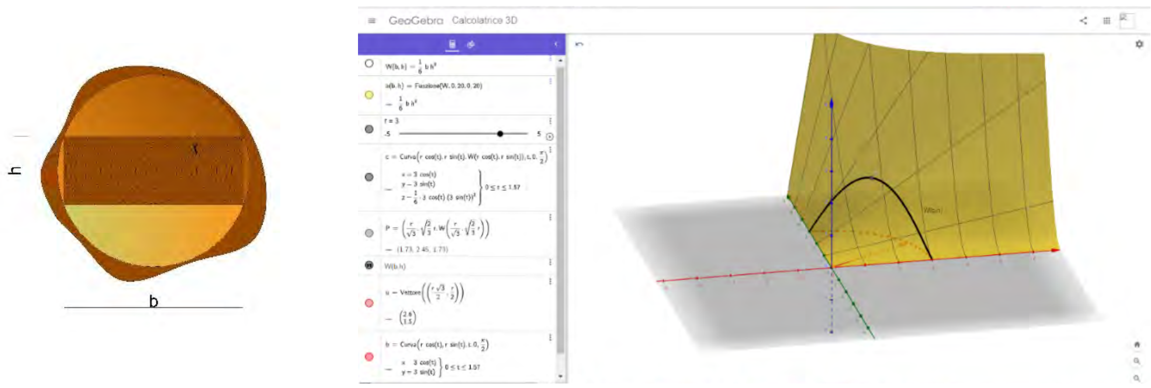


Figura 2. Risoluzione grafica del problema

Problema di ottimo del consumatore
Tramite un problema economico lo studente ha specificato il significato economico degli enti matematici coinvolti nei vari metodi visti a lezione per l'ottimizzazione vincolata: il metodo delle linee di livello; il metodo per sostituzione e• il metodo del moltiplicatore di Lagrange. Quale insieme di beni, tra tutti quelli potenzialmente acquistabili dal consumatore, rende massimo il suo benessere (o utilità), dati i suoi gusti, il suo reddito ed il prezzo dei beni? L'utilità corrisponde alla nostra funzione da ottimizzare mentre il vincolo di bilancio è dato da una cifra massima disponibile (reddito) da spartire tra i due beni. Come funzione utilità è stata scelta una funzione Cobb-Duglas $\boldsymbol{U = \sqrt{x}\sqrt{y}}$ e come vincolo di bilancio una semplice combinazione lineare dei due beni.

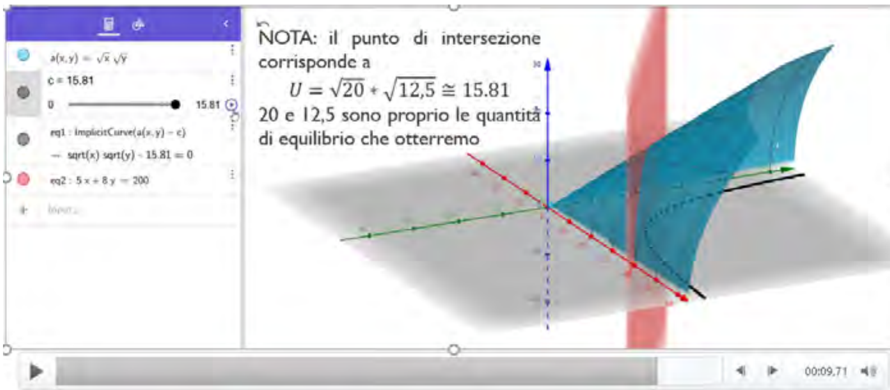


Figura 3. Problema dell'ottimo del consumatore risolto tramite GeoGebra

Filippo: Zona di Fresnel

In questo esempio è stata scelta una applicazione delle funzioni di più variabili ad un esempio pratico. Si tratta dello studio della zona di Fresnel, ossia dello spazio racchiuso tra uno degli infiniti ellissoidi che contengono il volume di radiazione di un'onda elettromagnetica, qui utilizzata nella progettazione di un ponte radio. Lo studente ha anche presentato un Software che viene utilizzato nella pratica.

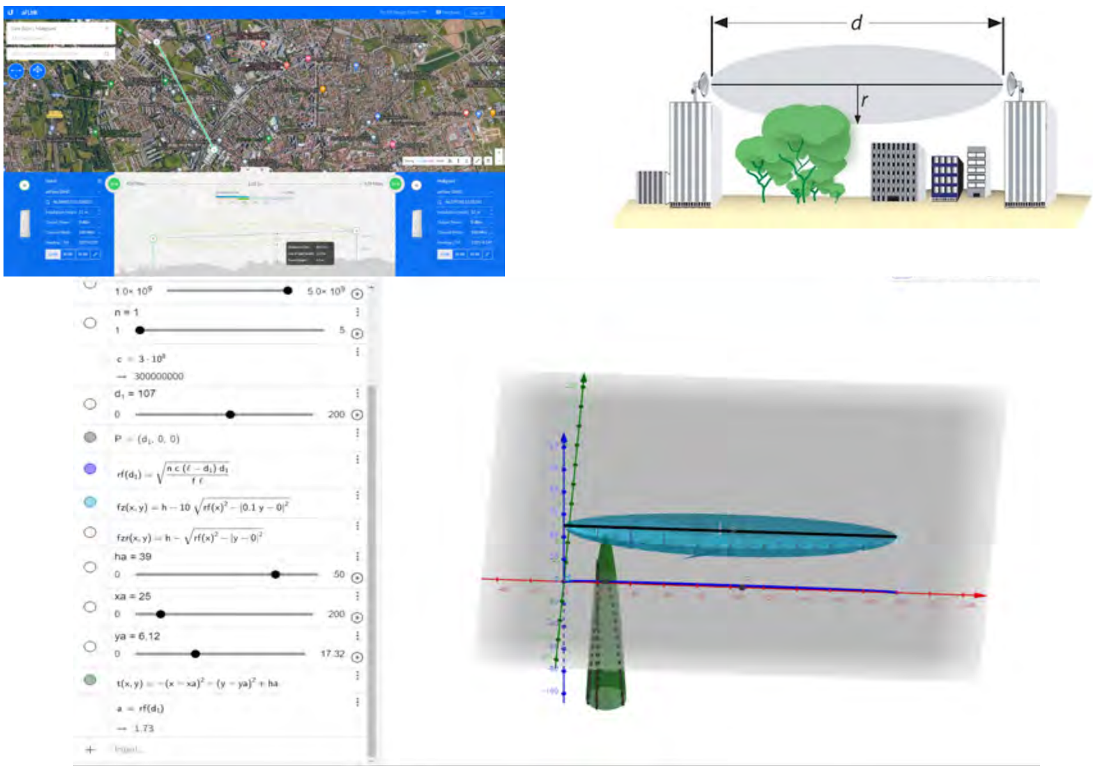


Figura 4. Ellissoide di Fresnel e simulazione di un ostacolo. Software airLink di Ubiquiti.

La cicloide

Come ultimo esempio di applicazione dello studio delle curve ad integrazione di quelli già visti a lezione. Una circonferenza di raggio r ruota lungo l'asse delle x. Il moto del punto sulla circonferenza può essere visto come composizione di due moti: moto rettilineo del centro della ruota; moto circolare sul punto della circonferenza rispetto al suo centro. L'equazione della curva che descrive il moto è

$$\begin{cases} x(t) = x_T(t) + x_R(t) = r(\omega t - sin(\omega t)) \\ y(t) = y_T(t) + y_R(t) = r(1 - cos(\omega t)) \end{cases}$$

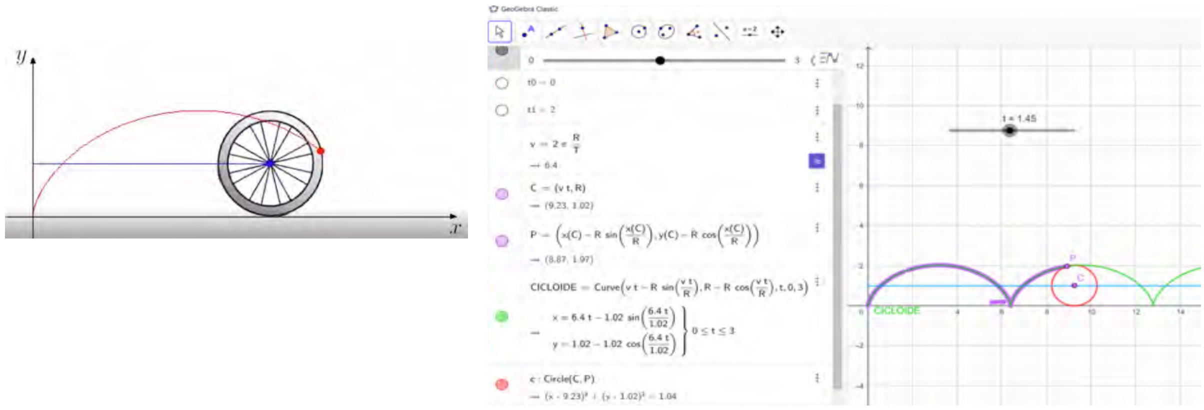


Figura 5. La cicloide e simulazione con GeoGebra

ALCUNE RIFLESSIONI DEGLI STUDENTI SUL LAVORO

Di seguito riporto alcune riflessioni sul lavoro scritte dagli studenti nella relazione.
Il lavoro ha stimolato la ricerca di “praxeologie” dell’Analisi II e stimolato l’approfondimento:

> *…il lavoro è stato utile per aprire la mente ai collegamenti con gli altri corsi in quanto, fintanto che ero ancora alla ricerca del soggetto del mio progetto, andavo ad analizzare tutti gli argomenti trattati negli altri corsi sotto la luce dell’analisi matematica per cogliere eventuali legami ed è proprio facendo questo che ho trovato il collegamento giusto con il corso di chimica. Questa attività è stata utile per capire quanto i vari corsi non si debbano trattare come se fossero compartimenti stagni ma piuttosto come se fossero vasi comunicanti. Inoltre, il lavoro è stato utile per comprendere meglio l’argomento da me scelto (le equazioni differenziali) in quanto individuando un caso pratico di applicazione ho potuto capire meglio il metodo di risoluzione e come affrontare situazioni simili in altri esercizi.*

La necessità di vedere un risvolto pratico ha aiutato la comprensione e stimolato l’interesse:

> *…lo studio “per confronto” personalmente mi aiuta e mi fa capire i concetti in modo più chiaro …solo il fatto di aver visto un’applicazione pratica (es. prezzo ombra ecc.) ha accresciuto il mio interesse verso il tema, spingendomi poi ad approfondire e capire meglio anche la teoria. Ho trovato appagante il fatto che quello che stavo studiando effettivamente viene usato per analizzare dati, ottimizzare sistemi.*

Rende più piacevole lo studio:

> *Nella mia esperienza personale ho trovato perfino divertente poter parlare di un argomento che studiavo già da un paio di anni per conto mio, pertanto, essere riuscito a legare un interesse personale nato al di fuori dell’ambiente universitario con un corso e poter raccontare parte di questo mondo usando il linguaggio dell’analisi, a cui tutti ci stavamo abituando, è stato stimolante… In ogni caso ritengo che sia un ottimo mezzo per coinvolgere i volenterosi e magari far appassionare anche chi a primo impatto può trovare lo studio di analisi II un po’ faticoso poiché tratta tematiche apparentemente distanti dalla realtà.*

Favorisce il confronto tra pari:

> *Durante lo svolgimento del lavoro ho avuto l’opportunità di discutere con studenti che hanno già affrontato e studiato questi argomenti e ciò mi è stato d’aiuto. Sentire un’altra spiegazione, vista da un diverso punto di vista mi ha permesso di poter intendere ancor più concretamente tali tematiche, per nulla banali... Mi è piaciuto molto mettermi alla ricerca per comprendere al meglio l’argomento, confrontarmi con ragazzi più grandi, informarmi da diversi libri e siti internet e condividere quanto fatto coi miei coetanei. Per quanto mi riguarda, offrire a noi studenti questa opportunità è una grande occasione per imparare e soprattutto per mettersi in gioco.*

È stato anche utile seguire le presentazioni dei compagni:

…ciò che mi ha aiutato molto a comprendere gli argomenti, sono stati i lavori sulle applicazioni svolti dai miei compagni. Ho sempre seguito tutti i lavori proprio perché mi facevano capire come una materia che mi sembrava un po' "astratta" fosse effettivamente fondamentale in moltissimi ambiti (ad esempio l'ottimizzazione che viene usata in aziende per trovare la massima produzione con un minimo costo) e trovasse applicazione in altri corsi da me seguiti (soprattutto in quello di Fisica).

Anche per chi ha esclusivamente seguito le presentazioni dei compagni ha espresso parere positivo:

I lavori svolti dai miei colleghi, presentati di solito a fine lezione, danno l'opportunità di distaccarsi dalla rigidità delle lezioni classiche e di trattare gli stessi argomenti in una maniera più naturale, vedendole sotto un punto di vista diverso e più pratico, il che aiuta a comprendere a tutto tondo le nozioni trattate durante il corso.

Con un approccio tradizionale della materia non sempre si capiscono a fondo i contenuti e l'applicabilità come è stato riferito da diversi studenti, per esempio:

L'idea di affrontare un progetto, seppur piccolo, per semplificare la comprensione degli argomenti inizialmente mi è sembrata complessa, proprio perché da un precedente studio della materia non avevo capito quale fosse la sua essenza e la sua applicabilità in contesti reali.

Concludo con queste parole che un po' sintetizzano alcuni aspetti importanti dell'attività:

…mettersi in gioco per riuscire a capire quali potevano essere le possibili applicazioni ingegneristiche ha costituito una sfida... Inoltre, questo ci ha obbligato a comprendere più a fondo gli argomenti proposti e ad approfondire quelli che potevano essere i più interessanti… ho dovuto pensare a tre cose: al problema ingegneristico; al modello matematico che rappresentasse il problema; alla risoluzione del modello matematico. Per il primo punto ho utilizzato le nozioni imparate alle superiori (ho fatto la scuola per geometri). Per il secondo, invece, meccanica razionale, mentre per l'ultimo quello che avevo imparato ad analisi 2.

ALCUNE RIFLESSIONI DEGLI STUDENTI SU GEOGEBRA

Presento in sintesi alcune osservazioni dei ragazzi di GeoGebra dove viene riconosciuta la necessità di una rappresentazione grafica per capire meglio gli argomenti e per risolvere gli esercizi proposti

…ritengo che sia stato di grande aiuto per quanto concerne la fase intermedia tra l'apprendimento e l'applicazione; grazie ad una visione grafica ritengo che l'acquisizione degli argomenti teorici sia molto semplificata consentendo inoltre una prima visione fisica del problema… Geogebra è stato sicuramente utile per capire i concetti e riuscire a visualizzare le tematiche affrontate soprattutto per chi ha più memoria visiva. Il formalismo matematico, alle volte, può risultare complesso, mentre un riscontro pratico facilita di gran lunga la comprensione… il suo utilizzo nel mostrare i grafici dei vari insiemi aiuta a focalizzare meglio il problema e a capire più a fondo il procedimento… devo riconoscere il ruolo fondamentale che ha avuto GeoGebra nel mio studio, uno strumento ben realizzato, che ti aiuta davvero molto nella comprensione e nello svolgimento degli esercizi… GeoGebra è stato fondamentale in quanto sono riuscita a rappresentare in modo dinamico sia il moto rettilineo che il moto circolare ed avere quindi una rappresentazione visiva di ciò che stanno a significare nel loro moto simultaneo nella Cicloide.

CONCLUSIONI

Nonostante gli sforzi che i docenti fanno per rendere l'analisi matematica più accattivante per i futuri ingegneri, proponendo loro degli esempi applicativi, spesso legati a problemi di fisica, i ragazzi continuano a mostrare poco interesse per la disciplina, reputando "troppo astratta". Inoltre, non sempre gli studenti riescono a collegare gli argomenti trattati a lezione con quelli di altri corsi, a volte il semplice uso di un "linguaggio" diverso li confonde, ciò rende necessario mostrare loro questi legami, se poi sono gli studenti stessi a trovarli ed esporre, allora l'intervento risulta ancora più efficace. Un lavoro come

quello proposto mette lo studente nelle condizioni di guardare gli argomenti trattati con altri occhi, permette di andare oltre lo studio passivo e stimola una comprensione più profonda degli argomenti.
Sono state affrontate e superate diverse criticità che sono state evidenziate in letteratura: difficoltà nel coordinare le procedure e manipolare i concetti; scarse capacità di problem solving; incapacità di selezionare e utilizzare rappresentazioni matematiche appropriate; difficoltà nel trasferire le conoscenze a problemi del mondo reale; le convinzioni negative degli studenti nei confronti della materia. Il feedback su questa attività è stato molto positivo come ho potuto constatare dalla partecipazione e dalle parole scritte nei report. Va sicuramente migliorato, nell'indirizzare ad esempio i ragazzi meno pratici a reperire il materiale ottimizzando così il fattore tempo che qualche studente ha riferito come criticità. Anche l'apprezzamento sull'utilizzo di GeoGebra a lezione ma anche in autonomia è stato notevole.

BIBLIOGRAFIA

Alessio, F. G., Demeio, L., & Telloni, A. I. (2019). A Formative Path in Tertiary Education through GeoGebra Supporting the Students' Learning Assessment and Awareness. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *26*(4).
Artigue, M., Batanero, C., Kent, P., & Artigue, M. (2007). *Mathematics thinking and learning at post-secondary level*. Information Age Publishing.
Barquero, B., Bosch, M., & Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1144–1151). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.
Blum, W., & Leiß, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA*, *12*, 222.
Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 103–124). Springer.
Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings of the IVth conference of the European society for research in mathematics education*, (pp 22–30), Barcelona, Spain.
Chevallard, Y., Bosch, M., Kim, S. (2015) What is a theory according to the anthropological theory of the didactic? *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 9* (pp.2614-2620). Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic.
Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, *37*(3), 149-158.
Gainsburg, J. (2006). The mathematical modeling of structural engineers. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(1), 3-36.
González-Martín, A. S., Gueudet, G., Barquero, B., & Romo Vázquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling: Advances and challenges. *Research and development in university mathematics education. Overview produced by the international network for research on didactics of university mathematics*, 169-189.
González-Martín, A. S., & Hernandes-Gomes, G. (2018). The use of integrals in mechanics of materials textbooks for engineering students: The case of the first moment of an area. In N. M. Hogstad, V. DurandGuerrier, S. Goodchild, & R. Hochmuth (Eds.), *Proceedings of the second conference of the international network for didactic research in university mathematics* (pp. 115–124). Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.
Kent, P. and Noss, R., (2003). Mathematics in the University Education of Engineers. The Ove Arup Foundation, London.
Maskell, D. L., & Grabau, P. J. (1998). A multidisciplinary cooperative problem-based learning approach to embedded systems design. *iEEE transactions on Education*, *41*(2), 101-103.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastravidis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematics education* (pp. 115–124). Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

Romo-Vazquez, A. (2009). La formation mathematique des futurs ingenieurs. Paris: Thèse de l'Université Paris VII.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. *ZDM*, *50*(1), 5-18.

Takaci, D., Stankov, G., & Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 82, 421–431.

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual understanding of definite integral with GeoGebra. *Computers in the Schools*, 33(2), 120–132.

Watson, G. and Glaser, E.M. (1991). *Critical Thinking Appraisal Manual*. London: Psychological Corporation.

LA MISURA "SU MISURA" UN PERCORSO LABORATORIALE ALLA SCOPERTA DEI CONCETTI DI LUNGHEZZA E SUPERFICIE

Barbero Alessia, Leone Matteo, Rinaudo Marta
Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione, Università degli studi di Torino
alessia.barbero596@edu.unito.it, alessiabarbero20@gmail.com

Abstract
La ricerca sperimentale che si intende presentare ha lo scopo di verificare l'efficacia di un intervento laboratoriale sulla capacità dei bambini di risolvere problemi legati ai concetti di unità di misura di lunghezza/superficie, in vista delle prove INVALSI dell'A.S. 2020/2021. L'intervento laboratoriale proposto è stato caratterizzato da attività pratiche riferite in particolare a un contesto reale, che coinvolgono le fasi necessarie alla creazione di un capo di abbigliamento, come ad esempio: la riflessione sulle unità di misura convenzionali/non convenzionali; la mappatura dei solidi regolari e non regolari; la costruzione di un cartamodello di solidi; utilizzo di figure semplici e composte per partizionare una superficie complesse; quali conoscenze matematiche è possibile mettere in atto per misurare e costruire un determinato capo; la manipolazione di aree e relativa discussione rispetto alla conservazione/non conservazione di perimetro e area.
Al termine della ricerca, l'analisi dei risultati delle prove iniziali e finali ha evidenziato un margine di miglioramento interessante.

Parole-chiave
Lunghezza, superficie, unità di misura, laboratorio.

DOMANDA DI RICERCA

La ricerca sperimentale condotta nei mesi di aprile e maggio 2021 si è posta come obiettivo la messa in atto di una proposta laboratoriale innovativa che consentisse la discussione e la sperimentazione di uno degli ambiti fondanti della fisica, ovvero la misura; in particolare, in questa ricerca sono state prese in esame le misure di lunghezza e di superficie.
Attraverso un approccio laboratoriale, gli alunni coinvolti sono stati messi nelle condizioni di poter manipolare e riflettere su materiali concreti, legando così l'apprendimento a una situazione problema reale e replicabile, in questo caso specifico quella della costruzione di un capo di abbigliamento.
La domanda che ha guidato e indirizzato questa ricerca è quindi stata la seguente:
può un intervento laboratoriale incidere in modo positivo rispetto alle capacità degli alunni di saper operare su problemi legati ai concetti di unità di misura di lunghezza e di superficie? Tutto questo in vista delle prove INVALSI dell'A.S. 2020/2021, che in Italia sono ad ora l'unica prova standardizzata che contenga anche quesiti relativi agli ambiti della fisica sopracitati.

QUADRO TEORICO

Alla luce della domanda di ricerca posta, è necessario evidenziare i fondamenti teorici che stanno alla base di tutto il percorso proposto.

Concetti importanti nelle misure di lunghezza

Partizione: concetto che descrive l'abilità nel concepire una lunghezza come continua ma potenzialmente frammentabile in parti più piccole, ovvero segmenti della stessa dimensione.

Iterazione di unità: consiste nell'abilità di immaginare di sovrapporre all'oggetto da misurare un determinato campione, considerandone unicamente la dimensione della lunghezza, e farlo tante volte quanto è necessario per coprire tutta la lunghezza dell'oggetto in questione.
Transitività: permette di mettere in relazione oggetti tra loro non confrontabili direttamente, poiché per diverse ragioni legate alle dimensioni o alla reperibilità potrebbero non essere disponibili.
Conservazione della lunghezza: trova la sua piena realizzazione nel bambino che è in grado di capire che se un oggetto viene traslato o ruotato nello spazio le sue dimensioni non cambiano.
Accumulazione di distanza: questo concetto può essere definito come la comprensione del fatto che il numero risultante dall'iterazione di un'unità lungo una certa lunghezza e il relativo conteggio si traducono in un numero.
Relazione tra numeri e misura: coerentemente con il concetto di cui sopra, è importante ricordare che l'atto del misurare è assimilabile all'atto del contare, ma ad un livello più avanzato.

Concetti importanti nelle misure di superficie
Partizione: è l'atto mentale che consiste nel tagliare uno spazio bidimensionale con un'unità di misura omogenea, quindi anch'essa bidimensionale.
Iterazione di unità: analogamente a quanto riferito nell'iterazione per le misure di lunghezza, questo concetto segue a quello della partizione.
Conservazione: la conservazione dell'area rappresenta uno dei nodi più problematici per gli studenti, perché nei primi anni di scuola primaria tendono a focalizzarsi sulle dimensioni lineari nel processo di comparazione di due aree distribuite in modo diverso.
Strutturazione a matrice: questa competenza si sviluppa appieno quando lo studente è in grado di pensare una regione di spazio come una matrice formata da una griglia di quadratini, dando quindi significato al concetto di bidimensionalità.
Misura lineare: è la conoscenza che fa da prerequisito fondamentale alla comprensione della misura di area e quindi a tutti i concetti sopra elencati, poiché come già evidenziato, le misure di area (bidimensionali) non sono altro che il prodotto di due misure di lunghezza (lineari).

METODOLOGIA

Didattica laboratoriale

Per condurre un laboratorio non è sufficiente affidarsi ad attività preimpostate reperite su una guida didattica. Non si tratta solo di fare uso di materiali o di osservare dei fenomeni. È l'insegnante che guida i propri alunni, dei quali deve avere un certo grado di conoscenza, in un percorso composto da più esperienze concatenate tra loro, pensate come una sequenza, e che in virtù di questo possono avere una molteplicità di punti di arrivo.
Come evidenziato da Brondo e Chirico (2019), alcuni elementi sono imprescindibili affinchè il laboratorio sia una forma di insegnamento e apprendimento coerente con quanto detto:

- la presenza di un progetto che abbia un tema didattico ben determinato anche se aperto a scarti di apprendimento/conoscenza, sviluppato in una serie di attività di esplorazione di fenomeni e di materiali (preparati o attingibili secondo modalità non previste) e di discussione;
- la sperimentazione dei materiali e la ricerca attiva sui significati e sulle conoscenze legate all'uso dei materiali;
- il confronto diretto personale e di gruppo tramite la discussione come momento di messa a fuoco delle questioni che sorgono dal lavoro e la produzione di eventi (narrazione, lezioni, conferenze, rappresentazioni, mostre, elaborati, letture) da parte degli studenti;
- l'apertura a significati e a scarti di conoscenza imprevisti;
- l'abitudine a utilizzare pensiero razionale e pensiero visuale nell'analisi.

In rapporto all'idea di laboratorio e più nello specifico il laboratorio scientifico, i vari livelli di scuola si comportano in modo molto diverso. Per quanto riguarda gli alunni di scuola primaria, essi tipicamente non hanno accesso a laboratori per le attività didattiche a scuola. Per loro il laboratorio coincide con un luogo esterno alla scuola, dominio degli adulti e in particolare degli scienziati.

Coscienti del ruolo che il laboratorio assume, anche solo nell'immaginario collettivo, in gradi di scuola come la secondaria o l'università, come può essere pensato e messo in atto il laboratorio scientifico nella scuola primaria?
Appurato che lo spazio a disposizione spesso è solo quello dell'aula, le attività devono comunque risultare accattivanti e coinvolgenti, sia da un punto di vista mentale che manuale e corporeo, ma richiedono comunque un impegno mentale piuttosto intenso.
L'imperativo è che l'agire non sia fine a sé stesso, ma sia un *agire pensato*.
Il laboratorio deve divenire il luogo in cui mettere in atto "la sintesi tra azione pratica e riflessione teorica" (Brondo e Chirico, 2019), entrambe fondamentali nel processo di produzione di vera conoscenza. A differenza di quanto comunemente si crede, e come sottolineato già in precedenza, il laboratorio non va inteso come un luogo di relax, ma anzi il luogo in cui "le facoltà percettive vengono azionate alla massima intensità" (Brondo e Chirico, 2019), dove capacità manipolative, progettuali e speculative vengono sono costantemente coinvolte in modo interdipendente, in una continua ricerca di relazioni tra fatti, fenomeni e teorie.

CAMPIONE DI INDAGINE

La domanda di ricerca presupponeva un campione di indagine con cui poter condurre dei ragionamenti e delle attività caratterizzate da alcuni tratti piuttosto complessi, per cui la scelta dell'età dei soggetti è ricaduta sulla ricerca di alunni di 10/11 anni di classi quinte.
Come evidenziato in precedenza, proporre un insieme di attività di tipo laboratoriale impone una certa conoscenza dei soggetti cui viene proposta, pertanto di seguito verranno specificate le caratteristiche di questo campione.
Il campione è composto da 46 bambini suddivisi in tre sezioni di classi quinte, di una scuola primaria nella periferia di Torino.
Gli alunni effettivamente coinvolti nella somministrazione delle prove iniziali e finali sono stati 45; una bambina nello specifico seguiva infatti un PEI con obiettivi equiparabili a quelli di una classe prima, discostandosi molto dal livello medio previsto per la classe quinta. La decisione è stata quella di coinvolgerla comunque nelle attività pratiche nei momenti in cui era presente in aula, senza tuttavia considerare i suoi risultati ai fini della ricerca.
La composizione delle classi è molto eterogenea per diversi aspetti. Il bacino di utenza varia rispetto alle condizioni economico-sociali delle famiglie, alla conoscenza della lingua italiana, alla provenienza e al livello di partecipazione delle famiglie alla vita scolastica.
In questo contesto così variegato è opportuno evidenziare alcune caratteristiche degli allievi per meglio comprendere il lavoro che è stato fatto: sono presenti diversi bambini con PDP e PEI, tuttavia anche altri pur mostrando notevoli difficoltà non possiedono diagnosi che favoriscano l'affiancamento di un'insegnante di sostegno. Questo ha inevitabilmente influito sulle modalità di conduzione della sperimentazione, per cui è stato necessario supportare alcuni bambini più del previsto in alcune delle attività proposte.

IMPLEMENTAZIONE

Agli alunni è stato fatto ripercorrere tutto il procedimento necessario alla costruzione di un capo di abbigliamento, partendo dal concetto di misura arrivando fino alla costruzione dei dettagli ornamentali.
In particolare, le prove iniziale e finale sono state costruite in modo da replicare la struttura e la tipologia dei quesiti presenti nelle prove INVALSI che si riferiscono a concetti fisico-matematici afferenti al concetto di misura di lunghezze e superfici, e relative unità di misura.
Complessivamente alla parte sperimentale del progetto sono state dedicate 36 ore, suddivise su tre sezioni. Nello specifico, agli alunni è stato fatto ripercorrere tutto il procedimento necessario alla costruzione di un capo di abbigliamento, partendo dal concetto di misura arrivando fino alla costruzione dei dettagli ornamentali.

Di seguito una sintesi del diario di bordo tenuto durante l'arco degli incontri, che meglio specifica quanto è stato svolto.

Misuriamo noi stessi

È stato dato avvio al brainstorming ponendo una domanda "Come posso capire se un capo di abbigliamento è adatto a me o a una certa persona?". A seguire è partita la discussione, suggerita da alcune domande stimolo con relativi interventi dei bambini, di seguito riassunta nella tabella.

Durante la discussione i bambini sono stati invitati a provare a misurare se stessi e a condividere, se lo desideravano, i risultati ottenuti per confrontarli.

In questa attività gli alunni si sono mostrati molto interessati allo strumento che è stato consegnato loro (metro di carta), e hanno autonomamente misurato alcuni oggetti alla loro portata, come il banco o il proprio portapenne, nonostante non fosse stata avanzata ancora nessuna richiesta dall'insegnante.

A questa attività è stata dedicata 1 ora per ogni sezione.

Svolgimento di solidi: dal 2D al 3D

È stato dato avvio all'attività distribuendo una scheda raffigurante un solido svolto e un cartoncino, chiedendo se avessero idea di cosa si potesse trattare. I bambini hanno manifestato una certa curiosità nel voler capire a cosa servisse il materiale consegnato loro, e alcuni hanno ipotizzato che si potesse trattare di una figura "aperta", tuttavia il termine "solido" non è stato utilizzato da nessuno in questa prima fase esplorativa. L'intervento è iniziato con una riflessione sulle figure piane che compaiono nella scheda, definendone il nome e le formule che è possibile utilizzare per quantificarne l'Area, ovvero la misura della superficie, e riconoscendo quali di esse erano funzionali alla costruzione di un solido e quali no. Successivamente si è passati alla composizione vera e propria dei due solidi, manipolando una superficie in due dimensioni per ottenerne una a tre dimensioni

Ci sono stati vari livelli di precisione nella costruzione. Spesso gli alunni tendevano a utilizzare nomi di figure piane per denominare le figure solide.

A questa attività è stata dedicata 1 ora per ogni sezione.

Mappatura del manichino, solido complesso

L'attività è iniziata con la presentazione ai bambini dell'ospite che li avrebbe accompagnati nel laboratorio, un manichino, filo conduttore dell'esperienza.

Come primo passo abbiamo riflettuto rispetto a cosa avremmo dovuto fare per creare un capo di abbigliamento (una t-shirt) adatta al manchino, convenendo che fosse opportuno misurarla. Ognuno ha proposto cosa era importante misurare secondo lui, e i bambini hanno preso coscienza che sono molte le parti del corpo che necessitano di essere misurate se si vuole un risultato preciso (lunghezza, larghezza, circonferenza vita, etc...).

Successivamente ci si è chiesti se i nostri abiti, stesi su un piano, ricordassero di più una superficie o un solido, e appurato che in quel caso contano come superficie, è sorto il dubbio di come si potesse adattare una superficie a un corpo "3D".

Agli alunni è stato quindi chiesto di provare a disegnare su un foglio i pezzi che, uniti insieme, sono necessari per comporre una t-shirt. Molti non hanno differenziato parte centrale e maniche, rappresentato semplicemente una maglietta vista frontalmente. Non sono mancati però coloro che per mostrare che le maniche erano staccate le hanno rappresentate come dei rettangoli.

Per poter verificare veramente come è il busto di un corpo umano svolto abbiamo provveduto a ricoprire la superficie del manichino con dello scotch di carta.

Nel farlo con i bambini la riflessione ha riguardato il come una superficie piana come lo scotch facesse fatica ad aderire senza creare delle pieghe sulle curve del manichino. Abbiamo provato a non creare delle pieghe e in quel caso lo scotch non si attaccava nel senso che desideravamo noi, ma seguiva la curva del corpo.

I bambini hanno teorizzato che non fosse possibile evitare delle pieghe e dei tagli se lo scopo era quello di ricoprire la superficie del corpo.

Una volta completata la ricopertura, è stato necessario staccare la superficie di scotch dal manichino attraverso un'incisione (Fig. 1). Una classe ha proposto di farne solo una laterale, le altre invece hanno reputato più opportuno incidere due volte, sull'asse verticale frontale e posteriore. Rispetto a questo momento è stato possibile anche riflettere sull'aspetto della simmetria, e di come le due parti si somigliassero. Nello staccare la superficie di scotch, i bambini hanno notato come per la zona del seno, quella più curva, fosse particolarmente difficile mantenerne la forma. Staccata la superficie di scotch, si è proceduto a "spianarla" su una superficie piana in 2D, ossia un grande foglio di carta (Fig. 2). Nel farlo i bambini hanno notato come il bordo corrispondente al girovita del calco in scotch tendesse a curvare nonostante sul manichino sembrasse dritto e parallelo al pavimento.
Un altro elemento interessante è stato osservare come i bambini abbiano deciso di procedere per appiattire la parte più curva di tutte, ovvero quella del seno. Operando dei tagli è stato notato come le superfici prendessero delle forme che non si sarebbero aspettati, in alcuni casi "aprendosi" e in altri casi sovrapponendosi.
Infine, ragionando rispetto alla forma ottenuta si è provato a rappresentare le superfici piane che avrebbero potuto essere adatte a quel tipo di solido, facendo quindi un cartamodello delle parti che compongono la t-shirt che avremmo ipoteticamente dovuto creare. In particolare, è risultato difficile immaginare come dovesse essere il cartamodello di una manica.
A questa attività sono state dedicate 2 ore per ogni sezione.

Figura 1. Distaccamento dello scotch attraverso un'incisione centrale e simmetrica.

Figura 2. Appiattimento della superficie di scotch curva su una piatta e bidimensionale (particolare dei tagli).

Progettazione e realizzazione di una tasca

L'incontro è iniziato riprendendo le rappresentazioni create la volta precedente, in particolar modo la rappresentazione in due dimensioni del cartamodello della manica. Trattandosi di una figura non regolare con parti dritte e parti curve, si è ragionato con i bambini rispetto a quali figure e poligoni a noi noti potessero essere più adatte per ricoprire questa superficie così particolare. Le risposte più gettonate sono state quella di porre nella parte inferiore un rettangolo e nella parte superiore un triangolo, oppure un trapezio isoscele (o scaleno) con una base minore molto piccola rispetto alla base maggiore. La base maggiore deve riportare la stessa misura della base del rettangolo sottostante. Questa è la migliore approssimazione che è stato possibile trovare, nonostante rimangano alcune parti, seppur piccole, scoperte. I bambini hanno giustamente notato che l'errore poteva essere compensato dall'esubero della base minore che sporge o del vertice superiore del triangolo.
Di ognuna di queste figure note è possibile calcolare l'area e in perimetro, e potenzialmente di partizionare ulteriormente la superficie in quadretti.
Successivamente è stato proposto ai bambini di costruire un elemento che potesse arricchire la t-shirt precedentemente progettata, optando per una tasca. Abbiamo stabilito quali fossero le dimensioni più

opportune, segnandole alla lavagna, dopodiché ho consegnato ad ognuno i fogli necessari e ho chiesto che venisse riprodotta seguendo le misure. Tra le principali difficoltà emerse, la grande difficoltà nel mantenere delle linee parallele nel disegnare la figura, e soprattutto nel rispettare le misure date, infatti se in teoria i lavori avrebbero dovuto essere tutti uguali e sovrapponibili, nella realtà sono risultati tutti differenti tra loro. Molti hanno delle difficoltà nel riportare le misure servendosi di strumenti di misura più piccoli della lunghezza da riportare. Questo ha causato sicuramente delle imprecisioni, è stato necessario infatti spiegare il modo corretto, ovvero partire sempre dallo 0.
A questa attività è stata dedicata 1 ora per ogni sezione.

Partizionare un quadrato con il tangram
In questo incontro è stato proposto ai bambini un ulteriore lavoro, propedeutico all'ultimo incontro, la costruzione di un tangram. La scelta di questa attività è stata fatta in favore di un approfondimento del concetto di "partizione" di una superficie. Per prima cosa è stato richiesto ai bambini di trasformare il cartoncino rettangolare che avevano in un quadrato, provando ad ipotizzare la soluzione migliore che non prevedesse la piegatura. In pochi hanno suggerito di misurare il lato più corto e riportarlo sul lato più lungo, e anche farlo realmente è risultato complesso, poiché nel giustapporre le misure spesso i bambini dimenticavano lo 0, partendo dall'1.
Sfruttando il concetto di "metà" è stato ricreato prima alla lavagna, e poi ognuno individualmente, la sagoma del tangram, denominando le figure secondo i principi della geometria. È stato poi chiesto di ritagliare seguendo le linee e di mischiare le figure ottenute, cercando di formare nuovamente un quadrato utilizzando tutti i pezzi. Questo esercizio ha evidenziato la difficoltà di molti nel trovare la strategia adatta. Diversi alunni non hanno prestato attenzione alla misura dei lati delle figure e al fatto che per costruirli si sia ricorsi sempre al dimezzamento delle misure.
A questa attività è stata dedicata 1 ora per ogni sezione.

Creazione di un elemento decorativo per la t-shirt
In questo ultimo incontro ai bambini è stato richiesto di ideare un'applicazione per la t-shirt, partendo dal tangram. Per simulare il tessuto ognuno di loro è partito da un quadrato di gommapiuma e nel ricreare la struttura del tangram ho chiesto loro di ricordare quali passaggi avevamo fatto insieme la volta precedente, replicandoli. Una volta terminata questa fase, è stato chiesto loro se si potessero ulteriormente scomporre le figure trovate, in modo da ottenere figure geometriche tutte uguali (Fig.3).

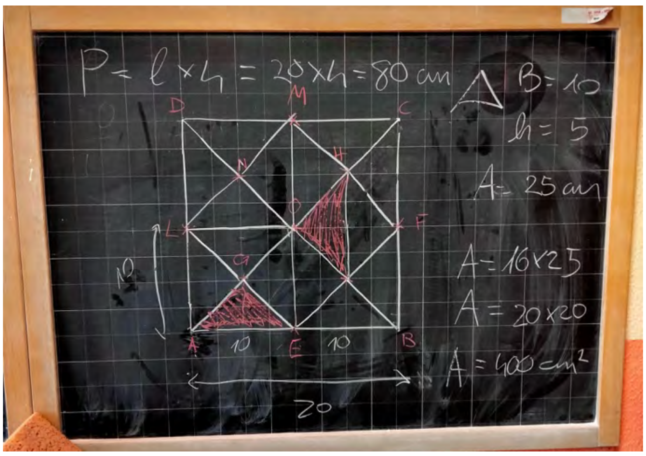


Figura 3. Scomposizione del tangram in parti equiestese.

Osservando il Tangram alcuni alunni hanno notato che la figura geometrica più piccola presente era un triangolo isoscele. L'obiettivo quindi è stato quello di ricreare tanti triangoli isosceli congruenti a quello già presente, sempre seguendo la logica della suddivisione a metà. Una volta individuati i triangoli questi

sono stati ritagliati e hanno costituito le “tessere” attraverso le quali provare ricreare una figura a piacere, accostando tutte le tessere (Fig.4).
A questa attività sono state dedicate 2 ore per ogni sezione.

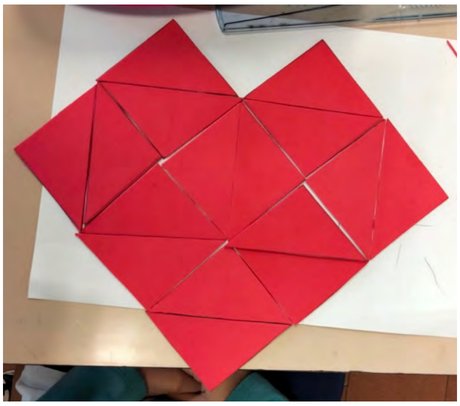


Figura 4. Esempio di figura creata con le tessere date dalla scomposizione

RISULTATI

Analisi dei risultati e margini di miglioramento visibili
La raccolta e la tabulazione dei risultati hanno prodotto dei risultati interessanti, sintetizzati nel grafico riportato in Figura 5. Il grafico mostra il livello di risposte corrette fornite nella prova iniziale, prima della proposta laboratoriale, e nella prova finale, dopo le attività.
È possibile apprezzare in generale un miglioramento in particolare in alcune aree di competenze specifiche, che sono state quelle maggiormente prese in considerazione durante il laboratorio, e che nelle prove erano collocate in corrispondenza dei quesiti 1, 3, 4, 5, 6, 9.
I miglioramenti si sono polarizzati principalmente intorno a questi nuclei tematici:

- L’affinamento della capacità di partizionare superfici regolari e irregolari;
- Una maggiore flessibilità nel passaggio dalla bidimensionalità alla tridimensionalità;
- Una più accurata attenzione alla conservazione delle misure di lunghezza e superficie.

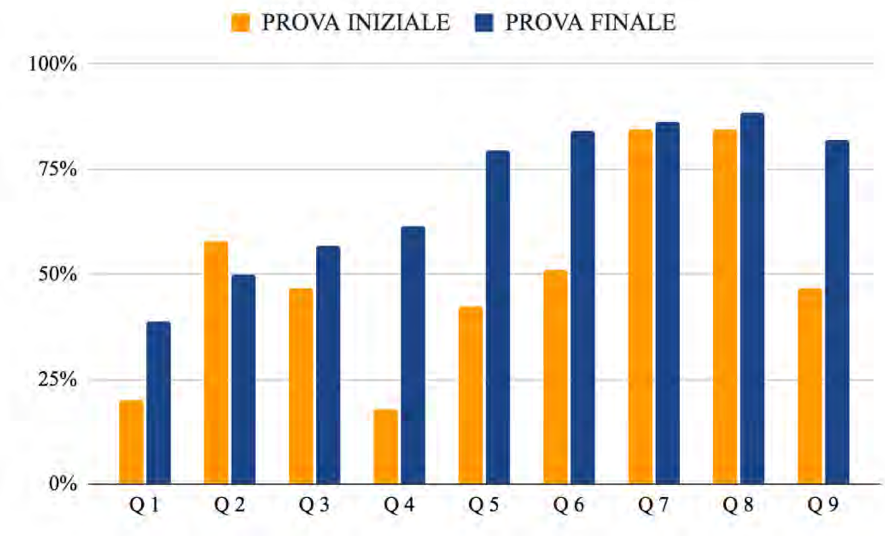


Figura 5. Grafico dei risultati della prova iniziale (arancione) e della prova finale (blu) a confronto.

CONCLUSIONI

Dall'analisi dei risultati delle prove iniziali e finali, è possibile notare un margine di miglioramento interessante, facendo quindi supporre che un approccio laboratoriale di questo tipo, unitamente alla manipolazione diretta di materiale per legare l'apprendimento a un'esperienza reale, possa rivelarsi utile nell'insegnamento di quei concetti fisico-matematici che riguardano la misura di lunghezza e superficie. L'introduzione di proposte laboratoriali nell'insegnamento di concetti fisici come quelli di lunghezza e superficie ha quindi dimostrato di poter influenzare positivamente la capacità degli alunni di operare con essi, anche in quesiti assimilabili a quelli delle prove INVALSI.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio il Prof. Matteo Leone e la Dott.ssa Marta Rinaudo per il supporto e la fiducia riposta in questo lavoro, che approccia la fisica da un punto di vista certamente insolito, ma che si è rivelato interessante e funzionale allo scopo di ampliare costantemente le applicazioni pratiche dei concetti fisici nella scuola primaria.

BIBLIOGRAFIA

Barbero, A. (2021) Tesi di Laurea Magistrale *LA MISURA "SU MISURA" Un percorso laboratoriale alla scoperta dei concetti di lunghezza e superficie.*
Brondo, O., Chirico, G. (2019) *Insegnare la fisica nella scuola primaria. Il laboratorio e il metodo scientifico*, Carocci.
Leone, M. (2020). *Insegnare e apprendere fisica. Nella scuola dell'infanzia e primaria*, Mondadori Università.
Taylor, Barry N. (2001) *The International System of Units (SI)*, Gaithersburg (MD), US Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology, 2001.
Disponibile presso:
https://physics.nist.gov/cuu/pdf/sp330.pdf
National Institute of Standards and Technology (2008) *Guide for the Use of the International System of Units (SI)* – NIST, Boulder (USA).
Disponibile presso:
https://physics.nist.gov/cuu/pdf/sp811.pdf

Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione, MIUR, 2012: Annali della Pubblica Istruzione
Indicazioni Nazionali e nuovi scenari, MIUR, 2018:
Disponibile presso:
https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/
Minardi, F. (2007), "*Metrologia*" in Enciclopedia della Scienza e della Tecnica Treccani.
Disponibile presso:
https://www.treccani.it/enciclopedia/metrologia_%28Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica%29/
Prove INVALSI di Matematica 2016/2017, 2017/2018, 2018/2019, 2020/2021.
Disponibili presso:
https://www.engheben.it/prof/materiali/invalsi/quinta_elementare_matematica.htm
International Vocabulary of Metrology (bozza della quarta edizione, 2021)
Disponibile presso:
https://www.bipm.org/documents/20126/54295284/VIM4_CD_210111b.pdf/0a913bb5-de98-ef12-2031-2b36697997a1

I FLUIDI ALLA SCUOLA PRIMARIA: LA DRAMMATIZZAZIONE A SUPPORTO DELLO SVILUPPO DI COMPETENZE SCIENTIFICHE

Chiara Gilli
mail: chiara.gilli206@gmail.com

Abstract
Si intende presentare i risultati del lavoro di tesi in Scienze della formazione primaria, il cui obiettivo è verificare la potenzialità della didattica attiva e, in particolar modo, della drammatizzazione come metodologia utile a sviluppare competenze scientifiche nei bambini di quinta primaria.
Considerando che i processi mentali dei bambini della scuola primaria si basano su operazioni concrete, per poter presentare i fluidi e le leggi ad essi correlate, è necessario trovare soluzioni per passare dal micro al macro e dall'astratto al concreto.
Proprio in ottica inclusiva si è individuata la drammatizzazione come metodologia per l'insegnamento della fisica, dimostrando la potenzialità di tale modalità di lavoro anche per le discipline scientifiche, al fine di rendere la fisica più concreta e comprensibile favorendo così un apprendimento significativo e duraturo.
Siamo costantemente immersi nell'aria e quotidianamente interagiamo con i fluidi. Da qui deriva la scelta di porre i fluidi stessi come oggetto del percorso di sperimentazione. Lo scopo ultimo del progetto attuato è dunque quello di fornire agli studenti, attraverso un apprendimento basato sulla scoperta, le chiavi per comprendere alcuni dei fenomeni con cui interagiscono costantemente, sviluppando il pensiero critico capace di indagare gli eventi a diversi livelli di profondità. Spesso, infatti, i bambini tendono ad attribuire i fenomeni sconosciuti a cause magiche ma, attraverso il percorso di sperimentazione, si intende sviluppare la capacità di analisi scientifica grazie alla quale gli studenti sono capaci di porsi domande e di cercare soluzioni a queste.
"Perché riesco a bere dalla cannuccia?" Un quesito che mette in dubbio un'azione che quotidianamente compiamo, ma che mai analizziamo con occhio scientifico. Solo al termine del percorso i bambini hanno saputo dare risposta individuando le leggi fisiche alla base del fenomeno posto in esame.

Parole-chiave
Fisica – fluidi – scuola primaria – drammatizzazione – didattica laboratoriale

INTRODUZIONE

Il modo più naturale di apprendere è quello di procedere per tentativi ed errori fino ad arrivare alla soluzione desiderata e, riflettendo sul percorso compiuto, è possibile produrre conoscenza. L'esperienza è quindi alla base dell'apprendimento perché, solo attraverso la manipolazione concreta delle situazioni, è possibile analizzare i diversi oggetti di studio da più punti di vista, scomponendoli nelle parti di cui sono composti per poter avere allo stesso tempo una rappresentazione mentale analitica e globale del fenomeno stesso. Come affermato da Dewey (1948) è infatti essenziale partire dall'esperienza per permettere ai bambini di apprendere e, solo in un secondo momento, prevedere la codifica di questa attraverso un'analisi teorica della stessa. La teoria senza il risvolto pratico rimarrebbe a un livello troppo astratto e difficile da comprendere per i bambini, se invece si sceglie di partire da esperienze concrete e vicine alla quotidianità degli studenti per giungere solo dopo alla spiegazione teorica dei fenomeni, si hanno maggiori possibilità di sviluppare un apprendimento significativo in quanto mosso da reali esigenze degli studenti che sono motivati nel percorso di scoperta. Proprio sulla base di queste considerazioni è stato strutturato il percorso di sperimentazione che, attraverso la proposta di differenti esperimenti e situazioni da analizzare ha suscitato la curiosità dei bambini e la loro capacità di indagare i fenomeni fisici circostanti cercando soluzioni ai problemi legate alle scienze e non al fato o alla magia.

Grazie a questo percorso è quindi stato possibile confermare l'ipotesi secondo cui, attraverso l'utilizzo di metodologie attive che richiedono la partecipazione concreta dei bambini, è verosimile proporre già alla scuola primaria argomenti previsti per ordini di scuola successivi stimolando la curiosità dei bambini e la loro capacità di analisi dei fenomeni con cui interagiscono quotidianamente rendendo gli studenti maggiormente consapevoli e autonomi nell'interpretazioni delle situazioni con le quali interagiscono.

AMBITO DISCIPLINARE DELLA SPERIMENTAZIONE

L'ambito disciplinare indagato è l'analisi dei fluidi, con particolare attenzione alle interazioni acqua-aria ponendo quindi il focus sul concetto di pressione. Ritengo infatti che tale ambito di analisi sia fondamentale per fornire ai bambini gli strumenti utili per comprendere il mondo che li circonda, in quanto immersi in un sistema tenuto in equilibrio proprio dalla pressione atmosferica. Inoltre, sono molteplici le situazioni quotidiane in cui il bambino si relaziona con aria e acqua, spesso anche in interazione tra loro, ed è quindi utile renderlo consapevole dei meccanismi alla base delle diverse reazioni. L'approfondimento di questo ambito, anche se non esplicitamente inserito nel curricolo di studio per la scuola primaria, può quindi rientrare in altre discipline in quanto sviluppa competenze trasversali a più ambiti, quali la scienza in senso stretto ma anche la percezione di sé e del mondo circostante. Prendendo in esame le "Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari" del 2018 l'ambito che approfondito è inerente alla sezione Scienze e relativo agli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta primaria riguardanti "oggetti, materiali e trasformazioni". Il mio intento è infatti quello di indagare come i bambini analizzano e interpretano l'ambiente circostante da un punto di vista scientifico, osservando quindi la loro capacità di osservare la realtà con occhio critico e curioso, capace di porsi domande e strutturare modelli per rispondere a queste. L'obiettivo della mia ricerca è quindi quello di rilevare il concetto di pressione nei bambini e, sulla base di questo, strutturare un percorso volto all'indagine alcune leggi dei fluidi, siano essi gas o liquidi. Questo argomento non è inserito nel curricolo della scuola primaria, all'interno della quale è solo richiesto di introdurre i concetti di pressione e di esistenza dei fluidi, i quali verranno poi ripresi ed approfonditi unicamente nel corso della scuola secondaria di primo grado. È solo in questo ciclo di studi, infatti, che viene dedicato uno spazio apposito allo studio della Fisica, il mio intento, però, è quello di anticipare questo momento, che se opportunatamente trattato con appositi artefatti e mediatori adeguati all'età e allo sviluppo cognitivo dei bambini, può essere trattato già durante gli ultimi anni della scuola primaria. Si è reso quindi indispensabile la delimitazione di uno spazio di analisi e, per tale motivo, ho scelto di approfondire, oltre alle caratteristiche generali dei fluidi, la legge di Pascal, secondo cui in un fluido la pressione si trasmette invariata a tutti i punti e in tutte le direzioni, e l'assunto secondo il quale i fluidi si spostano sempre da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore. Dall'analisi degli esperimenti è altresì emersa la legge di Boyle, secondo cui a temperatura costante il volume di una massa di gas è inversamente proporzionale alla sua pressione, anche se questa non è stata oggetto di specifici approfondimenti nel corso della sperimentazione attuata. Strettamente legata a queste leggi è il concetto di pressione atmosferica, in quanto pervasiva della vita umana e alla base delle relazioni tra i fluidi, a causa del tempo ristretto per la presentazione del progetto è però stato necessario attuare delle scelte in merito ai contenuti da proporre. Per questo motivo ho preferito focalizzare la mia attenzione prevalentemente sulle caratteristiche dei fluidi, sulle loro interazioni e sul loro movimento rimandando l'introduzione della pressione atmosferica a cicli di istruzione superiore al fine di permettere un apprendimento significativo, seppur di pochi concetti.

ASPETTO METODOLOGICO

Tutti gli interventi didattici necessitano di una metodologia per poter essere attuati. Compito fondamentale dell'insegnante è infatti quello della trasposizione didattica, indispensabile per avvicinare il sapere esperto al sapere da insegnare, il quale di trasformerà a sua volta in sapere insegnato (Chevallard, 1985). Avendo scelto l'argomento da presentare ai bambini, e cioè il sapere (Chevallard,

1985), è indispensabile scegliere le metodologie più opportune per poter proporre questo sapere esperto ad un sapere accessibile ai bambini e, per questo, adeguato al loro livello di sviluppo (Piaget, 1993). Il mio intento è proprio quello di dimostrare che, utilizzando metodologie adeguate alla trasposizione didattica, è possibile anticipare alcuni argomenti in cicli di istruzione precedente. A tal fine, per avvicinare il sapere esperto al sapere apprendibile dagli studenti di 10 anni, ho individuato due diverse metodologie: il laboratorio e la drammatizzazione, entrambe caratterizzate dall'essere metodologie attive. Il laboratorio si basa infatti sulla manipolazione diretta dei materiali che, attraverso la collaborazione con i compagni, permette di formulare ipotesi, favorendo così l'apprendimento per scoperta che produce lo sviluppo di apprendimento significativo, in quanto basato sul binomio esperienza-riflessione, il quale si dimostra essere maggiormente duraturo nel tempo. La drammatizzazione è invece la metodologia più innovativa, solitamente utilizzata solo per le materie umanistiche ma molto utile anche per quelle scientifiche. Tale metodologia produce maggiore coinvolgimento nelle attività in quanto, attraverso l'offerta di molteplici input e la conseguente attivazione di diversi sensi e intelligenze, il corpo viene considerato globalmente rendendo il percorso di apprendimento maggiormente inclusivo in quanto più vicino al modo di apprendere dei bambini che, fin da piccoli, utilizzano il corpo come principale canale di interazione con il mondo, indispensabile per sviluppare conoscenza.
Grazie a queste due metodologie è quindi possibile intercettare molteplici stili di apprendimento, rendendo la didattica maggiormente inclusiva anche per i bambini con bisogni educativi speciali.

LA SPERIMENTAZIONE

Analisi del contesto di sperimentazione

La sperimentazione è stata attuata presso l'istituto comprensivo "A. Momigliano" di Ceva (CN) e, precisamente, è stata rivolta alle classi quinte della scuola primaria per un totale di 39 bambini e sei lezioni. La sperimentazione, attuata nel mese di marzo 2021, è stata svolta in parte in presenza (primo e ultimo incontro) e in parte in didattica a distanza (quattro incontri centrali). Per questo motivo, il campione di riferimento si è modificato nei vari momenti del lavoro, in quanto è stato totale negli incontri in presenza e di numero variabile negli incontri a distanza creando così, in modo naturale, un gruppo sperimentale e un gruppo di controllo.
Per la realizzazione del progetto di sperimentazione ho selezionato alcuni materiali per gli esperimenti, utili per la manipolazione diretta da parte dei bambini. A tal scopo sono stati individuati materiali poveri e di riciclo, in quanto l'intento era quello di diminuire lo spreco e i costi, di rendere i materiali facilmente reperibili in casa (considerando il periodo di emergenza sanitaria durante il quale ho proposto la sperimentazione) e, infine, dal punto di vista didattico, questo è utile per far comprendere ai bambini che è possibile osservare fenomeni fisici negli oggetti che si utilizzano abitualmente sviluppando così uno sguardo critico nei confronti della quotidianità.

L'utilizzo della drammatizzazione per la comprensione dei concetti di pressione e di movimento da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore.

Il fulcro della sperimentazione è stata l'analisi del movimento dei fluidi da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore. Al fine di far comprendere questa importante legge ai bambini ho proposto un'attività di drammatizzazione, adeguata alla didattica a distanza, utile a sperimentare con il proprio corpo il concetto di pressione e il motivo per cui le molecole dei fluidi si spostano da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore. Per questo motivo, attraverso l'ausilio di cinque immagini (Figura 1), ho chiesto ai bambini di immedesimarsi in passeggeri di un pullman particolarmente affollato chiedendo loro di vivere l'esperienza direttamente con il loro corpo. Ho quindi descritto loro le varie fasi del viaggio: l'attesa alla fermata, la salita sul pullman e la drastica diminuzione del proprio spazio vitale a causa dell'affollamento, l'apertura delle porte all'arrivo e la fatica per avvicinarsi all'uscita, e infine, la discesa e la ritrovata condizione di benessere. Durante la narrazione, osservando le reazioni fisiche dei bambini, è possibile notare come contraggano le braccia sul petto nella fase di viaggio sul pullman per poi rilasciarle con un sospiro di sollievo una volta arrivati a destinazione e ritrovato uno

spazio vitale adeguato. È quindi possibile affermar che attraverso le esperienze corporee si comprende la tendenza a ricercare sempre la migliore condizione, muovendosi quindi in direzione di uno spazio vitale ottimale.
Per quanto riguarda la comprensione dei movimenti delle molecole ho quindi scelto di utilizzare il corpo dei bambini come mediatore al fine di far sperimentare agli studenti in prima persona il concetto di pressione e la volontà di spostarsi in luoghi in cui questa fosse minore per poter concretizzare leggi astratte e lontane dai bambini. Attraverso la finzione e la drammatizzazione è infatti stato naturale per i bambini comprendere che con l'aumento della pressione lo spazio a disposizione diminuisce, facendo così riferimento alla legge di Boyle secondo cui pressione e volume nei gas sono inversamente proporzionali, e che, se esistono vie di fuga, la volontà è quella di spostarsi in punti in cui la pressione è minore, esplicitando la proprietà dei fluidi di muoversi da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore.

Figura 1. Immagini a supporto della narrazione delle fasi del viaggio

Esperimenti significativi: i fluidi si muovono da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore, il sistema "bottiglietta.palloncino".
Dopo aver vissuto concretamente il concetto di pressione e la volontà di movimento verso luoghi a pressione minore, ho introdotto l'analisi di fenomeni fisici, applicando quanto appreso allo spostamento delle molecole dei fluidi. Per questo motivo ho realizzato, sempre con l'ausilio di materiale povero, il sistema "bottiglietta-palloncino". Tale artefatto consiste in una bottiglietta, dalla capacità di mezzo litro, di plastica spessa forata verso il fondo, e nel cui buco è stata inserita a sigillata una cannuccia, con un palloncino inserito all'interno della bottiglia e fissato al collo di questa.
Con l'ausilio di tale artefatto ho quindi presentato, senza alcuna introduzione, l'esperimento ai bambini al fine di non condizionare il loro pensiero, avendo così l'occasione di rilevare le loro ipotesi. Come osservabile dalla figura 2, aspirando dalla cannuccia il palloncino si gonfia, in quanto la pressione all'interno della bottiglietta è diminuita, quindi, le molecole d'aria esterne alla bottiglietta sono entrate all'interno del palloncino, stabilendo un nuovo equilibrio.


Figura 2. Sistema "bottiglietta-palloncino"

Osservando quanto accaduto, in un primo momento i bambini hanno quindi attribuito la causa del fenomeno alla magia ricercando il trucco sottostante, fermandosi, come previsto, a un livello di analisi superficiale oppure alcuni, seppur in minoranza, hanno individuato nell'aspirazione la causa ponendo quindi il fulcro del movimento dei fluidi non nei fluidi stessi ma in un fattore di traino esterno (Brook & Driver, 1989). Al fine di aiutare i bambini ad analizzare più profondamente l'esperimento ho quindi proposto un'attività di drammatizzazione, attraverso l'ausilio di origami e disegni, ovviando così al problema della didattica a distanza. In questa occasione si osserva quindi il passaggio da microscopico a macroscopico, alternanza ricorrente nel progetto di sperimentazione in quanto utile al fine di supportare il processo di apprendimento dei bambini, permettendo loro di imparare manipolando concretamente gli elementi di studio a livello macroscopico, per poi riportare i concetti indagati al corretto livello microscopico al fine di rendere le rappresentazioni mentali maggiormente coerenti con la realtà.
In questa occasione si è quindi chiesto agli studenti di realizzare una fila di omini con gli origami, e di immaginare che a ogni bambino di carta corrispondesse una molecola d'aria dell'esperimento, e di disegnare su un foglio il profilo del sistema "bottiglietta-palloncino" (Figura 3).

Figura 3. Drammatizzazione con origami

Grazie a questo passaggio è stato possibile manipolare le molecole e analizzare i loro comportamenti, osservando empiricamente che tante molecole escono dalla cannuccia, tante sono le molecole che entrano nel palloncino, comprendendo in questo modo il concetto di equilibrio.
Infine, durante un momento di riflessione autonoma e personale si osserva un nuovo passaggio da livello macroscopico a livello microscopico, in quanto i bambini hanno rappresentato le molecole non più come omini stilizzati, ma come semplici "cerchietti", astratti e parcellizzati, mettendo però in luce la legge fisica sottostante, cioè il movimento dei fluidi da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore (Figura 4).

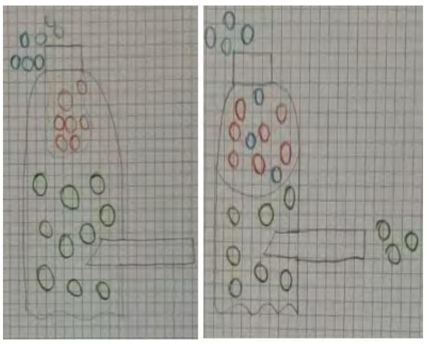


Figura 4. Analisi del movimento delle molecole a livello microscopico

Dagli elaborati dei bambini è possibile notare una maggiore profondità di analisi nei confronti dell'esperimento in quanto sono stati capaci di indagare anche il livello microscopico. Inoltre, l'utilizzo dei mediatori visivi, come la realizzazione della fila di bambini con la tecnica degli origami e della drammatizzazione hanno aumentato la motivazione e la partecipazione degli studenti. L'utilizzo di una pluralità di strade per veicolare i concetti è infatti presupposto fondamentale per lavorare in modo inclusivo. Ho quindi proposto diverse metodologie di analisi delle molecole, in quanto per lo studio di queste è stato previsto un livello astratto in cui ho chiesto ai bambini di immaginarle, un livello concreto nel quale le molecole sono state realizzate attraverso l'origami e un momento di drammatizzazione in modo da poter comprendere le cause degli spostamenti vivendo il concetto di pressione e spazio a disposizione sul proprio corpo. In tal modo è possibile coinvolgere più bambini che, essendo caratterizzati da intelligenze e stili di apprendimento differenti, sono riusciti a trovare la via a loro più congeniale per l'avvicinamento all'apprendimento.

La drammatizzazione: strumento di consolidamento e verifica

Al termine del percorso di sperimentazione, durante l'ultimo incontro avvenuto in presenza, ho proposto la drammatizzazione del sistema "bottiglietta-palloncino" utile sia come consolidamento che come strumento di verifica dell'evoluzione dell'apprendimento dei bambini. A tal fine ho realizzato, nel cortile della scuola, il profilo del sistema "bottiglietta-palloncino" e ho chiesto ai bambini di immaginare di essere le molecole d'aria dell'esperimento. Ho quindi consegnato ad ogni studente il capo di una corda dalla lunghezza di 1,5 metri utile sia a mantenere le distanze di sicurezza ma indispensabile anche per dimostrare che il movimento di una molecola causa, inevitabilmente, anche il movimento delle molecole ad essa vicine (Figura 5).
L'apprendimento attraverso il corpo permette quindi, oltre al passaggio tra micro e macro, anche l'attribuzione di significato ai postulati fisici. Nel corso della sperimentazione è infatti emerso dai bambini il concetto di "*comodità*", le molecole si spostano infatti da punti a pressione maggiore, dove stanno "più schiacciate" e quindi più scomode, a punti a pressione minore, dove invece hanno "più spazio" e quindi stanno "più comode". Questo è stato compreso dai bambini grazie alle esperienze direttamente vissute attraverso l'utilizzo del corpo che ha permesso di utilizzare anche un lessico maggiormente vicino e comprensibile ai bambini.

Figura 5. La drammatizzazione del sistema "bottiglietta-palloncino"

RISULTATI OTTENUTI

Confronto tra questionario iniziale e questionario finale

A conclusione del percorso di sperimentazione, è stato sottoposto ai bambini un questionario che, confrontato con quello iniziale, permette di analizzare la progressione dell'apprendimento dei bambini. Considerando inoltre la modalità di presentazione della sperimentazione, in parte in presenza e in parte a distanza, e la conseguente creazione del gruppo sperimentale (composto dai bambini che hanno preso parte a tutto il progetto) e del gruppo di controllo (formato dagli studenti che hanno partecipato solo alla prima e all'ultima lezione) è possibile dimostrare l'efficacia del progetto sperimentale nella comprensione dei fluidi e delle leggi ad essi associate.

Confrontando quindi le risposte dei questionari si osserva come, i bambini, già all'inizio del percorso, avevano un'idea teorica della presenza dell'aria, infatti, il 59% degli studenti ha risposto che l'aria è ovunque (percentuale salita comunque al 72% al termine del percorso) (Figura 6).

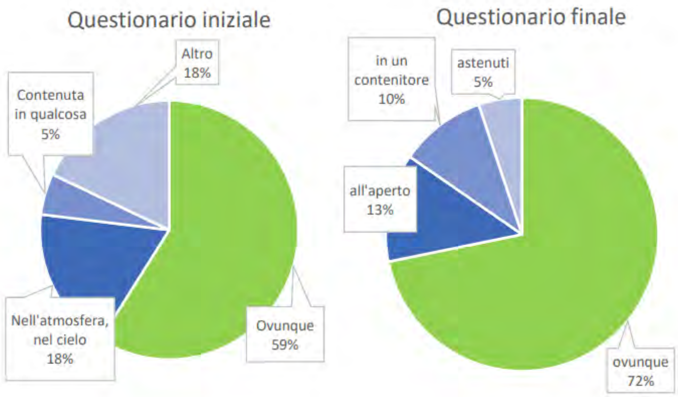


Figura 6. Dov'è l'aria? Confronto tra il questionario iniziale e finale.

La percentuale diminuisce però davanti all'analisi di situazioni concrete in quanto solo il 28% dei bambini ha saputo riconoscere la presenza dell'aria dentro a contenitori aperti e chiusi contro il 79% di risposte corrette a conclusione del progetto di sperimentazione (Figura 7).

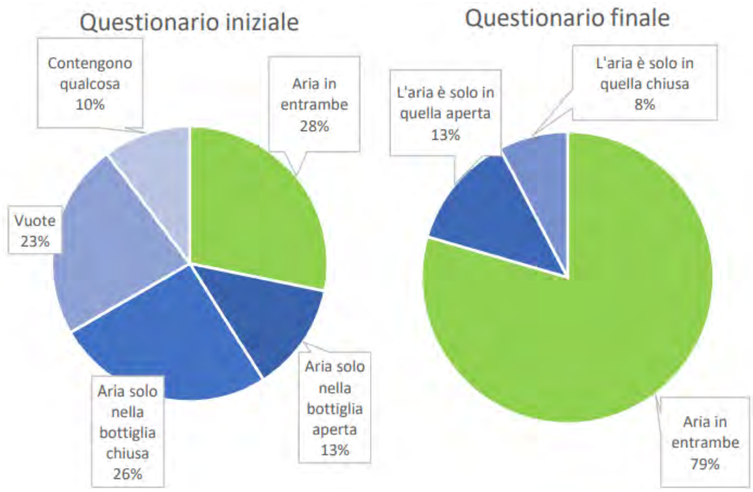


Figura 7. Individuazione dell'aria in situazioni concrete.

Infine, con l'intento di legare la sperimentazione alla realtà, ho chiesto in entrambi i questionari il motivo per cui i palloncini si sgonfiano (Figura 8). Tali item sono stati formulati in modalità leggermente differente al fine di evitare l'effetto prova andando però ad indagare lo stesso ambito. Dall'analisi delle risposte dei bambini si osserva come, nel questionario iniziale, nessun bambino sia stato capace di spiegare il fenomeno attraverso l'applicazione di teorie scientifiche fermandosi quindi a un livello superficiale di osservazione in quanto è semplicemente stato spiegato che "l'aria esce perché trova un buco". Al termine del percorso, invece, il 79% dei bambini è riuscito a spiegare questo fenomeno come movimento da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore delle molecole d'aria. È inoltre molto interessante osservare che l'8% dei bambini ha introdotto in modo autonomo il concetto di pressione atmosferica, mai trattata nel percorso di sperimentazione ma dedotta in modo autonomo dai bambini sulla base degli esperimenti analizzati, comprendendo quindi la presenza di un'aria esterna che applica una forza su tutti gli oggetti con cui entra in contatto.

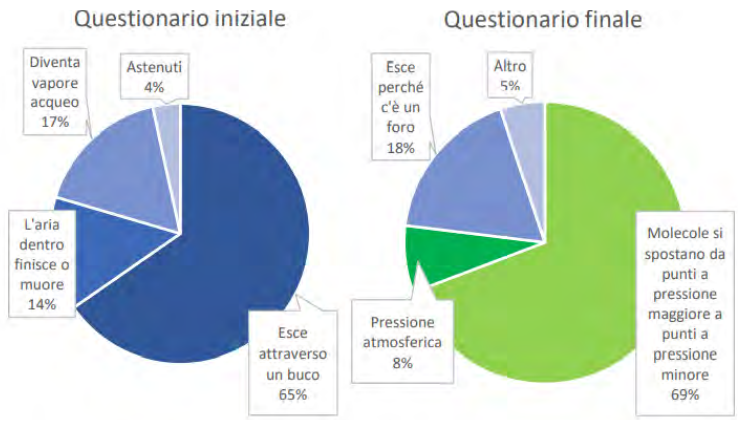


Figura 8. Perché i palloncini si sgonfiano?

Applicazione della fisica alla quotidianità

Il percorso di sperimentazione si è concluso con un momento di convivialità utile a collegare la fisica alla quotidianità. Proprio in questa occasione ho chiesto ai bambini di spiegare come fosse possibile bere dalla cannuccia, gesto ricorrente nella loro vita. La totalità dei bambini ha saputo riconoscere il movimento dei fluidi, in questo caso delle molecole d'acqua, da punti a pressione maggiore a punti a pressione minore. Per spiegare questo fenomeno gli studenti hanno fatto riferimento a esperimenti analizzati durante il percorso di sperimentazione dimostrando così capacità di transfert delle conoscenze.

CONSIDERAZIONI FINALI

Analizzando la crescita dei bambini e lo sviluppo di competenze si osserva come, all'inizio del percorso, i bambini avevano una conoscenza teorica di aria, acqua e molecole ma la capacità di riconoscere e di descriverle in situazioni concrete, anche attraverso l'applicazione di leggi fisiche, si è sviluppata solo al termine del progetto sperimentale. Inoltre, si osserva maggiore consapevolezza nell'attribuzione delle cause dei fenomeni, prima ricercate nella magia mentre poi si osserva lo sviluppo di uno sguardo maggiormente attento e critico nei confronti della quotidianità. Infine, si osserva uno sviluppo del lessico scientifico, assente all'inizio del percorso e molto migliorato a conclusione di questo seppur adeguato all'età dei bambini.

Inoltre, il progetto di sperimentazione è stato utile per sviluppare competenze trasversali alle diverse discipline, quali lo sviluppo di uno sguardo attento e critico nei confronti della quotidianità, la capacità di attivare e gestire molteplici sensi e intelligenze, lo sviluppo della capacità di ascolto e di collaborazione e la capacità di formulazione di ipotesi e di difesa delle stesse attraverso l'individuazione di tesi a supporto, con la capacità di modificarle però davanti all'evidenza.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i professori Matteo Leone e Marta Rinaudo dell'Università degli Studi di Torino per aver reso possibile l'attuazione della sperimentazione, l'organizzazione del Di.fi.ma per la preziosa opportunità e le insegnanti e i bambini della scuola primaria di Ceva a cui è stato rivolto il progetto di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

Allasia D., Montel V., Rinaudo G. (2004). *La Fisica per maestri*. Edizioni libreria Cortina, Torino.

Boccola Fabiana (2012). *Il role playing – progettazione e gestione*. Nuova edizione. Carrocci editore, Roma.

Brondo Oreste, Chirico Giuseppe (2019). *Insegnare la fisica nella scuola primaria. Il laboratorio e il metodo scientifico*. Carrocci editore, Roma.
Galanti Antonella, Pavone Marisa (2020). *Didattiche da scoprire. Linguaggi, diversità, inclusione.* Mondadori università, Milano.
Leone Matteo (2020). *Insegnare e apprendere fisica nella scuola dell'infanzia e primaria*, Mondadori Education, Milano.
Terenghi Erika (2014). *Approccio cuorporeomentale della didattica multisensoriale. A scuola con il Metodo Terenghi.* FrancoAngeli, Milano.
Zecca Luisa (2016). *Didattica laboratoriale e formazione. Bambini e insegnanti in ricerca*. Ricerche e pratiche didattiche. FrancoAngeli, Milano.

BLAZE E LE MEGA MACCHINE: COSTRUIRE COMPETENZE SCIENTIFICHE NELLA SCUOLA PRIMARIA CON I CARTONI ANIMATI

Federica Revel
Federica.revel96@gmail.com

Abstract
Il progetto che si intende presentare ha l'obiettivo di analizzare l'insegnamento del concetto fisico del galleggiamento nella classe prima della Scuola Primaria attraverso i cartoni animati. Lo scopo è quello di verificare se l'utilizzo di essi può essere proficuo per la costruzione attiva di competenze scientifiche e trasversali. A tal fine è stato scelto il cartone animato statunitense Blaze e le mega macchine, nato con scopi didattici e ricco di argomenti scientifici trattati all'interno delle cinque stagioni. Per questo, è stato utilizzato come filo conduttore per la metodologia laboratoriale e per creare motivazione e curiosità nei bambini. La modalità laboratoriale, invece, permette allo studente di essere attivo costruttore delle proprie conoscenze e di collaborare con i pari e con i compagni per raggiungere gli obiettivi prefissati. Il galleggiamento è un fenomeno scientifico di cui tutti i bambini hanno un'esperienza diretta, pur non conoscendone il principio regolatore. Tale progetto si pone come base per la costruzione di competenze durature su cui innestare esperienze didattiche future. Per la costruzione di esse si è creato un percorso didattico con attività basate sulla realtà quotidiana degli studenti e sulle loro conoscenze preliminari sull'argomento. Inoltre, sono stati presi in esame gli studi precedenti di pedagogisti e ricercatori illustri su tale argomento e sulle nozioni sottostanti come quelle di densità, volume, forza-peso e massa. La progettazione iniziale è stata modificata e modulata sia per far fronte alle risposte date dai bambini sia a causa dell'emergenza sanitaria in corso.

Parole-chiave
Fluidi, galleggiamento, cartoni animati, metodologia laboratoriale, apprendimento attivo

INTRODUZIONE

Il progetto *Blaze e le mega macchine: costruire competenze scientifiche nella scuola primaria con i cartoni animati* perseguiva lo scopo di analizzare l'efficacia dell'utilizzo del cartone animato Blaze e le mega macchine per la costruzione attiva di competenze scientifiche nella classe prima della Scuola Primaria dell'Istituto comprensivo "Beppe Fenoglio" situato a Bagnolo P.te. Tale percorso è stato effettuato tra febbraio e aprile del 2021. In totale si sono svolti sette incontri di cui: due lezioni in cui i bambini erano in classe con la loro insegnante e io seguivo lo svolgimento della lezione a distanza; tre lezioni completamente a distanza durante il periodo di lockdown e due lezioni in presenza, in cui ho potuto osservare in maniera più approfondita il lavoro degli alunni. La progettazione iniziale non prevedeva la didattica a distanza, per questo vi sono stati numerose variazioni che hanno prodotto risultati interessanti.

SCOPO DEL PROGETTO E COMPETENZE ATTESE

Partendo dall'analisi delle normative, del concetto fisico e degli studi precedenti sul pensiero infantile, ho elaborato lo scopo della mia progettazione sperimentale, il quale parte dal presupposto che per produrre un apprendimento efficace le attività proposte devono essere attive, coinvolgenti e motivanti. Lo scopo è quello di verificare l'efficacia dell'utilizzo del cartone animato Blaze e le mega macchine nell'apprendimento del concetto di galleggiamento in una classe prima della scuola Primaria. Le competenze attese erano tre:

- *competenza scientifica:* ci si aspettava che l'alunno, al termine del progetto, fosse capace di formulare ipotesi su quali corpi galleggiano e quali no, basandosi sulle esperienze affrontate e fosse capace di verificarle in modo autonomo;
- *competenza mediale:* al termine l'alunno avrebbe dovuto saper individuare il messaggio del cartone animato e avrebbe dovuto saperlo utilizzare in un contesto reale;
- *competenza linguistica:* l'alunno avrebbe dovuto saper formulare in modo corretto ipotesi e previsioni e avrebbe dovuto saperle sostenere nella discussione con i pari e con l'adulto.

METODOLOGIE: IL CARTONE ANIMATO E IL LABORATORIO

Il cartone animato: Blaze e le mega macchine

L'utilizzo del cartone animato Blaze e le mega macchine è stato dettato non solo dal contenuto specifico dello stesso, ma anche dalle numerose implicazioni che i cartoni possono avere nella didattica. Essi, infatti, permettono di costruire un clima favorevole e un luogo di apprendimento significativo, dove gli studenti possono sperimentare e costruire competenze specifiche e/o trasversali. Utilizzare questo strumento multimediale permette, inoltre, di incontrare la realtà quotidiana dei bambini, permettendo loro di apprendere concetti anche difficili in maniera divertente e coinvolgente. In particolare, aiutano l'insegnante a motivare i propri alunni, a mantenere l'attenzione e a coinvolgere tutti gli studenti, anche coloro che possono avere difficoltà linguistiche.
Il cartone animato Blaze e le mega macchine è un cartone statunitense nato nel 2014 con scopi didattici. Per questo, il linguaggio utilizzato è semplice, ma specifico. La vicenda narra le avventure di Blaze, un monster truck rosso con la velocità del fulmine, e del suo pilota e migliore amico Aj. I personaggi secondari sono una bambina con la passione per la meccanica, Gabby, e sette monster truck: Darington, un truck che ama le acrobazie; Starla, una cowgirl truck; Stripes, un truck tigre; Watts, un truck con gli pneumatici elettrici, fa la sua prima comparsa nella stagione 3 episodio 18; Zeg, un truck dinosauro; Crusher, il truck dispettoso che cerca sempre di imbrogliare Blaze, perciò possiamo considerarlo l'antagonista; infine, Pickle, un truck pasticcione che cerca di portare sulla retta via Crusher senza riuscirci, che quindi è riconducibile alla figura dell'aiutante dell'antagonista. Ogni episodio ha una durata di venti minuti circa e in totale, al momento della realizzazione del progetto, vi erano 99 episodi suddivisi in 6 stagioni.
Al fine di analizzare in modo specifico e approfondito il cartone, ho visionato interamente i 99 episodi disponibili in lingua italiana. Ho inserito i dati in una tabella nella quale erano indicati: il riassunto dell'episodio, i minuti totali, con particolare attenzione al minutaggio utile ai fini didattici, i concetti analizzati, le misconcezioni e il metodo con cui veniva proposto l'argomento scientifico.
Questo mi ha permesso di constatare che il 91% degli episodi tratta argomenti scientifici (Figura 1). In particolare, il 71% degli episodi riguarda la Fisica, il 21% temi scientifici, in particolare di Matematica e Chimica, e il restante 8% tratta altri ambiti (Figura 2).

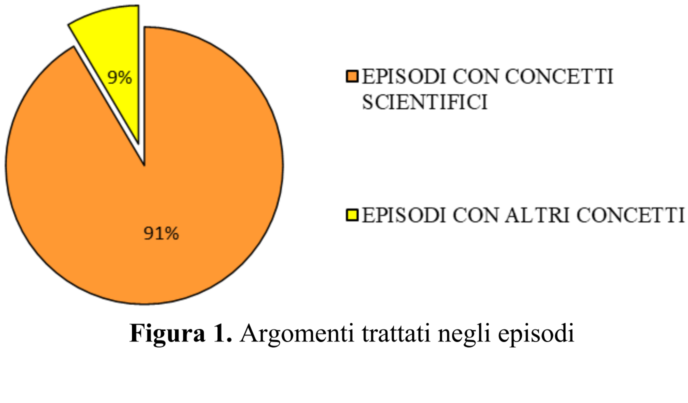


Figura 1. Argomenti trattati negli episodi

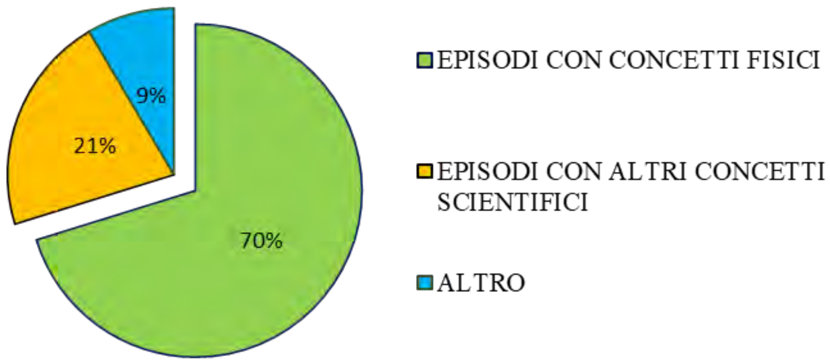


Figura 2. Concetti analizzati nelle 5 stagioni

Ulteriormente, per effettuare un'analisi più approfondita ho suddiviso i temi di Fisica approfonditi in: dimensioni, forze, fluidi, energia, temperatura e calore, luce, elettricità, magnetismo, velocità e altro. Come si evince dal grafico (Figura 3), l'ambito più trattato riguarda le forze, e quello meno approfondito è quello della temperatura e del calore. Prendendo in considerazione i fluidi gli episodi totali che affrontano tale tematica sono otto. In particolare, approfondiscono: il galleggiamento, le correnti, l'aerodinamica, l'idraulica e l'energia che può scaturire dal movimento di aria e acqua.

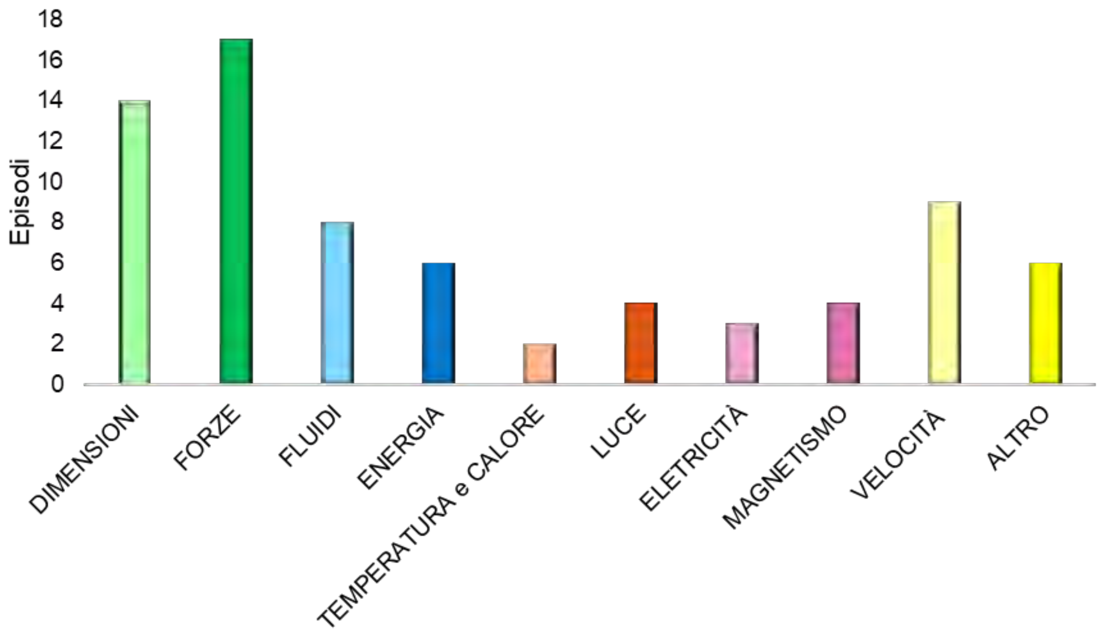


Figura 3. Analisi dei concetti fisici trattati

Per questo progetto ho deciso di affrontare il tema del galleggiamento poiché è un argomento di cui tutti i bambini, almeno una volta, hanno fatto esperienza diretta nella vita quotidiana. Inoltre, vi erano numerosi episodi riguardanti tale argomento che sono stati utilizzati come filo conduttore per le varie esperienze concrete del laboratorio.

La situazione iniziale della progettazione è scaturita dalla visione del primo episodio del cartone animato. In esso, Blaze e due suoi amici devono sfuggire ad alcuni orsi. Per farlo, cercano tre oggetti da utilizzare come imbarcazione sul fiume. Prima di verificare quale di essi galleggia, Blaze rompe la quarta parete e si rivolge ai più piccoli con una domanda "Quale tra la roccia, la tavola di legno e il legno concavo galleggia?". Da qui è scaturita la discussione in classe, accompagnata da una lettera fittizia in cui i due protagonisti chiedono agli alunni di aiutarli a scoprire tutti i segreti del galleggiamento.

METODOLOGIA LABORATORIALE

La seconda metodologia utilizzata nel progetto è stata quella laboratoriale. Il termine laboratorio proviene dal latino medioevale laboratorium, derivato da laborare, cioè "lavorare". Indicava, infatti, luoghi in cui si producevano materiali di tipo artigianale o artistico. Nel corso dei secoli è passato dall'indicare esclusivamente un luogo in cui si crea materialmente qualcosa, a designare uno spazio in cui si fanno ipotesi e dimostrazioni su concetti più astratti. Pertanto, nel laboratorio si effettuato sia attività intellettuali sia materiali al fine di raggiungere un obiettivo. La scelta è stata dettata dal fatto che questa metodologia permette allo studente di osservare la realtà che lo circonda, attraverso i materiali proposti da lui stesso o dall'insegnante, al fine di trarne conclusioni e conoscenze in modo autonomo. Potremmo quindi definire il laboratorio come una metodologia in cui l'alunno acquisisce in modo attivo e consapevole delle competenze grazie alle esperienze di manipolazione e riflessione, sia nata dal pensiero individuale sia scaturita dalla discussione con i compagni.

LA SPERIMENTAZIONE

All'interno della sperimentazione effettuata sono stati svolti due test, uno iniziale e uno finale, diversi, ma con gli stessi obiettivi, al fine di valutare in modo oggettivo gli apprendimenti dei bambini. Dalle rilevazioni iniziali è stato verificato che i bambini hanno esperienza diretta del galleggiamento ed è da lì che traggono le loro spiegazioni e previsioni sul fenomeno. Per questo è fondamentale che l'insegnante, al fine di creare un apprendimento che sia proficuo e duraturo, parta proprio dall'esperienza dei bambini e si basi sulla realtà esterna. Non deve, quindi, fornire solo conoscenze astratte e nozionistiche, ma guidare l'alunno nell'apprendere delle competenze e ad imparare come costruirne altre autonomamente. Le conoscenze che possedevano i bambini all'inizio del percorso erano quindi prevalentemente dovute a intuizioni o nozioni inconsce che avevano elaborato attraverso le loro sperimentazioni. Per le loro ipotesi e previsioni si basavano su ciò che conoscevano e quindi sui singoli oggetti e sulle loro caratteristiche e non su un principio "universale". Successivamente, sono stati svolti numerosi esperimenti con materiali forniti dall'insegnante o proposti dagli alunni stessi. In particolare, sono stati utilizzati tre episodi del cartone animato *Blaze e le mega macchine*: "Vai Blaze!", visto integralmente poiché era il primo episodio della serie televisiva; "La grande corona degli animali", dal minuto 11:45 al minuto 14:50; infine, "Grand Prix mare profondo", dal minuto 6:05 a 10:05; lettere fittizie inviate dai personaggi ai bambini per introdurre le varie attività; materiali poveri e di recupero, facilmente reperibili a casa, durante il periodo di Didattica a Distanza, e in classe.
Gli esperimenti più significativi sono stati i seguenti: l'esperimento sul galleggiamento degli oggetti, l'esperimento dei tre pesciolini e l'esperimento del riso.

Esperimenti proposti durante il percorso

Il primo esperimento proposto è stato quello del galleggiamento degli oggetti. Esso è stato svolto sia all'inizio della sperimentazione sia alla fine, per verificare se le motivazioni fornite dagli studenti sul galleggiamento degli oggetti fossero diverse e più specifiche. Inizialmente, sono stati proposti alcuni oggetti dall'insegnante e ogni bambino, attraverso un breve colloquio individuale a distanza, ha potuto esprimere le proprie ipotesi. Ciò ha permesso di valutare in maniera più oggettiva le risposte, poiché gli studenti non erano influenzati dai compagni. Gli oggetti rappresentati erano: una forchetta e un cucchiaio di metallo, una piuma, un tappo di sughero, una pallina da ping pong, un tappo di metallo, una gomma, una bottiglietta di plastica (vuota e chiusa) e una graffetta. Erano stati scelti perché oggetti di uso

comune, che tutti i bambini avrebbero dovuto conoscere. Successivamente, i bambini han potuto sperimentare il galleggiamento di oggetti proposti da loro stessi.
Il secondo esperimento significativo è quello dei tre pesciolini di pongo. L'esperimento consisteva nel far osservare ai bambini tre pesciolini di pongo del medesimo peso, creati precedentemente dall'insegnante. Essi erano così composti: un pesciolino solo di pongo, uno con all'interno un bullone e l'ultimo con dentro del polistirolo. Avendo lo stesso peso, ma essendo costruiti con materiali di densità differente, i pesciolini avevano anche dimensioni differenti. Infatti, il pesciolino con il polistirolo era il più grande e quello con il bullone il più piccolo. Inserendo tali oggetti all'interno dell'acqua i bambini osservavano che il più grande galleggiava, mentre gli altri due affondavano. In tal modo si è potuto riflettere sui materiali di cui sono costituiti, sul loro peso e sulle loro dimensioni, tutte variabili fondamentali per affrontare il galleggiamento. In questo modo si è arrivati alla conclusione che per il galleggiamento oltre alla variabile del peso bisogna tenere in considerazione quella del materiale di cui è composto.
L'ultimo esperimento svolto che prenderemo in considerazione in questo articolo è l'esperimento del riso. Esso consisteva nel verificare il galleggiamento di una determinata quantità di riso sciolto e confrontarla con la medesima quantità inserita all'interno di un palloncino. I bambini hanno espresso le loro ipotesi attraverso delle rappresentazioni grafiche sul quaderno. Dai disegni fatti dagli studenti si è desunto che l'89% sapeva che il riso sciolto affonda, probabilmente avevano visto un adulto preparare un risotto o semplicemente avevano giocato con esso. Non avevano, invece, esperienza diretta del riso all'interno del palloncino; quindi, si sono basati su altre variabili. Solo il 56% degli studenti credeva che il palloncino galleggiasse. Questo secondo oggetto considerato creava più ambiguità perché non apparteneva alla sfera dei corpi che abitualmente i bambini inseriscono all'interno di un liquido.
Per questo le ipotesi fatte dai bambini si spartivano quasi equamente a differenza del caso del riso sciolto in cui i bambini avevano più sicurezza poiché l'avevano rilevato dalle loro esperienze.
Questa ipotesi è avvalorata dagli studi di Glaser (1984) il quale suggerisce che l'uso di schemi generali sia utilizzato maggiormente in circostanze non familiari agli studenti, mentre per oggetti di cui conoscono il comportamento utilizzano spiegazioni specifiche (domain-specific knowledge).
Ciò dimostrava anche che i bambini conoscono solo inconsciamente le leggi che governano il galleggiamento e che non fanno previsioni basandosi su principi generali, ma in base all'oggetto considerato.

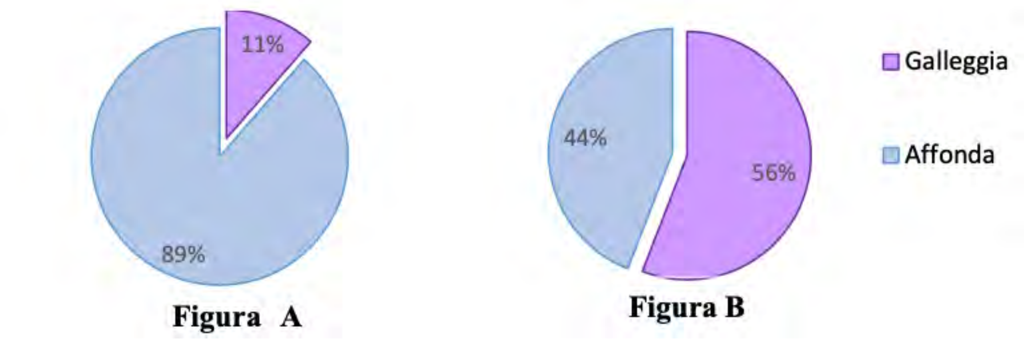


Figura 4. Ipotesi dei bambini sul galleggiamento del riso sciolto (Figura A) e sul riso nel palloncino (Figura B)

Potenzialità e limiti della didattica a distanza

All'interno di questa sperimentazione un ruolo importante è stato svolto dalla didattica a distanza, la quale sì ha permesso di continuare il progetto anche nel periodo di chiusura, ma che ha causato anche alcune difficoltà.
Tra le potenzialità emerse vi è stata quella di poter fare incontri individuali con gli alunni, i quali hanno potuto esprimere tutti le proprie idee con i propri tempi e senza essere influenzati dalle idee dei compagni. Inoltre, è stato possibile fornire ad ogni alunno feedback precisi e puntuali sui lavori svolti.
Tra i limiti possiamo evidenziare il fatto che alcuni esperimenti sono stati solo osservati, attraverso la videocamera, dagli alunni. Questo perché il tempo in cui i bambini potevano rimanere davanti ai

dispositivi elettronici erano molto ristretti, altro limite della didattica a distanza. Infatti, di due ore preventivate, solo 45 minuti potevano essere in modalità sincrona. L'ultimo limite evidenziato è stato quello di non poter verificare l'attenzione di tutti gli alunni, poiché i distrattori all'interno delle loro case sono sicuramente maggiori rispetto all'ambiente scolastico.

Risultati ottenuti

I risultati ottenuti dalla sperimentazione sono stati quelli attesi all'inizio. Infatti, sono stati i seguenti: gli alunni hanno compreso la possibilità di apprendere concetti e fenomeni attraverso la visione di un cartone animato; hanno appreso il metodo deduttivo, cioè hanno imparato a formulare ipotesi sostenendole con pari e adulti e a verificarne la veridicità e ad inserire nella spiegazione del

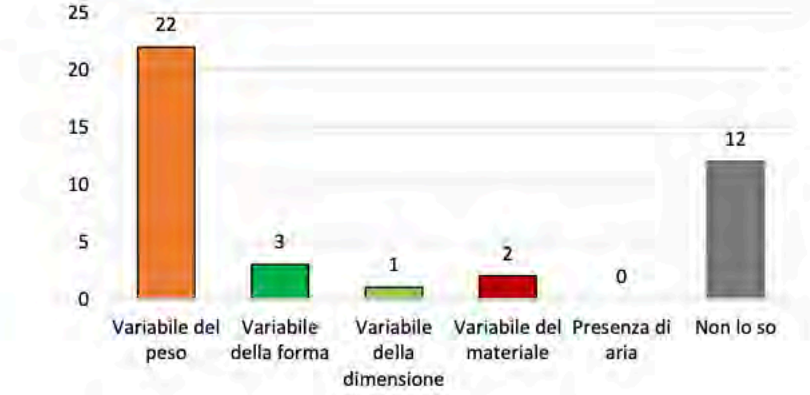


Figura 5. Variabili utilizzate dai bambini all'inizio del percorso per spiegare il fenomeno del galleggiamento

galleggiamento non solo una variabile, ma molteplici. Infatti, 22 bambini fornivano come motivazione solo quella del peso con la dicotomia pesante/affonda e

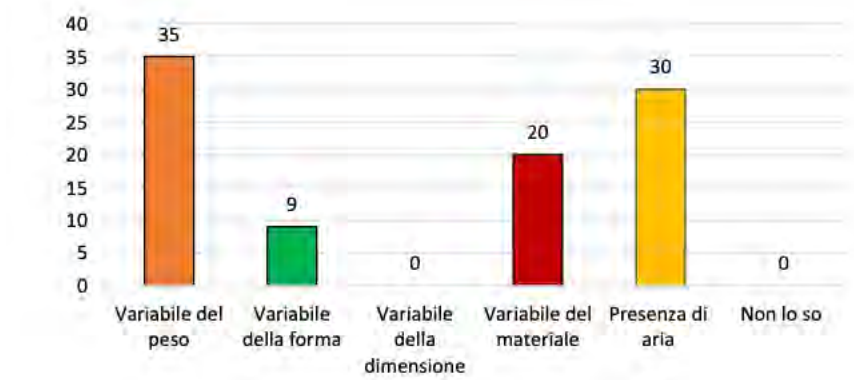


Figura 6. Variabili utilizzate dai bambini alla fine del percorso per spiegare il fenomeno del galleggiamento

leggero/galleggia, mentre alla fine della sperimentazione i bambini inserivano nelle loro spiegazioni anche altri fattori come la forma, il materiale di cui era composto il corpo e la presenza di aria all'interno dell'oggetto.

Da tali risultati, sarà possibile continuare il percorso in direzioni differenti. Sicuramente sarà possibile ampliare il discorso del galleggiamento introducendo il concetto di densità per poi arrivare al *Principio di Archimede.* Tuttavia, sarà anche possibile continuare ad utilizzare il cartone animato *Blaze e le mega macchine* per introdurre altri concetti scientifici.

CONSIDERAZIONI FINALI

In conclusione al percorso attivato si può sostenere che grazie alla visione del cartone animato e alla metodologia laboratoriale i bambini hanno costruito nuove conoscenze e competenze. Esse sono state elaborate sia grazie alla collaborazione tra pari sia dalla guida dell'insegnante. Infatti, aver progettato in maniera attenta, ma flessibile le attività ha permesso di avere un filo conduttore per tutte le esperienze proposte, ma allo stesso tempo esse sono state modificate in base alle risposte e alle esigenze dei bambini. Inoltre, la maggioranza delle attività è stata cambiata per essere adattata alla didattica a distanza dovuta all'emergenza sanitaria in corso, ma nonostante la distanza e l'obbligo di vedersi attraverso l'utilizzo di un computer, gli alunni hanno mantenuto il loro interesse per il progetto.
Dal confronto tra i dati rilevati all'inizio del percorso e quelli alla fine si deduce che i bambini hanno acquisito delle nuove conoscenze e competenze del fenomeno del galleggiamento. Come sosteneva Piaget, i bambini hanno dimostrato di aver modificato le loro strutture cognitive al fine di inserire in esse le nuove nozioni. Infatti, non hanno eliminato le preconoscenze o le loro previsioni iniziali, come l'utilizzo della variabile del peso nella loro spiegazione, ma l'hanno ampliata aggiungendo ad essa altre variabili: forma, dimensione, la presenza di aria all'interno degli oggetti che non presentano fori da cui potrebbe fuoriuscire. La maggioranza degli studenti, inoltre, conferma quanto sostenuto dagli studi di Piaget poiché introducono nelle loro spiegazioni il concetto di peso. Dimostrano di essere nel 3° stadio di sviluppo in cui i bambini utilizzano prioritariamente la dicotomia pesante/leggero per spiegare il fenomeno del galleggiamento. Inoltre, vengono anche confermati gli studi di Smith et al. in cui si sostiene che gli studenti dai 5 ai 7 anni utilizzano indistintamente il concetto di peso e densità per prevedere se un oggetto posto in un liquido galleggerà. Gli alunni, quindi, hanno iniziato a comprendere che vi sono variabili generali da tenere in considerazione per formulare le loro previsioni. Inoltre, hanno cominciato a comprendere la nozione di densità e il Principio di Archimede. Ciò è dovuto al fatto che i bambini sono molto piccoli e tali concetti di difficile comprensione anche per coloro che sono adulti. Inoltre, è un buon punto di partenza per creare nuovi progetti e laboratori durante gli anni della scuola Primaria che partano dall'esperienza concreta dei bambini e dalle conoscenze acquisite quest'anno.
Gli alunni hanno dimostrato entusiasmo e interesse per tutte le attività proposte, nonostante le difficoltà dovute alla didattica a distanza. Inoltre, il clima favorevole di collaborazione si è osservato soprattutto nelle fasi di sperimentazione in classe, in cui i bambini si suggerivano l'un l'altro gli oggetti da provare e osservare. Inoltre, ogni giorno entrambe le classi avanzavano la richiesta di vedere il cartone di Blaze o se ci fosse per loro una nuova lettera. Questo dimostra che oltre alla creazione di un filo conduttore per la metodologia laboratoriale ciò è servito per attirare la loro attenzione e aumentare la motivazione, come era stato ipotizzato a inizio percorso. Inoltre, il poter sperimentare attivamente era un altro elemento di interesse per i bambini che hanno dimostrato di apprezzare la mia presenza e le attività proposte. Questo, forse, è dovuto anche al fatto che a causa dell'emergenza sanitaria in corso le attività di questo tipo sono state limitate in questo loro primo anno scolastico.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i professori Matteo Leone e Marta Rinaudo dell'Università degli Studi di Torino per aver reso possibile l'attuazione del mio progetto sperimentale e l'organizzazione del Convegno DI.FI.MA per la preziosa opportunità. Infine, si ringrazia il dirigente Nicola Rossetto, l'Insegnante Laura Arena e tutti gli alunni per aver accolto con curiosità e gioia il progetto.

BIBLIOGRAFIA

Biddulph, F. & Osborne, R. (1984). Pupils ideas about floating and sinking. Research in Science Education
Boscarino, G. S. (2004). La didattica laboratoriale.
Brondo, O., & Chirico. (2019). Insegnare la fisica nella scuola primaria (Carocci Editore).

Cappuccio, G. (2012). Sperimentare i cartoni animati in classe. Percorsi di media education nella scuola (Spaggiari Edizioni).
Consiglio Europeo (2018). Le raccomandazioni relative alle competenze chiave per l'apprendimento permanente.
Decreto Legislativo n. 44 del 15 marzo 2010. Codice di autoregolamentazione Tv e minori.
Frabboni (2004), Il laboratorio (Laterza).
Ferramosca, M. (2008). L ' uso delle nuove tecnologie nella Scuola Primaria " a servizio " della didattica.
Glaser R. (1984), Education and thinking: the role of knowledge, in American Psychologist 39(2), 93-104
Kohn, A. S. (1993). Preschoolers' Reasoning about Density: Will It Float? 64(6), 1637–1650.
Leone, M. (2020). Insegnare e apprendere fisica. Nella scuola dell'infanzia e primaria (Mondadori Università).
MIUR (2013) Circolare Ministeriale n.8
MIUR (2014) D.M. 12/07/2011, n. 5669: (Linee guida per il diritto allo studio degli alunni con disturbi specifici dell'apprendimento allegato al D.M. 12/07/2011, 2014)
MIUR (2018). Inidicazioni nazionali e Nuovi Scenari.
Piaget, J. (1964). Lo sviluppo mentale del bambino e altri studi di pedagogia (Piccola Biblioteca Einaudi).
Rondolino, G. (2003). Storia del cinema d'animazione. Dalla lanterna magica a Walt Disney da Tex Avery a Steven Spielberg (De Agostini scuola).
Smith, C., Carey, S., & Wiser, M. (1985). On differentiation: A case study of the development of the concepts of size, weight, and density. Angewandte Chemie International Edition, 177–237.
Zecca, L. (2016). Didattica Laboratoriale e formazione. Bambini e insegnanti in ricerca (FrancoAngeli).

PAPER UNFOLD. PROGETTO DI UN LIBRO POP-UP COME LABORATORIO AUTOPRODOTTO PER L'APPRENDIMENTO E L'INSEGNAMENTO DEI MOVIMENTI DELLA LUCE.

Giuliano Scornavacche
giuliano.scornavacche@gmail.com

Abstract
Paper Unfold è il progetto di un libro pop-up autoprodotto e autoriproducibile in autonomia dagli studenti, studiato per promuovere l'apprendimento laboratoriale dei movimenti della luce anche in assenza di un'aula laboratorio attrezzata all'interno del setting scolastico. Dopo una disamina delle caratteristiche salienti della didattica laboratoriale da riportare all'interno del book e delle principali misconcezioni degli studenti legate ai contenuti disciplinari da presentare, le esperienze laboratoriali più idonee per lo studio della luce e dei suoi movimenti sono state rimodellizzate per poter essere fruite esclusivamente attraverso strutture di carta pop-up. Il risultato è stato un libro-laboratorio in grado di ovviare in modo economico ed efficace alle limitazioni strutturali delle scuole prive di laboratorio per lo studio delle scienze e, al contempo, di compensare le carenze degli studenti nelle competenze manuali, spesso messe in secondo piano da una didattica concentrata sui soli aspetti cognitivi dell'apprendimento. Paper Unfold si propone pertanto come strumento utile per una formazione davvero integrale dello studente.

Parole chiave
Didattica laboratoriale, fisica della luce, libro pop-up, competenze manuali, apprendimento attivo.

UN LABORATORIO POP-UP AUTOPRODOTTO AL SERVIZIO DELLA DIDATTICA

Il progetto *Paper Unfold. Progetto di un libro pop-up come laboratorio autoprodotto per l'apprendimento e l'insegnamento dei movimenti della luce* prende avvio da due osservazioni compiute durante gli anni di tirocinio svolti dell'autore all'interno della scuola primaria: 1) l'aula-laboratorio, nonostante la sua comprovata efficacia pedagogica (Baldacci, 2004), è ancora uno strumento didattico che la scuola pubblica può raramente permettersi per questioni di budget e/o di carenze strutturali; 2) gli studenti della scuola primaria hanno una motricità fine poco sviluppata, non compensata da una didattica concentrata prevalentemente sui soli aspetti cognitivi dell'apprendimento.
Per ovviare quindi, al contempo, alle carenze del setting formativo scolastico e alla scarsa attenzione posta alle competenze manuali, il progetto Paper Unfold si propone come strumento compensativo da realizzarsi attraverso l'autoproduzione di un laboratorio di fisica portatile, sviluppato nella forma di un libro pop-up, per lo studio dei movimenti della luce.

DEFINIZIONE DEL PERCORSO PROGETTUALE E DEL QUADRO TEORICO DI RIFERIMENTO

Il percorso progettuale che ha portato allo sviluppo del book Paper Unfold si è articolato nelle seguenti fasi: definizione di un quadro teorico pedagogico-didattico all'interno del quale inscrivere il progetto; sviluppo del prototipo del book pop-up, all'interno del quale alcune delle esperienze laboratoriali considerate più efficaci per l'insegnamento/apprendimento della fisica della luce sono state riprogettate per essere fruite esclusivamente attraverso strutture di carta pop-up; attuazione di una sperimentazione sul campo per testare lo strumento didattico realizzato, con successiva analisi dei risultati di apprendimento raggiunti per valutarne l'effettiva efficacia ed evidenziarne sviluppi futuri.

LA METODOLOGIA LABORATORIALE: UTILITÀ E VANTAGGI

Il laboratorio didattico non si esaurisce nello spazio fisico dell'aula attrezzata che lo accoglie, bensì include anche un approccio metodologico dalla comprovata efficacia, studiato ad hoc per promuovere un apprendimento di stampo socio-costruttivista finalizzato all'acquisizione di competenze trasversali, basato su esperienza diretta, problem-solving, partecipazione attiva e auto-riflessione (Castoldi, 2020).
Il laboratorio si offre come dispositivo di formazione in quanto luogo privilegiato di osservazione ed esplorazione della realtà e, attraverso una sua manipolazione diretta e consapevole, promuove lo sviluppo di una percezione più elaborata di fenomeni e concetti – anche controintuitivi – comprensibili e analizzabili attraverso la discussione e il ragionamento collettivo (Zecca, 2016).
Intendendo pertanto il laboratorio al contempo come spazio attrezzato in cui svolgere un'attività incentrata su un oggetto culturale e come metodologia didattica che informa tale attività (Baldacci, 2004), si possono individuare tre caratteristiche fondamentali dello stesso: oggettualità, spazialità, attività.
Innanzitutto, poiché il laboratorio è sempre proposto come declinazione di una specifica disciplina scolastica, esso risulta sempre caratterizzato da una specificità oggettuale: il tema della trasposizione didattica è quindi centrale all'interno dell'approccio laboratoriale, attraverso la quale si è in grado di rendere accessibili agli studenti i principi fondativi dell'epistemologia di un determinato sapere, trasponendoli in contesti concreti quotidiani e in situazioni-problema dotate di senso in quanto prossimi al loro mondo. Attraverso il laboratorio, il sapere diventa accessibile e attuale (Zecca, 2016).
Inoltre, costituendo il laboratorio un vero e proprio ambiente di apprendimento (Castoldi, 2020), inteso nella sua accezione più ampia di spazio al contempo fisico e sociale. tutto al suo interno è predisposto per agire e interagire: con il contenuto di sapere oggetto dell'attività prevista, ma anche con il resto della classe e con l'insegnante. Il laboratorio, di conseguenza, si propone come contesto di azione in grado di promuovere la formazione di una comunità auto-educante che apprende in modo collaborativo e collettivo, anche attraverso una riflessione meta-cognitiva di quanto esperito. In quest'ottica, le competenze sociali, seppur non siano il focus principale, assumono un ruolo centrale all'interno dell'approccio laboratoriale.
Infine, l'approccio laboratoriale ribalta la struttura della tradizionale lezione frontale: anziché partire da un'esposizione teorica dell'insegnante per procedere a un'applicazione pratica, il punto di partenza diventa l'osservazione dei fenomeni concreti dai quali ricavare, attraverso la discussione collettiva, conclusioni teoriche. È quindi un approccio didattico basato sul Problem-Based Learning (PBL), un tipo di apprendimento che nasce appunto da un processo di analisi, comprensione e risoluzione di situazioni-problema (Zecca, 2016). Il ruolo degli studenti cambia radicalmente: non devono più assorbire passivamente conoscenze precostruite, bensì devono diventare soggetti attivi del loro apprendimento, in grado di ricercare e costruire autonomamente la propria conoscenza attraverso l'osservazione, l'analisi e la risoluzione collettiva del problema grazie alle nuove conoscenze acquisite.
In conclusione, la didattica laboratoriale è in grado di porsi come insegnamento-ponte, in cui lo studente è il costruttore attivo della propria conoscenza, coinvolto attivamente nel suo percorso di apprendimento in collaborazione con insegnanti e compagni: il laboratorio, pertanto, non si limita a semplice strumento per l'insegnamento delle scienze, ma diventa dispositivo indispensabile per la formazione integrale dell'individuo. In virtù dei molteplici benefici che offre un approccio laboratoriale, questa metodologia didattica è stata selezionata come base pedagogica su cui fondare lo sviluppo del progetto Paper Unfold.

I CONTENUTI DISCIPLINARI VEICOLATI ATTRAVERSO PAPER UNFOLD

Come contenuto di sapere da veicolare attraverso l'attività laboratoriale offerta da Paper Unfold, è stato selezionato il fenomeno della luce in quanto, nonostante esso sia quotidianamente sotto gli occhi degli studenti, non è un concetto scontato da comprendere poichè non del tutto intuitivo (Ravanis & Papamichael, 1995).
Durante il giorno, infatti, a causa della diffusione dei raggi solari, l'ambiente sembra essere pervaso da un "mare" di luce, la quale sembra semplicemente essere presente ovunque, senza avere un'origine e

una direzione di propagazione precise (Allasia et al., 2004). Una delle prime difficoltà nella comprensione della propagazione della luce (Guesne, 1985) è infatti dovuta al mancato riconoscimento che essa si sviluppi, a partire da una sorgente luminosa, in tutte le direzioni. Un'altra difficoltà legata al concetto di propagazione della luce risiede nella traiettoria che essa compie lungo il suo movimento: è infatti spesso assente negli studenti la convinzione che la luce possa muoversi esclusivamente in linea retta. Inoltre, è spesso diffusa l'idea che gli oggetti opachi non riflettano la luce, ulteriore evidenza della difficoltà di comprensione del fenomeno della luce.
Pertanto, il progetto Paper Unfold è stato studiato per permettere agli studenti di superare le principali misconcezioni legate al concetto di propagazione della luce, indagandone le diverse possibilità di movimento; in particolare, ci si è concentrati sui fenomeni di propagazione rettilinea, riflessione e diffusione

PROGETTAZIONE E PROTOTIPAZIONE DELLO STRUMENTO DIDATTICO

Come constatato nel quadro teorico introduttivo, l'approccio laboratoriale offre molteplici vantaggi formativi; tuttavia, le carenze strutturali degli istituti scolastici, spesso privi di un'aula adeguatamente allestita come laboratorio per l'insegnamento delle scienze, ne impediscono una proficua attuazione. Al contempo, lo sviluppo delle competenze manuali passa sistematicamente in secondo piano, ignorato da una didattica concentrata prevalentemente sulla sola dimensione cognitiva dell'apprendimento. Il risultato è una formazione degli studenti non del tutto integrale.
Partendo da queste premesse, l'obiettivo di Paper Unfold è stato progettare uno strumento didattico che potesse al contempo incentivare lo sviluppo delle competenze manuali e l'adozione di una didattica laboratoriale anche in assenza di un laboratorio attrezzato.

LA TECNICA REALIZZATIVA: IL POP-UP

Per la realizzazione del book-laboratorio Paper Unfold è stata scelta la tecnica del pop-up, modalità costruttiva a metà strada tra il mondo dell'editoria e della scultura che permette, attraverso un sistema di tagli e pieghe, di realizzare strutture di carta in grado di passare da una configurazione 2D, quando esse sono ripiegate su sé stesse, a una conformazione in 3D, quando le pagine del pop-up sono aperte, realizzando così un libro a tutti gli effetti (Birmingham, 2010, 2014).
Questa scelta è stata compiuta in virtù della grande plasticità e versatilità delle strutture pop-up, che hanno permesso di realizzare in modo ottimale la modellizzazione di alcune delle esperienze laboratoriali ritenute più efficaci per l'insegnamento/apprendimento della fisica della luce. Inoltre, grazie alla sua semplicità costruttiva che non richiede abilità manuali avanzate, essa si presta come attività entry level perfetta per stimolare e sviluppare la motricità fine e le competenze manuali negli studenti: con uno sforzo minimo è infatti possibile ottenere risultati sorprendenti e soddisfacenti, promuovendo così l'autostima e il senso di efficacia legato alle attività manuali.

LO STRUMENTO DIDATTICO: IL BOOK PAPER UNFOLD

Il book Paper Unfold definisce un percorso di esplorazione, riflessione e scoperta attiva dei movimenti della luce scandito dall'alternarsi di diverse tipologie di aperture pop-up, progettate per rendere il tema trattato accattivante e facilmente fruibile dagli studenti. Esse possono essere distinte in tre tipologie principali: aperture di introduzione dei contenuti disciplinari, di presentazione delle esperienze laboratoriali e di esposizione dei contenuti teorici.

Aperture di introduzione dei contenuti disciplinari.
Le aperture introduttive del book (Figura 1) sono dedicate alla presentazione dello strumento didattico e del suo scopo: al loro interno, la figura pop-up di una scienziata – utilizzata come espediente narrativo durante tutto il book – accompagnerà i bambini alla scoperta di Paper Unfold, presentando lo strumento

didattico, l'argomento disciplinare che verrà affrontato, la tecnica del pop-up e i materiali da utilizzare per poter realizzare autonomamente il proprio laboratorio pop-up di fisica.

Figura 1. Alcune delle aperture introduttive di Paper Unfold, utilizzate per la presentazione dello strumento didattico, dei contenuti disciplinari e dei materiali necessari per la costruzione delle strutture pop-up.

Aperture di presentazione delle esperienze laboratoriali.
Le aperture di presentazione delle esperienze laboratoriali costituiscono la sezione più importante del book Paper Unfold. Basandosi sui principi della didattica laboratoriale applicata all'insegnamento/apprendimento della fisica, le esperienze laboratoriali ritenute più efficaci sono state ripensate e modellizzate in modo da poter essere fruite esclusivamente attraverso strutture pop-up.
Per presentare il fenomeno della propagazione rettilinea della luce, è stata studiata un'apertura pop-up (Figura 2) costituita da una struttura a parallelepipedo con la faccia frontale forata in diversi punti, completata da pannelli forati con diverse configurazioni introducibili nella struttura attraverso dei tagli presenti sulla sua faccia superiore. Puntando un raggio di luce frontalmente alla struttura, è possibile notare come la luce raggiunga l'ultimo pannello posteriore solo in concomitanza di fori allineati tra loro presenti su tutti i pannelli: si suggerisce così in modo empirico e concreto come la luce possa muoversi esclusivamente in linea retta.

Figura 2. Struttura pop-up progettata per la presentazione del concetto di propagazione rettilinea della luce: i pannelli forati sono rimovibili e intercambiabili per la creazione di diverse configurazioni di allineamento dei fori, permettendo così di studiare il comportamento della luce in più situazioni diverse.

Il fenomeno della riflessione è invece proposto attraverso una struttura pop-up (Figura 3) composta da due piani ortogonali tra loro, uno dei quali rivestito di carta stagnola riflettente: puntando un raggio di luce sul piano rivestito, la conformazione della struttura permette di osservare facilmente come esso venga riflesso sul pannello a fianco, permettendo così di isolare e visualizzare in modo efficace il fenomeno della riflessione. Utilizzando la struttura in modo inverso, puntando cioè il fascio di luce verso il pannello non rivestito di carta stagnola, è invece possibile notare come il raggio con venga riflesso sul pannello a fianco, anticipando così il concetto di diffusione della luce che sarà trattato nelle aperture successive.

Per presentare il fenomeno della diffusione della luce, è stata progettata un'apertura (Figura 4) composta da un foglio di alluminio liscio e da un foglio di alluminio stropicciato: avvicinando il viso ai due fogli, lo studente può osservare come il proprio riflesso sia visibile solo in corrispondenza del foglio di alluminio liscio, mentre quello stropicciato non restituisce nessuna immagine nitida. Questa disparità di risultati, in presenza dello stesso materiale, è in grado di suggerire come la discriminante tra il fenomeno della riflessione e della diffusione sia la tipologia di finitura – liscia o ruvida – della superficie su cui si riflette la luce.

Figura 3. Le strutture pop-up progettate per presentare i concetti di riflessione e diffusione della luce.

Aperture di esposizione dei contenuti teorici.
Le esperienze laboratoriali proposte sono sempre seguite da aperture che esplicitano in modo chiaro e sintetico la natura dei fenomeni esperiti, utilizzando testi riassuntivi e schemi esplicativi (Figura 4). Tali contenuti teorici sono presentati anch'essi attraverso strutture pop-up, rappresentanti una LIM; ritorna inoltre in queste aperture la figura della scienziata impiegata come espediente narrativo nelle pagine iniziali di Paper Unfold, garantendo così continuità e coerenza all'esperienza didattica.

Figura 4. Un esempio di apertura di esposizione dei contenuti teorici: la scienziata presenta attraverso una LIM pop-up il principio alla base della riflessione della luce.

LA SPERIMENTAZIONE SUL CAMPO

Per testare l'efficacia dello strumento didattico progettato, è stata realizzata una unità didattica incentrata sulla ricostruzione e sull'utilizzo da parte degli studenti di una copia del book Paper Unfold.

IL CAMPIONE DI RICERCA

La sperimentazione è stata condotta all'interno della scuola primaria San Francesco D'Assisi di Torino, appartenente all'istituto comprensivo Niccolò Tommaseo. Il campione di ricerca è stato costituito da una classe quinta, composta da 26 studenti (di cui 16 maschi e 10 femmine), con la quale solo saltuariamente è stata adottata negli anni una metodologia laboratoriale come approccio alla conduzione delle lezioni. Inoltre, l'attività manuale non è mai stata utilizzata come strumento integrante dell'apprendimento. Per quanto riguarda i contenuti disciplinari oggetto della sperimentazione, essi non erano stati affrontati dal campione di ricerca.

L'UNITÀ DIDATTICA

L'unità didattica si è articolata in una serie di sei incontri svoltisi nei mesi di aprile e maggio 2021; di seguito ne viene riportata la progettazione e attuazione.

1. Presentazione del progetto Paper Unfold e rilevazione delle preconoscenze. Durante il primo incontro è stato introdotto il progetto Paper Unfold – attraverso le aperture pop-up di presentazione dell'unità didattica e dell'argomento disciplinare trattato – e somministrato un questionario per la rilevazione iniziale delle conoscenze degli studenti, relativo ai contenuti esposti nel book.
Dall'analisi dei risultati del questionario, è stato possibile trarre le seguenti conclusioni:

- Il concetto di sorgente di luce posseduto dai bambini comprendeva esclusivamente sorgenti primarie, ignorando la presenza di sorgenti di luce secondarie.
- È emersa una generale confusione sul meccanismo della visione, con la presenza in una consistente parte della classe della misconcezione secondo cui è possibile vedere grazie a dei "raggi visivi" emessi dagli occhi; questo dato ha reso necessario intervenire per correggere tale credenza errata prima di proseguire col programma prestabilito dell'unità didattica. È stata pertanto proposta l'esperienza della "scatola ottica" (Allasia et al., 2004) per dimostrare come la visione sia permessa dai raggi di luce riflessi dagli oggetti.
- Il concetto di propagazione rettilinea della luce è risultato in parte già presente, anche se in modo implicito e a volte confuso; è stato comunque un buon punto di partenza per la ristrutturazione delle conoscenze durante lo svolgimento dell'unità didattica.
- I concetti di diffusione e riflessione, come prevedibile in quanto mai affrontati prima dalla classe, sono risultati poco chiari.

2. Allenamento nella realizzazione del pop-up. Durante il secondo incontro sono stati forniti gli strumenti necessari per lo svolgimento dell'unità didattica: attraverso le aperture pop-up del book sono stati quindi presentati gli strumenti necessari (carta, forbici, colla) e insegnate le tecniche base per la realizzazione degli elementi pop-up.

3. La propagazione rettilinea della luce. Durante il terzo incontro è stato affrontato il primo contenuto disciplinare previsto: la propagazione rettilinea della luce. Grazie alla struttura pop-up proposta dal book e riprodotta dagli studenti, ognuno di essi ha potuto sperimentare attraverso il suo personale laboratorio autoprodotto il movimento della luce attraverso la sovrapposizione di pannelli forati secondo diverse configurazioni, osservando che solo in corrispondenza di fori allineati la luce giungeva al fondo della struttura, giungendo così alla conclusione che la luce possa muoversi solo in linea retta.
4. La riflessione della luce. Durante il quarto incontro è stato affrontato il secondo contenuto disciplinare previsto: la riflessione. Attraverso la costruzione di una struttura pop-up composta da due pannelli verticali ortogonali, di cui uno rivestito di carta stagnola, è stato possibile osservare come proiettando un raggio di luce sul pannello rivestito di carta stagnola esso venisse riflesso sul pannello a fianco, isolando così il fenomeno della riflessione e permettendone un'osservazione più efficace.
5. La diffusione della luce. Durante il quinto incontro è stato affrontato il terzo contenuto disciplinare previsto: la diffusione. L'apertura, che presentava una pagina rivestita di carta stagnola liscia e una

pagina rivestita con carta stagnola stropicciata, ha permesso di osservare il diverso comportamento della luce in dipendenza alla rugosità della superficie incontrata: avvicinando il viso alla carta stagnola liscia, infatti, gli studenti hanno potuto osservare il proprio volto riflesso; al contrario, avvicinando il viso alla carta stagnola stropicciata non è stato possibile distinguere alcun riflesso. Ciò ha suggerito come, nel fenomeno della diffusione, la luce venga riflessa in tutte le direzioni dalle diverse inclinazioni delle pieghe della carta stagnola.
6. Conclusione dell'unità didattica e rilevazione finale delle conoscenze. Al termine dell'unità didattica, è stato somministrato nuovamente il questionario di rilevazione delle conoscenze proposto a inizio percorso, per verificare se ci fossero stati cambiamenti nelle risposte degli studenti che potessero evidenziare una ristrutturazione delle conoscenze sui temi trattati.

I RISULTATI EMERSI DALLA SPERIMENTAZIONE

Dall'analisi effettuata del questionario, è stato possibile trarre le seguenti conclusioni:

- La misconcezione inizialmente presente relativa al funzionamento della visione è stata rimodulata con successo: gli studenti sono passati dal ritenere l'occhio un soggetto attivo che attua la visione attraverso l'emissione di "raggi visivi", a considerarlo strumento passivo di ricezione della luce emessa dagli oggetti, secondo un modello scientifico di visione.
- Il concetto di sorgente di luce è stato ampliato dalle sole sorgenti primarie fino a comprendere anche l'esistenza di sorgenti di luce secondarie, ovvero ogni oggetto che rifletta la luce.
- Il concetto di propagazione rettilinea della luce, inizialmente presente a livello ingenuo, è stato approfondito, esplicitato e acquisito correttamente.
- I concetti di riflessione e diffusione della luce, prima del tutto estranei agli studenti, sono stati compresi e acquisiti.

CONCLUSIONI

Come dimostrato dai dati rilevati dal questionario somministrato a conclusione dell'unità didattica svolta in classe, il progetto Paper Unfold ha contribuito efficacemente a ristrutturare le conoscenze pregresse degli studenti. L'approccio laboratoriale, attraverso l'osservazione e la manipolazione della realtà e la successiva sua analisi, ha permesso alla classe di superare collettivamente – come una vera e propria comunità auto-educante – teorie spontanee e misconcezioni legate alla fisica della luce. In particolare, è da segnalare l'alta partecipazione degli studenti alle discussioni collettive, intraprese per provare a comprendere e spiegare la natura dei fenomeni osservati attraverso le esperienze proposte dal book pop-up. È stato rilevato un entusiasmo e un interesse generale nel voler scoprire autonomamente il corretto funzionamento dei movimenti della luce, che si sono tradotti in dibattiti coinvolti e coinvolgenti per tutta la classe. In virtù di questi risultati, pertanto, Paper Unfold si è dimostrato uno strumento utile per realizzare un'introduzione proficua alla didattica laboratoriale in classi abituate a differenti stili di insegnamento/apprendimento.
Inoltre, osservando l'evoluzione della disposizione dei bambini e delle bambine verso l'attività manuale richiesta per la realizzazione del pop-up se ne è notato un netto miglioramento: la classe, attività dopo attività, è passata da un generale sentimento di sconforto e paura di non riuscire a replicare i modelli pop-up a una discreta sicurezza e autonomia nella costruzione degli stessi. È quindi legittimo trarre la conclusione che la proposta di realizzare in prima persona il proprio book pop-up abbia stimolato e incrementato la motricità fine e le competenze manuali nella classe.
In conclusione, pertanto, si possono considerare raggiunti gli obiettivi della sperimentazione che ci si erano prefissati di promozione della didattica laboratoriale e delle competenze manuali.

POSSIBILI SVILUPPI FUTURI

Visti i risultati positivi del progetto e la vastità del tema trattato, è possibile ipotizzare un ampliamento del progetto Paper Unfold al fine di sfruttare ancora maggiormente le potenzialità didattiche delle

strutture pop-up, attraverso la progettazione di configurazioni in grado di presentare il concetto di ombra, approfondendo così ulteriormente la propagazione della luce, la diffusione e la riflessione. Inoltre, sperimentando anche coi materiali costituenti i pop-up, attraverso l'utilizzo di carte trasparenti di diversi colori e finiture in grado di funzionare da lenti filtranti, si potrebbe presentare altresì il tema dei colori e della composizione della luce.
In entrambi i possibili sviluppi, sarebbe assicurata la promozione di un approccio laboratoriale all'apprendimento e lo sviluppo delle competenze manuali, confermando ancora una volta le grandi potenzialità della tecnica del pop-up.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano il professore Matteo Leone e la professoressa Marta Rinaudo dell'Università degli Studi di Torino per il prezioso supporto ricevuto durante lo sviluppo del progetto di tesi che ha dato vita al book-laboratorio Paper Unfold.

BIBLIOGRAFIA

Allasia, D., Montel, V., Rinaudo, G. (2004). *La fisica per maestri*, Torino: Edizioni Cortina.
Baldacci, M. (2004). Il laboratorio come strategia didattica, suggestioni deweyane. In N. Filograsso, R. Travaglini, *Dewey e l'educazione della mente*. Milano: FrancoAngeli.
Birmingham, D. (2010). *Pop-up design and paper mechanics: how to make folding paper sculpture*, Lewes: The Guild of Master Craftsmen Publications.
Castoldi, M. (2020). *Ambienti di apprendimento. Ripensare il modello organizzativo della scuola*. Roma: Carocci Editore.
Guesne, E. (1985). Light. In R. Driver, *Children's ideas in science*. London: Open University Press.
Ravanis, K., Papamichael, Y. (1995). Procédures didactiques de déstabilisation du système de représentations spontanées des élèves pour la propagation de la lumière, *Didaskalia* 7.
Zecca, L. (2016). *Didattica laboratoriale e formazione. Bambini e insegnanti in ricerca*. Milano: FrancoAngeli.

IL DIAVOLETTO DI GALILEO

Jahier M.[1], Marocchi D.[2], Serio M.[2]
[1]IIS 'M. Buniva' di Pinerolo (TO)
[2]Dipartimento di Fisica Università di Torino
matteojhr@gmail.com

Abstract
Questo contributo, sviluppato durante il percorso di tesi magistrale in Fisica, presenta una proposta educativaper la scuola secondaria superiore; esso si colloca nel filone di ricerca didattica incentrato sull'indagine sperimentale – Inquiry-Based Science Education (IBSE).
Nella didattica della Fisica la creatività dovrebbe ricoprire un ruolo di rilievo: i misteri della natura possono ispirare gli studenti prima che vengano affrontate la parte di spiegazione formale e la parte applicativo/laboratoriale.
L'argomento proposto è l'influenza della relazione di stato sull'equilibrio meccanico dei corpi immersi. La mancanza di enfasi sulla relazione di stato ha conseguenze sulla corretta interpretazione fisica di sistemi semplici – come il termometro di Galileo – e di fenomeni comuni – come le dinamiche buoyant. Il percorso educativo, in chiave costruttivista, si basa su un sistema creato 'ad hoc' per la sperimentazione: il ' *diavoletto di Galileo*'.
In seguito all'esplosione dell'emergenza sanitaria legata al diffondersi del virus Covid-19 – tutta la parte 'a contatto con la classe' è stata svolta a distanza, durante la prima ondata, nella primavera 2020 – il sistema sperimentale è stato proposto agli studenti in una versione semplificata rispetto alla prospettiva originaria. Ciò rende l'esperienza adatta anche ad una realizzazione domestica, al di fuori di un laboratorio di fisica e senza l'utilizzo di strumentazione specifica.
Dopo un'introduzione ludico-fenomenologica dell'argomento oggetto di studio, seguita da una discussionetra gli studenti, sono state svelate le principali tappe storiche che hanno portato alla comprensione delle dinamiche buoyant e, infine, è stata presentata la spiegazione teorica dell'argomento. Al termine del percorsoè stato chiesto ai ragazzi di riprodurre in autonomia il sistema e di verificarne il corretto funzionamento.
I risultati ottenuti e il confronto con il docente della classe sono stati molto incoraggianti, suggerendo un buon potenziale di applicabilità della metodologia adottata ad altre tematiche, in programma nella scuola secondaria superiore.

Parole chiave
Sonda temica, principio di Archimede, dilatazione termica, didattica laboratoriale, approccio ludico.

IL DIAVOLETTO DI GALILEO

Il sistema originale nasce dal collegamento del termometro di Galileo con il diavoletto di Cartesio, in cui ilcambiamento di equilibrio meccanico nasce da una variazione di pressione a temperatura costante. Ildiavoletto di Galileo (Fig. 1) contiene una sola sonda che si trova in equilibrio meccanico con il fluidoquando il bagno è in equilibrio termico con l'ambiente. Una variazione della temperatura ambiente a pressione costante provoca una variazione di equilibrio meccanico. Il diavoletto di Galileo sale in superficie quando rileva una diminuzione della temperatura dell'acqua ed affonda quando ne rileva un aumento. Inquesto modo mantiene il carattere originale di strumento di misura, essendo a tutti gli effetti un termoscopio. L'insegnante può utilizzarlo per allestire un piccolo "gioco di prestigio" durante il primo incontro con la classe, cercando prima di tutto di stimolare la curiosità degli studenti.

Il diavoletto di Galileo è un sistema particolarmente efficace a scopo didattico sotto diversi punti di vista. Innanzitutto è semplice da riprodurre: l'unica vera difficoltà sperimentale risiede nella calibrazione della sonda. Inoltre, come termoscopio, ha un'utilità pratica ed estende le competenze trasversali dello studente, fornendo un modello semplificato per la comprensione del termometro di Galileo.

Figura 1. Schizzo del sistema originale.

Fisica, storia, pedagogia ed apprendimento: il gioco come primo approccio

Nella storia recente dell'umanità, la Fisica è emersa come paradigma interpretativo della realtà, imponendosi insieme alle altre scienze su ogni sfera del sapere fenomenologico. Con alcuni necessari adattamenti, la ricostruzione didattica della conoscenza può svolgere un ruolo essenziale nell'educazione delle nuove generazioni e nello sviluppo della scienza. Il sapere contenuto nei testi infatti è una risorsa concettuale permanente, che cresce e si espande grazie al contributo dei singoli uomini. Allo stesso tempo, la generazione presente e quelle future rappresentano la "risorsa biologica" primaria di cui la disciplina si alimenta. L'insegnante è l'anello di congiunzione tra la risorsa concettuale e la 'risorsa biologica'. Analizzando la storia ed i principali personaggi che hanno contribuito alla comprensione del fenomeno, gli studenti possono collegare le esperienze sperimentali e le spiegazioni teoriche agli eventi che ne hanno preceduto la scoperta.

La psicologia dinamica suggerisce che è impossibile separare la componente cognitiva da quella emotivo- relazionale nel processo di apprendimento. Suggerisce inoltre come il principale ostacolo all'apprendimento sia il 'dolore mentale', derivante dalla frustrazione di affrontare qualcosa di nuovo ed all'apparenza non banale. Quindi l'insegnante, per trasmettere e ricostruire la conoscenza, deve prima catalizzare la 'risorsa biologica', instaurando un proficuo rapporto con gli studenti.

A prima vista la Fisica sembra una disciplina astratta e tremendamente lontana dalla realtà. Questo è dovutoa due fattori: prima di tutto usa la matematica, il miglior strumento descrittivo disponibile ma indigesto alla maggior parte degli studenti; in secondo luogo indaga attraverso il metodo scientifico a partire dalle osservazioni sperimentali.

Sia la matematica che il metodo scientifico sono linguaggi ben strutturati e richiedono la formazione di competenze che generano molto 'dolore mentale'.

Il gioco è la prima forma di apprendimento pre-formale del bambino durante la prima fase di sviluppo delle abilità psicomotorie. Durante i giochi della scuola materna precede la spiegazione delle regole e nella scuola primaria precede qualunque apprendimento formale. La ripetizione di gesti, azioni e rituali per raggiunge obiettivi dalla gratificazione più o meno immediata sembra essere un aspetto fondante dell'esistenza e della crescita umana. Per J. Huizinga il gioco è addirittura il fondamento di ogni cultura e organizzazione sociale, tanto da identificare la specificità umana nell' '*Homo Ludens'* (1967).

In questa chiave l'apprendimento attraverso il gioco diventa un'estensione delle precedenti esperienze che caratterizzano la scoperta del mondo e assume una dimensione esistenziale nello sviluppo umano.

Suggeriamo il ricorso al gioco ed al mistero per catturare l'attenzione e stimolare la curiosità degli studenti, con l'obiettivo di aiutarli a mitigare le difficoltà formali e procedurali tipiche della matematica e del metodo scientifico.

Un approccio olistico alla didattica della fisica

La struttura della sperimentazione proposta si basa su un approccio olistico suddiviso in due momenti, a loro volta suddivisi in due fasi ciascuno. Le prime due fasi caratterizzano il momento della *scoperta del* fenomeno oggetto di studio. Le ultime due fasi sono quelle della spiegazione formale del fenomeno e della sua riproduzione sperimentale, e caratterizzano quindi il momento della *conoscenza*.
La prima fase – l'*esperienza* – mira a simulare la scoperta di un fenomeno naturale attraverso la sua esperienza diretta e la verifica delle conoscenze pregresse.
In un approccio classico di lezione frontale, l'insegnante presenta l'interpretazione fisica del fenomeno prima o immediatamente dopo l'esperienza, spogliando del mistero la natura e *postulando* l'ignoranza degli studenti. Il nostro approccio mira a restituire il mistero alla natura e con esso il fascino della scoperta agli studenti. In questo modo infatti gli studenti si scontrano direttamente con la loro mancanza di conoscenza ela loro ignoranza viene così *dimostrata* dall'insegnante.
La seconda fase – la *riflessione* – mira a consolidare l'aspetto storico e teorico di base come presupposti per l'indagine del fenomeno. Analizzando la storia ed i principali personaggi che hanno contribuito alla comprensione del fenomeno, gli studenti hanno l'opportunità di meditare sui metodi e sulle strategie utilizzate dagli stessi. Così facendo, possono collegare il fenomeno agli eventi che hanno preceduto la sua scoperta, dando una dimensione umana alla conoscenza.
Nella terza fase – il *modello* –, l'insegnante presenta la spiegazione formale adatta a descrivere il fenomeno osservato. Tratta gli aspetti teorici rilevanti, cercando di ricavarli direttamente dalle osservazioni, utilizzando le conoscenze pregresse. La Logica e la Matematica guidano gli studenti attraverso le regolarità e le anomalie del fenomeno, sviluppando un'interpretazione coerente e verificabile.
L'ultima fase – la *sperimentazione* – è volta inannzi tutto a verificare l'autonomia degli studenti: per completare il processo essi devono infatti implementare, in laboratorio, le conoscenze e le competenze acquisite.

L'emergenza Covid-19 e la modifica del sistema

Durante la prima fase dell'emergenza sanitaria legata al diffondersi del virus Covid-19 la difficoltà principaleè stata ripensare a distanza le parti pratiche dell'osservazione e della riproduzione del sistema. Nel sistema originale era prevista la calibrazione fine della sonda che, senza strumentazione di laboratorio ed in ambientedomestico, si è rivelata davvero un ostacolo difficile. Era necessario semplificare la fase di calibrazione senza sacrificare la fisica del sistema.
Due vasi identici contenenti lo stesso fluido a due differenti temperature compongono il diavoletto di Galileopresentato alla classe (Fig. 2).
La densità della sonda è leggermente maggiore della densità del fluido a temperatura più alta e leggermente inferiore a quella del fluido a temperatura più bassa.
In questo modo la sonda affonda quando viene immersa nel primo contenitore mentre galleggia nel secondo contenitore. L'esperienza così conserva la fisica del sistema originale, mostrando il cambiamento di equilibrio meccanico nelle due situazioni.
Per rendere accessibile il materiale didattico abbiamo creato un canale YouTube – Fractal Corn Flower – dove sono stati caricati i video sperimentali e le video-lezioni teoriche (Tab. I).

Tabella 1 . Link dei video didattici caricati sul canale YouTube.

CONTENUTI	LINK
Primo approccio: presentazione del sistema e gioco di prestigio	https://www.youtube.com/watch?v=3tzb8RxOB88
Prima lezione: aspetti meccanici.	https://www.youtube.com/watch?v=89av3lf36zU&t=56s
Seconda lezione: aspetti termodinamici.	https://www.youtube.com/watch?v=NyqQojeL34U&t=2s

Figura 2. Schizzo del sistema finale presentato agli studenti.

La messa in atto della sperimentazione

Innanzitutto l'insegnante presenta il sistema senza rivelare la differenza di temperatura nei due contenitori; in secondo luogo, somministrando un test fenomenologico, verifica se gli studenti conoscono la corretta interpretazione fisica del fenomeno osservato. Inoltre verifica le competenzedi partenza della classe sugli argomenti richiesti (la legge della galleggiabilità dei corpi e la legge della dilatazione termica) in un test dei pre-requisiti.
Il test fenomenologico è composto da tre domande a risposta multipla:
la prima mira a verificare la corretta interpretazione dinamica del fenomeno, la seconda la corretta interpretazione termodinamica e la terza il carattere reversibile della trasformazione.
La seconda domanda, in particolare, è cruciale poiché richiede esplicitamente di collegare la variazione

2. L'incremento della spinta di Archimede è causato:
3/12 **A** dalla differenza tra le masse di fluido contenute nei due recipienti.
9/12 **B** dalla differenza tra la pressione subita dal barattolo nel primo e nel secondo recipiente.
0/12 **C** dalla differenza tra la temperatura del fluido nel primo e nel secondo recipiente.

di equilibrio osservata alla differenza di temperatura nei due recipienti. Nel test da noi effettuato nessuno studente ha risposto correttamente alla domanda (Fig. 3).

Figura 3: estratto dal test fenomenologico (risultati seconda domanda).

Durante un brainstorming esplorativo, dopo il test fenomenologico, sono state raccolte le prime impressioni della classe e corrette eventuali lacune concettuali preesistenti, soprattutto relative a interpretazioni ingenue del fenomeno. Inoltre, è stato svelato il 'trucco' alla base del comportamento del sistema.
Successivamente, è stata presentata un'introduzione storica delle principali tappe che hanno portato all'invenzione del termometro di Galileo. La narrazione parte da Archimede di Siracusa (scoperta della legge sul gelleggiamento dei corpi), prosegue con Erone di Alessandria (primi esperimenti sulla dilatazione termicadei fluidi) e termina con Galileo e gli accademici del Cimento (realizzazione del primo prototipo dello strumento di misura).
Lo scopo è triplice: anzitutto, stimolare nuovamente l'interesse della classe "raccontando una storia"; in secondo luogo, sottolineare l'importanza del contesto storico in cui si sono sviluppate le conoscenze

sul fenomeno; in ultima istanza, approfondire e consolidare i principali prerequisiti: in particolare il concetto di 'peso del volume di fluido spostato' e ‘dilatazione/contrazione termica’, fondamentali per affrontare le fasi successive.
L'ultimo momento del percorso consiste nel presentare un modello formale per descrivere il fenomeno osservato e nel ricreare e verificare sperimentalmente il fenomeno.
Dopo l'osservazione del fenomeno e la presentazione storica, l'insegnante può spiegare in dettaglio le leggi fisiche che sono alla base di quanto osservato dagli studenti. È in questo momento che lo studente si impegna di persona con gli aspetti teorici e sperimentali necessari per formare le competenze obiettivo.
Nella spiegazione teorica ci siamo in particolare concentrati sulla variazione del volume di un corpo sottoposto a shock termico (1.1), introducendo il coefficiente di dilatazione termica α,

$$V = V_0(1+\alpha\ \Delta T) \tag{1.1}$$

$$\rightarrow \quad \Delta T > O \ \longrightarrow \Delta V > 0 \tag{1.2}$$

$$\rightarrow \quad \Delta T < O \ \longrightarrow \Delta V < 0 \tag{1.3}$$

ed ottenendo un'espressione per la variazione della densità di un corpo, soggetto a uno shock termico (1.4):

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+\alpha\Delta T)} = \frac{\varrho_0}{(1+\alpha\Delta T)} \tag{1.4}$$

$$\rightarrow \Delta T > 0 \quad \rightarrow \ \Delta\varrho < 0 \tag{1.5}$$

$$\rightarrow \Delta T < 0 \quad \rightarrow \Delta\varrho > 0 \tag{1.6}$$

Questo spiega in parte il comportamento osservato nel diavoletto di Galileo, la cui densità deve essere compresa tra la densità dell'acqua fredda e quella dell'acqua calda. La dinamica osservata si verifica perché, in seguito allo sbalzo termico considerato, la densità del diavoletto rimane pressoché costante mentre quella del fluido cambia sensibilmente.
Durante il successivo brainstorming, l’insegnante può rispondere ai dubbi sia per la parte teorica che per gli aspetti pratici, entrando nei dettagli della costruzione del sistema e della calibrazione della sonda.
Nel sistema semplificato la taratura è molto più breve da implementare perché non è più necessario raggiungere con precisione la densità del fluido come nel sistema originale con un unico contenitore. Inoltre, si salva l'aspetto relativo al 'gioco di prestigio' non dichiarando inizialmente la differenza di temperatura tra i due contenitori. Lo studente deve solo approssimare, per eccesso e per difetto, quelle del fluido alle due diverse temperature.
Nel dettaglio, per la realizzazione pratica, abbiamo utilizzato due contenitori in plastica rigida, entrambi contenenti acqua, il primo ad una temperatura di circa 35°C ed il secondo ad una temperatura di circa 4°C. Come diavoletto abbiamo usato un barattolo di vetro parzialmente riempito d'acqua con un colorante. Inoltre,abbiamo eseguito la calibrazione con un contagocce e una siringa da 2,5 ml.
L’iter sperimentale prevede:

- Calibrare, con siringa e contagocce, il diavoletto.
- Utilizzare due recipienti con acqua a temperatura diversa: il primo dal frigo (T1), il secondo a temperatura superiore a quella ambiente (T2).

Una volta calibrato il diavoletto a galla, quasi completamente immerso, nel primo contenitore, si verifica lo stato di equilibrio nel secondo contenitore e si porta avanti la calibrazione fino ad ottenere il risultato desiderato.

Nella sperimentazione effettuata gli studenti hanno dimostrato la comprensione dei principi di funzionamento del sistema, costruendo da soli un diavoletto di Galileo. Le principali difficoltà pratiche, legate alla calibrazione, sono state inserire e prelevare dalla sonda volumi sempre più piccoli di fluido ed isolare adeguatamente la sonda dall'ambiente esterno. Gli studenti sono intervenuti aumentando la differenza di temperatura e cambiando tipologia di sonda quando necessario. Al seguente link è presente un montaggio dei filmati prodotti dagli studenti:
https://www.youtube.com/watch?v=n2g5sjeFN2E&t=374s
Per la valutazione della parte sperimentale abbiamo usato criteri essenzialmente qualitativi:

- Corretta costruzione ed implementazione del sistema
- Presenza di una – corretta – descrizione del fenomeno
- Completezza della descrizione e qualità della realizzazione

Alla fine gli studenti hanno dovuto dimostrare la comprensione delle leggi fisiche che governano la dinamicadel sistema, risolvendo il seguente *problema teorico.*

Problema
Una sfera di vetro cava si trova inizialmente sul fondo di un recipiente contenente un fluido non viscoso di densità incognita. Il guscio sferico è riempito per metà del suo volume interno d'acqua e per la restante metà è vuoto. Il sistema si trova inizialmente ad una temperatura di 20°C e viene spostato in un ambiente, dove subisce uno sbalzo termico arrivando in poco tempo alla temperatura di 4°C. La sfera inizia allora a risalire con un'accelerazione costante di modulo 0.1 m/s^2, riemergendo poco dopo in superficie.

Calcolare:

- *la densità della sfera ρs*
- *la densità del fluido alla temperatura finale ρf(Tf)*
- *la temperatura Te alla quale dovremmo portare il sistema per far si che la sfera, totalamente immersa,si trovi in perfetto equilibrio meccanico con il fluido in qualunque punto del recipiente.*

CONCLUSIONI

Abbiamo esaminato:

- la possibilità di un nuovo e più stimolante approccio alla fisica per motivare e catturare l'attenzionedegli studenti;
- la necessità di dedicare più tempo alla parte sperimentale della Fisica ed al laboratorio;
- la connessione fondamentale tra l'esplorazione fenomenologica della realtà e la dimensione umana delle scoperte storiche ad essa correlate, in chiave didattica e pedagogica.

Queste esigenze distinte suggeriscono l'uso di un approccio ludico per l'introduzione dei soggetti di studio inFisica. I giovani sono curiosi, appassionati, desiderosi di scoprire il mondo, e ogni insegnante dovrebbe agiresu queste leve per migliorare la qualità delle sue lezioni.
Il diavoletto di Galileo si è rivelato un ottimo strumento didattico per
la comprensione dell'influenza della relazione di stato sull'equilibrio meccanico dei corpi immersi. Nonostante le difficoltà in relazione all'attuale situazione epidemica, 14 studenti su 21 hanno dimostrato di essere in grado di produrre un'implementazione del sistema in completa autonomia e 18 studenti su 21 sono riusciti a completare la parte fondamentale del problema teorico.
Dal punto di vista sperimentale, come detto in precedenza, le principali difficoltà incontrate si sono rivelate essere legate alla calibrazione della sonda: inserire e rimuovere quantità sempre più piccole di fluido all'interno ed isolare adeguatamente la sonda dall'ambiente esterno si sono rivelate sfide insormontabili per alcuni studenti.
Dal punto di vista teorico invece la riflessione sull'influenza della variazione termica sulla densità dei corpi èstata assimilata solo da alcuni studenti. L'ultimo punto del problema è stato infatti risolto

solamente da qualcuno, anche tutti hanno dimostrato di aver compreso la parte legata al calcolo della densità di un oggetto non omogeneo.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio l'Università degli Studi di Torino; le prof.sse Marocchi e Serio, di costante e paziente guida in questi ultimi due anni di lavoro insieme; il prof. Proietto, che per primo ha risvegliato in me la curiosità verso le scienze della natura da ragazzo, e si è poi prestato per collaborare insieme ad una delle sue classi al progetto originale; la mia famiglia, senza la quale niente di quello che è stato realizzato sarebbe stato possibile.

BIBLIOGRAFIA

Huizinga, J. (1967), *Homo ludens*, Milano: il Saggiatore.

FISICA MODERNA E SCUOLA PRIMARIA: QUALI PROSPETTIVE?

Sara Mattiello
Università degli Studi di Torino (Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione) - IC Parri-Vian
sara.mattiello@unito.it

Abstract

La Relatività Einsteiniana e la Meccanica Quantistica sono le basi dei migliori modelli che ci permettono di comprendere l'Universo che ci circonda. Entrambe le Teorie hanno circa un secolo di vita e tuttavia sono ancora lontane dalla cultura di massa. Eppure gran par te della tecnologia che quotidianamente utilizziamo si basa su queste teorie. Da qualche anno alcuni studi si stanno concentrando sulla creazione di progetti mirati a introdurre la Fisica Moderna sin dagli anni della scuola primaria. Vengono qui ripotarti i principali lavori sul campo, cercando di delineare i filoni comuni e le prospettive di lavoro future.

Parole-chiave
Relatività Einsteiniana – Meccanica Quantistica – scuola primaria – Einstein First – Particle Physics at Primary Schools (PPPS) - prospettive didattiche

INTRODUZIONE

Ad oggi, la Teoria della Relatività rappresenta la migliore approssimazione della comprensione del nostro Universo. Considerata la "Rivoluzione Copernicana" del Novecento, essa ha posto in essere un nuovo modo di concepire la fisica e la geometria, apportando un vero e proprio scarto paradigmatico tra la fisica classica newtoniana e quella moderna. Come ha osservato Cassirer (2015), la Teoria della Relatività "ha annunciato una rivoluzione nella nostra immagine del mondo, ha profondamente modificato il concetto stesso di natura e della conoscenza della natura", segnando un punto di svolta non solo per il mondo della fisica, ma dell'evoluzione dell'intera cultura umana. Nonostante la Teoria della Relatività rappresenti un nuovo e rivoluzionario modo di concepire spazio, tempo e gravità, le moderne scoperte continuano a rimanere appannaggio di una piccola élite di specialisti, mentre ai più è negata la possibilità di entrare a contatto di uno degli oggetti culturali più importanti della storia. Le motivazioni sovente addotte per argomentare tali tesi risiedono nella convinzione che tali conoscenze siano accessibili solamente dopo anni di studi specialistici in ambito fisico e che, dunque, negli anni della scuola dell'obbligo sia sufficiente per i discenti possedere i rudimenti di fisica classica, più vicina alla vita degli studenti, meno artificiosa, più semplice e facilmente "spendibile" nella pratica quotidiana. Spesso la teoria viene infatti tacciata di essere contro-intuitiva, senza considerare che questo concetto deriva a sua volta da una precisa rappresentazione costruita negli anni di studio, frutto di un modello, scientifico o meno, dominante. Come osservano alcuni studiosi (Fabri, 2000; Blair, 2018), gli studenti più giovani posseggono molti meno pregiudizi circa l'apprendimento della fisica moderna di quanto non accada ai loro insegnanti adulti, i quali, al contrario, sono portatori di una *forma mentis* consolidata su un altro modello interpretativo. La prassi didattica, dominata dal libro, contribuisce inoltre a restituire agli studenti un'immagine di monolite incontrovertibile. In altre parole la formazione manualistica impedisce agli studenti di percepire la scienza come una realtà storicamente e socialmente costruita tramite l'adozione di regole e metodi (Antiseri, 1999). Così, a quasi cento anni dalla sua nascita, il nuovo paradigma Einsteiniano non è ancora considerato parte di quel patrimonio culturale che ogni cittadino consapevole dovrebbe possedere per agire con spirito critico nella propria società.

Da diversi anni diversi ricercatori hanno indirizzato i loro studi nel campo della Fisica Moderna alla scuola primaria. L'idea alla base di tutte queste ricerche è la convinzione che i fondamenti della Fisica Moderna possano essere introdotti, con le metodologie appropriate, sin dalla scuola primaria. L'obiettivo non è quello di presentare dei contenuti (di per sé complessi) in forma "ridotta" o "sintetizzata", bensì di sviscerare concetti fondamenti tale teoria attraverso una didattica per scoperta. L'idea sottesa a tutti i progetti è la convinzione che la padronanza dei fondamenti della fisica moderna abbia degli effetti positivi in termini di competenze scientifiche e motivazione all'apprendimento. Gli studi dimostrano infatti l'efficacia dell'integrazione della fisica classica con alcuni principi di quella moderna sin dai primi anni di scuola. Nei curricula moderni è dunque ragionevole procedere, non tanto seguendo una prospettiva lineare del sapere, ma secondo il così detto apprendimento a spirale.

GLI STUDI DI BLAIR ET AL. DELL'UNIVERSITY OF WESTERN AUSTRALIA

Dal 2014 il Centro Studi Gravity Center (AU), sotto la direzione di David Blair, ha avviato dei progetti sperimentali con l'obiettivo di dimostrare la possibilità di insegnare sin dai primi anni di scuola i concetti fondamentali della fisica moderna, quali la doppia natura della luce e la sua velocità, la deformazione dello spazio-tempo e la gravità ad essa associata, la geometria non-euclidea. Il progetto ha coinvolto inizialmente le classi Year 8 -9 – 10, corrispondenti agli anni della scuola secondaria di primo grado, per poi rivolgersi anche agli ultimi anni della scuola primaria, attraverso un approccio olistico e multidimensionale che mirasse a scardinare molte delle misconcezioni che gli studenti sviluppano nel corso degli anni (Blair, 2018). Le ricerche, tutt'ora in atto, hanno un duplice scopo: da una parte, la necessità di dimostrare l'effettiva possibilità dell'insegnamento dei fondamenti di fisica moderna, dall'altra, di valutare l'eventuale miglioramento nell'attitudine e nella motivazione degli studenti nei confronti delle discipline scientifiche.

La scelta delle metodologie didattiche adeguate allo sviluppo del bambino si rivela cruciale dal momento che da questa dipende la possibilità di comprendere il contenuto scientifico. Il percorso fa ampio ricordo all'uso di modelli e analogie, attività laboratoriali, drammatizzazioni e giochi di ruolo. Per quanto riguarda la Relatività Generale, è stata completamente evitata la presentazione di formule matematiche, le quali esulano da qualunque programma curriculare delle scuole superiori, focalizzando, invece, l'attenzione sulla comprensione qualitativa della curvatura spazio-temporale, attraverso una struttura di lycra sulla quale vengono appoggiati dei corpi e riproponendo in maniera quasi mnemonica il famoso aforisma di John Wheeler: "Matter tells space-time how to curve; Space-time tells matter how to move" (Wheeler, 1999). A seconda delle età, i ricercatori hanno gradualmente introdotto i seguenti concetti: la relazione tra materiale e lo spazio; la mappatura della forma dello spazio utilizzando le traiettorie dei fotoni; l'utilizzo di lenti gravitazionali; la verifica delle leggi di Newton e di Keplero; la precessione geodetica; le onde gravitazionali. È stata fatta misurare la membrana elastica, che rappresenta lo spazio piano in assenza di corpi, e gradualmente sono state inserite delle masse di un certo peso che curvassero il telo. Agli studenti è stato quindi richiesto di compiere una seconda misurazione e di rappresentare la situazione su di un grafico. A questo punto gli studenti hanno avuto la possibilità di esplorare i vari significati della deformazione dello spazio- tempo, osservando il comportamento delle linee rette, iniziando ad analizzare le analogie e differenze rispetto al telo in assenza di corpi, osservando le deviazioni delle biglie, i quali rappresentano i raggi di luce, e il moto orbitale che compiono attorno alla massa in relazione alla distanza dalla quale vengono lanciate.
Lo studio della Relatività Generale porta ad interrogarsi sulla validità della geometria Euclidea, che si basa, in particolare, sul quinto postulato di Euclide sulle rette parallele. Come ricorda Blair (2018), il concetto di linea retta risulta essere molto più ostico di quanto lo ritenga il senso comune. La riflessione sulle linee rette viene, quindi, concettualmente introdotta come un'evidenza ottica. Essa può inoltre essere intesa come il percorso più breve tra due punti su di una superficie bidimensionale; questa stessa definizione, per essere applicata ad una superficie curva immersa in uno spazio tridimensionale, è definita dal concetto di geodetica. Accanto a questo, sono stati rappresentati su delle scodelle metalliche rovesciate dei triangoli di varia misura con dei piccoli magneti. Agli studenti è stato richiesto di misurare

la somma degli angoli interni del triangolo e di verificare che fosse di 180°. Una volta scoperto il valore di tale addizione, è stato poi misurato il perimetro dei vari triangoli, ponendo in relazione proporzionale la somma degli angoli interni e del perimetro.

I risultati degli interventi hanno mostrato l'avvenuta comprensione dei concetti di fisica Einsteiniana, in particolare si evidenzia un netto miglioramento delle competenze delle alunne femmine. Inoltre si sono riscontrati importanti modifiche nella percezione degli studenti rispetto al loro interesse e alla motivazione, mostrando anche una riduzione degli stereotipi di genere in materia scientifica.

Gli ultimi lavori del gruppo australiano si sono dirottati verso la creazione di un curriculum verticale dell'ambito scientifico, comprendente la fisica classica e quella moderna in maniera integrata, dalla scuola dell'infanzia (Kindergarden) sino alla scuola secondaria di primo grado (Year 10). Tale curriculum comprende l'introduzione agli elementi di fisica moderna (fotoni, atomi, fononi, molecole, luce e suono, masse, calore), corpi caldi, forze, l'elettricità, la gravità e la curvatura dello spazio-tempo, i buchi neri, l'energia, l'Universo (Kaur, 2021).

LE RICERCHE DI MALVEZZI - QUADRI (UNVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA), LAZZERONI – (UNIVERSITY OF BIRMINGHAM)

Il progetto di ricerca qui presentato, Particle Physics at Primary Schools (PPPS), trae spunto dal progetto realizzato a partire dal 2015 da C. Lazzeroni and M. Pavlidou (University of Birmingham) nelle scuole primarie del Regno Unito e si pone l'obiettivo di introdurre la fisica delle particelle alla scuola primaria. Dal 2017 il progetto è stato replicato in Italia, all'Istituto Comprensivo "Enrico Fermi" di Carvico (BG) con la collaborazione di S. Malvezzi e A. Quadri (Università degli Studi Milano-Bicocca). I percorsi hanno voluto perseguire due obiettivi prioritari: la formazione degli insegnanti in materia di fisica moderna, superando progressivamente l'idea di interventi parcellizzati su aspetti specifici al fine di integrare la fisica moderna nelle attività didattiche quotidiane. Per tali motivi, la ricerca ha posto molto l'accento sulla collaborazione congiunta tra i ricercatori e gli insegnanti, implementando così il concetto di ricerca-azione.

Un ulteriore elemento di riuscita del progetto è stata la strutturazione del setting di apprendimento con la preparazione di materiali strutturati, tra cui le "Trump cards", "la famiglia delle particelle", le quali rappresentavano il Modello Standard delle particelle. Ciascuna carta esprimeva la carica, la massa e l'interazione preferita. L'attività è terminata con la creazione da parte degli alunni delle particelle attraverso l'utilizzo dei materiali più appropriati alle loro caratteristiche.

Nel 2019 il Progetto si è strutturato, con la collaborazione dell'INFN – Milano - Bicocca in un corso di formazione a cui hanno preso parte circa 90 insegnanti del bergamasco con l'obiettivo di integrare la programmazione della classe con i contenuti di Fisica Moderna. I due giorni di seminari su Cosmologia, Modello Standard delle Particelle, Fisica degli Acceleratori sono stati tenuti dai docenti S. Malvezzi, C. Lazzeroni e D. Binosi (ECT, Trento).

I risultati del percorso hanno mostrato significativi miglioramenti, sia in termini di motivazione tra gli studenti, sia per ciò che concerne la consapevolezza dell'importanza del raccordo ricerca-insegnamento.

LE RICERCHE DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Le ricerche condotte dalle studentesse Alice Milazzo e Sara Mattiello, sotto la supervisione dei docenti M. Leone e M.L. Ruggiero, (Milazzo, Ruggiero, Leone, 2021; Ruggiero, Mattiello, Leone, 2021;) dell'Università degli Studi di Torino avevano l'obiettivo di verificare l'efficacia delle tesi di Blair et al. Il percorso ha visto coinvolti un campione di circa cento studenti (5 classi) provenienti da contesti socio-culturali diversificati per un totale di 12 ore per ciascuna classe.

La progettazione si è focalizzata su tre nuclei concettuali, introdotti da domande sfidanti che stimolassero il conflitto cognitivo:

- la relatività galileiana, affrontando i concetti di quiete e moto, il moto rettilineo uniforme e le trasformazioni galileiane.
- La velocità e la luce, si cui si è indagato il concetto di anno luce e l'impossibilità di applicare la relatività galileiana.
- La gravita, intesa come effetto della deformazione dello spazio-tempo dovuto alla presenza di masse.

L'utilizzo di un approccio laboratoriale è stato fondamentale per la riuscita delle attività e la comprensione dei nuclei. In particolare ci si è serviti di carrellini trasportatori per indagare il concetto di moto rettilineo uniforme e si sono adottati gli esperimenti mentali, usando una prassi famigliare a quella di Einstein, per le trasformazioni galileiane. Per affrontare il concetto di gravità si è ricorsi al telo in lycra, in grado di simulare in modo abbastanza fedele la curvatura e rendere gli studenti protagonisti della sperimentazione. Queste metodologie hanno permesso la costruzione sociale della conoscenza attraverso la riflessione e l'analisi collettiva degli esperimenti in classe.

Figura 1: simulatore in lycra della curvatura dello spazio-tempo

CONCLUSIONI

A cento anni dalla scoperta della Fisica Moderna, le prime ricerche nell'ambito della didattica per scuola primaria stanno iniziando a prendere forma e stanno iniziando a delinearsi dei percorsi capaci di affrontare in classe le fondamenta di tale disciplina, non semplificandone il contenuto, bensì ponendo delle basi concettuali solide per la comprensione del mondo fisico, che avverrà in maniera sempre più strutturata negli anni successivi la scuola primaria. Nei vari percorsi delineati emerge come impellente la necessità di delineare dei curricula verticali capaci di integrare la Fisica Classica e quella Moderna, al fine di non far risultare quest'ultima un argomento a sé stante, parcellizzato ed esclusivo di una piccola nicchia di esperti, ma come elemento scientifico essenziale per la comprensione del mondo. Per riuscire in questo arduo intento, la valorizzazione della professionalità dell'insegnante, unita ad una più stretta e autentica collaborazione con i ricercatori, sembrano essere l'unica strada percorribile. Attualmente la ricerca scientifica procede a ritmo incalzante e la scuola rischia (se non è già accaduto) di rimanere esclusa da tale progresso. Per tale motivo, se da una parte risulta impossibile poter sovrapporre il ruolo di ricercatore e quello di insegnante, dall'altra una proficua collaborazione tra le due figure potrebbe rivelarsi la chiave di volta per uscire da questo *empasse*. Questo permetterebbe di valorizzare le competenze specifiche: il ricercatore è in grado di garantire correttezza nel passaggio delle informazioni, mentre l'insegnante possiede delle competenze pedagogiche pragmatiche che gli permettono di agire sul contesto e modulare via via l'azione didattica. Il sostegno alla professionalità del docente e più in generale al sistema scuola può rivelarsi lo strumento grazie al quale diffondere le nuove conoscenze scientifiche e far sì che queste possano effettivamente appartenere alla *cultura di massa*, poiché ogni bambino ha il diritto di accedere alla nostra migliore comprensione della realtà fisica e della conoscenza.

BIBLIOGRAFIA

Antiseri, D. (1999). *Didattica delle scienze*. Epistemologia. Roma: Armando editore.
Kaur J. (2021), *Einsteinian Physics Education Research Collaboration*, Conferenza Di.Fi.Ma 2020-21
Malvezzi S and Quadri A., (2012), *Particle Physics at Primary Schools: A Report on the Italian Project*, Physical science forum (ECU 20121)
Milazzo A, (2021), *La teoria della relatività e la curiosità dei bambini: una possibile azione didattica per comprendere la fisica moderna*, Università degli Studi di Torino
Pitts M., Venville G., Blair D., Zadnik M., (2013*), An Exploratory Study to Investigate the Impact of an Enrichment Program on Aspects of Einsteinian Physics on Year 6 Students*, Springer
Ruggiero, Mattiello, Leone (2021), *Physics for the masses: teaching Einsteinian gravity in primary school*, Physics Education
Tejinder Kaur, Blair D., (2017). *Teaching Einsteinian Physics at Schools: Part 1, Models and Analogies for Relativity*, Springer
Tejinder Kaur, Blair D., (2018). *Student Acceptance of Einsteinian Concepts: Trials with Middle School Students*. Springer, 1-28.
Wheeler, J. (1999). Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics ", Physics Today, . *Physics Today*, Vol. 52(5), p. 63-64.

METEORITI E MISURE DI DENSITÀ

Vera Montalbano
Dipartimento di Scienze Fisiche, della Terra e dell'Ambiente, Università di Siena
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, sezione di Pisa
Associazione per l'Insegnamento della Fisica, sezione di Siena
montalbano@unisi.it

Abstract
Nel laboratorio di fisica le misure di densità assumono un ruolo importante nell'introdurre il concetto di incertezza di misura sia nel caso di misure dirette di volumi che indirette. Meno usuale è invece utilizzarle per esplorare le conseguenze della sensibilità nel processo di misure dirette di volumi. Un laboratorio sui meteoriti e la loro caratterizzazione è stata l'occasione per evidenziare l'importanza della valutazione della sensibilità di processi di misura apparentemente analoghi. Nel caso di piccoli meteoriti la valutazione qualitativa della densità (*hands-on*) è una delle caratteristiche che, insieme al ferromagnetismo, sembrano indicare che un campione possa essere il residuo di una meteora caduta sulla Terra. Misurare quantitativamente la densità può essere difficile a causa del piccolo volume dei campioni che possono essere disponibili in un laboratorio didattico o della loro forma irregolare che impedisce di utilizzare i cilindri graduati più sensibili. Si possono allora proporre misure di tipo diverso dove il volume è valutato per immersione in altri materiali, non necessariamente liquidi e anche reperibili nella vita quotidiana, oppure utilizzare liquidi in strumenti alternativi dove la valutazione della sensibilità non è immediata. Questo percorso di apprendimento può essere proposto agli studenti in vari momenti della loro formazione, focalizzandolo su aspetti diversi (incertezza, sensibilità, apprendimento *inquiry-based*, *problem solving* in un contesto laboratoriale) e nel caso venga proposto nella didattica a distanza favorisce un atteggiamento attivo degli studenti.

Parole-chiave
laboratorio, interdisciplinare, sensibilità, incertezza di misura, *problem solving*

INTRODUZIONE

Collegare insieme discipline diverse rende spesso più interessante un percorso di apprendimento.
Inoltre, alcuni aspetti della trasmissione di conoscenza possono essere chiariti e/o approfonditi meglio se collegati a fenomeni apparentemente scollegati o non significativi.
I percorsi interdisciplinari sono molto efficaci nel suscitare l'interesse e coinvolgere gli studenti in attività altrimenti percepite come poco significative (Alderman, 2013, Pugh et al., 2010).
Introdurre i meteoriti con osservazioni qualitative e quantitative in laboratorio è un arricchimento sia per la geologia che per la fisica, ma anche per favorire l'apprendimento di concetti astronomici e astrofisici.
Nella versione più estesa i meteoriti possono essere introdotti nell'ambito delle scienze spiegandone origine, come si riconoscono, tipologie e principali caratteristiche per poi passare al laboratorio di fisica in cui si osservano le proprietà magnetiche e se ne misura la densità, con la possibilità di esplorare aspetti della misura poco trattati in laboratorio.

METEORITI

Quando una roccia extraterrestre (meteoroide, con dimensioni maggiori di un granello di polvere e minori di un asteroide) entra nell'atmosfera terrestre si surriscalda per attrito, dando luogo a fenomeni di fusione e/o sublimazione vaporizzandosi, producendo scie luminose e forti boati, diventa una meteora (detta anche stella cadente, fig. 1). Se un frammento solido della roccia iniziale arriva sulla superfice terrestre, sopravvivendo ai fenomeni di ablazione durante il passaggio in atmosfera, viene detto meteorite.

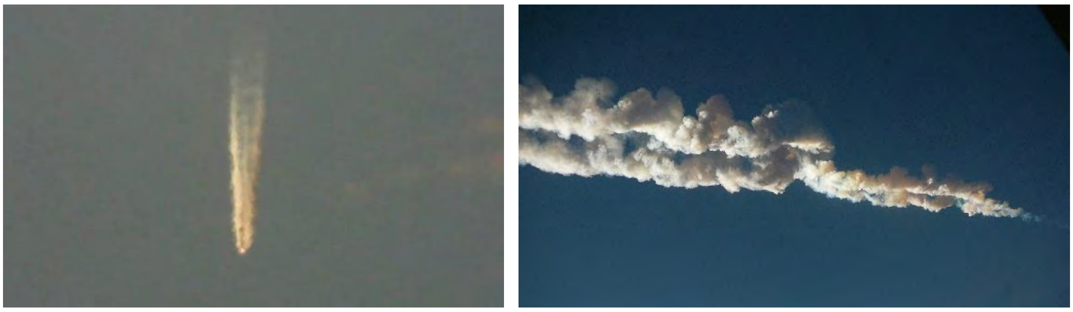


Figura 1. A sinistra una meteora apparsa nei cieli in provincia di Lecco il 28 giugno 2020. A destra la meteora di Čeljabinsk, evento che si è verificato il 15 febbraio 2013, nella regione a sud degli Urali, in Russia quando un meteoroide di circa 18 metri di diametro e una massa stimata di 11.000 tonnellate (NASA 2013) è entrato in atmosfera e si è frantumato sopra la città di Čeljabinsk. Una parte dei frammenti ha colpito il lago Čebarkul', dal quale il 16 ottobre del 2013 è stato ripescato un meteorite di circa 570 kg di peso (BBC 2013).

Perché studiarle
Le meteoriti consentono di comprendere i meccanismi attraverso cui si è passati in 4,6 miliardi di anni dalla condensazione della nebulosa solare all'attuale organizzazione in pianeti, asteroidi e comete in orbita intorno al Sole dando informazioni su

- la composizione della materia primordiale;
- le fasi successive di condensazione della nebulosa solare primitiva;
- i processi di differenziazione magmatica in nucleo-mantello-crosta;
- la composizione di alcuni componenti del sistema solare quali la Luna, Marte e le comete.

Dove
Ogni giorno circa 100 tonnellate di meteoroidi colpiscono la nostra atmosfera. Ma sono solo circa 500 all'anno, i meteoriti che riescono a raggiungere il suolo. Di questi, soltanto 5 o 6 vengono effettivamente recuperati perché, quasi sempre, si tratta di frammenti piccolissimi che si perdono, per esempio in mare o in zone desertiche.
Le meteoriti cadono con la stessa probabilità su tutta la superficie terrestre, con una pioggia continua stimata tra 10.000 e 100.000 tonnellate all'anno.
Gli ambienti desertici sono i luoghi più idonei per la loro ricerca, grazie alla scarsa umidità che consente una migliore conservazione. Tra questi, l'Antartide è un luogo privilegiato grazie a:

- la facilità di ritrovamento sul ghiaccio,
- la presenza di meccanismi di concentrazione (trappole di meteoriti, vedi figura 2).

Per attrezzare il laboratorio con meteoriti si possono comprare *online* piccole meteoriti certificate con prezzi che vanno da alcune decine fino a qualche centinaio di euro.

Caratteristiche
I tipi di meteoriti si distinguono per la composizione che ne determina sia la storia nello spazio che le caratteristiche che ne permettono il riconoscimento a terra:

- Primitive: non hanno subito processi di differenziazione, sono le più antiche (circa 4,56 miliardi di anni) e le più comuni (circa 84% del totale) costituite da condriti,
- Differenziate, hanno subito processi di differenziazione, sono più giovani e più rare, possono essere acondriti, ferrose (sideriti, circa 7% del totale) o ferro-rocciose (sideroliti).

In laboratorio si studieranno campioni di meteoriti ferrose.
Il riconoscimento di un meteorite da un sasso comune si fa attraverso un'analisi morfologica della superfice esterna dove è presente una crosta di fusione creatasi durante il processo di ablazione nell'attraversamento dell'atmosfera, che spesso porta ad importanti variazioni nell'aspetto e nella forma della roccia (vedi fig.3). Altre caratteristiche distintive delle sideriti sono il ferromagnetismo e la densità.

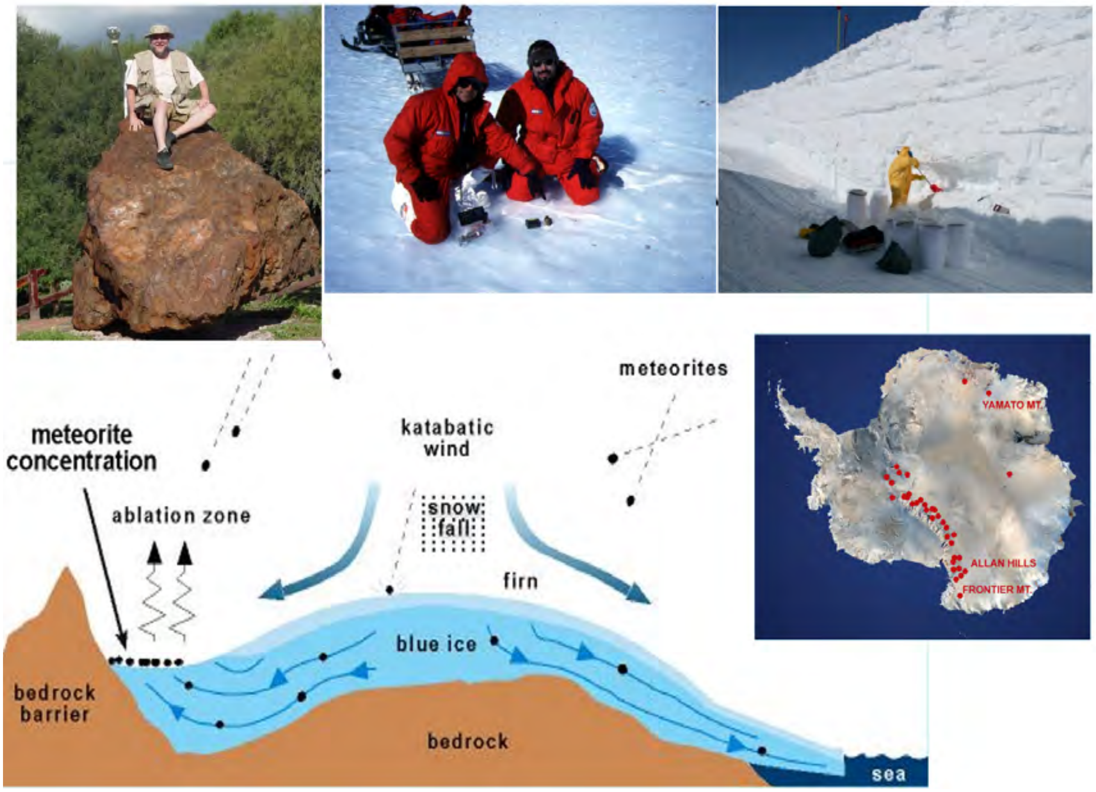


Figura 2. In alto a sinistra un grosso frammento del meteorite caduto circa 4000 anni fa nell'Olocene in Argentina nella zona nota come Campo del Cielo e nota dalla fine del 1500. Le altre foto riguardano ricercatori che raccolgono meteoriti in Antartide. Nella mappa sono indicate le principali zone di accumulo di meteoriti dovute ai movimenti dei ghiacciai in Antartide, come schematizzato nel disegno (Cassidy et al., 1992).

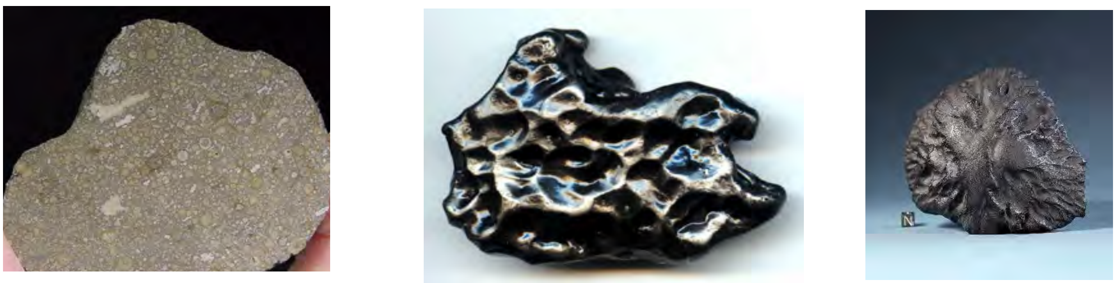


Figura 3. A sinistra meteorite primitiva tagliata per apprezzare la particolare aggregazione del minerale, a destra la crosta di fusione di due meteoriti ferrose.

IN LABORATORIO

Nel laboratorio si sono esaminate qualitativamente alcune meteoriti ferrose (vedi fig.4) provenienti da diversi siti. Si sono eseguite osservazioni qualitative e misure quantitative sia sulle meteoriti che su sassi comuni, su rocce raccolte sull'Etna e su materiale di scarto della fusione del ferro che sembra avere caratteristiche qualitative simili alla siderite.

Figura 4. Le meteoriti ferrose esaminate in laboratorio. Da sinistra: meteorite in prestito dal Museo di Scienze Geologiche dell'Università di Siena (raccolta in Africa), meteorite caduta in Russia nel secolo scorso, due frammenti raccolti a Campo del Cielo in Argentina.

Esplorazioni qualitative

La densità dei meteoriti ferrosi è la prima caratteristica che li distingue qualitativamente dalle rocce terrestri. Solo i materiali di scarto della fusione del ferro sembrano comparabili in una attività *hands-on*. Ma l'uso di magneti ceramici al neodimio consente di rilevare anche se solo qualitativamente un ferromagnetismo più spiccato nei meteoriti. Gli studenti possono sperimentare direttamente la facilità con cui riescono a staccare il materiale di scarto dal magnete rispetto al caso del meteorite. La conferma avviene usando un ferrofluido (vedi figura 5) dove il materiale di scarto non riesce a evidenziare le linee di forza del campo magnetico contrariamente al meteorite.

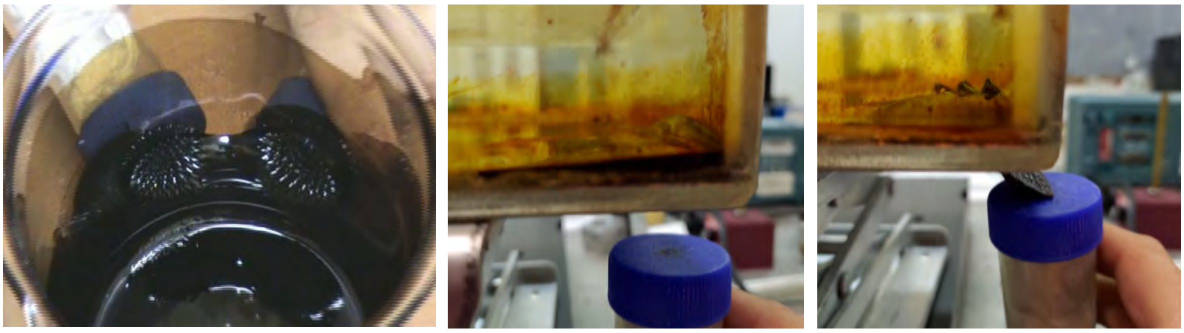


Figura 5. A sinistra la tipica forma che assume un ferrofluido che evidenzia le linee di forza del campo magnetico (Montalbano, 2014). Al centro la provetta contenente il magnete al neodimio che genera un lieve rigonfiamento nel ferrofluido contenuto nella scatola trasparente, a destra il meteorite ferroso che manifesta uno spiccato comportamento ferromagnetico a cui corrispondono nel ferrofluido la comparsa delle forme caratteristiche delle linee di forza.

Misure di densità: un problema aperto

Le misure di densità delle rocce terrestri e dei meteoriti presentano subito delle difficoltà che possono essere poste in forma di *problem solving* agli studenti. Il problema per le rocce terrestri è la loro dimensione e forma che non consente di utilizzare dei cilindri graduati per la misura del volume. In figura 6 è mostrata la misura per un residuo della fusione del ferro raccolto in una spiaggi toscana nota per la lavorazione del ferro fin dall'antichità dove si è dovuto un becher con una sensibilità decisamente grossolana (dell'ordine di decine di ml).

Figura 6. Misura del volume di un residuo siderurgico da fusione, a sinistra. A destra, un piccolo meteorite che non può essere misurato utilizzando il cilindro graduato di sensibilità adeguata alla misura del suo volume.

D'altra parte, i meteoriti in esame hanno invece un volume molto piccolo che richiede l'uso di strumenti molto più sensibili, ma anche in questo caso, come è mostrato in fig. 6, a causa della forma irregolare non è possibile fare le misure di volume per immersione. Alcune prove e qualche valutazione dell'incertezza di misura faranno emergere che il problema per le rocce terrestri non è critico (la precisione della misura della massa e il valore del volume misurato portano ad un'incertezza della misura di densità accettabile in questo caso). Resta invece aperto il problema della misura nel caso dei meteoriti.

Vaso di troppopieno.

Una soluzione possibile è quella di utilizzare un vaso di troppopieno dove la misura del piccolo volume viene effettuata valutando la massa dell'acqua che esce dal vaso quando si immerge il meteorite (figura 7).

Figura 7. Il vaso di troppopieno durante la misura dei campioni più piccoli.

Dopo aver colmato il vaso con acqua, si immerge il meteorite raccogliendo l'acqua in eccesso. Determinandone la massa con una bilancia, si può risalire al suo volume utilizzando la densità misurata in precedenza dagli studenti. Solo per due dei meteoriti disponibili questa misura è stata possibile mettendo in atto alcune accortezze sperimentali:

- usare una bilancia di precisione (1/100 g)
- posizionare il vaso su una superficie piana (in bolla).

Per i restanti meteoriti questo strumento era troppo poco sensibile.

Immersione in solidi.
Notando che uno dei problemi della misura per immersione in acqua dei meteoriti più piccoli è la formazione di bolle che rimangono adese alla superfice sia della roccia che del contenitore, si può provare a immergerli in una polvere sottile. È stata utilizzata una sabbia finissima (dimensioni medie di circa 50 μm). Si riempie il contenitore oltre fino all'orlo togliendo la sabbia in eccesso. Si immerge il meteorite completamente, si spiana la sabbia come mostrato in figura 8 e si determina la massa della sabbia in eccesso da cui si risale al volume.
Per determinare il volume è necessario misurare la densità della sabbia per cui si deve definire e un "protocollo" di compattamento che permetta di avere sempre la stessa percentuale di aria, per esempio scuotere delicatamente il contenitore per un numero fissato di volte.
Per i meteoriti più piccoli si possono utilizzare le provette e altri materiali fini quali pasta piccolissima, semi di sesamo, di quinoa, di papavero. Anche in questi casi, è preliminare la misura della densità media del materiale con il "protocollo" di compattamento che permetta di avere sempre la stessa composizione media tra aria e materiale. La validità del «protocollo» si può verificare confrontando molte misure.
Ogni materiale con granulometria media diversa permette di misurare il volume con una sensibilità e una incertezza diverse.
Gruppi diversi di studenti possono misurare gli stessi oggetti e poi confrontare le misure.

Figura 8. Immersione in polvere solida. Si mette a punto una procedura per riempire completamente il contenitore togliendo la sabbia in eccesso, come mostrato a destra. Si immerge completamente il meteorite come mostrato sinistra e poi si ripete la procedura per togliere la sabbia in eccesso che questa volta viene raccolta peer misurarne la massa.

Figura 9. Altri materiali reperibili nella vita quotidiana che possono essere utilizzati per l'immersione in solidi. Da destra semi di sesamo, semi di quinoa, pastina da brodo e poi ancora sesamo e la sabbia fine utilizzata in precedenza in due misure diverse della densità.

CONCLUSIONI

Il percorso di insegnamento-apprendimento sui meteoriti può essere proposto insieme all'insegnante di scienze o anche solo dal docente di fisica collegandolo ad un approfondimento di fisica astronomica sul sistema solare. Gli aspetti laboratoriali proposti in forma di apprendimento attivo e collaborativo possono aiutare a far comprendere l'importanza della scelta opportuna di uno strumento di misura, considerando accuratamente la sensibilità e il processo di misura.

RINGRAZIAMENTI

Un sentito ringraziamento va alla Dott.ssa Sonia Sandroni della sede senese del Museo Nazionale dell'Antartide *Felice Ippolito*, che ha progettato e realizzato insieme all'autore un'esperienza formativa sui meteoriti rivolta ad insegnanti di discipline scientifiche della scuola superiore nell'ambito dell'edizione 2021 della scuola estiva *La Scienza in 4D* intitolata *Scienze spaziali*.

BIBLIOGRAFIA

Alderman, M. K. *Motivation for achievement: Possibilities for teaching and learning* (2013). London: Routledge

BBC (2013) www.bbc.co.uk/news/science-environment-24551407

Cassidy, W., Harvey, R., Schutt, J., Delisle, G., & Yanai, K. (1992). The meteorite collection sites of Antarctica, *Meteoritics* **27**(5), 490-525.

Montalbano, V. (2014). Seeing and interacting with the invisible: A powerful tool for the learning of science. *Proceedings of the ESERA 2013 Conference,* European Science Education Research Association, 1-12 ISBN: 978-9963-700-77-6.

NASA (2013) www.nasa.gov/mission_pages/asteroids/news/asteroid20130215.html

Pugh, K. J., Linnenbrink-Garcia, L., Koskey, K. L., Stewart, V. C. and Manzey, C. (2010). Motivation, learning, and transformative experience: A study of deep engagement in science, *Science Education* **94,** 1–28.

ENERGIA POTENZIALE: MAIALINI, PIANETI, ATOMI E... CALCIATORI

Daniele Cane, Laura Giudici
IIS Blaise Pascal – Giaveno (TO)
daniele.cane@pascalgiaveno.it

Abstract
Nel seguente lavoro viene presentato un percorso di avvicinamento ai concetti di campo conservativo ed energia potenziale per gli studenti dei Licei Scientifici che comincia alla fine della seconda e, con un approccio "elicoidale", ritorna più volte sullo stesso argomento, in terza, quarta e quinta, allargando sempre di più le prospettive. Gli studenti apprendono in modo interattivo con gli script di Geogebra (con esempi dalla vita reale e anche un po' di humour) e approfondiscono il concetto di energia potenziale, gravitazionale ed elettrica, e l'energia totale degli atomi classica o quantistica.

Parole-chiave
Energia potenziale, gravitazione, modello atomico classico e quantistico, Geogebra

INTRODUZIONE

La nostra riflessione sull'energia potenziale si sviluppa nell'arco di diversi anni scolastici, tra la fine della seconda/inizio della terza Liceo Scientifico fino agli ultimi argomenti della quinta.
Ritorniamo più volte sull'argomento, ogni volta allargando lo sguardo a nuovi fenomeni e approfondendo le questioni, con quella che potrebbe essere definita una didattica "a spirale".
I ragazzi del nostro tempo vivono in una cultura dell'immagine (foto e soprattutto video) e quindi riescono a comprendere meglio concetti che di per sé sono piuttosto astratti come quello dell'energia se riescono a crearsi delle immagini, meglio ancora se riescono a cogliere dei movimenti.
Tra le varie possibilità, abbiamo scelto di proporre immagini e concetti della vita comune, molto vicini agli studenti, allo scopo di far "toccare con mano" gli argomenti che intendiamo approfondire.
Tra le possibili scelte di stile comunicativo, abbiamo dato priorità a un certo "sense of humour" allo scopo di rendere accattivanti le presentazioni, senza tuttavia rinunciare al rigore matematico e metodologico.
Nel trattare l'argomento utilizziamo semplici esperimenti e numerosissimi script Geogebra; in questa presentazione mostreremo solo gli script originali creati da noi che riteniamo più significativi per l'argomento.
I link agli script sono reperibili in bibliografia.

ENERGIA POTENZIALE CON ACCELERAZIONE DI GRAVITà COSTANTE

A casa di Peppa Pig

Tra la fine della seconda e l'inizio della terza si introduce per la prima volta l'energia potenziale gravitazionale per valori costanti del campo gravitazionale $\vec{g}$ nella forma $U = mgh$, dove U è l'energia, m la massa, g l'accelerazione di gravità (supposta costante) e h l'altezza.
Per visualizzare la dipendenza dell'energia dal sistema di riferimento aiutiamo la famosa maialina nel far cadere dall'armadio uno scatolone (script 1, Figura 1). L'energia disponibile per la caduta dello scatolone varia se esso deve percorrere solo l'altezza dell'armadio rispetto al pavimento del primo piano, oppure se immaginiamo di farlo cadere dalla cima dell'armadio al pavimento del piano terra oppure ancora se rimuoviamo la ripidissima collina su cui sorge la casa e spostiamo il nostro riferimento ancora più in basso. Lo script permette di vedere che l'energia dello scatolone rosso sull'armadio e dello

scatolone blu sul pavimento dipendono dal sistema del riferimento, ma la differenza di energia potenziale tra i due scatoloni è indipendente.

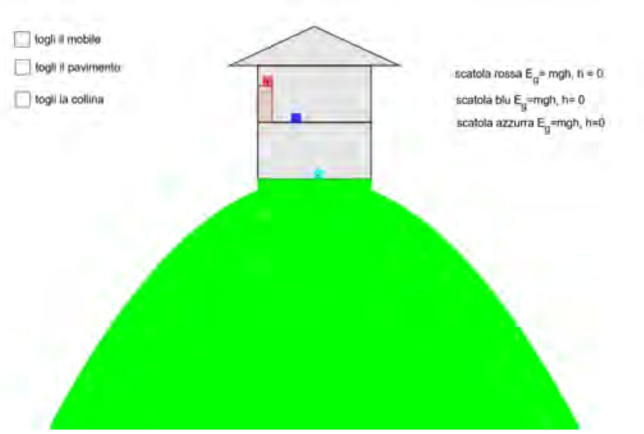


Figura 1. Screenshot dello script 1

Anche i muratori conoscono l'energia potenziale gravitazionale
Il secondo script riguarda la costruzione di una casa (script 2, Figura 2) e permette di esplorare il concetto di superficie equipotenziale e la direzione del campo. Infatti, quando i muratori gettano le solette di una casa, il calcestruzzo (che è un liquido, sebbene molto denso) si dispone "in piano", cioè secondo le superfici equipotenziali del campo gravitazionale, mentre i pilastri sono "verticali", cioè per definizione si dispongono nella direzione del campo. Cominciamo a vedere qui che superfici equipotenziali e campo sono sempre perpendicolari.
Anche il principio dei vasi comunicanti si basa sulle superfici equipotenziali. I muratori, infatti, un tempo utilizzavano dei tubi di gomma pieni d'acqua che facevano correre da un lato all'altro degli edifici in costruzione. Se l'acqua raggiungeva un dato livello da una parte, necessariamente raggiungeva lo stesso livello dall'altra ed era quindi possibile "battere i livelli", cioè costruire gli elementi come le finestre alla stessa altezza anche se il pavimento non era ancora stato gettato.

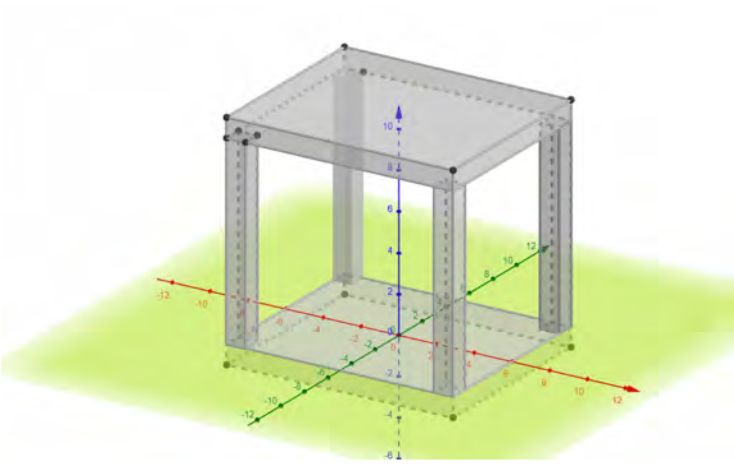


Figura 2. Screenshot dello script 2

ENERGIA POTENZIALE DALLA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Questi muri non sono per niente paralleli...
La "vera forma" del campo gravitazionale tuttavia non è piana. Con il semplicissimo script 3 esploriamo la verticalità di edifici famosi posti in città che sorgono approssimativamente alla stessa latitudine ma a

diverse longitudini. Se noi potessimo avvicinare gli edifici di Venezia a quelli di Torino, per esempio, ci accorgeremmo ad occhio che sono inclinati gli uni rispetto agli altri di circa 5°. La Pianura Padana non è affatto in piano! Infatti, non solo da Ovest ad Est c'è un dislivello di circa 100 m rispetto al livello del mare, ma essa è disposta su un fuso di ampiezza pari a circa 5°.

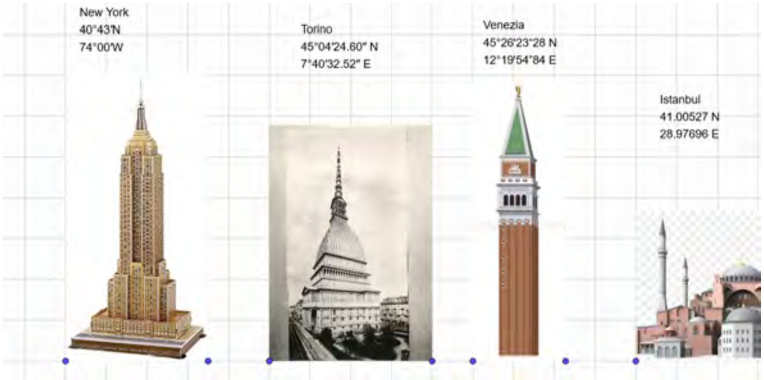


Figura 3. Screenshot dello script 3

Viva la Terra "sferica", abbasso la Terra piatta!

Lo script 4 (Figura 4) permette di confrontare la forma sferica del campo descritto dalla forza di gravitazione universale [1] (o dall'energia nella forma [2]), dove F è la forza, G la costante di gravitazione universale, M la massa della Terra, m la massa dell'oggetto, r la distanza dal centro della Terra e U l'energia rispetto alla "Terra piatta" descritta dalla forza $F = mg$ (o dall'energia nella forma $U = mgh$).

[1] $F = G\frac{Mm}{r^2}$ forza di gravitazione universale

[2] $U = -G\frac{Mm}{r}$ energia potenziale gravitazionale

Sulla Terra ogni osservatore ha il suo "basso", rappresentato dalla direzione del campo gravitazionale $\vec{g}$ che punta verso il centro del pianeta. Per cui, se la Terra fosse trasparente, potremmo vedere i Neozelandesi a testa in giù rispetto a noi, che ci mostrano i piedi. Nella "Terra piatta" non esiste un emisfero Sud o un qualsiasi "polo".

Inoltre, alzandoci rispetto alla superficie del pianeta, ci accorgiamo che le superfici equipotenziali sono di forma sferica, e che il campo, sempre perpendicolare ad esse, decresce con l'altezza. Ma non è affatto nullo alla quota della Stazione Spaziale Internazionale! Non è questo il motivo per cui gli astronauti galleggiano apparentemente privi di peso.

Nella "Terra piatta", invece, le superfici equipotenziali sono piatte a loro volta e il campo è sempre costante. Si capisce così che $\vec{g}$ può essere considerata costante solo in piccolissime porzioni di spazio, sia in orizzontale che in verticale.

Se poi un oggetto si muove con un vettore velocità che non è parallelo alla direzione del campo, avremo un moto descritto da una conica, tipicamente un'ellisse o, nel caso ideale, una circonferenza. Quindi anche il moto parabolico studiato in precedenza è un artificio della "Terra piatta", intorno alla quale sarebbe impossibile far volare la Stazione Spaziale Internazionale, che si schianterebbe miseramente al suolo.

Naturalmente, la forma della Terra è più simile a quella di un ellissoide di rotazione, a causa degli effetti della rotazione terrestre intorno al suo asse. Tuttavia le singole particelle del pianeta percepiscono la gravità come la combinazione della forza di Newton, con simmetria sferica, e di un'accelerazione dovuta al rotazione del sistema di riferimento (e opposta all'accelerazione centripeta): questo fenomeno si può capire fino in fondo solo dopo aver approfondito il secondo principio della relatività generale, per cui è meglio rimandare alla quinta.

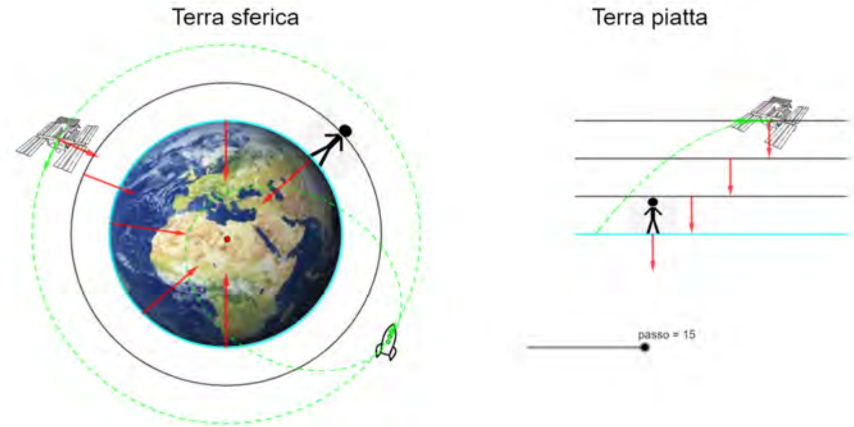


Figura 4. Screenshot dello script 4

Eppur si muove

Nello script 5 (Figura 5) mostriamo l'effetto del moto di un oggetto dotato di energia cinetica classica [3] in orbita nel campo gravitazionale, dove E_K è l'energia cinetica, m è sempre la massa dell'oggetto e v la sua velocità. Dopo aver calcolato insieme agli studenti l'energia totale [4] nel caso del moto circolare, osserviamo che essa è sempre negativa, per cui possiamo passare ad una nuova "forma" della gravitazione.

[3] $$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

[4] $$U + E_K = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r}$$

L'energia totale in questa approssimazione forma la superficie di un iperboloide di rotazione, che costituisce la "buca di potenziale" nella quale i pianeti ruotano come biglie in una tazza. Posso passare da un'orbita all'altra semplicemente fornendo energia alla mia astronave. Lo script mantiene comunque un punto di vista sul moto circolare dei pianeti, per evitare fraintendimenti. La "forma" che stiamo descrivendo riguarda l'energia dei pianeti stessi, non è la forma delle loro orbite.

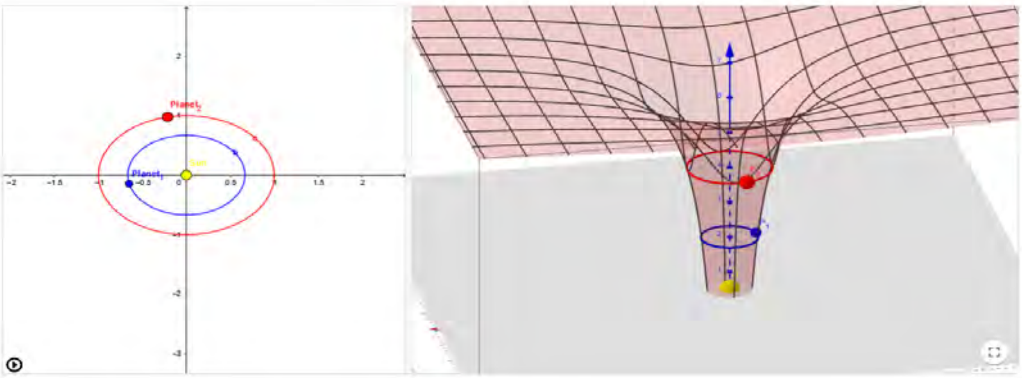


Figura 5. Screenshot dello script 5

Quanto descritto finora potrebbe essere compreso mediante il teorema di Gauss per la gravitazione [5] o per il campo elettrico [6], dove $\Phi_S(\vec{g})$è il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa S, M_i sono le masse racchiuse all'interno della superficie, $\Phi_S(\vec{E})$è il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa S, q_i sono le masse racchiuse all'interno della superficie e $\epsilon_0$la costante dielettrica assoluta del vuoto.

[5] $$\Phi_S(\vec{g}) = -4\pi G \sum M_i$$

[6] $$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

Prima di proseguire ulteriormente, è opportuno provare ad esplorare con gli studenti almeno il secondo caso.

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA:L'ATOMO DI IDROGENO

Un primo modello atomico

Lo stesso script 5 può essere ripreso in quarta e utilizzato per descrivere la forma dell'energia potenziale elettrica [7] di un elettrone in orbita intorno al nucleo di un atomo di idrogeno, dove e è la carica dell'elettrone e r la sua distanza dal centro di massa dell'atomo.

[7] $$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

[8] $$U + E_K = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Anche in questo caso l'energia totale [8] è negativa e sembrerebbe che le orbite possibili per gli elettroni intorno al nucleo possano avere lo stesso comportamento di quelle dei pianeti intorno al Sole e che sia possibile per un elettrone muoversi da un'orbita a un'altra qualsiasi a sua scelta modificando la sua energia. Ma sarà proprio così?

Calciatori in collina

Negli script 6 e 7, da utilizzare alla fine della quinta, si utilizza un'altra metafora per spiegare la quantizzazione dei livelli energetici nell'atomo di idrogeno, e l'effetto dell'assorbimento di un fotone da parte di un elettrone.

La buca di potenziale viene ora visualizzata come il profilo di una collina (Figura 6). Al fondo della collina vi è un elettrone, rappresentato da un pallone da calcio, cui viene fornita energia da un fotone (rappresentato da un calciatore). Nel primo script (caso classico) il calciatore tira il pallone con un'energia insufficiente a superare la cima della collina (cioè per raggiungere o superare l'energia di ionizzazione dell'elettrone). In questo modello, è però possibile che un secondo calciatore-fotone, appostato sulla collina, sia in grado di colpire al volo la palla e fornirgli un po' di energia. Oppure, i due calciatori-fotoni potrebbero colpire contemporaneamente la palla dal fondo della collina e sommare i loro effetti sul pallone-elettrone.

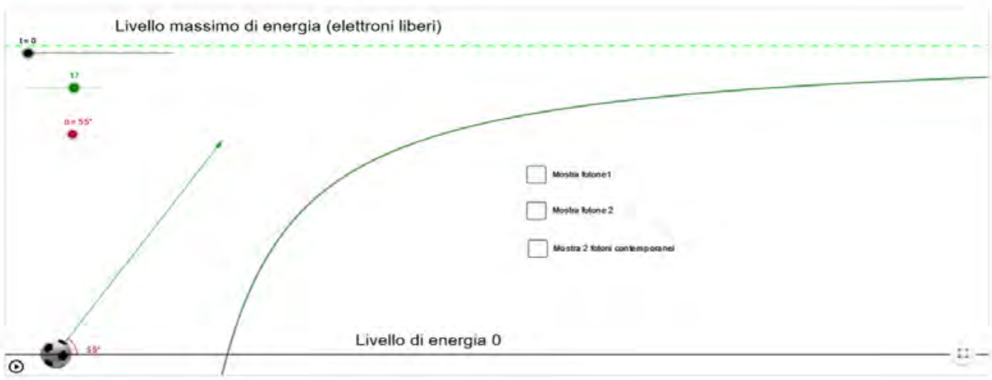


Figura 6. Screenshot dello script 6

Chiunque abbia giovato a calcio sa che queste imprese sono impossibili, tranne che nel fantasioso mondo del cartone animato "Holly e Benji" (link 1), in cui esistono il "tiro doppio" di Holly e Tom Becker e la "catapulta infernale" dei fratelli Derrick. Nel mondo degli atomi queste "meraviglie" nipponiche scaturite dalla fantasia di Yōichi Takahashi sono invece possibili?

Il mondo è fatto a scale...
Nel secondo script (Figura 7) la collina non ha più un profilo continuo ma quantizzato: è stata terrazzata e il pallone-elettrone può raggiungere un livello solo se l'energia impartitagli dal fotone è esattamente quella necessaria. Inoltre, in questo caso non è possibile sommare gli effetti di due o più calciatori-fotoni sul pallone-elettrone per fornire energia. Anhe gli atomi di idrogeno sono abbastanza saggi da sapere che certe acrobazie sono possibili solo in un manga o in un cartone animato...
Anche un'intera squadra di fotoni, impegnandosi al massimo, non riesce a far raggiungere al pallone-elettrone l'agognato traguardo. E' sufficiente però un solo calciatore-fotone della giusta energia per ottenere la ionizzazione dell'atomo e quindi, per esempio, l'effetto fotoelettrico. Il massimo risultato di humour (ma anche di comprensione) si ottiene naturalmente se le maglie dei calciatori appartengono a squadre con la massima rivalità possibile.

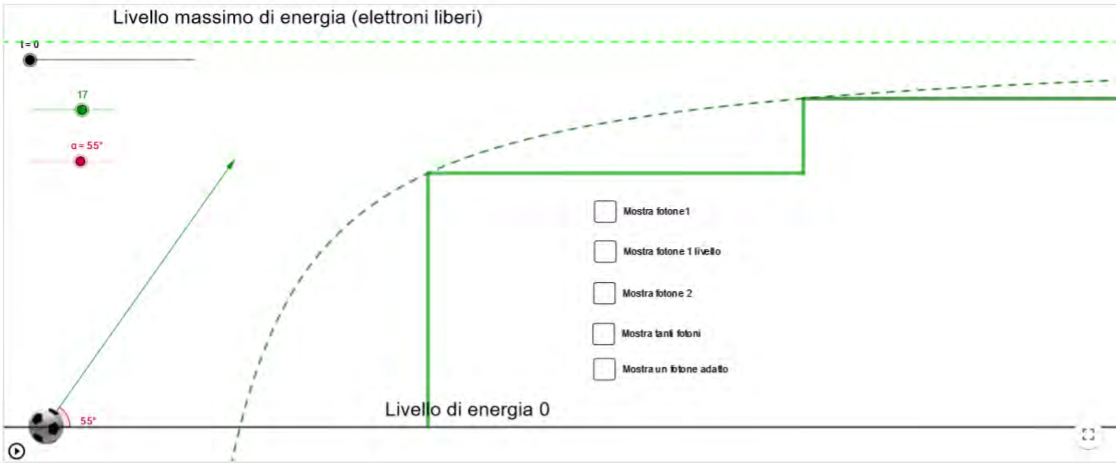


Figura 7. Screenshot dello script 7

CONCLUSIONI

In questo lavoro sono stati presentati numerosi script con l'utilizzo di immagini dal mondo comune come metafora di concetti molto astratti come quelli dell'energia potenziale e cinetica. Le animazioni permettono agli studenti di visualizzare i concetti in modo più semplice ma allo stesso tempo approfondito, a patto che vengano accompagnate da un rigoroso approccio matematico.
Per massimizzare l'apprendimento, il docente deve tenere a mente l'intero sviluppo della trattazione dell'argomento, avendo ben presente gli approfondimenti degli anni successivi.
Tutti gli script descritti, insieme ad altri, si possono trovare nella pagina su Geogebra.org di uno degli autori (link 2), nello spirito di collaborazione open-source che caratterizza Geogebra.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano gli organizzatori del Convegno DI.FI.MA. e i chairman della sessione del Geogebra Day per aver ospitato il loro contributo.
Peppa Pig è un marchio registrato da Phil Davies/Enterteinment One, le immagini utilizzate negli script sono tratte da siti internet di immagini liberamente utilizzabili e sono state utilizzate (ovviamente) a soli fini didattici e non commerciali.

BIBLIOGRAFIA

script 1: https://www.geogebra.org/m/sxeedbud
script 2: https://www.geogebra.org/m/cffaqygj
script 3: https://www.geogebra.org/m/ukwmvcq2

script 4: https://www.geogebra.org/m/njskpxvk
script 5: https://www.geogebra.org/m/d3wvtvwb
script 6: https://www.geogebra.org/m/gpz42mww
script 7: https://www.geogebra.org/m/en7dxgze
link 1: https://it.wikipedia.org/wiki/Holly_e_Benji_-_Due_fuoriclasse
link 2: **https://www.geogebra.org/u/prof.daniele.cane**

TEACHING PHYSICS BY ARDUINO DURING COVID-19 PANDEMIC: OSCILLATION OF A SINGLE PENDULUM

Fausto Casaburo
Sapienza Università di Roma – INFN Sezione Roma
fausto.casaburo@uniroma1.it – fausto.casaburo@roma1.infn.it

Abstract
The COVID-19 impacted on teaching worldwide; indeed, both schools and universities had to shift from face-to-face to distance teaching organizing on-line lectures. Thanks to easily accessible materials, smartphones physics apps, on-line tools and devices, it's possible to perform laboratory practice even in this period. In this paper, a method to measure the gravitational acceleration by oscillation of a simple pendulum, using Arduino board, is presented

Key-words
Pendulum- Arduino- COVID 19- Physics Education- Gravitational acceleration

INTRODUCTION

The COVID-19 pandemic impacted on teaching worldwide. Despite that, to overcame the problem, the educational system replaced face-to-face by distance learning [1, 2, 3]. In particular, to preserve laboratory courses, during the COVID-19 pandemic, many schools and universities proposed to perform scientific experiments at home [4]. For example, in Italy, the Lab2Go project [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] organized on-line seminars showing physics experiments that can be made at home using easily accessible materials and exploiting resources as the Arduino board [13]. Arduino is an open source platform made of electronic boards, sensors and expansion boards. Thanks to its versatility and low cost, Arduino is an ideal base on which to construct datalogging sensors or control devices that can be used to perform phyics experiments [14]. Its usage also allows to acquire additional competences, as for example coding and programming [15, 16]. The original Arduino board can be bought for as low as about few tens of euro; moreover, there are many cheapest clones. Both the board and the sensors can be easily bought on-line or in electronics shops [14, 16]. There are also many kits including the board and most common sensors available for just 50-60 euro. Thanks to the low cost, the Arduino board and related components can be bought directly by students or by schools/universities to be provided to students. Moreover, even if you are a beginner, there are many introductory free on-line tutorials which give a basic though thorough introduction to the Arduino boards [14]. In this paper an Arduino-based physics experiment regarding of oscillation of a simple pendulum will be presented. It consists in measuring the oscillation period by Arduino to estimate the gravitational acceleration value. Even if this is a very common experiment, it is usually realized by expansive photogate sensors in physics laboratories [17]. In this paper it will be shown how to replace the photogate by cheaper Infra-Red (IR) pair sensors and a hand-made U-shape support. The experiment can be proposed both to high school and university students.

THEORY

The simple pendulum (Fig. 1) is a mechanical system of length l, made of a point-like mass m suspended by means of light inextensible string from a fixed support. The equilibrium position is when the string hangs vertically. When displaced to an initial angle θ and released, the pendulum will swing back and forth due to gravitational acceleration. If there aren't other forces acting on the pendulum, the motion is periodic of period T. For $\theta < 10°$, the period is given by:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad 1$$

where g is the gravitational acceleration. By equation 1, it follows that measuring the period T and the length l of the pendulum it's possible to estimate the gravitational acceleration.

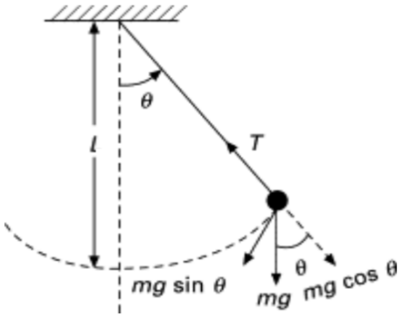


Figure 1. Schematization of a simple pendulum [18].

EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup is shown in Fig. 2 and it is made of mechanic and electronic systems. The first one consist of a hand-made pendulum made of a wood support, a nylon string and a spherical mass. The second one consist of an Arduino UNO R3 board, an IR trasmitter-receiver pair sensors, a breadboard, Dupont cables, USB cable and one computer.

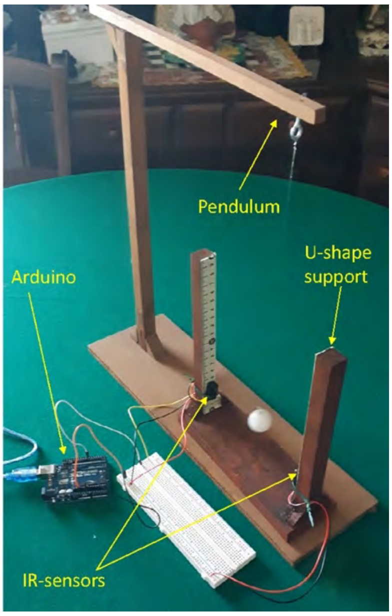


Figure 2. Experimental setup.

The IR sensors are connected to a digital pin of Arduino by the Dupont cables and are supported by a hand-made U-shape support making up the hand-made photogate. This latter, in turn, is positioned close to the pendulum, so that the mass of the pendulum can moves through the IR sensors allowing the oscillation period measurement, as shown in Fig. 2. The Arduino board is connected to the computer for Data AcQuisition (DAQ) purposes by the USB cable.

EXPERIMENTAL PROCEDURE

The sketch for Arduino allows the user to measure the oscillation period (Fig. 3). The IR light is constantly emitted by the transmitter of the IR pair sensors and, if there aren't obstacles, it will hit the IR receiver and it is read by the Arduino board as a HIGH state of the pin whose the sensor is connected. When the pendulum's mass moves through the beam light, this one is interrupted, therefore the pin state of the sensor will be switched to LOW state. The period is measured as the time between two consecutive full passages of the pendulum's mass through the IR sensors and it's printed on the terminal.

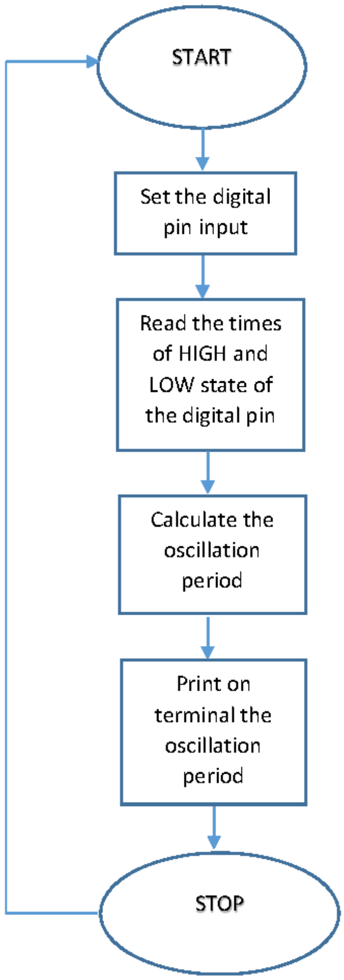


Figure 3. Programming flow chart for measuring the period of the pendulum by Arduino.

The length l of the pendulum is the distance from the suspension point to the barycenter of the mass m (a sphere). Therefore, it has been measured the diameter $d = (20.00 \pm 0.05)$mm of the sphere by a caliper and the length l* of the string by a meterstick (sensitivity ±1mm). The total length l of the pendulum is

$$l = l^* + \frac{d}{2} \qquad 2$$

The periods for several pendulum lengths have been measured and analyzed. For each pendulum length it has been measured the periods Tn of the first 20 oscillations, then it has been calculated the average period hTi and its uncertainty assuming a Gaussian distribution. Data of $\langle T^2 \rangle$ in fuction of l have been interpulated, using ROOT [19], by the linear

$$y = kl \tag{3}$$

where $y = \langle T^2 \rangle$ and $k = \frac{4\pi^2}{g}$, therefore the gravitational acceleration is given by:

$$g = \frac{4\pi^2}{k} \tag{4}$$

RESULTS

The graph of $\langle T^2 \rangle$ as a function of l is shown in Fig. 4.

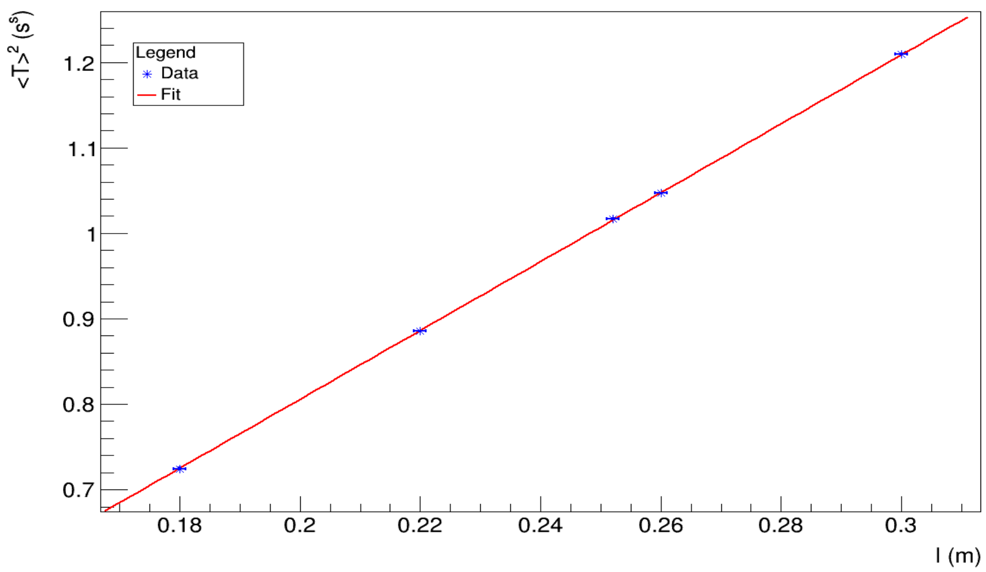


Figure 4. Squared oscillation period $\langle T^2 \rangle$ as a function of the pendulum length l.

The linear interpolation results in a slope k given in Tab. 1 with the experimental gravitational acceleration value (Eq. 4). The obtained gexp value is well compatible with the local value $g_{loc} = 9.8029\, {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$[20] within 1σ.

Table 1. Values of the sound speed in aluminum , brass and copper rods, measured by using methods 1, 2 and 3, and accepted values, as reported in the literature [Handbook of Chemistry and Physics, 1974]

k (s^2/m)	**g (m/s^2)**
4.0298 ± 0.0074	9.797 ± 0.018

CONCLUSIONS

Due to COVID-19 pandemic, students couldn't access to schools and universities laboratories. To overcame this problem it's useful organizing laboratory activities made at home using easily accessible materials and exploiting resources as smartphones physics apps, on-line tools and devices, as for example Arduino. In this paper it has been shown a technique to study the oscillation of a simple pendulum and to measure the gravitational acceleration using Arduino and a cheap hand-made photogate. Beyond the numerical result, the article goal is to encourage teachers to propose the experiment to their students in order to carry on the laboratory practice even in this pandemic period. Lastly, thanks to its low-cost, the usage of Arduino for physics experiments can also be useful in school laboratories not adequately equipped (obsolete or non-functioning instrumentation, poor assortment, lack in maintenance, missing catalog) even when the COVID-19 emergency is over.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author acknowledges the Lab2Go- Fisica collaboration.

BIBLIOGRAPHY

[1] P. Klein, L. Ivanjek, M. N. Dahlkemper, K. Jelicic, M.-A. Geyer, S. Küchemann, and A. Susac, "Studying physics during the covid-19 pandemic: Student assessments of learning achievement, perceived effectiveness of online recitations, and online laboratories*," Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, vol. 17, p. 010117, Mar 2021.
[2] F. Casaburo, "Teaching physics by arduino during covid-19 pandemic: The free falling body experiment," *Physics Education*, vol. 56, 2021.
[3] F. Casaburo, "Teaching physics by arduino during covid-19 pandemic: Measurement of the newton's cooling law time-constant," 2021.
[4] E. G. Campari, M. Barbetta, S. Braibant, N. Cuzzuol, A. Gesuato, L. Maggiore, F. Marulli, G. Venturoli, and C. Vignali, "Physics laboratory at home during the covid-19 pandemic," *The Physics Teacher*, vol. 59, no. 1, pp. 68–71, 2021.
[5] Lab2Go collaboration. https://web.infn.it/lab2go/.
[6] Lab2Go collaboration. https://lab2go.roma1.infn.it/doku.php.
[7] G. Organtini, F. Ameli, G. Cavoto, E. Di Marco, F. Piacentini, S. Morganti, E. Pasqualucci, A. Polimeni, M. Rescigno, F. Safai Tehrani, G. Salmé, P. Vicini, and R. Faccini, "Promoting the physics laboratory with lab2go," in EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies, pp. 5264–5268, IATED, 3-5 July, 2017 2017.
[8] M. Andreotti, P. Astone, D. Campana, F. Casaburo, A. Cartoni, F. Cavanna, G. Cibinetto, A. D. Cort, G. D. Bonis, M. D. Seta, F. D. Mauro, G. D. Sciascio, R. Faccini, F. Favino, L. Iocchi, M. Lissia, G. Morganti, M. Mancini, G. Organtini, F. Pennazio, F. Piacentini, A. Piras, M. Ragosta, L. Roberti, A. R. Rossi, L. Sadori, and F. S. Tehrani, "Il progetto lab2go per la diffusione della pratica laboratoriale nelle scuole secondarie di ii grado," 2021.
[9] P. Astone, R. Balaudo, F. Casaburo, F. Cavanna, G. D. Bonis, R. Faccini, D. Fallara, A. Grigoruta, G. Organtini, F. Piacentini, and F. Pennazio, "Studio di un urto anelastico: una proposta per le scuole secondarie di ii grado nell'ambito del progetto "lab2go"," 2021.
[10] G. Organtini, R. Faccini, "Esperienze innovative del pls roma," 9 2017. Abstract and talk at 103 National Conference of Italian Physical Society.
[11] F. Casaburo, M. Andreotti, P. Astone, D. Campana, G. Capotorti, A. Cartoni, F. Cavanna, G. Cibinetto, A. Dalla Cort, G. De Bonis, M. Della Seta, G. Di Sciascio, R. Faccini, F. Favino, L. Iocchi, M. Lissia, M. Mancini, G. Organtini, F. Pennazio, F. Piacentini, M. Ragosta, L Roberti, A.R. Rossi, L. Sadori, F. Safai Tehrani, S. Sarti, A. Valletta, "Il progetto lab2go per la diffusione della pratica laboratoriale nell'insegnamento delle discipline stem nelle scuole secondarie di ii grado," 11 2021. Abstract and talk at 59 National Conference of Associazione per l'Insegnamento

della Fisica (AIF).
[12] F. Casaburo, N. Marcelli, M. Sorbar, M. Agostinelli, P. Astone, F. Baldassarre, F. Brunori, S. Crisci, G. De Bonis, X. De Lucia, D. De Pedis, G. De Valeri, G. Di Sciascio, R. Faccini, J. Falato, V. Fraietta, S. Fratticci, C. Gatto, S. Guadagnini, V. Oliviero, G. Organtini, V. Passamonti, F. Piacentini, N. Ruggiero, M. Salerno, S. Sarti, L. Tedesco, "Measurement of the planck's constant in the framework of the lab2go project," 9 2021. Abstract and talk at 107 National Conference of Italian Physical Society.
[13] Arduino collaboration. https://www.arduino.cc/.
[14] J. Kinchin, "Using an arduino in physics teaching for beginners," *Physics Education*, vol. 53, p. 063007, oct 2018.
[15] G. Organtini, "Arduino as a tool for physics experiments," Journal of Physics: Conference Series, vol. 1076, p. 012026, sep 2018.
[16] G. Organtini, Fisica con Arduino. Zanichelli, 2021.
[17] Yulkifli, Z. Afandi, and Yohandri, "Development of gravity acceleration measurement using simple harmonic motion pendulum method based on digital technology and photogate sensor," IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 335, p. 012064, apr 2018.
[18] S. Rajasekaran, "2 - free vibration of single-degree-of-freedom systems (undamped) in relation to structural dynamics during earthquakes," in Structural Dynamics of Earthquake Engineering (S. Rajasekaran, ed.), Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, pp. 9–42, Woodhead Publishing, 2009.
[19] ROOT collaboration. https://root.cern/.
[20] Sensorone website. https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/.

LABORATORIO STEM CON ARDUINO PER IL TRIENNIO DEL LICEO SCIENTIFICO

Silvia Coscia[1,2], Simona Falabino[1,2]
[1]Liceo Scientifico Carlo Cattaneo di Torino, [2]AIF sezione di Settimo Torinese
s.coscia@liceocattaneotorino.it

Abstract
Le attività laboratoriali in presenza, curricolari ed extracurricolari, sono state bloccate durante il periodo della pandemia. Negli anni precedenti, nella nostra scuola, veniva organizzato un laboratorio pomeridiano per la progettazione di esperimenti di Fisica; quest'anno, con questa attività, si è voluto trovare un percorso alternativo che non penalizzasse i ragazzi e ne stimolasse la creatività rispettando le normative antiCovid. Si è cercata una modalità di lavoro che permettesse agli studenti di lavorare singolarmente a casa propria pur mantenendo la collaborazione con i compagni di gruppo, con la supervisione, a distanza, di due docenti di Matematica e Fisica. La scheda Arduino, fornita in prestito d'uso agli studenti, si è rivelata uno strumento versatile e adatto al lavoro di gruppo, anche a distanza. I progetti realizzati dagli studenti hanno avuto un carattere interdisciplinare e, oltre che la Fisica, hanno coinvolto la Biologia, l'Ingegneria, e le Scienze della Terra.

Parole-chiave
Arduino, STEM, project-based learning

INTRODUZIONE

L'anno scolastico 2020/2021 è stato caratterizzato, come tutti sappiamo, da una forte discontinuità delle lezioni in presenza, inframezzate da periodi più o meno lunghi di didattica a distanza. In particolare, la crisi pandemica ha ridotto l'uso dei laboratori e ha escluso la possibilità di svolgere attività extracurricolari con gruppi di studenti provenienti da classi differenti.
Negli anni precedenti, nel nostro Istituto, si era svolto un laboratorio pomeridiano di Fisica rivolto agli allievi del triennio. Gli studenti partecipanti, provenienti da classi diverse, avevano la possibilità di sperimentare e sviluppare i loro progetti sotto la supervisione delle docenti.
Le nuove regole imposte dalla pandemia hanno portato a una sostanziale modifica dell'attività pomeridiana settimanale di laboratorio di Fisica della nostra scuola. L'entusiasmo, la creatività, il piacere della scoperta e lo sviluppo della manualità per produrre gli esperimenti erano caratteristiche che non volevamo andassero perse anche in questo particolare momento storico. Si è quindi pensato di far lavorare i ragazzi in un'attività a distanza, ma comunque suddivisi in gruppi, utilizzando schede Arduino. Questa metodologia ha permesso di progettare esperimenti, sviluppare competenze STEM e di imparare a collaborare anche a distanza, puntando sullo scambio di idee tra pari e l'apprendimento project-based.

METODOLOGIA E PROGETTI REALIZZATI

Il laboratorio è stato frequentato da 25 studenti provenienti da diverse classi del triennio del nostro Istituto. A ciascuno di loro è stata fornita in prestito d'uso una scheda Arduino Uno ed un piccolo kit di materiale elettronico in dotazione al laboratorio scolastico. L'acquisto del materiale extra necessario per portare a termine i progetti ha comportato una spesa ridotta. Le attività, seguite da due docenti interne di Matematica e Fisica, si sono svolte in orario pomeridiano dal mese di ottobre fino al mese di maggio, per un totale di 60 ore riconosciute come attività PCTO.

Gli incontri, con cadenza settimanale, sono avvenuti su Meet. Durante le prime lezioni sono state fornite alcune indicazioni generali sull'utilizzo della scheda e sulla sua programmazione. Successivamente gli studenti si sono divisi in gruppi e hanno elaborato le loro proposte di lavoro, presentandole alle docenti. Insieme sono state trovate soluzioni fattibili e le eventuali imprecisioni fisiche e costruttive sono state discusse e corrette. Gli incontri settimanali via Meet hanno permesso sia di risolvere i problemi man mano che si presentavano sia di controllare l'avanzamento dei lavori.
Anche gli studenti hanno lavorato principalmente a distanza: dopo la discussione con le docenti, ciascun gruppo si riuniva a distanza per poter procedere allo sviluppo del progetto. Ci sono stati anche degli incontri in presenza tra i ragazzi, in primavera, quando la situazione pandemica lo ha permesso, per poter operativamente procedere alla costruzione delle apparecchiature o alla raccolta dei dati. La costruzione dell'esperimento, la presa dati e l'analisi dei risultati sono poi stati, da ciascun gruppo, organizzati in un video. Al termine dell'anno scolastico, i video sono stati presentati durante manifestazioni on-line come la Festa della Matematica e la premiazione della fase provinciale delle Olimpiadi di Fisica.
I progetti che sono stati portati a termine dai gruppi di studenti si sono contraddistinti per la loro interdisciplinarietà, coinvolgendo diverse discipline STEM: Fisica, Biologia, Scienze della Terra e Ingegneria. Descriviamo brevemente il contenuto dei progetti realizzati.

Progetto 1: polveri sottili, temperatura e umidità
In questo progetto i ragazzi, dopo essersi impratichiti delle nozioni base per la programmazione di Arduino, hanno programmato la loro scheda per eseguire misure di monitoraggio ambientale, utilizzando sensori per rilevare la temperatura atmosferica, l'umidità e la concentrazione di polveri sottili. Per rendere l'attrezzatura facilmente trasportabile, la scheda Arduino e i sensori sono stati sistemati in una scatola.

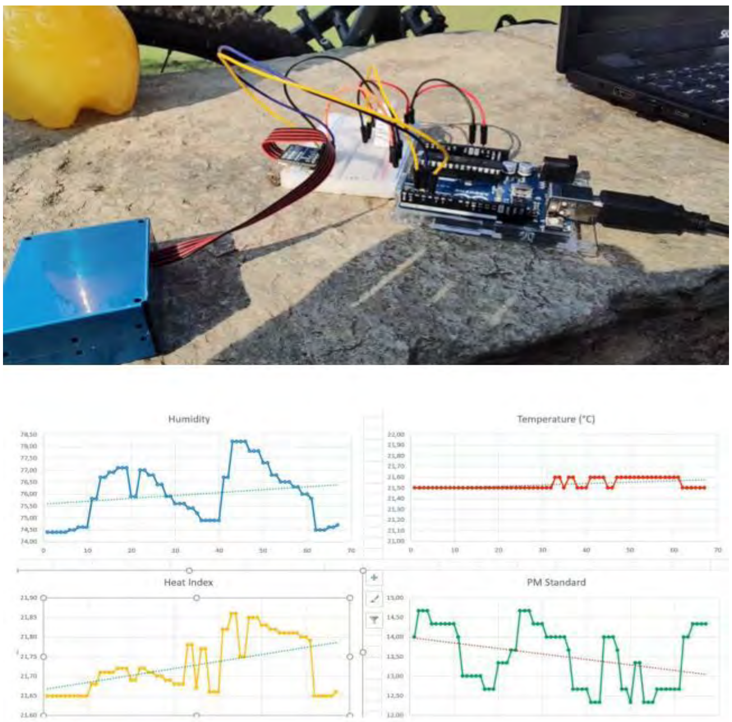


Figure 1. Due fotogrammi del video che descrive il Progetto 1. Apparato sperimentale con scheda Arduino Uno e sensori per il monitoraggio ambientale e alcuni grafici realizzati.

I ragazzi, spostandosi in bicicletta, hanno eseguito la raccolta dei dati in alcuni luoghi della città di Torino e della cintura. Le misure sono state confrontate con i dati forniti dall'Arpa Piemonte allo scopo di testare il sistema di misura.

Progetto 2: rivelatore di tsunami

Questo progetto è stato il proseguimento di una attività iniziata l'anno precedente. Nella precedente fase le studentesse avevano costruito, in legno e plexiglas, una vasca per simulare uno tsunami e avevano analizzato con Traker il moto delle onde indotto. Il lavoro con la scheda Arduino è stato quello di costruire un sismografo equipaggiando la scheda con un accelerometro. In questo modo si è voluto integrare il simulatore di tsunami con uno strumento atto a rilevare la causa dello tsunami stesso. Per tarare il sismografo è stato usato un modellino di palazzo formato da cubetti di legno per evidenziare gli effetti di una scossa sismica.

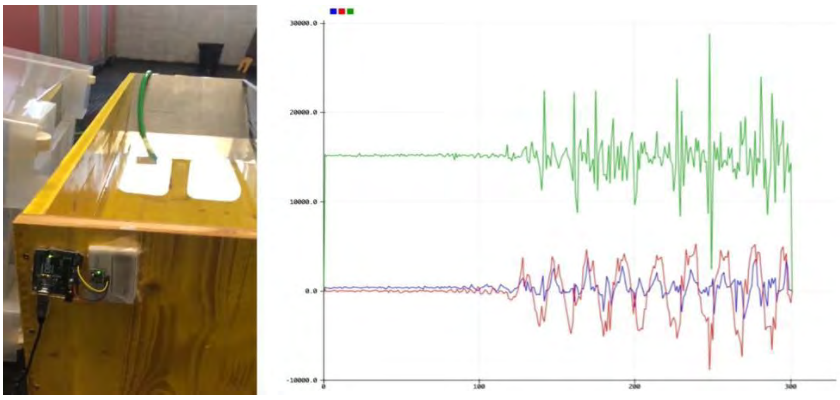


Figura 2. Fotogrammi dal video del Progetto 2. Scheda Arduino e accelerometro installati sulla vasca per la simulazione dello tsunami e (a sinistra) grafici realizzati con l'output dell'accelerometro.

Progetto 3: alghe

In questa attività sono stati studiati gli effetti dell'inquinamento termico e chimico su un ecosistema acquatico. Gli studenti hanno prelevato del materiale biologico (alghe) vicino a Rosta e lo hanno posto in diversi contenitori nei quali sono stati cambiati i parametri di temperatura e di pH. Sono stati registrati tramite le schede Arduino i dati da analizzare nel tempo e sono state notate le variazioni di crescita delle alghe. Il lavoro, interdisciplinare con Biologia, ha fornito verifiche sperimentali interessanti.

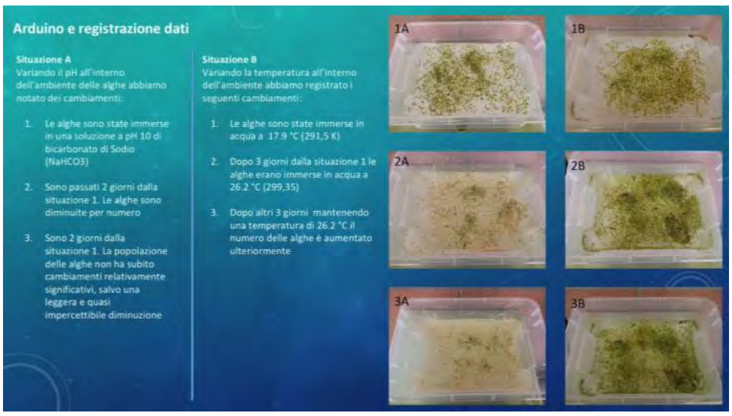


Figura 3. Progetto 3: la slide realizzata dal gruppo di studenti mostra come lo sviluppo di una po polazione di alghe sia influenzata dall'inquinamento chimico e dall'inquinamento termico.

Progetto 4: drone

Questa attività, per la sua complessità, è stata l'unica a non essere realizzata con una scheda Arduino. La costruzione del drone è stata preceduta da una accurata ricerca dei materiali considerando la potenza, il peso e le prestazioni che si volevano ottenere. In seguito gli studenti del gruppo hanno analizzato con cura la fisica del volo con simulazioni di volo virtuali. Si è quindi passati all'assemblaggio degli elementi scelti per poi arrivare al volo vero e proprio con successo.

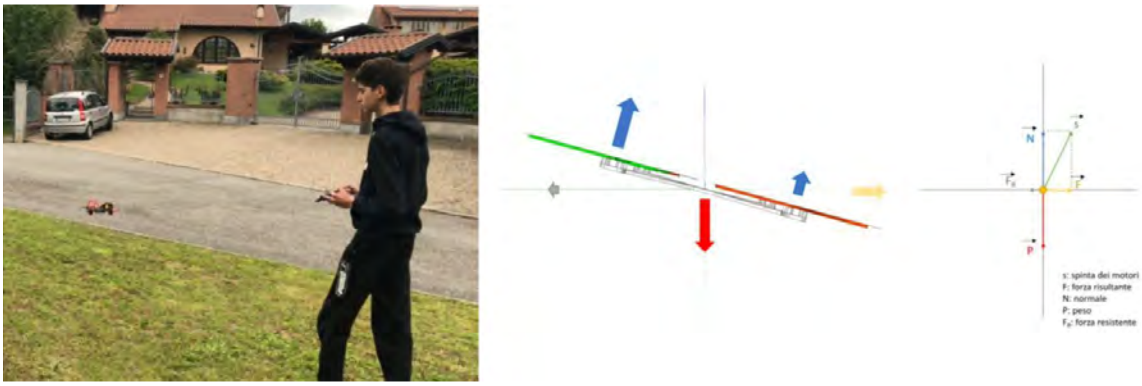


Figura 4. Progetto 4: prova di volo del drone e studio delle dinamica del volo.

Progetto 5: rover per la raccolta di dati ambientali
In questa attività sono stati innanzitutto presi in considerazione vari modelli per l'esosceletro della macchinina. Trovato quello che più si confaceva con le esigenze del progetto per costi e prestazioni si è passati alla costruzione e all'equipaggiamento con i sensori: prossimità, umidità, temperatura e accelerazione. La scheda Arduino controlla i motori ed è comandata a distanza da un telecomando. Sul modellino è stata inoltre applicata una videocamera per simulare le attività di un rover marziano.

Figura 5. Progetto 5: test di guida del rover per la raccolta di dati ambientali.

CONCLUSIONI

Nell'anno scolastico 2020/2021, il consueto laboratorio pomeridiano di Fisica che si svolgeva nel nostro Istituto è stato sostituito da un laboratorio a distanza basato sull'utilizzo della scheda Arduino. A questa attività, anche inserita tra le proposte di PCTO, hanno partecipato 25 studenti, seguiti da due docenti interne. La metodologia adottata ha puntato soprattutto sulla collaborazione e sullo scambio di idee tra studenti, tramite il lavoro a gruppi, anche se svolto per la maggior parte a distanza. Gli incontri settimanali su Meet con le docenti sono serviti a monitorare l'avanzamento dei progetti e intervenire sulle difficoltà tecniche. I lavori realizzati e presentati con un video finale contengono diversi spunti in ambito STEM.
L'attività è durata più a lungo di quanto normalmente accadeva in presenza. Il termine previsto per il mese di marzo è stato posticipato alla metà del mese di maggio. I tempi così dilatati sono stati necessari per la difficoltà legate al lavoro a distanza e per dover attendere per potersi incontrare per assemblare le apparecchiature e raccogliere e analizzare i dati.

Il lavoro di gruppo ha permesso ai partecipanti di sviluppare la loro creatività e il loro interesse scientifico, sperimentando un approccio diverso da quello attuato in passato.
Gli studenti hanno acquisito competenze con la scheda Arduino e l'utilizzo di sensori, secondo la modalità del *learning-by-doing*. Inoltre si sono potute apprezzare la versatilità e le potenzialità di questa scheda nell'ambito di lavori interdisciplinari.
In conclusione possiamo affermare che l'essere state obbligate a lavorate in modo diverso ha fornito anche a noi docenti stimoli per le nostre lezioni e suggerimenti per nuove attività. L'essere comunque riuscite a mantenere vivo il rapporto con gli studenti su una attività prettamente laboratoriale in un contesto di didattica a distanza è stato per noi un risultato soddisfacente.

UN'ESPERIENZA DI LABORATORIO DI FISICA IN DAD: MISURA DELL'INTENSITÀ LUMINOSA CON MICRO:BIT

Simona Falabino[1,2]
[1]Liceo Scientifico Carlo Cattaneo di Torino, [2]AIF sezione di Settimo Torinese
s.falabino@liceocattaneotorino.it

Abstract
Verrà descritta una sperimentazione didattica di laboratorio di Fisica con l'uso della scheda programmabile micro:bit. L'attività è stata condotta nell'a.s. 2020/2021 in una classe seconda liceo scientifico di ordinamento, composta da 24 allievi, di cui un BES e un DSA.
Il percorso è stato progettato per essere svolto completamente a distanza, durante le lezioni in videoconferenza oppure con lavoro autonomo degli studenti.
Il percorso è stato proposto agli allievi come un *project-work* a gruppi e si è sviluppato in più fasi, concludendosi con la realizzazione, da parte dei gruppi di studenti, di un tutorial sull'esperienza svolta. I prodotti finali dei gruppi sono stati discussi in una lezione collettiva e valutati sulla base di una rubrica per livelli di competenze.
Al termine del percorso, sono state raccolte le impressioni degli allievi ed in particolare, insieme a loro, sono stati analizzati gli aspetti positivi e negativi dello svolgere questo tipo di attività completamente a distanza.

Parole-chiave
micro:bit, laboratorio, DAD, *coding*

INTRODUZIONE

Nel corso dell'anno scolastico 2020/2021, l'emergenza sanitaria ha causato interruzioni delle lezioni in presenza e ha fortemente ridotto la possibilità di frequentare il laboratorio di Fisica con le classi. Nonostante le limitazioni all'attività didattica, questa situazione ha permesso di sperimentare con gli allievi nuovi strumenti e nuove metodologie, anche grazie ad occasioni di formazione per i docenti messe in atto dall'Equipe Formativa Territoriale del Piemonte e dal Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino (Piccione et al., 2021).
L'utilizzo di schede programmabili, come micro:bit e Arduino, già in dotazione al mio Istituto e fornite in prestito d'uso agli studenti, ha permesso di realizzare attività laboratoriali direttamente a casa degli allievi.
In particolare, il percorso di apprendimento è stato progettato per essere svolto totalmente in didattica a distanza (DAD), con lezioni sincrone alternate al lavoro autonomo degli studenti, con l'obiettivo di coinvolgere gli studenti e di mantenere viva la loro motivazione anche durante le interruzioni della didattica in presenza, dedicando invece le lezioni in classe alla prosecuzione del programma disciplinare ordinario.

SCHEDA MICRO:BIT E APPARATO SPERIMENTALE

Micro:bit è un'economica scheda elettronica programmabile dotata di un certo numero di sensori a bordo, quali accelerometro, magnetometro, sensore di temperatura. La matrice di 25 LED integrata nella scheda può funzionare come sensore di luminosità. L'esperienza didattica è stata realizzata con schede micro:bit modello V1. Attualmente è disponibile in commercio il modello V2, ugualmente adeguato per la realizzazione di questa attività.

La scheda micro:bit è programmabile a blocchi, in modo facile e divertente, sulla piattaforma online Microsoft MakeCode.
L'intera attività laboratoriale si è svolta in DAD. Gli allievi hanno ricevuto in comodato d'uso le schede micro:bit in dotazione alla scuola e le hanno tenute a casa per la durata del progetto.
Oltre alla scheda micro:bit, la realizzazione dell'attività richiede il seguente materiale:

- PC o notebook per la programmazione, la raccolta e l'analisi dei dati,
- cavo micro-USB per il collegamento della scheda al PC,
- torcia dello smartphone,
- un righello o un metro a nastro.

Ad eccezione della scheda micro:bit e del cavo USB, il resto del materiale è stato reperito dagli studenti. La Figura 1 mostra un esempio di set-up per l'esecuzione delle misure. La torcia dello smartphone, ovvero la sorgente luminosa, è posizionata frontalmente alla matrice LED della scheda e il metro a nastro permette di misurare la distanza sorgente-sensore. L'esecuzione delle misure deve avvenire in un ambiente buio e la distanza sorgente-sensore deve essere di almeno 10 cm, diversamente il sensore raggiungerà la saturazione e non fornirà misure attendibili.

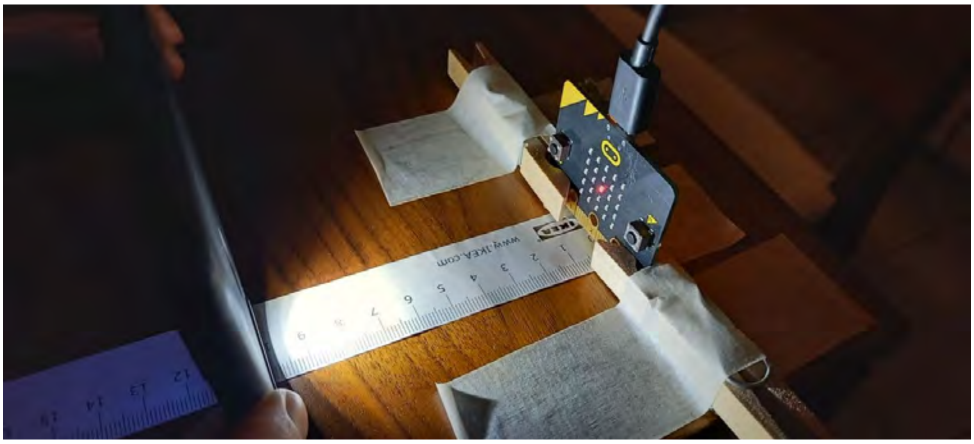


Figura 1. Apparato sperimentale domestico.

SPERIMENTAZIONE DIDATTICA

La sperimentazione didattica ha coinvolto una classe seconda liceo scientifico di ordinamento formata da 24 studenti, di cui un BES e un DSA.
Il percorso è stato proposto agli allievi come un project-work e si è sviluppato in fasi successive nei mesi da febbraio a maggio 2021:

- Fase 1: esercizi di *coding* con micro:bit.
- Fase 2: esecuzione delle misure.
- Fase 3: analisi dei dati.
- Fase 4: valutazione per competenze.

Fase 1: esercizi di *coding* con micro:bit

Il primo modulo del percorso didattico (due ore di lezione a distanza) ha avuto una funzione propedeutica alla realizzazione della successiva fase sperimentale. Gli studenti sono stati introdotti alla scheda micro:bit e alla programmazione a blocchi. Successivamente sono stati proposti esercizi di *coding* di difficoltà crescente da realizzare sulla piattaforma MakeCode, dapprima guidati dall'insegnante e poi in autonomia. Questa parte è stata svolta senza l'utilizzo diretto di schede micro:bit, dal momento che il risultato della programmazione si può visualizzare con il simulatore online di MakeCode.

Fase 2: esecuzione delle misure
Nella seconda parte del percorso didattico, gli studenti hanno lavorato in gruppi di tre in modalità asincrona, ovvero senza l'intervento diretto del docente. Ciascuno studente ha ricevuto in comodato d'uso una scheda micro:bit. Agli studenti sono state fornite le istruzioni per eseguire le misure richieste e, sulla base di queste, i gruppi hanno organizzato il proprio lavoro in autonomia, richiedendo l'aiuto del docente quando necessario.
In questa fase viene fatto notare agli studenti, attraverso la scheda di lavoro, che il sensore di intensità luminosa di micro:bit restituisce un valore tra 0 e 255. La misura non è quindi tarata in unità SI. Viene suggerito agli studenti di usare una unità di misura "di fantasia" (ad esempio il *bit-lux*) per esprimere i valori misurati.
Un fac-simile della scheda di lavoro può essere scaricato
(*https://docs.google.com/document/d/1DasCPVTWezTIr9FZWJE51lV1fNufKkZ82QZtQCF5P4w/template/preview*).

Fase 3: analisi dei dati
Anche l'analisi dei dati raccolti è stata condotta in modalità asincrona da ciascun gruppo. L'insegnate ha fornito le indicazioni per l'elaborazione dei dati all'interno di un foglio di calcolo appositamente strutturato e condiviso con gli studenti tramite l'abituale piattaforma di classe virtuale in uso in Istituto (Google Classroom).
All'interno del foglio di calcolo viene richiesto agli studenti di inserire le misure raccolte, di eseguire semplici operazioni di calcolo, di realizzare grafici e di rispondere ad alcune domande. L'analisi dei dati viene soprattutto guidata verso la scoperta della relazione matematica che lega l'intensità luminosa con la distanza dalla sorgente, giungendo ad identificare la relazione di proporzionalità quadratica inversa, una relazione di proporzionalità molto frequente in Fisica, ma poco esplorata in attività sperimentali nella scuola superiore.
Un fac-simile del foglio di calcolo guidato può essere scaricato
(*https://docs.google.com/spreadsheets/d/10K3M7hbaG1KFsKxWMleTFkHdHvUAJWg51oDH8mKpxvo/template/preview*).
Al termine della terza fase si è svolta l'unica lezione frontale in presenza di questo percorso, durante la quale sono stati visionati i lavori dei gruppi, commentando i risultati ottenuti e discutendo sulle conclusioni. In particolare si sono evidenziati alcuni errori nella realizzazione dei grafici e sono state fornite le indicazioni a riguardo.

Fase 4: valutazione per competenze
Come prodotto conclusivo del percorso, ciascun gruppo di studenti ha realizzato un tutorial sull'esperienza, in formato video, testo o presentazione. E' stato richiesto agli studenti di inserire nel tutorial i seguenti punti:
- come preparare il codice per micro:bit,
- come eseguire le misure,
- come analizzare i dati e interpretare i risultati.

La rubrica di valutazione è stata condivisa con gli studenti insieme alle consegne del compito.
Sono stati presi in considerazione quattro indicatori di valutazione:
- osservare, descrivere ed analizzare un fenomeno fisico,
- organizzare e rappresentare i dati raccolti per individuare le corrette relazioni tra grandezze fisiche,
- comunicare il procedimento in modo chiaro e con linguaggio corretto,
- utilizzare gli strumenti hardware e software (micro:bit, foglio di calcolo, documento di testo, video...),

che sono stati elaborati a partire dalle competenze di base a conclusione dell'obbligo di istruzione per l'asse scientifico-tecnologico, definite dal decreto del Ministero della Pubblica Istruzione n. 139 del 22/08/2007.
Per ogni indicatore sono stati previsti quattro diversi livelli di competenza (non sufficiente, base, intermedio, avanzato), come mostrato in Figura 2. Le valutazioni sono state assegnate individualmente ad ogni studente, dopo un breve colloquio di presentazione del lavoro del gruppo.

A - Osservare, descrivere ed analizzare un fenomeno fisico				
Livello	Non sufficiente	Base	Intermedio	Avanzato
Descrittore	Mancante e/o con molti errori	Parzialmente e/o con qualche errore	In modo corretto	In modo corretto ed approfondito
Punteggio	0	1	2	3
B - Organizzare e rappresentare i dati raccolti per individuare le corrette relazioni tra grandezze fisiche				
Livello	Non sufficiente	Base	Intermedio	Avanzato
Descrittore	Mancante e/o con molti errori	Parzialmente e/o con qualche errore	In modo corretto	In modo corretto ed approfondito
Punteggio	0	1	2	3
C - Comunicare il procedimento in modo chiaro e con linguaggio corretto				
Livello	Non sufficiente	Base	Intermedio	Avanzato
Descrittore	Mancante e/o con molti errori	Parzialmente e/o con qualche errore	In modo corretto	In modo corretto, approfondito ed originale
Punteggio	0	1	2	3
D - Utilizzare gli strumenti hardware e software (micro:bit, foglio di calcolo, documento di testo, video...)				
Livello	Non sufficiente	Base	Intermedio	Avanzato
Descrittore	Mancante e/o con molta difficoltà	Parzialmente e/o con qualche difficoltà	In modo corretto	In modo corretto ed efficace
Punteggio	0	1	2	3

Figura 2. Rubrica di valutazione per competenze utilizzata per la valutazione del prodotto finale dei gruppi.

Risultati della valutazione e feedback degli studenti

La sperimentazione didattica che ho descritto presenta alcune caratteristiche inusuali, trattandosi di una esperienza di laboratorio di Fisica svolta completamente in DAD e con l'uso di tecnologie innovative. Per questo è interessante analizzare sia i risultati ottenuti dagli studenti in termini di valutazioni conseguite sia le impressioni degli studenti, raccolte al termine delle attività.

La valutazione delle competenze ha previsto un punteggio massimo pari a 12. Il punteggio medio ottenuto dalla classe è stato di 9,3. Tutti gli studenti hanno superato la soglia di sufficienza (7,5 punti), mentre il 75% della classe ha raggiunto un livello intermedio o superiore (punteggio maggiore o uguale a 8). Il diagramma cartesiano in Figura 3 mette a confronto i punteggi ottenuti dagli studenti in questa prova (in ordinata) con la media delle valutazioni in Fisica ottenute dall'inizio dell'anno scolastico (in ascissa). La retta grigia rappresenta il punteggio atteso sulla base della media in Fisica da settembre. Gli studenti che si collocano sopra questa retta, cioè coloro che in questa prova hanno ottenuto una *performance* superiore alle attese, sono il 67% della classe. Si sono verificati quattro casi di studenti, con una media in Fisica vicina o superiore a 8, in cui la *performance* ottenuta è stata sensibilmente inferiore alle attese. Bisogna dunque tener presente che lavori di questo genere, pur dimostrandosi efficaci e motivanti anche per gli studenti più deboli, non sempre sono congeniali a tutti gli stili di apprendimento.

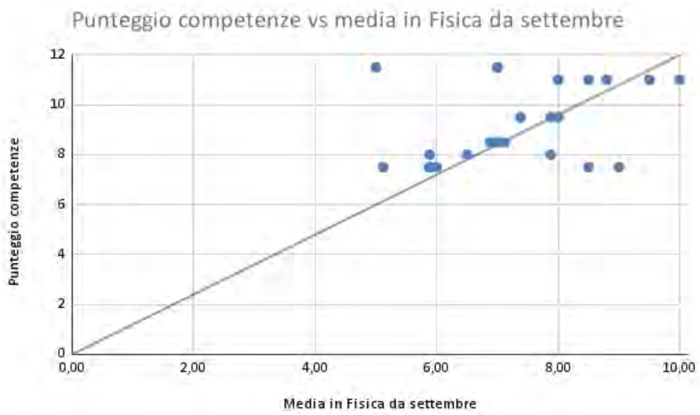


Figura 3. Il diagramma cartesiano riporta in ordinata i punteggi ottenuti dagli studenti nella valutazione delle competenze e in ascissa la media delle valutazioni in Fisica ottenute dall'inizio dell'anno scolastico. La retta grigia rappresenta il punteggio atteso sulla base della media in Fisica da settembre.

I feedback degli studenti sul percorso svolto sono stati raccolti attraverso un questionario online e attraverso il confronto diretto in classe. In particolare, ho ritenuto significativo valutare gli aspetti positivi e negativi dello svolgere questo tipo di attività a distanza.
Il diagramma a barre in Figura 4 mostra la distribuzione delle risposte degli studenti rispetto a tre domande: 1) E' stato difficile programmare micro:bit? 2) E' stato difficile svolgere questa attività a distanza? 3) Sei contento della valutazione che hai ricevuto?, in una scala da 1 a 5 punti.
Come si può osservare, per quanto riguarda le prime due domande, la distribuzione è sbilanciata verso il "poco". Nessuno studente ha indicato come "molto difficile" lo svolgimento dell'attività a distanza. Da un confronto in classe è ulteriormente emerso che, per qualche studente, l'aver svolto il lavoro a casa ha permesso loro di mettersi in gioco più di quanto avrebbero fatto in un lavoro di gruppo in presenza.

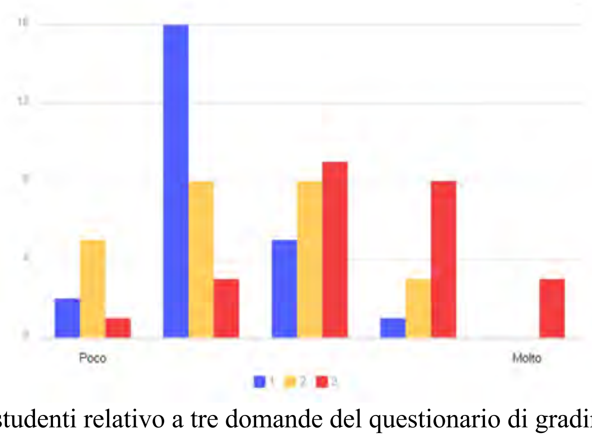


Figura 4. Feedback degli studenti relativo a tre domande del questionario di gradimento somministrato: 1) E' stato difficile programmare micro:bit? (blu) 2) E' stato difficile svolgere questa attività a distanza? (giallo) 3) Sei contento della valutazione che hai ricevuto? (rosso)

CONCLUSIONI

Nell'anno scolastico 2020/2021, contraddistinto da una alternanza di periodi di didattica in presenza con periodi di didattica a distanza, è stata condotta una sperimentazione didattica di laboratorio di Fisica in DAD che ha coinvolto una classe seconda di liceo scientifico di ordinamento. L'attività si è basata sull'utilizzo della scheda programmabile micro:bit per la misura dell'intensità luminosa ed è stata progettata prevedendo lezioni a distanza sincrone in videoconferenza e attività asincrone. Solo una lezione frontale è stata svolta in presenza in classe. Questa organizzazione ha permesso di dedicare le

lezioni in presenza allo svolgimento della programmazione didattica ordinaria, senza eliminare del tutto il laboratorio di Fisica. Inoltre, usufruendo del comodato d'uso della scheda micro:bit, gli studenti hanno avuto la possibilità di esplorare e sperimentare l'utilizzo di questa tecnologia per più tempo di quanto sarebbe normalmente possibile in classe e in laboratorio.
Le attività asincrone si sono basate su materiale predisposto *ad hoc* dal docente come guida per gli studenti, ma hanno anche permesso ai gruppi di organizzarsi autonomamente nelle tempistiche e nelle modalità di lavoro.
Per contro, poiché il numero di schede micro:bit disponibile per il comodato d'uso era inferiore al numero degli studenti della classe, le attività sperimentali sono state svolte in tempi diversi dai diversi gruppi, prolungando di molto i tempi di svolgimento dell'intera attività. Questo ha fatto sì che il percorso sia iniziato a febbraio e sia terminato soltanto a maggio.
Le attività di laboratorio hanno permesso di mantenere alta la motivazione degli studenti durante le lezioni in DAD, stimolando il lavoro pratico e la partecipazione attiva anche da casa. Inoltre, lo svolgimento dell'intero percorso ha permesso di sviluppare non solo competenze disciplinari specifiche, ma anche competenze trasversali, quali il *coding* e la produzione di materiali multimediali, e *soft skills* come la collaborazione all'interno del gruppo e l'autonomia di lavoro.
La maggior parte degli studenti si sono dichiarati soddisfatti del percorso svolto e della valutazione ricevuta, anche se alcuni studenti si sono trovati in difficoltà in una situazione di apprendimento diversa dal consueto.
La DAD è stata in parte un ostacolo ad un apprendimento più diretto e assistito dal docente, ma anche un'occasione per permettere agli studenti di imparare da soli, sperimentando liberamente una nuova tecnologia.

BIBLIOGRAFIA

Piccione, A., Saglietto, G., Serio, M., Marocchi, D., Bonino, R. and Rinaudo, M. (2021). Esperienze laboratoriali a distanza con le schede programmabili, *IUL Research* **2**, **3**, 237-250.

I DATI METEOROLOGICI COME STIMOLO PER L'ACQUISIZIONE DI COMPETENZE NELL'ANALISI DEI DATI E NELLE MISURE SPERIMENTALI

Maddalena Nicola, Daniela Marocchi, Marina Serio
Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Torino
maddalena.nicola@edu.unito.it

Abstract
Il lavoro si propone di presentare un percorso formativo didattico e laboratoriale svolto presso una classe seconda del Liceo Scientifico Alessandro Volta di Torino, in cui si è trattata la Meteorologia come stimolo per la creazione e la comprensione di grafici. Obiettivi dell'attività sono stati quindi l'uso di concetti e fenomeni meteorologici per rinforzare la capacità degli studenti di realizzare grafici, comprenderne il significato e scoprire alcune ulteriori modalità di analisi statistica dei dati e verificare se un approccio laboratoriale può essere utile per una maggiore comprensione degli argomenti, per stimolare interesse e per sviluppare la creatività degli studenti.
A causa della situazione epidemiologica, l'attività è stata sviluppata in parte in presenza in aula e in parte a distanza nei primi mesi del 2021. È cominciata con un pretest volto a evidenziare le conoscenze pregresse degli studenti, cui sono seguite alcune lezioni teoriche sulla Meteorologia che hanno permesso di introdurre le grandezze fondamentali e di definire concetti importanti come effetto serra, riscaldamento globale e cambiamenti climatici. Gli studenti hanno potuto costruire un barometro con materiale di uso comune e utilizzarlo per fare misure qualitative di pressione. L'ultima parte dell'attività ha riguardato l'analisi di dati meteorologici con il calcolo di valori medi ed errori e la realizzazione di grafici a partire dai dati stessi. Infine, è stato svolto un test per verificare le conoscenze apprese dagli studenti durante le attività e vedere come si sono modificate le misconcezioni rispetto al pretest.
Il progetto è stato ora in parte inglobato nel progetto Meteo Open Data@School, promosso dall'Ufficio Scolastico Regionale del Piemonte.

Parole-chiave
Meteorologia, Analisi statistica dei dati, Arduino, Grafici, Barometro

INTRODUZIONE

L'articolo presenta un percorso didattico attuato presso la classe 2A del Liceo Scientifico Alessandro Volta di Torino, durante il quale la Meteorologia è stata utilizzata come stimolo per l'acquisizione di competenze nell'analisi dei dati e nella costruzione di grafici.
La Meteorologia è un argomento che di solito non viene trattato nelle scuole secondarie di secondo grado, anche se molte delle grandezze di cui si occupa sono note agli studenti. Inoltre, la sua importanza viene amplificata dalla connessione con la problematica del riscaldamento globale, tema attuale che suscita interesse negli studenti.
È importante che si venga a contatto con questi temi fin dalla giovinezza, includendo le tematiche ambientali nell'insegnamento scolastico, perché gli studenti attuali saranno gli uomini del domani, che subiranno le conseguenze dei cambiamenti climatici e dovranno agire per limitarli. Tuttavia, "nonostante molte raccomandazioni provenienti dalla UE circa la necessità di innovare l'educazione scientifica di base per far sì che la scuola possa diventare un luogo di educazione alla cittadinanza, in particolare sensibilizzando gli allievi sui temi più attuali di carattere ambientale, il problema di formulare proposte didattiche significative è ancora aperto e ampiamente dibattuto" [Tasquier, 2013].

Anche tra i traguardi evidenziati dall'obiettivo 13 dell'agenda 2030 dell'ONU si sottolinea l'importanza di migliorare l'istruzione, la sensibilizzazione e la capacità umana e istituzionale per quanto riguarda la mitigazione del cambiamento climatico.
Obiettivi dell'attività proposta sono stati includere nella programmazione didattica le problematiche ambientali, stimolare gli studenti a osservare e identificare fenomeni, raccogliere e analizzare dati, realizzare grafici e comprenderne il significato, formulare ipotesi, scrivere relazioni, che sono anche gli obiettivi in Fisica per il Liceo Scientifico proposti dal MIUR. Tutto il percorso è stato realizzato utilizzando un approccio laboratoriale che favorisse la comprensione degli argomenti sviluppando, allo stesso tempo, interesse e creatività.

ATTIVITÀ SVOLTA

L'attività è stata svolta al Liceo Volta tra gennaio e marzo 2021 e inserita in un progetto più ampio attivo nell'Istituto attraverso un percorso di PCTO per la costruzione di una stazione meteorologica tramite l'utilizzo di sensori Arduino.
Con gli studenti sono state svolte 7 ore di lezione (5 in presenza e 2 online): 2 ore sono state dedicate all'introduzione teorica sui concetti meteorologici, 1,5 alla costruzione di un barometro e alla discussione dei risultati osservati dagli studenti e 3,5 all'introduzione dell'analisi statistica con analisi di dati meteorologici e costruzione di grafici. Alle 7 ore di intervento diretto vanno poi aggiunti i tempi per il pretest iniziale, per la verifica finale e quello dedicato a casa dagli studenti per finire le attività proposte in classe.

Pretest

Il pretest aveva l'obiettivo di verificare le conoscenze pregresse degli studenti sia relativamente alla costruzione di un grafico e al calcolo di media ed incertezza, sia nell'ambito delle grandezze e dei fenomeni meteorologici, fra cui la differenza tra meteo e clima. Il test è stato preparato utilizzando un modulo di Google ed era composto da 11 domande a risposta multipla da motivare e da 5 domande aperte.
Le criticità maggiori sono state evidenziate nei seguenti ambiti:

- Riconoscere gli elementi necessari per la costruzione di un grafico (titolo, grandezze sugli assi, unità di misura, errori, uso della scala corretta sugli assi)
- Riportare i risultati con il corretto numero di cifre significative
- Calcolare le incertezze
- Evidenziare la differenza tra meteo e clima

Lezioni teoriche sulla Meteorologia

Durante la prima parte dell'attività è stato spiegato agli studenti il concetto di Meteorologia, illustrando la sua evoluzione storica, le grandezze fondamentali e gli strumenti di misura. Gli studenti hanno potuto riflettere sulla differenza tra clima e meteo e conoscere i meccanismi di formazione di nubi e pioggia. Infine, si è parlato di cambiamenti climatici, riscaldamento globale ed effetto serra e si è fatto un accenno ai modelli meteorologici e agli scenari climatici.
Gli studenti si sono mostrati interessati alle tematiche proposte e hanno partecipato attivamente alle lezioni. Ha destato maggiore interesse la parte riguardante i cambiamenti climatici e il riscaldamento globale, tematica molto attuale che sta a cuore ai giovani.

Costruzione di un barometro

Le attività laboratoriali hanno un ruolo essenziale nell'insegnamento scientifico, perché permettono di comprendere meglio e più facilmente i concetti trattati, insegnano come usare gli strumenti e come analizzare i dati e favoriscono lo sviluppo di capacità collaborative e l'abilità a lavorare in gruppo. [Leung et al. 2017]

Quindi, per dare un taglio laboratoriale all'attività e stimolare l'interesse, la creatività e le capacità manuali degli studenti, è stato proposto loro di costruire un barometro utilizzando materiale di uso comune: hanno chiuso un barattolo di vetro con un palloncino, attaccato ad una cannuccia, alla cui estremità era infilato un ago in grado di variare la propria posizione in base alla variazione di pressione: l'ago si alza con l'alta pressione e si abbassa per la bassa pressione.
Il funzionamento dello strumento non è stato spiegato in anticipo agli studenti ma è stato chiesto loro di scrivere una relazione riportando le osservazioni compiute nel corso di una settimana e illustrando il funzionamento del barometro. Successivamente hanno potuto confrontare i loro dati con quelli misurati dalla stazione meteo del Dipartimento di Fisica (http://www.meteo.dfg.unito.it/principali) e fare ipotesi sul motivo di eventuali discrepanze.
La maggior parte degli studenti ha svolto l'attività con impegno evidenziando correttamente il funzionamento dello strumento e fornendo una spiegazione plausibile sulla causa delle eventuali discrepanze. Ad esempio, alcuni studenti hanno sottolineato che gli strumenti costruiti da loro sono meno precisi e sensibili del barometro della stazione di Fisica; sono state riscontrate differenze perché alcuni studenti hanno svolto misurazioni all'interno, mentre la stazione meteo del Dipartimento di Fisica compie misurazioni all'esterno; la stazione di Fisica è a Torino, ma non tutti gli studenti vivono in città e quindi la pressione può cambiare in una diversa località geografica.

Figura 1. Barometro costruito da uno degli studenti.

Analisi di dati sperimentali
Nella parte conclusiva dell'attività sono stati richiamati i concetti di misura, incertezza, propagazione degli errori, media e cifre significative ed è stata ricordata la sequenza di azioni necessarie per costruire grafici. Nello studio della Fisica è infatti molto importante che gli studenti sviluppino competenze nella costruzione e nell'interpretazione di grafici, che ricoprono un ruolo fondamentale nella risoluzione di problemi in Fisica. [Pospiech et al. 2019]. Gli studenti hanno potuto effettuare un'analisi statistica di grandezze meteorologiche utilizzando i dati raccolti dalla stazione meteo del Dipartimento di Fisica e dalla stazione Arduino della loro scuola e hanno realizzato grafici con i dati analizzati. L'analisi è stata svolta adoperando come strumento di calcolo i fogli di lavoro di Google. Le tipologie di analisi effettuate dagli studenti e le possibili riflessioni ad esse collegate sono riportate in Tabella 1.

Tabella 1. Analisi dei dati effettuate dagli studenti

Provenienza dei dati	Grandezze in esame	Analisi e riflessioni
Stazione meteorologica del Dipartimento di Fisica	Temperatura media, massima e minima annuale dal 2005 al 2020	Riflettere sul concetto di riscaldamento globale
	Temperatura, pressione, umidità relativa medie mensili dal 2016 al 2020	Osservare le relazioni tra le diverse grandezze
	Temperatura, pressione, umidità relativa ogni minuto dalle ore 11 del 31/12/2020 alle ore 23.59 del 31/12/2020	Riflettere sui concetti di media, media mobile, deviazione standard e calcolo dell'errore
Stazione Arduino	Temperatura, pressione, umidità relativa ogni 500 ms per circa 43 minuti	Riflettere sui concetti di media, media mobile, deviazione standard e calcolo dell'errore

Durante l'attività sono stati evidenziati errori che ricorrevano frequentemente nel lavoro di parecchi studenti:

- Calcolando media e deviazione standard nessuno ha riportato il risultato con il corretto numero di cifre significative
- I grafici non venivano costruiti nel modo corretto: mancano titolo, grandezze e unità di misura sugli assi; la scala sull'asse x è spesso mancante e sull'asse y non adeguata a rappresentare correttamente l'andamento dei dati
- Non sempre erano rappresentate nel grafico le barre d'errore e, quando riportate, spesso non lo erano con le corrette dimensioni

La figura 2 illustra un esempio di grafico realizzato da uno studente, in cui si possono riscontrare gli errori sopra citati.

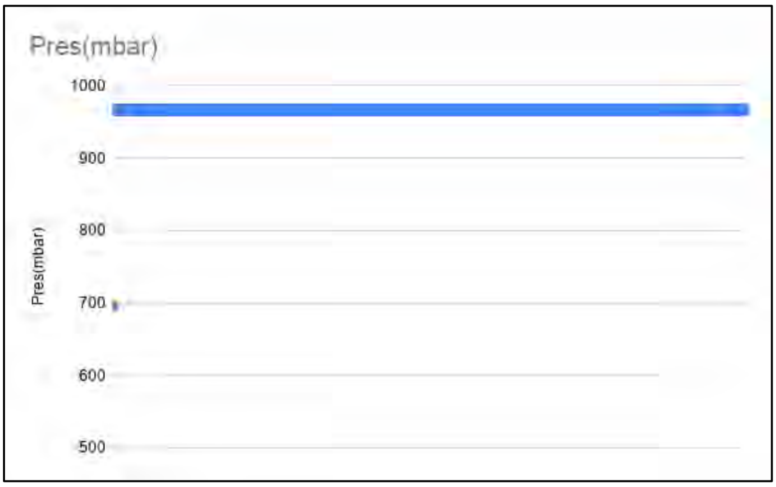


Figura 2. Grafico realizzato da uno studente.

Nell'utilizzo del foglio di calcolo la maggior parte degli studenti ha inserito i comandi in modo esatto nel foglio di lavoro, ma non si è preoccupata di riportare poi i risultati in modo corretto. Ad esempio, nel calcolo della media sono state lasciate tutte le cifre fornite dal foglio di calcolo, senza preoccuparsi delle cifre significative, e nella costruzione dei grafici sono state inserite le barre d'errore senza una corrispondenza con il reale valore dell'errore.

ANALISI DELL'ATTIVITÀ

Al termine dell'attività agli studenti è stata somministrata una verifica, sempre tramite Google Moduli, composta da 15 domande a risposta multipla e richiesta di motivazione. Sono state proposte domande simili a quelle del pretest, con l'obiettivo di verificare se l'attività fosse servita a comprendere concetti prima poco chiari. Inoltre, sono state poste domande nuove inerenti agli argomenti di Meteorologia trattati per verificare cosa gli studenti avessero imparato sull'argomento nuovo introdotto durante l'attività. Di seguito vengono analizzate le domande più significative.

Riconoscere gli elementi necessari per un grafico
Una delle domande chiedeva agli studenti di indicare quale fosse il grafico rappresentato correttamente, tra alcune immagini di grafici proposte. Nel pretest l'87% degli studenti ha indicato come corretto il grafico riportato in figura 3, motivando che la linea che unisce i punti rende più chiaro il cambiamento. Soltanto due studenti hanno risposto correttamente, ma non hanno fornito la motivazione corretta.

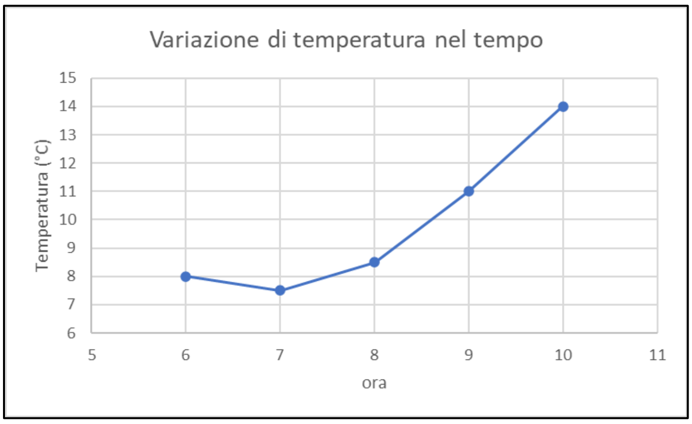


Figura 3. Grafico rappresentato correttamente secondo la maggior parte degli studenti nel pretest.

Nella verifica invece il 73% degli studenti ha scelto la risposta esatta indicando il grafico riportato in figura 4, e ha fornito una motivazione più o meno corretta. In questo caso solo il 23% degli studenti ha indicato come esatto il grafico riportato in figura 3.

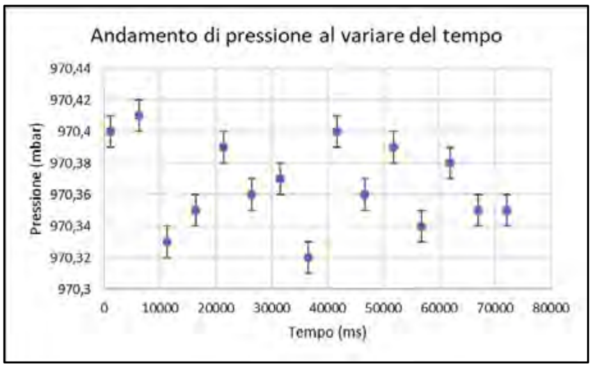


Figura 4. Grafico rappresentato correttamente secondo la maggior parte degli studenti nella verifica.

Calcolo del valore medio
Nel pretest solo il 21% degli studenti è riuscito a calcolare e riportare correttamente i valori medi di temperatura richiesti. Per il resto sono stati evidenziati errori di arrotondamento (25%), valori riportati con errato numero di cifre significative (12%), valori che riportano sia errori di arrotondamento che di cifre significative (17%) oppure altri errori di calcolo (25%). Nella verifica invece il calcolo esatto è

stato fatto dal 58% degli studenti, mentre il 31% ha fatto errori di arrotondamento e l'11% di cifre significative.

Differenza tra clima e meteo

È stato chiesto agli studenti se è possibile stimare in modo scientifico una previsione per il tempo meteorologico a Torino tra un mese o per il clima di Torino tra 30 anni. Le tabelle seguenti riportano le risposte dei test.

Tabella 2. Risposte date dagli studenti alla richiesta "è possibile stimare in modo scientifico una previsione per il tempo meteorologico a Torino tra un mese". Confronto tra pretest e verifica.

	Pretest	**Verifica**
Campione totale	24	26
Vero (risposta sbagliata)	10	12
Falso (risposta esatta)	14	14

Tabella 3. Risposte date dagli studenti alla richiesta "è possibile stimare in modo scientifico una previsione per il clima di Torino tra 30 anni". Confronto tra pretest e verifica.

	Pretest	**Verifica**
Campione totale	24	26
Vero (risposta esatta)	7	24
Falso (risposta sbagliata)	17	2

Come si può notare dalla tabella 2, il concetto di tempo meteorologico non è risultato più chiaro dopo l'attività, anche se dall'analisi delle motivazioni fornite, sia per la risposta corretta che per quella sbagliata, si nota che nella verifica sono più inerenti alla realtà. Ad esempio tra le motivazioni sbagliate nel pretest si trova "dalle stazioni spaziali è possibile vedere le nuvole in avvicinamento e ipotizzare la quantità di acqua che contengono" oppure "conoscendo la posizione della terra rispetto al sole e le correnti posso ipotizzare la previsione tra un mese", mentre nella verifica le motivazioni sbagliate sono "conoscendo le temperature degli anni passati e le variazioni che vi sono state quest'anno la temperatura tra un mese può essere stimata", "è possibile anche se le previsioni spesso sbagliano per fattori casuali o imprecisioni dello strumento".

La definizione di clima invece sembra essere stata compresa dagli studenti durante l'attività, in quanto quasi tutti hanno risposto correttamente nella verifica, mentre nel pretest molti avevano sbagliato. Anche in questo caso le motivazioni fornite nella verifica sono più verosimili. Nel pretest le motivazioni di chi ha risposto correttamente sono ad esempio "il clima rimane quasi sempre uguale", "gli studiosi sanno più o meno a cosa andremo incontro", "i meteorologi, guardando agli anni, passati possono fare una previsione"; nella verifica si trova invece "il clima è l'insieme delle condizioni medie di una regione per un periodo di almeno 30 anni", "il clima si può prevedere su un lungo lasso di tempo", "i dati si ricavano dalle medie delle condizioni in un luogo e ci possono essere più ipotesi di previsioni".

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

L'attività ha avuto un esito positivo: il docente ha espresso soddisfazione, ritenendo l'attività chiara, interessante e utile per stimolare gli studenti, sia dal punto di vista dell'analisi statistica sia dei concetti

meteorologici. Ha inoltre manifestato l'intenzione di riprendere l'attività nell'anno scolastico 2021/2022, in modo da coinvolgere gli studenti e invogliarli a partecipare ai progetti di PCTO organizzati dalla scuola; infine, ha espresso la volontà di usare anche autonomamente l'attività o parte di essa negli anni seguenti sottolineando come attività analoghe vadano svolte più frequentemente nelle scuole superiori.
Anche gli studenti hanno trovato chiari e interessanti gli argomenti trattati e hanno evidenziato quanto l'alternanza tra lezioni teoriche e pratiche sia utile alla comprensione, sottolineando il desiderio di provare anche in seguito esperienze didattiche analoghe. La valutazione del gradimento degli studenti è stata effettuata per mezzo di una scala di Likert, in cui gli studenti hanno potuto fornire una valutazione esprimendo un giudizio compreso tra 1 e 5, dove 1 significa "completo disaccordo" e 5 significa "completo accordo".

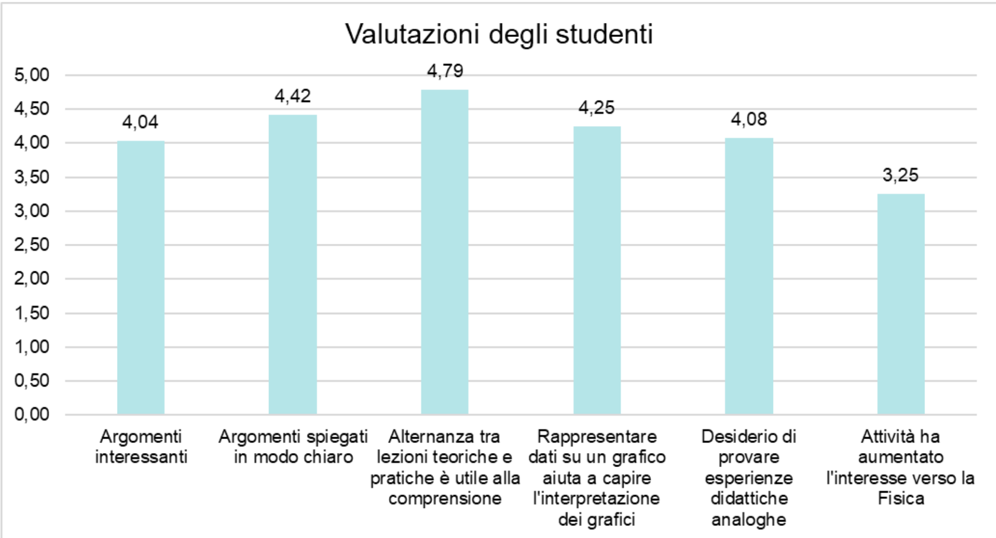


Figura 5. Analisi di gradimento degli studenti.

In conclusione, riteniamo che l'attività possa essere proposta anche in altre classi/scuole, permettendo fra l'altro di verificare la differente ricezione del progetto da parte di studenti che provengono da un background differente.
Per estendere l'attività ad altre realtà, essa è stata inserita nel progetto Meteo Open Data@School, promosso dall'Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte e dal Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino. L'intento è di creare una rete territoriale di scuole impegnate nelle misure di grandezze meteorologiche e del livello di inquinamento con strumentazione a basso costo. I dati raccolti saranno condivisi in modo da realizzare un archivio regionale di Open Data disponibili per unità didattiche su analisi e rappresentazione dei dati, proposte sulla base del percorso didattico illustrato in questo articolo.

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia il Professor Guido Robotti, docente del Liceo Volta di Torino, per la disponibilità e il supporto dimostrati per la buona riuscita del progetto. Grazie agli studenti della classe 2A dell'anno scolastico 2020/21 per aver partecipato con interesse e impegno alle attività proposte. Grazie ai Professori Andrea Piccione e Davide Bertoni per aver reso disponibili, rispettivamente, i dati relativi alle misurazioni Arduino e alle misurazioni effettuate dal Dipartimento di Fisica.

BIBLIOGRAFIA

Basset, A.,& Cipparone, M. (2006). Esplorare un confine. Spunti e proposte di attività didattiche per lo studio delle zone unide e degli ambienti acquatici di transizione,ESE Publications, siba-ese.unisalento.it 2006(1) ISBN 88-8305-047-9 (e-version)

Leung, A. C., Hashemi Pour, B., Reynolds, D., & Jerzak, S. (2017). New assessment process in an introductory undergraduate physics laboratory: an exploration on collaborative learning. *Assessment & Evaluation in Higher Education,* 42(2), 169-181.

McCaffrey, M. S., & Buhr, S. M. (2008). Clarifying climate confusion: Addressing systemic holes, cognitive gaps, and misconceptions through climate literacy. *Physical Geography*, *29*(6), 512-528.

Pospiech, G., Geyer, M. A., Ceuppens, S., De Cock, M., Deprez, J., Dehaene, W., ... & Stefanel, A. (2019, August). Role of graphs in the mathematization process in physics education. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1287, No. 1, p. 012014). IOP Publishing.

Tasquier, G. (2013). Cambiamenti climatici e insegnamento/apprendimento della fisica: una proposta didattica. *Giornale di Fisica*, 54(3).

SITOGRAFIA

http://www.meteo.dfg.unito.it/principali

https://www.miur.gov.it/scuola-secondaria-di-secondo-grado

https://unric.org/it/obiettivo-13-promuovere-azioni-a-tutti-i-livelli-per-combattere-il-cambiamento-climatico/

https://www.wikihow.it/Costruire-un-Barometro-Rudimentale

Micro:bit in laboratorio: una sperimentazione didattica.

Antonio Prevignano
Liceo scientifico statale "Antonio Gramsci" - Ivrea
prevignano.antonio@lsgramsci.edu.it

Abstract
La comunicazione riferisce di una sperimentazione didattica svolta nella primavera 2021 con due classi del biennio LS-OSA. La sperimentazione ha lo scopo principale di rinnovare il modo in cui si insegna la Fisica nel biennio della scuola secondaria superiore, privilegiando la parte laboratoriale/sperimentale e avvicinando gli allievi alle problematiche della programmazione software per realizzare dispositivi di misura.
La sperimentazione è strutturata in due attività. La prima attività parte dall'osservazione di una scheda micro:bit sulla quale è già caricato un codice funzionante. Gli allievi scoprono che strumento di misura è e come funziona, successivamente riconoscono da una serie di immagini il sorgente a blocchi corrispondente, scrivono le istruzioni d'uso, progettano e realizzano una variante.
La seconda attività parte da un video in cui si vede un astronauta che utilizza la bilancia inerziale per "pesarsi". Gli allievi, guidati dal docente, scoprono che strumento di misura è e come funziona, successivamente progettano e realizzano con il linguaggio a blocchi, guidati dal docente, il codice micro:bit corrispondente, scrivono le istruzioni d'uso, progettano e realizzano lo strumento. Gli allievi infine utilizzano lo strumento e un foglio di calcolo per effettuare una misura.

Parole-chiave
DAD, Fisica, micro:bit , laboratorio.

INTRODUZIONE

L'analisi dei risultati di apprendimento degli scorsi anni ha evidenziato come le difficoltà in fisica si concentrino nel primo biennio.
La sperimentazione si propone di

- contribuire a cambiare la metodologia di insegnamento della fisica nel biennio, privilegiando la parte laboratoriale/sperimentale da utilizzare come punto di partenza per sviluppare la teoria e non viceversa
- avvicinare ai concetti base della Fisica (misurare, acquisire dati) attraverso l'uso di una scheda programmabile e un linguaggio di programmazione a blocchi
- mettere a punto moduli didattici applicabili in presenza o a distanza

L'idea di questa sperimentazione nasce il 13 febbraio 2020, alla giornata di formazione per insegnanti presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino (Unito), e si concretizza grazie ai webinar organizzati dal Dipartimento di Fisica Unito in collaborazione con l'Équipe Formativa Territoriale dell'USR Piemonte nel mese di gennaio 2021. L'inizio dell'emergenza sanitaria nel corso dello stesso mese di febbraio 2020 ci ha messi di fronte alla necessità di svolgere l'azione didattica anche a distanza e di convivere con le molte limitazioni per l'accesso ai laboratori durante le fasi di insegnamento in presenza. Nella nostra scuola la sperimentazione prende quindi il via in due classi prime parallele LS-OSA al Liceo Gramsci di Ivrea durante il secondo periodo dell'anno scolastico 2020/2021 (prima attività). Si prevede il completamento della sperimentazione con gli stessi gruppi nel corso dell'anno scolastico 2021/2022 (seconda attività), collegandosi con gli argomenti del programma di Fisica del secondo anno.

ATTIVITÀ 1 – TERMOMETRO

Nota per il docente
L'attività parte dalla presentazione di una scheda micro:bit sulla quale è già caricato il codice del Termometro. Gli allievi dovranno scoprire che strumento di misura è e come funziona, dovranno successivamente riconoscere da una serie di immagini il codice a blocchi corrispondente, scrivere le istruzioni d'uso dello strumento, progettare, realizzare e documentare una modifica.

Pre-requisiti
Conoscere il significato di misura di una grandezza fisica.

Obiettivi di apprendimento
Gli obiettivi di apprendimento specifici per questa attività sono:
- Riconoscere la funzione di uno strumento di misura attraverso il suo utilizzo pratico.
- Riconoscere analogie e differenze tra lo strumento di misura e la sua realizzazione come programma micro:bit.
- Comprendere il funzionamento dello strumento realizzato con micro:bit attraverso il suo utilizzo pratico e riconoscere l'immagine del codice sorgente a cui corrisponde.
- Scrivere e mettere in funzione il programma.
- Documentare e collaudare lo strumento di misura.
- Ideare, realizzare, documentare e collaudare una variante dello strumento di misura

Risorse
Alcuni termometri, alcune immagini di sorgenti a blocchi fra cui quella del termometro, un computer con Google Chrome e la connessione internet, una scheda micro:bit.

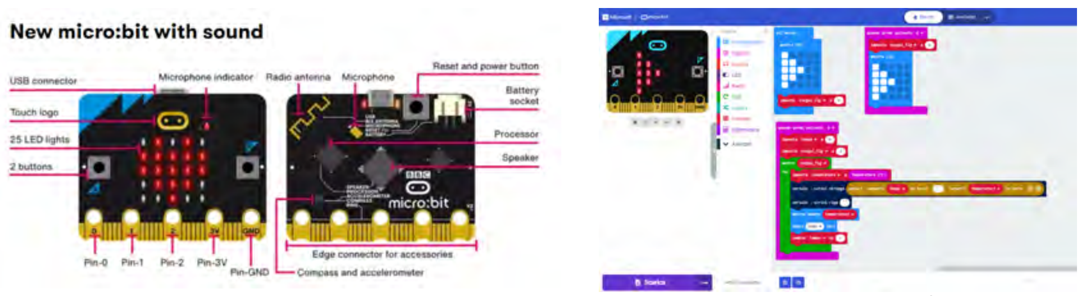


Figura 1. La scheda micro:bit e l'ambiente di programmazione a blocchi Microsoft® Makecode.

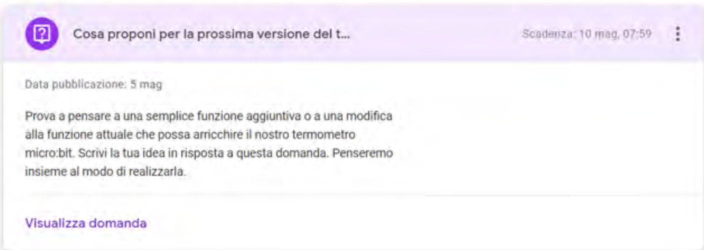
Programmazione didattica

Unità 1 (3 ore) – alla scoperta di micro:bit.
La prima ora si svolge in aula. Il docente guida all'osservazione del funzionamento di termometri di diverso tipo, e modera la discussione su analogie e differenze. Il docente propone l'osservazione della funzione termometro nella scheda micro:bit precedentemente programmata. Questa attività si completa con un quiz sulla piattaforma digitale della classe: l'allievo riconosce fra quattro immagini quella del programma che sta girando nella scheda.

La seconda e terza ora si svolgono in laboratorio o in DAD. Il docente offre una panoramica sull'ambiente Microsoft® Makecode e sul linguaggio di programmazione a blocchi. Segue un'attività di familiarizzazione con Microsoft® Makecode. Il docente guida gli allievi alla creazione di un progetto, alla scrittura di un semplice codice per il termometro, all'utilizzo del simulatore, al salvataggio del codice su computer, all'importazione del codice dal computer, e allo scaricamento del codice sulla scheda. Gli allievi seguono le istruzioni e interagiscono fra di loro e con il docente. Al termine tutti gli allievi avranno realizzato sul loro computer una copia funzionante su simulatore del programma proposto dal docente.

Unità 2 (3 ore) – progettazione e realizzazione di una variante del termometro.
La prima e la seconda ora si svolgono in laboratorio o in DAD. Gli allievi avranno nel frattempo risposto da casa un compito sulla piattaforma digitale della classe, ideando una variante del termometro, per esempio con la possibilità di scegliere la scala termometrica, oppure di emettere un allarme nel caso di superamento di un valore soglia della temperatura. Il docente avrà formato coppie di allievi sulla base dell'affinità delle proposte. Le coppie di allievi, con l'assistenza del docente, progettano e realizzano la loro proposta, collaudandola con il simulatore. Scrivono le istruzioni del nuovo strumento di misura così ottenuto. Consegnano codice e istruzioni sulla piattaforma digitale della classe.

La terza ora si svolge in aula. Le coppie presentano alla classe il loro termometro illustrandone il funzionamento previsto dalle istruzioni e poi eseguendone il codice sulla scheda micro:bit. L'attività termina con una valutazione del lavoro di ogni coppia di allievi da parte del docente, con il contributo della classe.



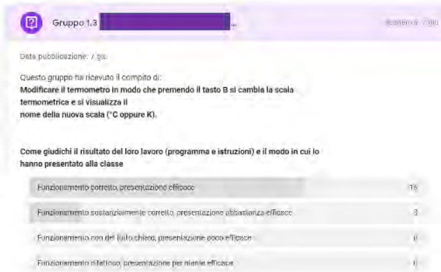


Figura 2. La domanda-stimolo per ideare la variante e la scheda del contributo alla valutazione finale

ATTIVITÀ 2 – BILANCIA INERZIALE

Nota per il docente
L'attività parte da un video dove si vede un astronauta che utilizza la bilancia inerziale per "pesarsi". Gli allievi, guidati dal docente, dovranno scoprire che strumento di misura è e come funziona, dovranno successivamente progettare e realizzare con il linguaggio a blocchi, guidati dal docente, il codice micro:bit corrispondente, scrivere le istruzioni d'uso, progettare e realizzare lo strumento. Gli allievi dovranno infine utilizzare lo strumento e un foglio di calcolo per "pesare" la scheda micro:bit con le annesse batterie.

Pre-requisiti
Conoscere il significato di misura di una grandezza fisica. Conoscere le basi della programmazione a blocchi.

Obiettivi di apprendimento
Gli obiettivi di apprendimento specifici per questa attività sono:
- Riconoscere il principio di funzionamento di uno strumento di misura osservando il suo utilizzo pratico.
- Utilizzare una legge fisica per calcolare il valore atteso di una misura.
- Definire la specifica funzionale dello strumento di misura da realizzare con micro-bit.
- Progettare il codice a blocchi che realizzi la specifica funzionale.
- Scrivere e mettere in funzione il programma.
- Scrivere le istruzioni d'uso e usarle per collaudare lo strumento di misura.

Risorse
Video della bilancia inerziale, un computer con Google Chrome, foglio di calcolo elettronico, connessione internet, 10-15 schede micro:bit, 10-15 molle elastiche.

Programmazione didattica

Unità 1 (2 ore) – alla scoperta della bilancia inerziale.
La prima ora si svolge in aula, con l'osservazione guidata dal docente del video con l'astronauta che si pesa con la bilancia inerziale, e la formulazione guidata dal docente della legge fisica che dà il periodo di oscillazione del sistema massa-molla. Segue la discussione guidata sulla possibilità di realizzare una bilancia inerziale con la scheda micro:bit, la scelta del sensore micro:bit da utilizzare, e la necessità di una fase di elaborazione dei dati letti dalla scheda e trasferiti al computer. Il docente tiene traccia della discussione e al termine di questa attività condivide il funzionamento che dovrà avere lo strumento

La seconda ora si svolge in laboratorio o in DAD. Gli allievi, assistiti dal docente, scrivono il codice e ne verificano il buon funzionamento con il simulatore. Gli allievi salvano il codice realizzato.

Unità 2 (4 ore) – realizzazione e collaudo.
Prima e seconda ora, in laboratorio. Gli allievi scaricano nella scheda micro:bit il codice della bilancia inerziale realizzato in precedenza e ne verificano il buon funzionamento collegando la schema al sistema massa-molla reso disponibile dal docente. Gli allievi, guidati dal docente, scoprono come utilizzare i dati trasmessi al computer per ottenere la misura indiretta della massa oscillante, e per definire portata e sensibilità della bilancia inerziale. L'attività termina con la scrittura delle istruzioni della bilancia inerziale

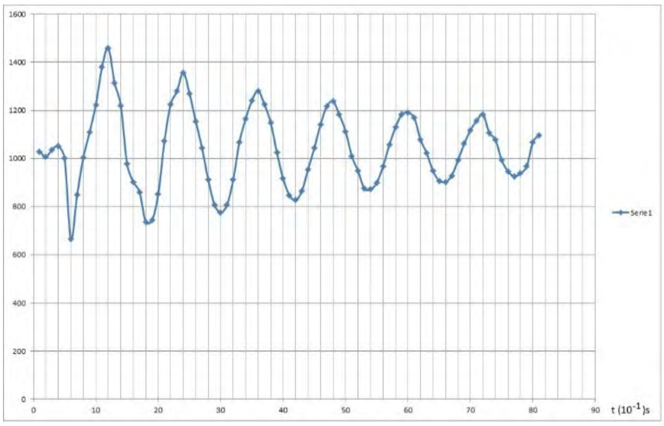


Figura 3. Esempio di elaborazione grafica dei dati dell'accelerometro

Terza e quarta ora, laboratorio. Gli allievi, organizzati in coppie, collaudano reciprocamente lo strumento di misura della compagna, o del compagno.
L'attività termina con la presentazione del lavoro di ogni coppia di allievi, e con la valutazione da parte del docente con il contributo della classe.

CONCLUSIONI

Esaminandola dal punto di vista della tassonomia di Anderson e Krathwohl la sperimentazione ha attivato un ampio spettro di processi cognitivi:

- riconoscere
- comprendere
- applicare

- differenziare
- valutare
- creare

su contenuti

- fattuali: il termometro
- concettuali: la scheda micro:bit che svolge la funzione di termometro
- procedurali: il codice a blocchi del termometro
- meta-cognitivi: non spiego il programma che ho scritto, spiego il funzionamento dello strumento con il mio programma a bordo

Gli allievi hanno inoltre acquisito una prima familiarità con la programmazione di uno strumento di misura, trasformando il vincolo della didattica a distanza nell'opportunità di intrecciare il lavoro di discussione e di confronto in presenza con il lavoro di applicazione al computer da casa.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio la prof.ssa Marina Serio, del Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino e il prof. Andrea Piccione, dell'Équipe Formativa Territoriale dell'USR Piemonte, per i loro interventi formativi e per l'assistenza, anche pratica, durante il progetto.

BIBLIOGRAFIA

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of educational objectives: Complete edition*, New York: Longman.
Organtini, G. (2021). *Fisica con Arduino*, Bologna: Zanichelli
Trinchero, R. (2016). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*, Milano: Franco Angeli

SITOGRAFIA

Micro:bit Educational Foundation (ultimo accesso: 20 febbraio 2022). https://www.microbit.org
Microsoft® MakeCode for micro:bit (ultimo accesso: 20 febbraio 2022) https://makecode.microbit.org

CLIMA: MISURE, STUDIO E ANALISI DATI

Prof. Guido Robotti
robotti.guido@liceovolta.eu

Abstract
Il progetto di un esperimento scientifico nasce da una idea e viene sviluppato attraverso numerose fasi. Queste vanno dallo studio della teoria che si vuole testare, dalle grandezze che si vogliono misurare, dalla scelta degli esperimenti che verranno condotti e, dunque, la costruzione e la taratura degli strumenti, la scrittura del codice, la raccolta e l'analisi dei dati, la pubblicazione e la condivisione dei risultati.
Questo è quanto, nel campo della meteorologia e della climatologia, si è cercato di fare in "background". In background perché la volontà è stata quella di mantenere la figura del docente in una posizione di coordinamento dei lavori degli studenti. Sono stati loro, dunque, gli artefici e i *makers* di tutte le fasi del progetto.
La figura del docente è stata, e sarà nel tempo, essendo il progetto permanente nell'offerta formativa del liceo, quella di muoversi nell'ottica di una "flipped learning", dove il docente si pone come facilitatore.

Parole-chiave
Meteo; Arduino; elettronica; coding; analisi dati.

IL PROGETTO

L'idea nasce dalla volontà di organizzare e sfruttare lo slancio emozionale degli studenti. La partecipazione attiva agli eventi di "Friday for Future" appare come un'occasione che debba essere sfruttata per porre gli studenti al centro del processo educativo-formativo e per indirizzare opportunamente le loro energie.
Nel liceo Volta è già presente un progetto denominato sVoltaGreen che si occupa, sempre con la presenza attiva e decisionale degli studenti, di riciclaggio della carta e della plastica per arrivare allo smontaggio di dispositivi elettronici obsoleti e al riciclaggio delle parti che contemporaneamente hanno ancora un valore economico e sono fortemente inquinanti. Il coordinamento con questo progetto è apparso subito un valore aggiunto.

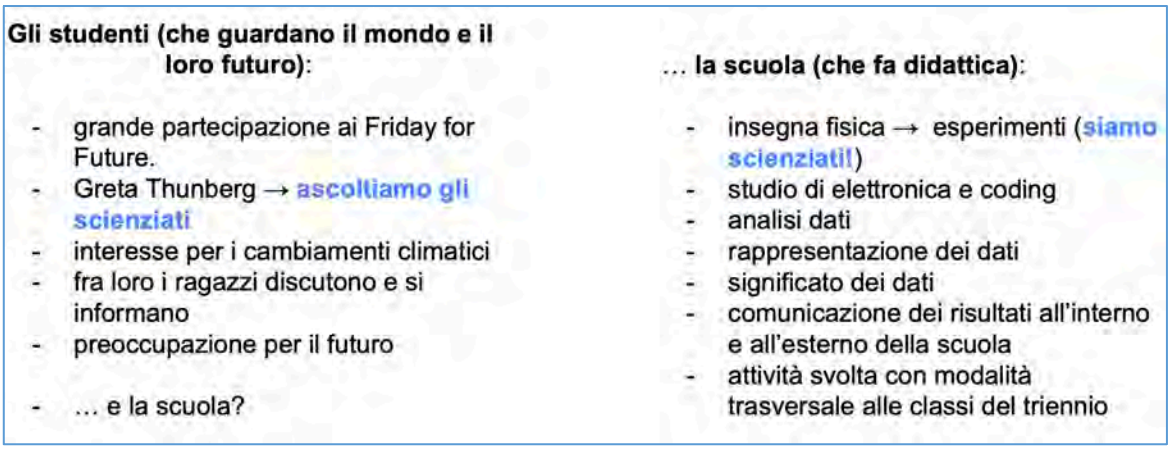


Figura 1. Il progetto visto da un'angolazione didattica

Gli studenti dunque partecipano attivamente alla decisione di quali grandezze verranno misurate.
La scelta è stata:

- Umidità
- Pressione
- Temperatura
- PM 10 e PM 2.5

Gli strumenti di misura sono sensori collegati alla scheda elettronica Arduino, la scelta dei quali passa attraverso test di comparazione tra sensori diversi.
Questa parte è risultata molto interessante perché ha permesso di notare tra le caratteristiche sia la precisione, sia la prontezza nella risposta. Nel senso che alcuni strumenti di misura prima di restituire valori *sensati* danno alcuni dati privi di significato. L'architettura dei circuiti è tale per cui ogni circuito è costruito in maniera differente da gruppi diversi di studenti: sono circuiti sufficientemente complessi da prevedere diverse possibilità di realizzazione. Quindi architetture circuitali diverse da caso a caso. Vengono poi confrontati, tarati e alla fine viene scelto il circuito più performante.
La parte di coding viene studiata in funzione di come si vuole che i dati vengano raccolti per essere successivamente analizzati. Diverse volte gli studenti si sono trovati nelle condizioni di studiare con attenzione delle alternative per l'installazione di opportune librerie o parti di codice, il quale viene spesso modificato in funzione del feedback che arriva dall'analisi dei dati, ovvero dalla necessità di avere gli stessi organizzati e differenziati nel modo che si rende più opportuno.
Tra le competenze che acquisiscono gli studenti vi è anche quella, prettamente laboratoriale che va dalla saldatura dei componenti, alla costruzione dei circuiti (Figura 2).

Figura 2. Saldatura e collegamenti di un sensore BME-280

Uno degli obiettivi principali di questo progetto è quello di dare agli studenti la necessaria consapevolezza dei cambiamenti climatici in atto, attraverso lo studio dei dati storici reperibili in rete, ma anche attraverso misure meteorologiche effettivamente svolte.
Il timing del progetto ha seguito il seguente percorso:

- 2020/2021: studio del progetto, formazione laboratoriale per gli studenti, costruzione delle prime centraline nell'ottica di scegliere poi la più performante, scrittura del codice.
- Settembre 2021: ottimizzazione del codice e prime misure di test. Taratura degli strumenti e analisi dei sistematici dell'elettronica.
- Ottobre 2021: studio e costruzione di nuove stazioni di rilevazione. Implementazioni con nuova elettronica per misure di CO_2 e TVOC (da posizionare in tutte le aule) con segnatori sonori al superamento di determinate soglie. Soglie stabilite in funzione della posizione della stazione all'interno dell'aula, del laboratorio o dell'ufficio.
- Formazione di gruppi di studenti per ogni classe per la costruzione e la programmazione delle stazioni (questa parte risulta in ritardo rispetto alla programmazione).
- Novembre/Dicembre 2021: primi RUN di prova per la raccolta e l'analisi dei dati, in vista del RUN generale per il 2022 che prevede anche postazioni esterne all'istituto.

Relativamente al periodo di studio del funzionamento dell'elettronica, abbiamo incontrato alcuni casi degni di nota, riporto due esempi (Figura 3):

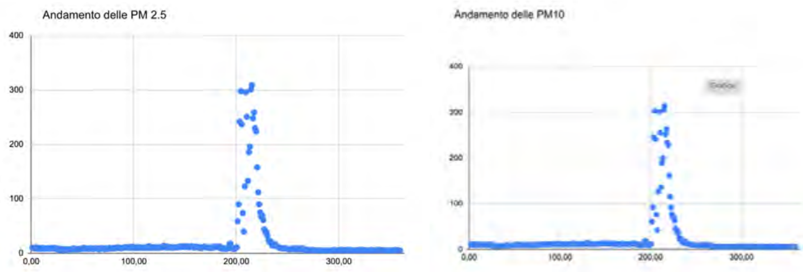


Figura 3. In ascisse è presente il tempo in unità arbitraria

L'evidente anomalia è stata individuata, dopo ampie ricerche su eventuali interferenze nell'elettronica, nel passaggio di un camion per la raccolta rifiuti sempre allo stesso orario.
La scoperta di questa "anomalia" ha potuto mettere in evidenza da una parte la sensibilità della strumentazione e dall'altra l'evidente inquinamento da polveri sottili generato dall'evento.
Veniamo al secondo esempio degno di nota: misure tra il 5 e il 10 ottobre 2021 in una stazione temporaneamente collocata presso corso Francia angolo corso Inghilterra. Per umidità, pressione e temperatura si è fatto uso del sensore Bosch BME-280 e per le polveri sottili HONEYWELL HPMA-115S0. Tre sessioni di misure: mattino, pomeriggio, sera nell'arco di 5 giorni (Figure 4 e 5).

Figura 4. Pressione e umidità relativa

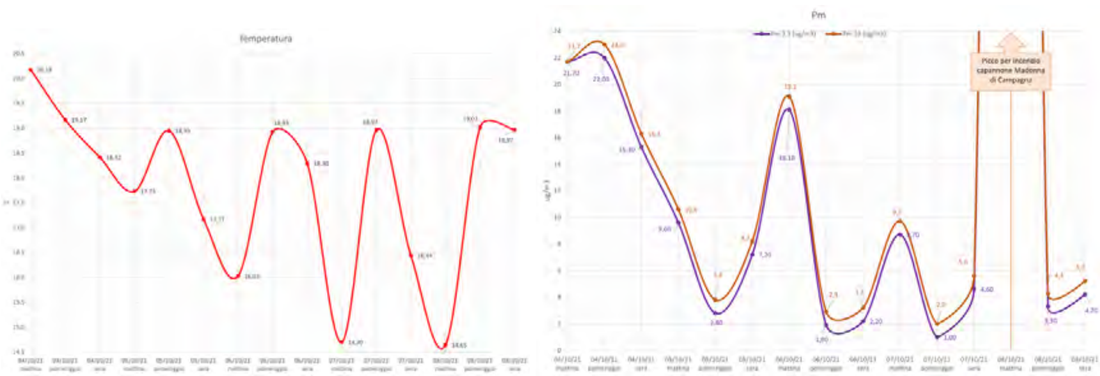


Figura 5. Temperatura e PM

È indubbiamente interessante il picco nella mattina dell'8 ottobre. Purtroppo non avevamo altre stazioni operative in modo da misurare la velocità di propagazione del fenomeno.

Didattica

Per ovvie ragioni, essendo noi una scuola, il lavoro si inserisce all'interno di una progettualità didattica. Come ho già osservato precedentemente la forma prescelta è stata quella della didattica rovesciata. Non solo per quanto riguarda la parte strettamente operativa, ma anche per la fase di progettualità. Nessuna decisione è stata presa senza coinvolgere il gruppo di studenti. Desidero osservare che, sebbene per fattori puramente casuali, nessuno studente del gruppo di lavoro apparteneva ad una mia classe. Questo aspetto si è rivelato un'esperienza utile per il sottoscritto. Ho potuto, da una parte, lavorare con ragazzi spinti esclusivamente dall'interesse personale verso i problemi ambientali e lo studio dell'elettronica e del coding e dall'altra mi sono relazionato con studenti la cui preparazione e l'abitudine a relazionarsi con i docenti erano completamente diversi dalla mia esperienza.

Il primo anno (2020/2021) è stato caratterizzato da una percentuale alta di didattica a distanza, abbiamo dovuto quindi relazionarci attraverso strumenti quali "classroom" e "meet" e per le parti strettamente operative abbiamo potuto, in piccoli gruppi, incontrarci nei laboratori della scuola o, con l'autorizzazione della dirigente, affidare parti della strumentazione a singoli studenti in modo che provvedessero direttamente a casa e in autonomia alla costruzione e sperimentazione delle stazioni e alla scrittura del codice. Tali studenti erano seguiti da me, sempre in remoto, e procedevano con attività collaborative gli uni con gli altri.

Si sarà certamente notato, dal pronome usato, che ero e sono attualmente l'unico docente a occuparsi del progetto. Con il prossimo anno uno degli obiettivi è quello di estendere la presenza docenti a più figure. Già quest'anno un nuovo collega di informatica, impegnato nell'anno di prova, riesce nei momenti liberi ad aiutarci a rendere più performanti le parti di codice. A proposito di quello, si è deciso, fin dall'inizio di scrivere il codice direttamente sullo sketch di Arduino, senza passare attraverso simulatori con programmazione a blocchi. Molti studenti essendo delle Scienze Applicate, conoscono le basi del C++ e, comunque, anche gli studenti del liceo scientifico tradizionale hanno dimostrato di sapersi adattare immediatamente al mondo, per loro nuovo, del coding. Nessuna difficoltà quindi ad andare a cercare le librerie migliori per i diversi sensori e a scrivere codice il più possibile pulito.

Per riassumere, gli obiettivi didattici raggiunti che sono gli aspetti principali in una scuola di secondo grado sono stati:

- Passaggio dall'interesse, direi generazionale, verso il mondo green e di attenzione nei confronti delle problematiche climatiche, ad una *azione* di tipo scientifico: fare misure e analisi dati.
- Comprendere la necessità di fare esperimenti per conoscere.
- Gli esperimenti vanno ideati e costruiti. Quindi scelta degli obiettivi: grandezze da misurare, delle tecniche: strumenti di misura, e della costruzione e programmazione di tali strumenti.
- Studio del coding, non fine a sé stesso, ma con l'obiettivo di "fare funzionare", nel modo ottimale, gli strumenti di misura.
- Scoprire che si ottengono tanti dati, necessità quindi di una opportuna organizzazione degli stessi per analizzarli e confrontarli con quelli ottenuti da altri studenti.
- Ricerca di strumenti di analisi. Alcuni gruppi di studenti stanno studiando strumenti informatici per l'analisi dati. Da R-project a Octave a Colab-notebooks, in alternativa ai fogli di calcolo.
- Organizzazione del proprio lavoro in collaborazione con gli altri studenti del gruppo.
- Attività di studio e di apprendimento tra pari.

Per sintetizzare ho potuto constatare la forte autonomia che gli studenti riescono ad avere se opportunamente motivati e resi autonomi nelle decisioni. Fornendo una *road map* opportuna e seguendoli in quella, si sono dimostrati in grado di recuperare informazioni e dati, di contattare enti (Arpa, CNR), di seguire i diversi iter per l'approvvigionamento delle strumentazioni. Alcuni si sono quasi automaticamente specializzati e interfacciati con gli altri gruppi per la realizzazione di siti web per la comunicazione dei dati; altri si sono specializzati nella stampa 3D per costruire i contenitori dell'elettronica.

Insomma se mi è concesso dirlo, ho potuto toccare con mano una professionalità, autonomia e serietà che non immaginavo. Posso sicuramente affermare che in questa attività gli studenti siano cresciuti molto sia nella conoscenza di quanto sviluppato sia nella metodologia del lavoro.

Ancora Didattica

Finora ho parlato di studenti di quarta e di quinta liceo scientifico, il mio compito però ho ritenuto che fosse anche quello di adoperare quanto da loro sviluppato per fare sì che ci fosse anche una ricaduta sugli studenti delle classi inferiori: le seconde e le terze. Facendomi anche forza del tutoring offerto dai ragazzi più grandi ho potuto sviluppare dei progetti di diverso profilo, ma di sicura propedeuticità con quanto descritto finora, mirato allo studio dell'analisi dati. Partendo dai dati raccolti e organizzati si è potuto fare una formazione, utile in particolare per gli studenti delle classi del liceo tradizionale sull'uso dei fogli di calcolo per l'analisi dati.

Vediamo alcuni esempi dei loro lavori, presentati direttamente come sviluppati da loro, con tutte le ingenuità proprie dell'età.

Le figure 6 e 7 rappresentano una analisi dati presi dalla stazione meteo del Dipartimento di Fisica e dalle stazioni Arduino interne alla scuola. Rappresentano solo alcune variabili, altre quali PM, CO_2 e TVCO sono ancora in fase di elaborazione.

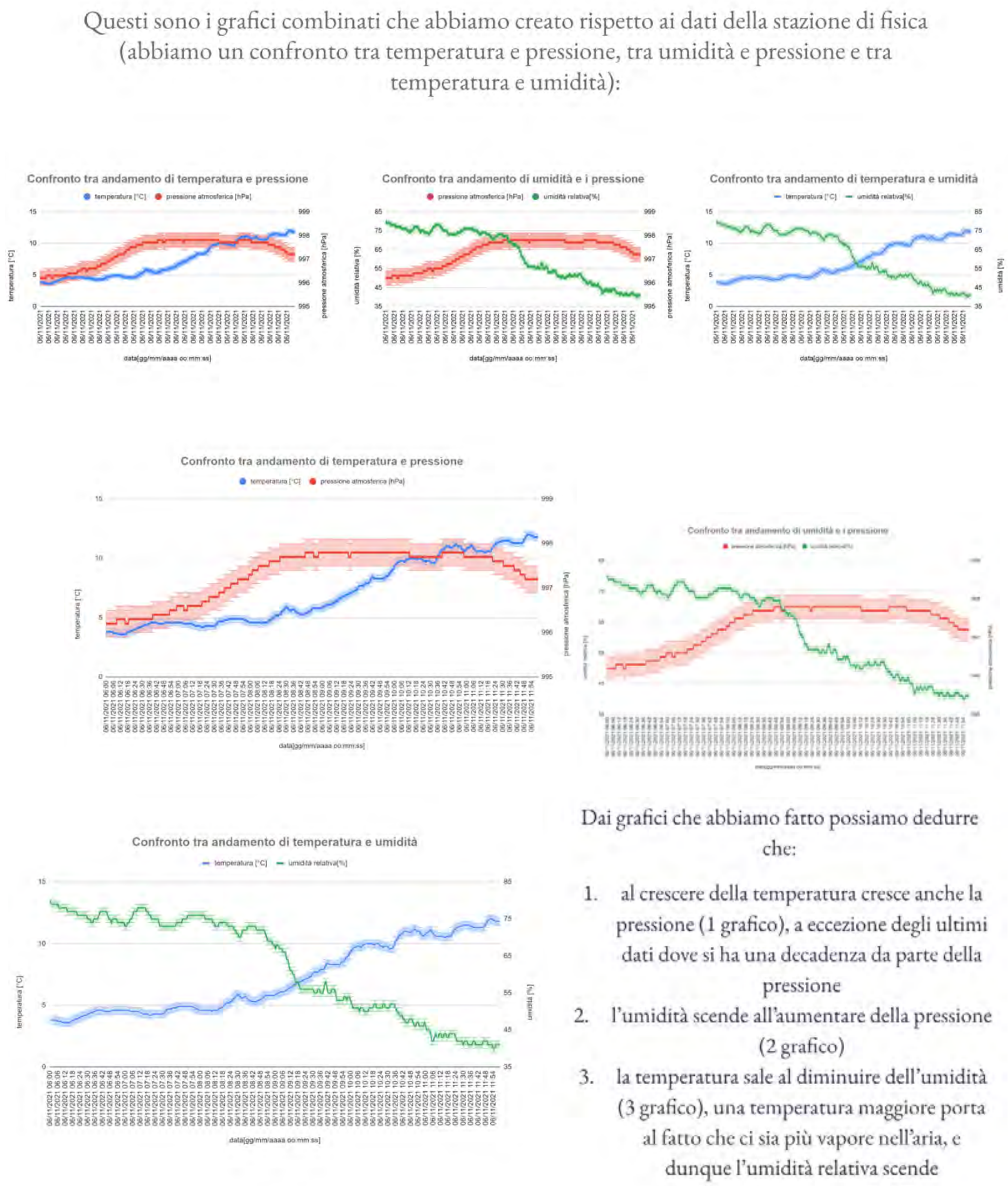


Figura 6. A)Dati forniti dal Dipartimento di Fisica ; B) Dati forniti dal Dipartimento di Fisica

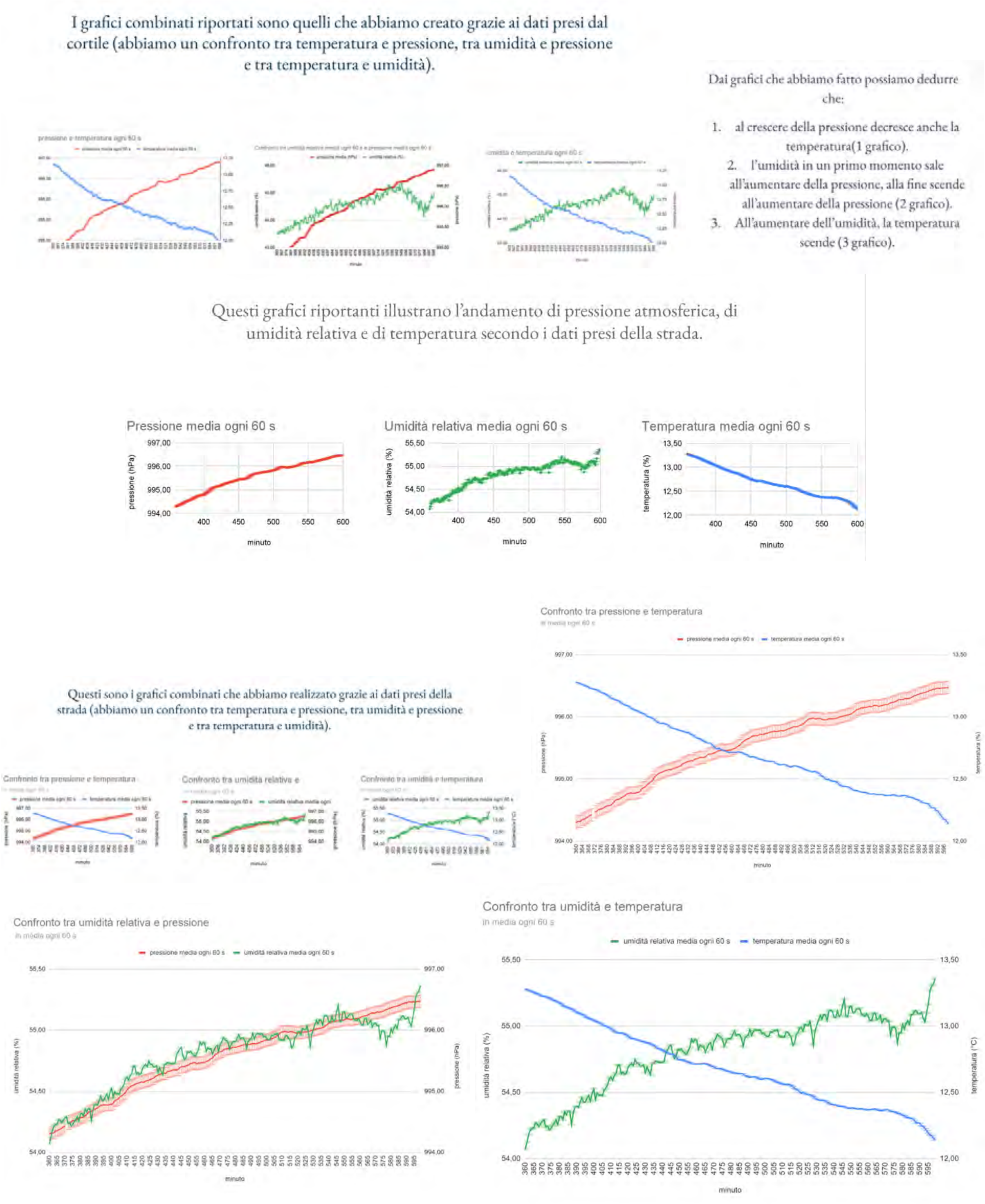


Figura 7. A) Dati Interni (in coincidenza temporale con quelli ufficiali del Dip. Fis.); B) Dati Interni (in coincidenza temporale con quelli ufficiali del Dip. Fis.)

Dai grafici che abbiamo fatto possiamo dedurre che:

1. al crescere della pressione la temperatura scende (1 grafico)
2. al crescere dell'umidità cresce in modo costante anche la pressione (2 grafico)
3. la temperatura scende all'aumentare dell'umidità (3 grafico), una temperatura minore porta al fatto che ci sia meno vapore nell'aria, e dunque l'umidità relativa sale

Come si possono notare dai grafici e dalle varie analisi, si capisce che c'è una differenza tra i dati di arduino e quelli della stazione di fisica.

Infatti,per quanto riguarda il primo grafico (confronto tra pressione e temperatura) nei dati di arduino la temperatura diminuisce al crescere della pressione mentre, nei dati della stazione di fisica, la temperatura cresce e anche la pressione.

Nel secondo grafico (confronto tra umidità e pressione), invece, dai dati di arduino si nota che al crescere dell'umidità cresce anche la pressione mentre, nei dati della stazione di fisica, l'umidità scende all'aumentare della pressione.

Infine, nel terzo grafico (confronto tra temperatura e umidità), dai dati di arduino si nota che la temperatura scende all'aumentare dell'umidità mentre, nei dati della stazione di fisica si nota che la temperatura sale al diminuire dell'umidità

I dati di strada e cortile sono compatibili tra loro. In essi abbiamo la pressione e l'umidità relativa che aumentano, mentre la temperatura che diminuisce.

I dati di fisica, invece, non so compatibili con i dati di strada e cortile. L'umidità relativa diminuisce e la temperatura aumenta, in contrasto con le misure rilevate in strada e cortile; mentre l'unica analogia è che la pressione aumenta.

Le differenze possono essere causate per i seguenti motivi:

- diverso strumento, quindi diversa sensibilità
- differente luogo in cui vengono rilevate le misure
- il fatto ad alcuni dati (del cortile e di fisica) è stata fatta la media mobile, mentre ad altri (di fisica) non è stata fatta.

I dati di fisica possono essere utilizzati così come sono stati forniti.

Mentre i dati del cortile e della strada possono essere utilizzati dopo che vi è stata fatta la media mobile. Perché questi sono presi ogni secondo, quindi bisogna fare una media per ogni minuto (ciò non viene fatto per i dati di fisica perché sono già forniti ogni minuto)

Inoltre una volta inseriti nel grafico, bisogna rappresentare gli errori con cui le misure sono state prese.

	cortile e strada	stazione fisica
termometro (°C)	0,01	0,3
barometro (hPa)	0,01	0,3
igrometro (%)	0,01	1

Figura 8. Confronti tra le diverse sorgenti di dati

CONCLUSIONI

Non si può non osservare l'ingenuità dei lavori sviluppati dalle classi seconde e terze, tuttavia è necessario tenere conto del fatto che prima di questi lavori molti studenti non avevano mai lavorato su un foglio di calcolo. Uno degli obiettivi che speriamo sia stato raggiunto è quello di generare l'interesse necessario per proseguire i prossimi anni con le attività più strutturate.
Il lavoro che abbiamo fatto, come ho già detto precedentemente, limitato dal periodo pandemico e dalla presenza del sottoscritto come unico docente referente, ritengo che abbia dato soddisfazione a tutti coloro che, a diverso titolo, hanno partecipato.
Le attività proseguiranno dopo le vacanze natalizie anche con una collaborazione con uno tra gli studenti più attivi che si è trasferito in Irlanda e frequenta l'ultimo anno (il quarto) a Dublino. Egli ha con sé una stazione meteo identica a quelle della scuola: avremo quindi modo di effettuare confronti con realtà completamente diverse. Le attività proseguiranno anche con l'upgrade delle stazioni con il salvataggio dei dati in remoto su un server opportunamente predisposto, e il posizionamento di stazioni meteo all'aperto (siamo ancora nella fase di studio sulle modalità per proteggere l'elettronica dalla condensa) nella nostra scuola e in altri punti della città. Inoltre alcuni studenti si sono mobilitati per ottenere autorizzazioni e collaborazioni con enti esterni.

È pronta l'attività, per inizio pentamestre, per la costruzione in tutte le 40 aule, più laboratori e uffici di rilevatori di CO_2 e TVOC. Abbiamo per questa fase ottenuto l'interesse e la partecipazione alla costruzione e alla scrittura del codice (in realtà già pronto, come le librerie) da parte di alcuni studenti per ogni classe.
Questa parte del progetto è anche legata alla prevenzione della trasmissione del Covid-19 essendovi una correlazione statistica tra presenza di CO_2 in ambienti chiusi e trasmissione del virus.
Naturalmente la grossa speranza è quella di condividere i lavori con altre scuole e mantenere un contatto attivo con il Dipartimento di Fisica.

RINGRAZIAMENTI

Il principale ringraziamento va al prof. Andrea Piccione EFT-USR, senza di lui e dei suoi numerosi interventi nulla di quanto fatto sarebbe stato possibile. Ringrazio sicuramenti i neo laureati Giovanni Saglietto per gli interventi sulla costruzione dei circuiti più complessi e Maddalena Nicola per esserci presa cura delle attività dei ragazzi più giovani. Il Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino in particolare nelle persone delle prof.sse Marina Serio e Daniela Marocchi per il supporto fornito.

BIBLIOGRAFIA

È difficile redigere una bibliografia e sitografia dal momento che, soprattutto nelle fasi iniziali, gli studenti non registravano le fonti da cui reperivano informazioni.
Certamente sono stati molto utilizzati il sito internet di Michele Maffucci:
https://www.maffucci.it/area-studenti/arduino/
e il canale youtube di Paolo Aliverti:
https://www.youtube.com/channel/UCUV7BwyOFRQfrCdF3xww_DA
Oltre a documentazioni personali fornite da Giovanni Saglietto e dal prof. Piccione.

PROGETTAZIONE E SPERIMENTAZIONE DI UN'ATTIVITÀ DIDATTICA LABORATORIALE SULLA SPETTROFOTOMETRIA

Giovanni Saglietto, Daniela Marocchi, Marina Serio
Dipartimento di Fisica, Università di Torino
Andrea Piccione
Ufficio Scolastico Regionale ed Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte
giovanni.sagliett399@edu.unito.it

Abstract
La didattica laboratoriale in fisica in questi anni si avvale sempre di più di strumenti quali schede programmabili e app su cellulari, che grazie alla loro portabilità, diffusione, disponibilità consentono di organizzare esperienze di laboratorio anche in condizioni non favorevoli, quali quelle vissute nella pandemia di questi due anni.
Come esperienza di didattica laboratoriale è stata proposta un'attività di spettrometria in quattro classi quinte della scuola secondaria di secondo grado: due classi di liceo scientifico opzione scienze applicate e due di istituto professionale indirizzo ottica.
In tutte le classi sono state svolte quattro ore in presenza suddivise nel seguente modo: le prime due ore di ripasso e introduzione degli argomenti necessari alla comprensione dell'attività laboratoriale, durante la terza ora sono stati campionati e commentati alcuni dati inerenti a diversi spettri luminosi con particolare attenzione al colore degli oggetti, mentre l'ultima ora è servita per la verifica delle conoscenze acquisite.
Lo spettrofotometro è stato realizzato tramite l'utilizzo di un apposito sensore e una scheda Arduino-Uno: scelta poiché è una scheda programmabile in C++ con IDE open-source per la facile realizzazione di progetti di elettronica.
Nell'articolo verranno proposti i dettagli inerenti alla progettazione della strumentazione utilizzata, le misconcezioni degli studenti sulle quali è stata basata l'esperienza laboratoriale, le attività proposte in classe e la valutazione delle conoscenze acquisite.

Parole-chiave
Arduino, spettrofotometro, colori, fisica, laboratorio.

INTRODUZIONE

I corsi e le esperienze di laboratorio sono stati, dal punto di vista didattico, i più influenzati dalle restrizioni causate dalla pandemia. Nondimeno questi anni sono stati forieri di spinte all'innovazione didattica, alla sperimentazione di nuove modalità e tecnologie, alla condivisione di materiali ed esperienze.
Le schede programmabili per l'acquisizione dei dati costituiscono una tecnologia molto utile per progettare laboratori con mezzi economici e carattere interdisciplinare, divenendo una prassi consolidata nell'insegnamento della Fisica [1]. Le pubblicazioni scientifiche sulle schede Arduino (si veda la rassegna in [2]) e micro:bit [3]; si veda anche i contributi presentati nel 2021 presso la 18th International Conference on Educational Technologies e la 17th International Conference on Mobile Learning] sono ormai numerose e coprono diverse discipline STEM. Inoltre sono disponibili, oltre ai materiali reperibili online a libero accesso, anche testi di stimolo all'attività laboratoriale con esempi di progettazione didattica: per le schede Arduino si veda ad esempio [4].
L'articolo si propone di presentare un'esperienza laboratoriale sulla spettrofotometria progettata con l'obiettivo di colmare lacune o eliminare misconcezioni in merito ai meccanismi di assorbimento e riflessione della luce.

L'intervento è stato proposto in due istituti diversi per verificare se ci fosse differenza di preparazione di base o un differente modo di approcciarsi al laboratorio. L'intervento è stato realizzato in due classi quinte di liceo scientifico e due di istituto professionale indirizzo ottica.
La realizzazione dell'attività è stata possibile grazie ad un percorso diviso in due fasi: uno stage curriculare presso l'IIS Plana, durante il quale sono state apprese le conoscenze di base per la progettazione di esperienze laboratoriali con schede programmabili, e successivamente la tesi di laurea triennale, in cui si è contestualizzata una singola esperienza integrandola ad un percorso didattico.

PERCORSO FORMATIVO DIDATTICO

L'attività didattica si è svolta tra i mesi di febbraio e aprile 2021, con la partecipazione di 70 studenti.
In tutte le quattro classi sono state svolte 4 ore di intervento in presenza suddivise nel seguente modo: pretest antecedente alle ore in presenza, 2 ore per il ripasso o l'introduzione dei fondamenti teorici e di coding necessari a svolgere il laboratorio, 2 per la sperimentazione e la verifica delle conoscenze.
Tre classi hanno svolto le quattro ore proposte nell'arco di due settimane mentre una le ha ultimate nell'arco di un mese e mezzo.
Tutti gli studenti hanno svolto le ore di sperimentazione in presenza e due studenti hanno partecipato alle prime due ore in DAD.

Pretest
Il pretest è stato realizzato su modulo google tramite domande a risposta multipla con l'obiettivo di verificare le conoscenze pregresse degli studenti riguardo l'uso della scheda di Arduino, la spettrometria, il concetto luce onda-corpuscolo, il colore degli oggetti in funzione dell'assorbimento e della riflessione.
I risultati del pretest sono stati piuttosto uniformi per le quattro classi e hanno permesso di rilevare le seguenti caratteristiche del sistema classe:

- discreta padronanza dei concetti di lunghezza e frequenza d'onda relative allo spettro luminoso;
- inesperienza con schede programmabili e in generale con il coding;
- grande difficoltà nella comprensione del perché vediamo oggetti di colori diversi.

Sulla base di questi risultati, nelle prime due ore, sono stati ripresi velocemente i concetti chiave che si sono dimostrati meno chiari.
Successivamente è stata svolta l'attività laboratoriale, progettata per permettere ai ragazzi di verificare quanto appreso riguardo al colore degli oggetti che ci circondano.

Lezioni frontali
Gli argomenti teorici ripresi sinteticamente nelle ore di lezione frontale sono:

- Spettro elettromagnetico
- Atomo di Bohr
- Spettroscopia
- Introduzione ai rivelatori

Data l'inesperienza di alcune classi sull'argomento "coding", si è scelto di non affrontarlo nelle lezioni frontali, lasciando spazio alla fase di sperimentazione diretta.
Dopo l'introduzione teorica, è stata presentata e analizzata una raccolta dati di intensità luminosa in funzione della distanza con campionamento dati registrato con la scheda Arduino e appositi sensori.
Infine la strumentazione utilizzata nelle ore di sperimentazione (Figura 1) è stata presentata nei suoi componenti e relativo funzionamento: scheda Arduino Uno, sensore per analisi di spettro visibile AS7265x SparkFun (link per reperire il codice di funzionamento per il sensore in sitografia).

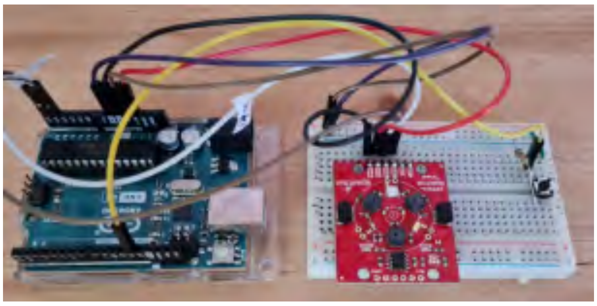


Figura 1. Scheda Arduino e Spettrometro SparkFun montato su una breadboard

Laboratorio

La strumentazione presentata nella figura 1, con relativo codice per il controllo e l'acquisizione dei dati, permette di campionare l'intensità luminosa per 18 diverse lunghezze d'onda (13 nel visibile e 5 nell'IR).
Dal pretest è emerso che la maggior parte dei ragazzi fosse convinta che i colori degli oggetti che noi percepiamo corrispondano alle frequenze luminose meglio assorbite da parte dell'oggetto, quando invece è esattamente l'opposto.
Per permettere ai ragazzi di comprendere il fenomeno sono stati analizzati prima gli spettri di una lampadina a incandescenza, di una luce led e di un laser rosso, commentando in modo approfondito i picchi di emissione delle varie sorgenti.
In tabella 1 sono riportati i dati registrati da un singolo campionamento di spettro di luce led e in figura 2 è riportato il grafico dell'intensità luminosa per ogni lunghezza d'onda registrata.
Nelle tabelle e nei grafici non è riportata l'unità di misura dei valori letti dal sensore poiché è un valore direttamente proporzionale all'intensità.
Nel grafico in figura 2 (e in tutti i successivi grafici) non sono presenti le barre di errore per i valori misurati poiché l'obiettivo dell'esperienza non contemplava anche una fase di analisi statistica e dell'incertezza. Una possibile stima dell'incertezza sui singoli valori di intensità luminosa può essere ottenuta campionando più volte lo spettro di una determinata sorgente alla stessa distanza (per misure ripetute nelle stesse condizioni si ha la stima della dispersione dei dati intorno a 10).

Tabella 1. Riga 1: nome dei canali all'interno del codice; riga 2: lunghezza d'onda corrispondente al canale; riga 3: unità di misura della lunghezza d'onda; riga 4: colore corrispondente; riga 5: valori relativi allo spettro di una lampada led.

A	B	C	D	E	F	G	H	R	I	S	J	T	U	V	W	K	L
410	435	460	485	510	535	560	585	610	645	680	705	730	760	810	860	900	940
nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm
Viola	Violetto	Turchese	Smeraldo	Verde	Verde c.	Verde Gia	Arancio	Arancio sc	Rosso chi	Rosso	Rosso scu	Bordeaux	ir	ir	ir	ir	ir
50,61	696,34	1406,43	435,49	796,22	1040,25	256,39	558,51	1197,47	310,14	388,3	75,11	80,24	51,7	78,3	37,94	28,26	26,43

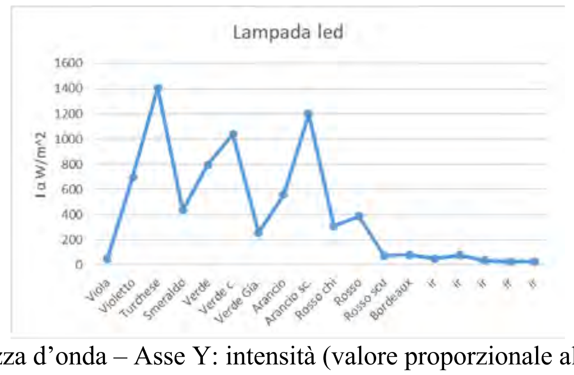


Figura 2. Asse X: lunghezza d'onda – Asse Y: intensità (valore proporzionale alla potenza). Spettro di una lampada led.

Successivamente sono stati utilizzati dei fogli traslucidi per le luci stroboscopiche in diverse condizioni e prima di intervenire sperimentalmente, sono stati posti dei quesiti ai ragazzi.
Sono state proposte situazioni ipotetiche delle quali dovevano provare a prevedere il comportamento fisico: "Avendo visto che lo spettro del laser rosso è monocromatico, cosa succede se campiono il suo spettro luminoso dopo che la luce è passata attraverso un foglio traslucido blu? E se il foglio fosse rosso? E se fosse nero?"
Una volta commentate insieme le possibili risposte, è iniziata la fase sperimentale vera e propria con il campionamento dei dati e si è potuto verificare che la minor attenuazione della luce del laser si ha proprio utilizzando il foglio di colore rosso (in disaccordo con quanto ipotizzato dalla maggior parte dei ragazzi).
Non essendoci le barre di errore per i valori misurati di intensità luminosa in funzione della lunghezza d'onda, è difficile dimostrare la significatività della variazione dei valori di intensità luminosa. Tenendo conto di quanto detto in precedenza, il valore registrato dai sensori della scheda è affidabile entro la cifra delle decine.
Gli studenti hanno ripetuto l'acquisizione e l'analisi dei dati per i vari fogli. Hanno inoltre provato a campionare lo spettro del flash del telefono, attenuato da occhiali o copertine traslucide dei quaderni. In questa fase sperimentale gli studenti hanno appreso l'importanza di mantenere il setup strumentale invariato per avere dati confrontabili: non variare la distanza tra sorgente e spettrometro e avere una condizione ambientale luminosa di fondo più bassa e costante possibile per non avere dati "inquinati".
Utilizzando come sorgente luminosa una luce led (scelta perché era la più uniforme a disposizione) si è analizzato lo spettro attenuato da vari fogli trasparenti di colori diversi.
I colori proposti sono stati nove: rosso, giallo, blu, nero, verde, verde acqua, rosa, viola, arancione.
Una volta campionato lo spettro attenuato da tutti i colori a disposizione sono stati generati i grafici su excel di tutti gli spettri registrati mettendoli a confronto con lo spettro della luce iniziale (senza attenuazioni).

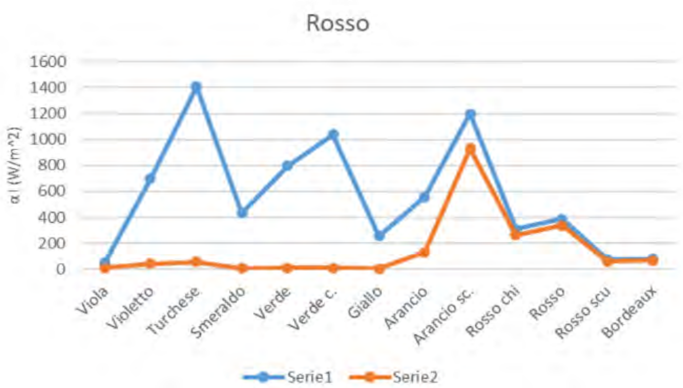


Figura 3. Asse X: lunghezza d'onda (colore) – Asse Y: intensità (valore proporzionale alla potenza). Serie 1: luce led pura - Serie 2: luce attenuata dal foglio rosso.

Come riportato nell'esempio in figura 3 ottenuto con un foglio rosso, si può osservare la soppressione quasi totale dello spettro per le lunghezze d'onda che non sono prossime alla zona del rosso.
Alcuni soggetti sono riusciti a comprendere che il foglio viola era composto da una miscela di colore blu e rosso poiché erano le lunghezze d'onda meno soppresse mentre il viola era quasi completamente attenuato. Inoltre, hanno proposto di verificare la supposizione campionando lo spettro dopo il passaggio attraverso i fogli blu e rosso.
Uno studente ha proposto di provare a sopprimere tutte le frequenze utilizzando contemporaneamente i fogli con i colori che compongono i pixel degli schermi (rosso, giallo, blu): la maggior parte dei ragazzi era convinta che i tre colori sovrapposti avrebbero generato una attenuazione tipo quella rilevata con il colore nero, confermando l'ipotesi del compagno. I dati però hanno dimostrato che la luce arancione e

verde non subiva la stessa attenuazione di quelle blu, gialla e rossa poiché il colore nero percepito dal nostro occhio non era realmente nero.

Verifica delle competenze raggiunte
Al termine della quarta ora sono stati forniti ai ragazzi dei grafici simili a quelli della sperimentazione ma nei quali non veniva specificato il colore utilizzato per attenuare la sorgente.
Il campionamento dei dati utilizzati è stato fatto in loro assenza con stessa strumentazione.
Gli studenti, divisi in gruppi da 2-3-4 persone in modo casuale, hanno dovuto riconoscere il colore del foglio utilizzato dal grafico dell'attenuazione fornito. La Figura 4 riporta un esempio di grafico di test.
Ogni gruppo aveva 7 grafici disposti in ordine diverso (sui nove colori disponibili), senza alcuna indicazione del colore utilizzato.
Il tempo per completare il compito era di 15 minuti e per ogni risposta corretta è stato assegnato un punto. I risultati del test finale (n. colori correttamente identificati sui 7 proposti) sono riportati in tabella 2, dove le colonne sono relative alle classi e le righe ai gruppi.

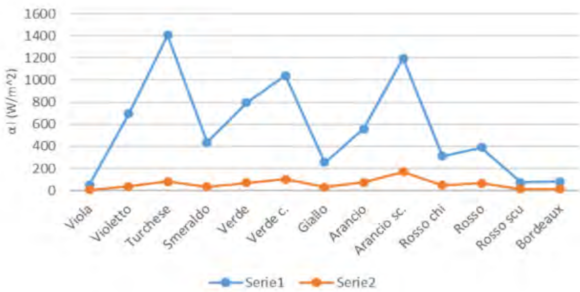


Figura 4. Asse X: lunghezza d'onda (colore) – Asse Y: intensità (valore proporzionale alla potenza). Serie 1: luce led pura - Serie 2: luce attenuata dal foglio nero.

Tabella 2. La tabella mostra i colori evidenziati correttamente (su un totale di 7) per ogni gruppo di ogni classe

Gruppo/Classe	1	2	3	4
1	6	5	7	3
2	3	5	4	4
3	6	5	5	5
4	3	4	7	6
5	3	6	5	5
6	7	/	5	6

Nella prima classe i risultati sono stati poco uniformi ed è l'unica nella quale il progetto non si è svolto nell'arco di due settimane bensì in due incontri a distanza di un mese e mezzo.
Alcuni gruppi hanno riconosciuto meno della metà dei colori a disposizione e tra questi ci sono i colori identificati correttamente da tutti i gruppi, ossia il nero, il blu e il rosso. Questi colori sono stati identificati per la maggiore attenuazione delle lunghezze d'onda non corrispondenti al colore osservato (tutte le lunghezze nel caso del foglio traslucido nero).

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Una volta terminato il progetto è stato somministrato alle classi un questionario di gradimento sull'attività svolta nella quale è stato anche richiesto un commento ed eventuali spunti per migliorare l'attività proposta.

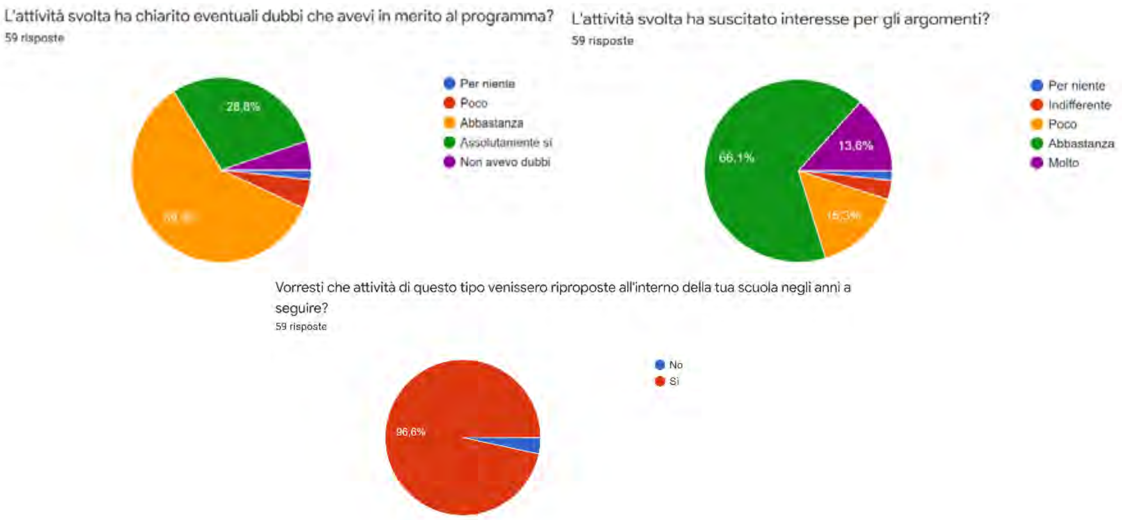


Figura 5. Risultati di alcune domande presenti nel test di gradimento

Come si può notare dalle risposte riportate in figura 5 è emerso che gli studenti sarebbero più motivati allo studio della materia se un maggior numero di argomenti venisse affrontato con la modalità laboratoriale interdisciplinare proposta.
Alcuni soggetti avrebbero preferito una maggiore quantità di tempo dedicata alla parte laboratoriale o un maggiore coinvolgimento nell'attività pratica, sia come grado di impegno che come durata temporale. Purtroppo, causa i distanziamenti vigenti per il contenimento da contagio di Sars-Covid19, non sarebbe stato possibile venire incontro alle esigenze segnalate.
Il percorso formativo proposto ha dimostrato che l'utilizzo delle schede programmabili a basso costo possa essere utile per affrontare con pratiche laboratoriali argomenti anche complessi, senza necessità di strumentazioni avanzate o costose.
Inoltre se le scuole possono acquistare un numero di schede sufficiente per la numerosità media di una classe, questa ed altre attività laboratoriali possono diventare individuali, in modo da permettere ai singoli soggetti di soffermarsi maggiormente sulla costruzione dei circuiti a supporto della scheda e sulla programmazione. Permettere ad uno studente di lavorare individualmente su una scheda permetterebbe di valutarlo su più ambiti: costruzione del setup strumentale, programmazione (interdisciplinarietà con informatica), redazione di una relazione, interpretazione dei dati ottenuti e dei grafici realizzati, capacità autocritica e di esporre risultati in modo chiaro e con termini appropriati.
Tipologie simili di esperienza sono possibili anche con altre schede programmabili che richiedono livelli meno avanzati di programmazione e quindi più adatte a un primo approccio al coding (alcuni esempi si possono trovare sul sito Di.Fi.Ma. nella sezione "Formazione permanente in fisica" alla voce "Micro:bit e Arduino in laboratorio")
Dal progetto formativo sulla spettrometria sono nate due collaborazioni: una con il liceo Cattaneo di Torino per un corso di formazione docenti sull'utilizzo di schede programmabili per il laboratorio di scienze, matematica, fisica e una con il Liceo Volta di Torino per la realizzazione di esperienze di fisica del '900 con Arduino (visualizzazione dello spettro di corpo nero di una lampadina a incandescenza, realizzazione di un circuito in grado di registrare qualitativamente l'effetto fotoelettrico, visualizzazione della serie di Balmer per l'elio e l'idrogeno).

Diventa importante da questo punto di vista la condivisione tra docenti delle buone pratiche, dei materiali, dei codici, delle schede di valutazione, in linea con l'educazione tra pari sperimentata in didattica, in questo caso dedicata alla formazione e aggiornamento professionale.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i docenti delle quattro classi aderenti al progetto: Sergio Vogogna e Irene Audrito per l'IIS Plana di Torino, Guido Robotti e Irene Ferrari Trecate per il liceo Volta di Torino.
Un ringraziamento ai ragazzi della 5^A e 5^B dell'indirizzo ottica IIS Plana e 5^Cs e 5^Ds del liceo Volta dell'anno scolastico 2020/2021.

BIBLIOGRAFIA

[1] Thornton R. K., "Tools for scientific thinking-microcomputer-based laboratories for physics teaching", Phys. Educ., 22 (1987) 230.
[2] Kondaveeti H. K., Kumaravelu N. K., Vanambathina S. D., Mathe S. E. and Vappangi S., "A systematic literature review on prototyping with Arduino: Applications, challenges, advantages, and limitations", Comput. Sci. Rev., 40 (2021) 100364.
[3] Piccione A., Saglietto G., Serio M., Marocchi D., Bonino R. and Rinaudo M., "Esperienze laboratoriali a distanza con le schede programmabili" , IUL Research, 2021, 2.3, p. 237-250, https://doi.org/10.57568/iulres.v2i3
[4] Organtini G., "Physics Experiments with Arduino and Smartphones", ed. Springer, Switzerland, 2021.

SITOGRAFIA

https://iulresearch.iuline.it/index.php/IUL-RES/article/view/117
https://icedutech-conf.org/
https://www.mlearning-conf.org/previous-editons-2005-2015/
https://www.sparkfun.com/products/15050
https://www.maffucci.it/area-studenti/arduino/
https://www.miur.gov.it/scuola-secondaria-di-secondo-grado

EFFETTO DOPPLER E USO DI ULTRASUONI IN MEDICINA. PERCORSO FORMATIVO PER STUDENTI DELLA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Sauda Cristina, Marocchi Daniela, Serio Marina
Università degli Studi di Torino
cristina.sauda@edu.unito.it, daniela.marocchi@unito.it, marina.serio@unito.it

Abstract
Il suono e le onde longitudinali ci permettono di percepire ciò che si verifica nell'ambiente circostante, di comunicare ed interagire, pertanto, interessano moltissimi aspetti della nostra esistenza e coinvolgono profondamente la nostra fisiologia. Per esempio, il nostro cervello compie l'analisi di Fourier dei suoni percepiti, riuscendo a distinguere le voci femminili da quelle maschili oppure diverse melodie in una sinfonia. Inoltre alcuni fenomeni acustici vengono impiegati nelle applicazioni con cui interagiamo ogni giorno: l'effetto Doppler viene impiegato negli autovelox, ma anche in medicina per valutare la velocità dei flussi sanguigni.
Lo scopo del lavoro è presentare le attività svolte durante un progetto didattico con una classe quarta del liceo scientifico A. Gramsci di Ivrea. Il fulcro del progetto è lo studio della natura degli ultrasuoni e dell'effetto Doppler per comprendere come vengano impiegati in medicina nell'esame dell'ecografia Doppler.
Il progetto si è svolto in otto moduli comprendenti un test iniziale, lo svolgimento di simulazioni digitali per rafforzare le conoscenze sull'effetto Doppler, l'esecuzione di tre esperienze di laboratorio preparate con il kit 3BScientific per indagare la natura degli ultrasuoni, la spiegazione dell'esame medico scelto e un test finale.
Le simulazioni sono state scelte per sperimentare alcuni aspetti fondamentali dell'effetto Doppler in modo interattivo, applicando la teoria studiata ad una situazione di vita quotidiana, come quella proposta.
Il test finale ha rilevato un miglioramento di conoscenze sulla natura ultrasonora e di competenze sull'effetto Doppler; inoltre la maggior parte degli studenti ha rivalutato l'utilità della fisica, gradendo la possibilità di aver potuto studiare una delle sue applicazioni alla medicina.

Parole-chiave
Ultrasuoni, effetto Doppler, progetto, didattica, medicina

IL PROGETTO DIDATTICO

"La fisica delle onde lineari e meccaniche è regolarmente insegnata nel curriculum di fisica. La comprensione delle onde semplici è fondamentale per molti argomenti più avanzati in fisica, inclusa ottica, teoria elettromagnetica, meccanica quantistica e fluidodinamica.
È quindi importante che gli insegnanti di fisica comprendano come gli studenti pensano e apprendono le onde, in modo che la materia possa essere insegnata per garantire lo sviluppo di una corretta comprensione concettuale che può essere portata avanti nello studio della disciplina e applicato in altre aree." [Kennedy e Bruyn, 2011]. Come affermato da Kennedy e Bruyn, le onde sono uno degli argomenti fondamentali per la comprensione e lo studio della fisica, non solo a livello universitario, ma anche di scuola secondaria.
Durante il percorso didattico del secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado vengono affrontati i fenomeni legati alle onde, luminose e sonore. Tra gli argomenti di acustica viene presentato l'effetto Doppler, un fenomeno fisico che ha vaste applicazioni nella quotidianità: in astrofisica viene

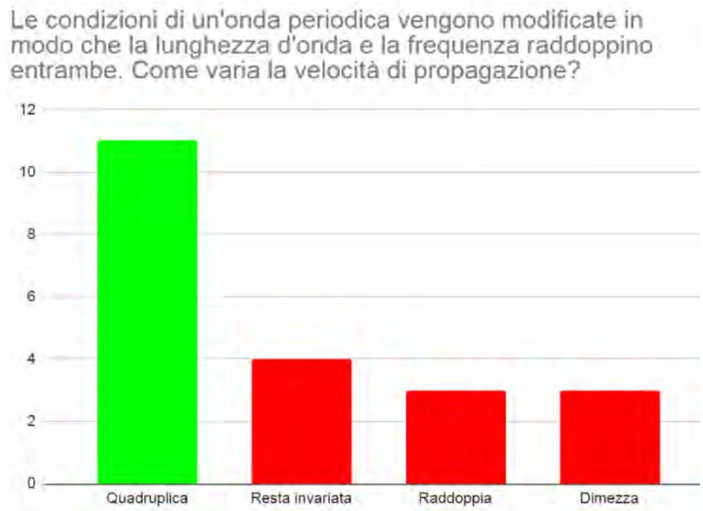
impiegato per studiare la natura dell'universo, è il principio di funzionamento degli autovelox e dei sonar, viene usato in campo medico per studiare i flussi sanguigni.
Le onde sonore maggiormente trattate nelle aule di scuola sono quelle nel range di frequenze udibili dall'essere umano, perché i fenomeni a cui sono soggette vengono percepiti quotidianamente. Per questo gli ultrasuoni, onde sonore ad alta frequenza, vengono poco o per nulla trattati nelle aule scolastiche e universitarie, pur avendo un vasto uso in campo medico e in ambito dell'orientamento sia animale sia umano.
Sempre nello stesso articolo, Kennedy e Bruyn sottolineano lo scarso sviluppo di ricerca didattica sulle onde: "Nonostante l'importanza delle onde meccaniche, c'è stata relativamente poca ricerca sull'apprendimento degli studenti e la comprensione della materia. Nel 1999, su American Journal of Physics, Resource Letter ha elencato 224 articoli di ricerca sulla didattica della fisica ma solo sei su onde e suono. Due di questi riguardavano specificamente le onde sonore e uno le onde elettromagnetiche. La situazione è cambiata solo leggermente negli ultimi dodici anni". Anche il professor Ugo Besson, docente universitario e ricercatore in didattica, nel suo libro "Didattica della fisica" [Besson, 2015] riporta, nel capitolo dedicato alle onde, che la ricerca didattica sulle onde è stata poco fiorente.

Da queste osservazioni è sorta la seguente domanda: ideando e preparando un percorso didattico sperimentale, mediante esperienze e simulazioni digitali, è possibile far conoscere la natura degli ultrasuoni, fare esperienza di effetto Doppler con essi e comprenderne le possibili applicazioni in campo sanitario?
Il lavoro presentato nelle pagine a seguire è una ricerca didattica rivolta agli studenti della scuola secondaria di II grado; il progetto è centrato sulla presentazione delle applicazioni della fisica alla realtà quotidiana, nello specifico l'uso degli ultrasuoni e dell'effetto Doppler in medicina.
Il progetto è stato realizzato durante il periodo di tesi magistrale della prima autrice in una classe quarta del Liceo Scientifico A. Gramsci di Ivrea. La classe era composta da 21 studenti, sotto la supervisione della professoressa Anna Grazia Botti, docente di matematica e fisica della classe.
La docente ha osservato la classe durante tutto lo svolgimento delle attività e alla fine del percorso ha condiviso le sue riflessioni sull'operato, fornendo spunti e suggerimenti su possibili modifiche.
A causa della situazione pandemica in cui stiamo vivendo, una parte del lavoro è stato svolto a distanza, usando le piattaforme di Classroom per condividere il materiale, Google Meet per lo svolgimento di alcune lezioni in modalità telematica con la classe e Google Moduli per la realizzazione e la somministrazione dei test. Inoltre, a causa del riadattamento di orario per l'emergenza Covid, i moduli sono stati ridotti alla durata di 40 minuti.
Si è scelto di scandire le attività nel seguente modo:

- Un modulo per il pretest a distanza la settimana precedente all'inizio del progetto;
- Metà modulo per il ripasso e presentazione delle simulazioni;
- Un modulo e mezzo per la prima esperienza di laboratorio in presenza;
- Un modulo in presenza per lo svolgimento della seconda esperienza di laboratorio;
- Un modulo, in modalità telematica, per lo svolgimento di esercizi richiesti dagli studenti e il riepilogo dell'esperienza precedente;
- Due moduli, a distanza, per la spiegazione dell'applicazione alla medicina;
- Un modulo per lo svolgimento del test finale e di gradimento delle attività.

Risultati rilevanti del pretest
Come prima attività è stato chiesto di compilare un questionario, composto da 12 domande a risposta aperta e chiusa, necessario per sondare la consistenza delle nozioni pregresse sulle caratteristiche delle onde e sulla natura e uso degli ultrasuoni apprese nel modulo di acustica in aula. Da questo pretest sono emersi alcuni dubbi e difficoltà generali. Di seguito si riportano le principali osservazioni.
La relazione che lega la velocità di propagazione, la frequenza e la lunghezza d'onda risulta essere non sempre nota e anche quando conosciuta si rilevano problemi nella sua applicazione. Il 50% degli studenti

ha risposto correttamente, giustificando la propria scelta con la relazione scritta correttamente, il 25%



non la ricorda e il restante 25% non è riuscito a utilizzarla in modo corretto (Figura 1).

Figura 1: Distribuzione delle risposte alla domanda riguardante la relazione tra velocità, frequenza e lunghezza d'onda.

È emersa anche una scarsa conoscenza sulla natura degli ultrasuoni, a cui gli studenti pensano come onde ad alta velocità di propagazione o alta lunghezza d'onda (Figura 2).

Figura 2: Distribuzione delle risposte alla domanda riguardante la natura degli ultrasuoni.

Soprattutto sono emerse difficoltà di applicazione dell'effetto Doppler in contesti non affrontati in aula, quali ad esempio l'applicazione in campo medico. Essendo un ambito non conosciuto la maggior parte degli studenti ha preferito non rispondere, mentre il 25% ha risposto correttamente sostenuto da un valido ragionamento (Figura 3).

Figura 3: Distribuzione delle risposte riguardo alla domanda dell'applicazione dell'effetto Doppler alla medicina.

Simulazioni

Per rivedere le basi dell'effetto Doppler e consolidarne le conoscenze sono state proposte agli studenti delle simulazioni digitali. Dagli anni 2000 infatti sono stati svolti studi e sviluppati molti ambienti simulativi per permettere agli studenti di poter fare esperienze pratiche anche in assenza di un laboratorio. Uno dei lavori più importanti e in continuo aggiornamento è il progetto PhetColorado, sviluppato dall'Università del Colorado [University of Colorado, 2021]. Il sito, che tocca molte discipline scientifiche e molti fenomeni fisici, non propone simulazioni specifiche sull'effetto Doppler e per questo sono state scelte le simulazioni del professor Vaščák [Vaščák, 2021]. Questa simulazione permette di lavorare con tre possibili ambienti: la sorgente in movimento e l'osservatore fermo, la situazione opposta e una intermedia con tre diversi osservatori in posizioni diverse rispetto alla sorgente in movimento.

Dagli studi sui lavori digitali di Maulidah e Prima [Maulidah e Prima, 2012] è emersa la necessità da parte degli studenti di schede e materiali forniti dal docente per affrontare al meglio il lavoro; per questo sono state stilate e proposte delle schede in cui viene presentato l'ambiente simulativo, le istruzioni per l'interazione e domande a cui rispondere durante lo svolgimento dell'esercitazione.

Il completamento delle schede è stato assegnato come esercizio extracurricolare, la correzione è stata discussa in aula dalla docente alla fine del progetto ed è stata usata come valutazione di rinforzo.

Dall'analisi delle schede è emersa una diffusa confusione tra intensità e altezza del suono: in molti elaborati veniva rilevata la dicitura "Il suono diventa *più forte/debole*" quando invece sarebbe stato corretto "*acuto/grave*". Nel pretest non sono state verificate le conoscenze riguardo queste due caratteristiche del suono, perciò nella fase di rivisitazione del percorso è stato modificato il questionario di ingresso per includere questa misconcezione.

L'attività è stata svolta in modo preciso e completo da 8 studenti su 21, mentre il resto del gruppo classe ha risposto in modo sintetico alle varie domande, talvolta anche in modo saltuario, saltandone alcune che potevano apparire ripetitive. Ciò è stato riscontrato anche nei questionari di valutazione di questa attività da parte degli studenti, in cui è stato rilevato che solo il 33% ne ha apprezzato le potenzialità.

Esperienze di laboratorio

Le esperienze di laboratorio riguardano la natura degli ultrasuoni e la loro applicazione; sono state preparate e svolte con il kit 3BScientific. Il kit permette la realizzazione di 30 esperienze, qualitative e quantitative, su diversi fenomeni e aspetti:

- Studio delle grandezze fondamentali
- Osservazione dei diversi fronti d'onda
- Studio di fenomeni di riflessione, trasmissione e assorbimento, di rifrazione e diffrazione
- Effetto Doppler.

Per il progetto ne sono state scelte tre, di cui solo due attuate in aula per motivi di tempo:

- determinazione di velocità di propagazione e lunghezza d'onda

- effetto Doppler
- riflessione, trasmissione e assorbimento.

Per lo svolgimento sono state elaborate delle schede da compilare durante l'esecuzione. Le schede presentano la strumentazione necessaria e la preparazione del setup, i vari passi da seguire durante l'esecuzione dell'esperienza e una sezione per segnare osservazioni, eseguire l'analisi dei dati raccolti e rispondere ad alcune domande per stimolare collegamenti e teorie su quanto rilevato.
La prima esperienza svolta in presenza, di tipo quantitativo, riguarda la misura della velocità di propagazione e la lunghezza d'onda delle onde ultrasonore. Per farlo è necessario usare la penna ad ultrasuoni, che permette la trasformazione del segnale sonoro in luminoso e quindi la rilevazione delle onde tramite un led, il quale varia l'intensità luminosa a seconda della fase e dei ventri o creste che la sonda incontra. Spostando la penna a led su un foglio, vengono segnati punti di intensità luminosa minima successivi (Figura 4); dalla lunghezza totale del segmento si ricava la misura della lunghezza d'onda, poi la velocità applicando la relazione che la lega alla frequenza. Dalle misure effettuate gli studenti hanno compreso che la lunghezza d'onda degli ultrasuoni è molto piccola e che la velocità non dipende dalla frequenza.

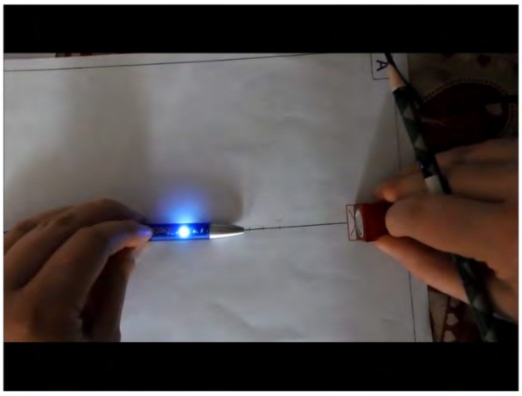


Figura 4: Esempio di presa dati per la misurazione della lunghezza d'onda e della velocità di propagazione degli ultrasuoni.

La seconda esperienza svolta in presenza riguarda l'osservazione qualitativa dell'effetto Doppler tramite la variazione della frequenza di lampeggio del led della penna ad ultrasuoni. Infatti cambiando la posizione e la velocità della penna rispetto alla sorgente sonora gli studenti dovevano percepire una variazione di frequenza di lampeggio e quindi associare una variazione di frequenza. L'esperienza è risultata un po' confusa per la mancanza di un riscontro quantitativo da parte degli studenti e per questo si sta valutando l'accoppiamento del kit ad un oscilloscopio in modo da renderla più tangibile.
La terza esperienza, che non è stata svolta per problemi legati all'emergenza sanitaria, prevedeva di misurare l'assorbimento, la riflessione e la trasmissione degli ultrasuoni da parte dell'ambiente e di diversi oggetti, come per esempio una lente concava, un assorbitore di fascio ricoperto di lanuggine e un divisore di fascio. Tali misure servono per verificare l'esistenza dell'*effetto zero* (assorbimento spontaneo da parte dell'ambiente) e per valutare le caratteristiche di oggetti riflettori, assorbitori e divisori di fascio.

Applicazioni alla medicina

Negli ultimi moduli, svolti tutti a distanza, dopo una fase di esercitazione sull'effetto Doppler, è stato spiegato l'uso degli ultrasuoni in medicina con l'esame dell'ecografia Doppler.
I concetti su cui si è articolata questa fase del percorso sono così riassumibili:

- lo scopo dell'esame, ovvero l'osservazione e valutazione della velocità del flusso ematico nel corpo umano;

- i possibili effetti di assorbimento, riflessione e rifrazione prodotti dal passaggio delle onde nei tessuti umani;
- la spiegazione sul perché si applichi il gel sulla cute durante l'esame;
- perché si usano gli ultrasuoni. Essendo il sangue formato da una parte liquida e una corpuscolare, le onde vengono riflesse dai globuli rossi che, avendo dimensione molto piccola, possono essere rilevati solo dagli ultrasuoni;
- il funzionamento di un'ecografia e, sommariamente, la ricostruzione dell'immagine generata dalla sonda ecografica.

Dopo aver descritto in generale l'ecografia, si è sottolineato come utilizzare l'effetto Doppler per capire il moto sanguigno.
Dapprima è stata commentata l'espressione analitica della variazione di frequenza rilevata dalla sonda in funzione della velocità del flusso ematico e dell'angolo di incidenza degli ultrasuoni prodotti dalla sonda, quindi sono stati valutati gli angoli limite per osservare il flusso.

$$\Delta f = \frac{2Vf_0 \cos\theta}{v_0}$$

La variazione di frequenza a monitor viene rappresentata tramite una variazione di colore: rosso per l'aumento di frequenza, quindi flussi in avvicinamento alla sonda, e blu per variazioni negative di frequenza, quindi flussi in allontanamento.

Risultati del test finale
Alla fine dei moduli a disposizione, è stato proposto un questionario di 12 domande a risposta aperta e chiusa con necessità di giustificazione, per valutare come siano variate le competenze e le conoscenze degli studenti a seguito del progetto.
Sono state proposte domande simili a quelle del test iniziale, in modo da avere la possibilità di paragonare i due risultati. Si osserva un miglioramento di conoscenza della relazione che lega velocità di propagazione, frequenza e lunghezza d'onda, con una sola risposta errata su 21, mentre non si osserva un consolidamento delle competenze di gestione della relazione matematica e di legame tra velocità di propagazione e mezzo, infatti si osserva ancora il 43% di risposte errate (Figura 5).

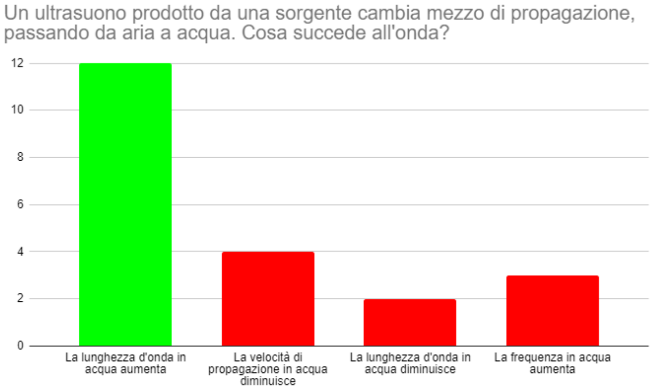


Figura 5: Distribuzione delle risposte del test finale alla domanda riguardante la velocità di propagazione.

Sulla natura ultrasonora si può osservare un miglioramento di conoscenza per quanto riguarda la frequenza mentre la velocità di propagazione risulta un nodo ostico agli studenti, come risulta dal 33% di risposte errate (Figura 6).

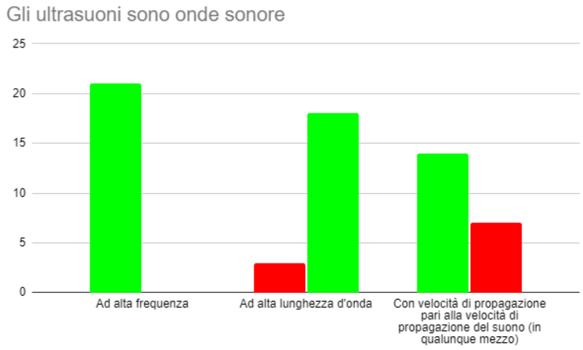


Figura 6: Distribuzione delle risposte del test finale alla domanda riguardante le caratteristiche degli ultrasuoni.

Si osserva invece un'acquisizione di competenza riguardo all'applicazione dell'effetto Doppler e degli ultrasuoni alla medicina, anche se sono presenti alcuni dubbi (Figura 7).

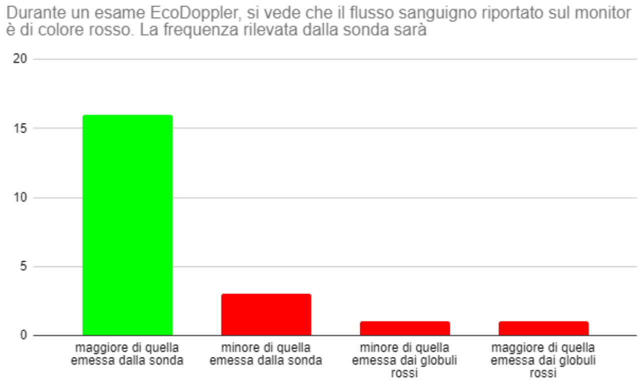


Figura 7: Distribuzione delle risposte del test finale alla domanda riguardante l'applicazione dell'effetto Doppler alla medicina.

CONCLUSIONI

Il lavoro di ricerca sviluppato consiste nella ideazione, stesura e attuazione in aula di un progetto didattico che verte sulla comprensione degli ultrasuoni con l'obiettivo di avvicinare gli studenti alle applicazioni pratiche della fisica in medicina.
Dalla somministrazione di un test iniziale è emerso che la maggior parte della classe non aveva le idee chiare su cosa siano gli ultrasuoni e perché vengano usati in medicina. Inoltre si sono palesati alcuni dubbi sull'effetto Doppler, soprattutto dovendolo applicare in situazioni diverse dal contesto solito degli esercizi proposti dai testi. Sono inoltre emersi problemi sulla relazione che lega lunghezza d'onda, frequenza e velocità di propagazione, soprattutto sulla gestione della formula matematica nel momento in cui viene modificata una delle grandezze coinvolte.
Per ripassare l'effetto Doppler sono state proposte simulazioni digitali, dalle quali si è notato che è presente un po' di confusione tra intensità e altezza del suono, perché vengono usati i termini piano e forte come sinonimi di grave e acuto. Tali concetti sono stati quindi ripresi dalla docente della classe alla fine del progetto.
Per indagare la natura degli ultrasuoni sono state svolte delle esperienze di laboratorio preparate con il kit 3BScientific. Delle trenta possibili, ne sono state selezionate tre ed è stato possibile proporne due alla classe.
La prima, di tipo quantitativo, permette di misurare la lunghezza d'onda e la velocità di propagazione di un'onda sonora a 40 kHz, mentre le seconda, di tipo qualitativo, vuole osservare l'effetto Doppler prodotto dagli ultrasuoni. La terza, di nuovo di tipo quantitativo, ha come scopo prendere misure di assorbimento e riflessione degli ultrasuoni da parte dell'ambiente circostante l'apparato e oggetti di vario genere.

Si è passati poi alla spiegazione dei principi di funzionamento di un esame eco-Doppler, valutando la propagazione degli ultrasuoni nel corpo umano, l'uso degli ultrasuoni nelle ecografie e la determinazione della velocità del flusso sanguigno partendo dalla variazione di frequenza osservata. Si è anche affrontato il fattore di rischio e di danno biologico durante gli esami medici che sfruttano le onde.
Infine, con un test finale si è valutato come sono mutate le conoscenze e le competenze. Riguardo la natura degli ultrasuoni, la totalità degli studenti li classifica correttamente come onde ad alta frequenza a seguito dell'attività didattica proposta, mentre si presentano ancora difficoltà nella spiegazione e applicazione della relazione fra le grandezze frequenza, lunghezza d'onda e velocità di propagazione, visto che il 14% afferma che gli ultrasuoni siano onde ad alta lunghezza d'onda e il 33% afferma che la velocità di propagazione sia diversa da quella del suono a bassa frequenza. Si osserva anche che le competenze di gestione delle leggi matematiche presentano ancora delle lacune da colmare, mentre le competenze sull'effetto Doppler sono state rafforzate durante le attività del progetto. Nonostante i problemi riportati, si può affermare che c'è stato un miglioramento rispetto ai risultati del primo test.

Si può sostenere che la prova effettuata con la classe ha ottenuto risultati positivi in termini di apprendimento e che, tramite un test di gradimento, si è riscontrato che gli studenti apprezzano il poter sperimentare in laboratorio e studiare la teoria affrontandola sotto un punto di vista pratico, supportata da esperienze laboratoriali. Inoltre i ragazzi hanno riportato che l'affrontare un'applicazione ha reso meglio l'importanza di ciò che viene appreso nelle aule didattiche, imparando a ricondurre la teoria a diversi aspetti e fenomeni che si incontrano nella vita quotidiana.

BIBLIOGRAFIA

Besson, U. (2015). Didattica della fisica. Carocci Editore.
Consiglio dell'Unione Europea (2018). Raccomandazione relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente. https://ec.europa.eu/education/policies/european-policy-cooperation/development-skills-it.
Gunhaart, A. and Srisawasdi, N. (2012). Effect of integrated compute-based laboratory environment on students' physics conceptual learning of sound wave properties. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46:5750–5755.
Kennedy, E. M. and de Bruyn, J. R. (2011). Understanding of mechanical waves among second-year physics majors. Canadian Journal of Physics, 89(11):1155–1161.
Maulidah, S. S. and Prima, E. C. (2018). Using physics education technology as virtual laboratory in learning waves and sounds. Journal of Science Learning, 1(3):116–121.
Ministero dell'Istruzione (2021a). Scuole secondarie di secondo grado. https://www.miur.gov.it/scuola-secondaria-di-secondo-grado.
Ministero dell'Istruzione (2021b). Traguardi competenze.
https://www.gazzettaufficiale.it/gunewsletter/dettaglio.jsp?service=1&datagu=2010-12-14&task=dettaglio&numgu=291&redaz=010G0232&tmstp=1292405356450
Tobin, K. (1990). Research on science laboratory activities: In pursuit of better questions and answers to improve learning. School science and Mathematics,90(5):403–418.
Tongchai, A., Sharma, M. D., Johnston, I. D., Arayathanitkul, K.,and Soankwan, C. (2011). Consistency of students' conceptions of wave propagation: Findings from a conceptual survey in mechanical waves. Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 7(2):020101.
University of Colorado (2021). Simulazioni phet Colorado. https://phet.colorado.edu/it/
Vaščák, V. (2021). Fisica a scuola - html5 fisica animazioni/simulazioni.
https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_doppler&l=it

LABORATORIO DI FISICA E DIDATTICA DELLA FISICA DEL CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA SVOLTO A DISTANZA: LA SFIDA DI SPERIMENTARE L'APPRENDIMENTO BASATO SULL'INDAGINE IN UN AMBIENTE ONLINE

Anna Elisa Bandecchi (1), Giulia Tasquier (2)
(1) Dipartimento di Scienze Dell'Educazione, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna; Centro per la Protezione Civile, Università degli Studi di Firenze
(2) Dipartimento di Fisica e Astronomia, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
annaelisa.bandecchi3@unibo.it

Abstract
L'emergenza sanitaria da Covid-19 ha imposto, come noto, il ricorso alla didattica a distanza. Anche l'Attività di Laboratorio di Fisica e Didattica della Fisica del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria di Bologna è stata oggetto di una conversione totale, dalla presenza all'*online*. Ciò ha comportato una sfida didattica, nell'ambito della formazione dei futuri insegnanti di scienze delle scuole primarie e dell'infanzia. Lo sforzo non è stato soltanto riuscire a gestire gli esperimenti scientifici senza accedere ai laboratori, ma anche nel cercare di non perdere nella conversione dimensioni fondamentali del corso, come quella dell'apprendimento basato sull'indagine.
Il presente lavoro intende illustrare, a titolo di spunto e riflessione, una proposta, che si è mostrata efficace nei risultati e ben accolta dagli studenti, di trasformazione di un corso di laboratorio (nella fattispecie sul tema dell'ottica geometrica) fortemente basato sul fare e sull'interazione, in un corso a distanza su piattaforma *online*.

Parole-chiave
Metodo scientifico, *Inquiry-Based Science Education, hands-on, peer-to-peer,* didattica a distanza.

INTRODUZIONE

L'emergenza sanitaria da Covid-19 del 2020 ha colpito duramente il sistema educativo mondiale che ha dovuto rispondere con un brusco e imprevisto passaggio dalla didattica in presenza a quella a distanza. L'insegnamento a distanza richiede un'attenta riflessione, pianificazione e sviluppo delle risorse per ottenere i risultati di apprendimento desiderati, ma nella primavera del 2020 è stato necessario un adattamento e una preparazione rapidissimi.
Questo lavoro intende, a valle di questa esperienza, fare considerazioni qualitative sull'efficacia delle scelte fatte durante l'emergenza, in riferimento all'Attività di Laboratorio di Fisica e Didattica della Fisica del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria di Bologna.

Secondo la ricerca di Klein et al 2021, condotta su un campione di 5 Università in 3 stati europei, durante il primo anno accademico di pandemia non è stato possibile creare nuove attività di laboratorio di fisica pensate per essere eseguite a distanza, dunque le attività hanno sostanzialmente consistito in una continuazione del corso originario di laboratorio in presenza privato della parte *hands-on*; in molti casi, sono stati forniti agli studenti set di dati (artificiali o reali) da analizzare e un video dell'esperimento. Mentre questa soluzione è stata soddisfacente nei Corsi di Laurea in Fisica, secondo chi scrive, all'interno di un corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria (SFP), avrebbe invece portato troppo lontano dagli obiettivi di apprendimento delle attività di laboratorio di fisica. Gli obiettivi generali di apprendimento del laboratorio di fisica a SFP, infatti, sono: fornire agli studenti (futuri

docenti delle scuole primarie e dell'infanzia) gli strumenti concettuali e operativi che consentano loro di progettare e svolgere attività a carattere scientifico nella scuola primaria o dell'infanzia, basate sul metodo scientifico e l'esperienza diretta dei fenomeni in esame (esperimenti).
Da diversi studi di ricerca (si veda in Abell et al 2013), sappiamo infatti che tra gli approcci che possono favorire un apprendimento profondo della scienza, sono estremamente rilevanti le attività di laboratorio condotte tramite il metodo scientifico, in cui gli studenti sono coinvolti in autentiche indagini scientifiche. In questo approccio, gli insegnanti giocano un ruolo di primo piano nel determinarne l'efficacia, poiché il loro atteggiamento e le loro azioni possono favorire od ostacolare l'apprendimento attraverso l'indagine (Orion & Kali 2005). Per questo motivo è di fondamentale importanza che i futuri insegnanti stessi, durante la loro formazione, siano coinvolti in esperienze di apprendimento basate sull'indagine tramite il metodo scientifico. Purtroppo però, molti studenti di SFP non hanno mai svolto attività laboratoriali di ambito scientifico e basano la loro formazione scientifica professionale soltanto sugli insegnamenti universitari. Dunque, è stato ritenuto importante tentare di riuscire a mantenere anche a distanza le caratteristiche fondamentali del corso, quali: l'apprendimento basato sull'indagine, la costruzione della conoscenza scientifica attraverso il metodo scientifico, lo sviluppo di competenze laboratoriali, il dibattito scientifico tra pari.

DESCRIZIONE DELL'ATTIVITA' DI LABORATORIO IN PRESENZA

L'insegnamento in oggetto prende il nome di "Attività di Laboratorio: Elementi di Fisica e Didattica della Fisica"; viene svolto all'interno del Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria (laurea magistrale a ciclo unico) dell'Università di Bologna. Si tratta di un corso di laboratorio obbligatorio, che afferisce all'insegnamento "Elementi di Fisica e Didattica della Fisica". Consiste di 8 ore di attività svolte in presenza, più un lavoro da fare a casa che viene verificato e valutato.
L'obiettivo generale del corso è di fornire agli studenti di SFP gli strumenti concettuali e operativi che consentano loro di progettare e svolgere attività a carattere scientifico nella scuola primaria o dell'infanzia, basate sul metodo scientifico e l'esperienza diretta dei fenomeni in esame (esperimenti).
Tutte le attività proposte sono pensate per cercare di valorizzare la centralità della costruzione della conoscenza scientifica attraverso il metodo scientifico.
Il corso in presenza è organizzato in una prima ora di introduzione e riflessione, condotta in modo interattivo con gli studenti di SFP, su vari spunti metodologici per lo svolgimento di un percorso di fisica, o scienze in generale, nella scuola primaria e dell'infanzia. Nelle restanti 7 ore di laboratorio in presenza, gli studenti di SFP sperimentano tutti gli spunti metodologici discussi precedentemente, svolgendo in prima persona un esempio di percorso didattico laboratoriale di fisica adatto alla scuola primaria e riadattabile per quella dell'infanzia, proposto e analizzato passo per passo dalla docente. La proposta di percorso didattico di esempio tratta come argomento l'ottica geometrica, in quanto tema già affrontato dagli studenti di SFP durante il corso teorico di fisica di riferimento. Questa scelta fa sì che gli studenti siano facilitati nel concentrare l'attenzione principalmente sugli aspetti didattici, quali ad esempio: la costruzione di un percorso didattico laboratoriale a tema scientifico, l'impostazione e la conduzione degli esperimenti, il ruolo dell'insegnante durante la costruzione della conoscenza tramite il metodo scientifico, la documentazione del laboratorio, la scelta dei materiali e dei termini da usare, ecc. Durante lo svolgimento guidato di tale proposta didattica laboratoriale sull'ottica geometrica, gli studenti di SFP svolgono in prima persona e in gruppo una decina di esperimenti, interagiscono fortemente con la docente, talvolta simulando i possibili approcci tra docente e alunni delle scuole primarie e dell'infanzia. Così facendo, gli studenti di SFP, oltre che ad approcciarsi a metodologie didattiche, sviluppano competenze laboratoriali (*hands-on*), sperimentano la costruzione del sapere scientifico attraverso il confronto fra pari, si allenano alla comprensione della natura attraverso le modalità tipiche della scienza (domanda di ricerca, sperimentazione, osservazione, interpretazione, confronto, formalizzazione della teoria). Successivamente alle ore in presenza, viene chiesto agli studenti di produrre autonomamente a casa, entro 10 giorni, un elaborato in cui sia sintetizzata una loro personale proposta di percorso didattico laboratoriale in linea con gli indirizzi didattici affrontati in laboratorio. Questo elaborato viene corretto e valutato singolarmente per ogni studente.

CONVERSIONE DELL'ATTIVITA' DI LABORATORIO DALLA PRESENZA ALL'ONLINE

Nella conversione del corso sopra descritto dalla presenza all'*online*, lo sforzo non è stato soltanto riuscire a gestire gli esperimenti scientifici senza accedere ai laboratori, ma soprattutto quello di cercare di non perdere peculiarità del corso quali: l'apprendimento basato sull'indagine sperimentale e il metodo scientifico, la sperimentazione del ruolo dell'insegnante in questo metodo di costruzione della conoscenza, il lavoro *hands-on*, il confronto fra pari nell'interpretazione dei fenomeni fisici, ecc.

La durata del corso a distanza è rimasta di 8 ore, come per quello in presenza, ma divise in due incontri da 4 ore, invece che in uno unico da 8. Questa è sicuramente una delle facilitazioni che permette l'*online* rispetto allo svolgimento delle attività di laboratorio presenza, che deve sottostare maggiormente a vincoli organizzativi contingenti.
La prima ora del corso, consistente in una introduzione e riflessione su vari spunti metodologici per lo svolgimento di un percorso di fisica, nella scuola primaria e dell'infanzia è rimasta piuttosto simile. Si è cercato di mantenere l'interattività tra docente e studenti di SFP, pur con meno spontaneità rispetto al corso in presenza.

Kettle, in un lavoro uscito poco prima della pandemia, ha cercato di esaminare come i video venissero usati nei corsi di fisica della scuola superiore nel Regno Unito ed ha concluso che i video hanno grandi potenzialità didattiche ancora poco sfruttate (riferito a prima della pandemia) e ancora quasi inesplorate dal punto di vista della ricerca.
Stringer et al. nel loro rapporto sull'uso delle tecnologie digitali per migliorare l'apprendimento, riportano che l'integrazione dei video (come delle altre tecnologie digitali) nella pratica didattica porta notevoli benefici sotto vari punti di vista.
Entrambi i lavori citati descrivono vari tipi di uso che si può fare dei video all'interno degli insegnamenti.

Anche nella trasformazione dalla presenza all'*online* dell'attività laboratoriale oggetto di questo lavoro, per riuscire a non perdere alcune peculiarità del corso, si è scelto di integrare l'insegnamento con vario materiale video, in linea con la letteratura sopra citata.

La parte del corso più complessa da trasferire *online* era quella di far vivere in prima persona agli studenti di SFP esempi concreti del ruolo che ha l'insegnante durante la costruzione della conoscenza, tramite il metodo scientifico, partendo dall'osservazione del quotidiano. Nel corso in presenza, ciò avviene durante lo svolgimento guidato della proposta didattica laboratoriale sull'ottica geometrica; attraverso una forte interazione con la docente del corso, che talvolta simula con gli studenti alcuni possibili approcci tra maestro e bambini delle scuole primarie e dell'infanzia. Per tentare di adattare all'*online* questa parte del corso sono stati registrati, in una sorta di ricerca-azione, dei video in cui la docente interagisce con una bambina di 6 anni senza nessun prerequisito particolare. Chiaramente i video non intendono fornire ricette didattiche, ma solamente spunti metodologici su cui riflettere collegialmente a distanza. La scelta di svolgere l'azione con una sola bambina è stata imposta dal *lockdown* di quel periodo. Ma con un ragionamento a posteriori, se da una parte, il rapporto uno ad uno (maestro/alunno) dei video è completamente diverso dal contesto classe, d'altra parte permette di raccogliere in video, relativamente brevi, più spunti metodologici su cui riflettere *online* con gli studenti di SFP, ricercando quelle considerazioni affrontate in linea teorica nella parte introduttiva del corso.

Un altro obiettivo del corso di laboratorio in presenza che era necessario mantenere anche nella versione a distanza era lo sviluppo di competenze laboratoriali (*hands-on*). Più specificatamente, il laboratorio intende anche mandare il messaggio agli studenti di SFP che si può rendere la pratica di indagine scientifica «semplice», senza però svuotare la scienza della sua complessità. Per questo, l'allestimento degli esperimenti viene fatto con materiale di uso quotidiano, facilmente reperibile, che implicitamente comunica ai bambini che la scienza fa parte della loro quotidianità. D'altro canto, è fondamentale non trascurare la correttezza scientifica dell'allestimento, dello svolgimento e del ragionamento.

Per adattare questo aspetto del corso alla didattica a distanza sono stati intrapresi parallelamente tre differenti approcci: i) lo svolgimento sincrono di quattro esperimenti da parte di tutti gli studenti, ii) la visione di video di esperimenti iii) lo svolgimento asincrono di un esperimento a scelta.
Per quanto riguarda il punto i): qualche giorno prima dell'incontro è stata mandata per mail a tutti gli studenti una lista di oggetti, facilmente reperibili, da procurarsi. Durante l'attività a distanza sono stati organizzati quattro momenti sperimentali in cui ogni studente, contemporaneamente, svolgeva l'esperimento proposto dalla docente, a casa propria. Questi quattro momenti *hands-on* hanno permesso di recuperare anche un altro punto chiave del corso, ovvero che gli studenti di SFP (e in futuro i loro giovani alunni a scuola) sperimentino la costruzione della conoscenza scientifica attraverso il confronto argomentato fra pari, pilastro della reale costruzione del sapere scientifico. Per lo svolgimento dei quattro esperimenti, gli studenti sono stati divisi in piccoli gruppi da 4, tramite stanze virtuali, dove audio e telecamere venivano tenuti accesi per dare spazio a un confronto libero. La docente si muoveva virtualmente tra le stanze, come in presenza era abituata a fare tra le isole di banchi. Durante gli esperimenti i gruppi, creati inizialmente in modo casuale, sono stati mantenuti stabili al fine di sfruttare la confidenza acquisita tra le persone.
Per quanto riguarda il punto ii): facilitati dal fatto che gli studenti di SFP già conoscono, grazie ad altri insegnamenti universitari, la didattica attiva e il *learning by doing*, è stato pensato che per gli ulteriori esperimenti che venivano svolti in presenza, ma non fattibili durante il corso *online*, sarebbe stato sufficiente mostrare dei video dello svolgimento degli esperimenti, appositamente girati dalla docente e commentati dal vivo. Questa videoteca appositamente realizzata è stata (a differenza dei video con la minore descritti precedentemente) fornita agli studenti tra i materiali del corso.
Per quanto riguarda il punto iii): sia nel corso in presenza che in quello a distanza, agli studenti viene richiesto un lavoro a casa di progettazione dettagliata di un percorso didattico scientifico con alcuni momenti sperimentali. Nella versione a distanza del corso è stato aggiunto l'obbligo anche di svolgere un esperimento del percorso, scegliendo tra quelli mostrati nei video, o a piacere. È stato anche richiesto di fornire documentazione fotografica o video dello svolgimento così da poterne valutare la correttezza scientifica.

RISULTATI E CONCLUSIONI

Carli et al. descrivono come è stato trasformato l'insegnamento di ottica in una scuola superiore, dalla presenza all'*online,* durante il *lockdown* del 2020. Anche nel loro caso la trasformazione è stata progettata più possibile in accordo con i principi dell'*inquiry-based learning* e i *research-based models.* I risultati del lavoro di Carli et al., basati sulla valutazione del docente e sull'autovalutazione degli studenti, mostrano che la trasformazione è stata efficace e che tale esperienza può fornire spunti utili anche per l'insegnamento in condizioni regolari.
Le conclusioni del nostro lavoro di trasformazione sono perfettamente in linea con quelle di Carli et al., infatti il 75% dei lavori consegnati dagli studenti (154 in tutto, 93 nell'a.a. 2019/2020 e 61 nell'a.a. 2020/2021) sono stati valutati di buon livello o superiore. Molti studenti, inoltre, hanno consegnato una documentazione video dell'esperimento svolto da loro stessi a casa, simile a quella proposta durante il corso, in cui la docente interagiva con una bambina mettendo così in evidenza il ruolo dell'insegnante durante la costruzione della conoscenza scientifica a partire dall'osservazione. Questi studenti, dunque, stimolati dalla visione dei filmati proposti durante il corso *online*, hanno autonomamente deciso di esercitare tale pratica coinvolgendo figli o nipoti. Questo risultato inaspettato ha fatto senza dubbio pensare che quel materiale prodotto per il corso *online* possa rimanere una risorsa anche da sfruttare in condizioni regolari. Non ultimo, i *feedback* ricevuti dagli studenti, sia spontaneamente, che tramite i questionari di valutazione, sono stati tutti positivi al netto della situazione di obbligo di didattica a distanza. Molti studenti, negli stessi questionari, si sono però rammaricati del fatto di non aver potuto svolgere il corso in presenza e questo a nostro parere è in realtà rassicurante, perché la praticità dei corsi *online* (per di più di buon livello) rischia di renderli sempre più richiesti dagli studenti anche al di là della situazione emergenziale. In conclusione, a valle di questa esperienza, ci ritroviamo, anche per la

nostra fattispecie, perfettamente allineati alla tesi di Stringer et al., ovvero che la tecnologia è più efficace quando è utilizzata per integrare o migliorare l'insegnamento, piuttosto che per sostituirlo.

BIBLIOGRAFIA

Abell, S. K., Appleton, K., & Hanuscin, D. L. (Eds.). (2013). Handbook of research on science education. Routledge.

Carli, M., Fontolan, M. R., & Pantano, O. (2021). Teaching optics as inquiry under lockdown: how we transformed a teaching-learning sequence from face-to-face to distance teaching. Physics Education, 56(2), 025010.

Kettle, M. (2020). How videos are used in secondary school physics teaching. Physics Education, 55(3), 035014.

Klein, P., Ivanjek, L., Dahlkemper, M. N., Jeličić, K., Geyer, M. A., Küchemann, S., & Susac, A. (2021). Studying physics during the COVID-19 pandemic: Student assessments of learning achievement, perceived effectiveness of online recitations, and online laboratories. Physical Review Physics Education Research, 17(1), 010117.

Orion, N., & Kali, Y. (2005). The effect of an earth-science learning program on students' scientific thinking skills. Journal of Geoscience Education, 53(4), 387-393.

Stringer, E., Lewin, C., & Coleman, R. (2019). Using digital technology to improve learning: Guidance report.

PROSSIMA FRONTIERA: MARTE!

Alessandra Maria Adelaide Chiotto
I.C. Gassino Torinese (To)
alessandra.chiotto@gmail.com

Abstract
L'Engineering Design Process (EDP) è una metodologia di lavoro tipica dei processi industriali e ingegneristici e si colloca all'interno della didattica di apprendimento basato sull'indagine, di matrice costruttivista: tutto parte dall'identificazione di un problema autentico e contestualizzato. Si passa poi allo studio di possibili soluzioni e alla loro progettazione vera e propria, seguita dalla realizzazione di un prototipo che verrà poi testato ed conseguentemente migliorato. Le diverse fasi sono accompagnate da una relazione dettagliata dei dati ottenuti e il lavoro si conclude con la discussione e la presentazione della soluzione trovata da ogni gruppo. Partendo dallo studio delle missioni Apollo, gli studenti di una classe III di Scuola Secondaria di I grado hanno pensato a quali fossero i principali ostacoli da affrontare per atterrare efficacemente e in sicurezza su Marte: con la modalità EDP hanno elaborato un progetto, raccolto i materiali necessari, costruito e testato i loro modelli di lander. Questa attività ha portato gli studenti a compiere analisi preliminari su atmosfera e coerenza del suolo di Marte, a valutare l'aerodinamicità dei loro modelli ea sviluppare la loro creatività nel reperire i materiali e nell'assemblare i loro prototipi. Il progetto, svolto durante un periodo di DAD, ha permesso agli studenti e alle studentesse di approfondire le loro conoscenze sull'argomento "spazio" e ad utilizzare le loro abilità per sviluppare competenze trasversali e anche per divertirsi in un momento di staticità.

Parole-chiave
EDP, ingegneria, Marte, prototipo, astronomia

PROSSIMA FRONTIERA: MARTE!

Engineering design process

L'*engineering design process* (Ertas & Jones) è una metodologia didattica ispirata al processo creativo industriale-ingegneristico. Si può suddividere in *sei fasi* (Fig.1) concatenate tra loro ed è altresì iterativo, in quanto i diversi step possono essere ripercorsi tante volte quante necessarie per la realizzazione del prodotto finale. Durante la *prima fase* ci si occupa della definizione del problema da risolvere o della necessità alla quale far fronte: possono essere interessi reali legati alla quotidianità come ad esempio la necessità di un ponte per raggiungere più comodamente un determinato luogo o un banco più confortevole. Nella *fase successiva* gli studenti e le studentesse si occupano di proporre diverse soluzioni al problema precedentemente condiviso: in questo step si promuove la creatività e si promuove lo sviluppo del pensiero divergente. Nella *fase numero tre*, il progetto viene sviluppato tenendo conto di tutti i fattori che si sono identificati nelle fasi precedenti e nella *fase quattro* il modello o il prototipo progettato viene realizzato con i materiali che si hanno a disposizione. A questa prima parte prettamente creativa, segue una *fase di analisi* di dati e di test, infatti i modellini vengono provati e sottoposti a diversi test per validarne la funzionalità. I test possono essere forniti dal docente oppure essere progettati insieme al modello stesso. In base ai dati raccolti e alle analisi effettuate, nell'*ultima fase* il modello viene perfezionato e viene sottoposto nuovamente ad altri test. Questi passaggi, come si diceva in precedenza, possono essere reiterati più volte, in base al livello di qualità ed efficienza che si desidera ottenere.

Figura 1. Le fasi dell'Engineering Design Process (adattato Ertas & Jones)

In classe, la metodologia EDP permette ai ragazzi e alle regazze di apprendere attraverso la pratica, quello che sui manuali di didattica viene definito come *learning by doing*. Questa tipologia di progettazione didattica permette lo sviluppo di diverse competenze come quella in matematica, tecnologia ed ingegneria, quella imprenditoriale, digitale, quella personale e sociale. Siamo quindi di fronte ad un apprendimento efficace che genera collegamenti significativi e favorisce una disposizione all'azione positiva. Va sottolineata altresì la natura inclusiva di questa metodologia, in quanto l'efficacia deriva proprio dalla diversità degli approcci utilizzati e dalle visioni alternative scaturite dalla discussione. Inoltre, lo sviluppo di un *mindset* di tipo STEM soprattutto nelle ragazze è uno dei tanti aspetti che rendono l'EDP un approccio alla didattica particolarmente inclusivo e stimolante.

Il progetto in DAD

Il progetto *Prossima frontiera: Marte!* è stato svolto in una classe terza di Scuola Secondaria di I Grado in un periodo di didattica a distanza. La modalità EDP è stata adattata alla classe e alla situazione: prendendo spunto dai diversi livelli di Inquiry Based Science Education, si è proposto alla classe un EDP di tipo strutturato. La fase 1 -*bisogno*- è stata proposta dall'insegnante: con quale mezzo raggiungere Marte? La fase 2 -*le soluzioni*- è stata in parte guidata dall'insegnante che ha richiesto che venissero tenuti in considerazione alcuni fattori:

- stabilità nell'atterraggio
- incoerenza del terreno
- alloggiamento astronauti
- sistemi di comunicazione

E' stata realizzata e fornita una *checklist* che ha permesso anche in DAD di eseguire tutti i passaggi richiesti in autonomia. Le fasi successive di realizzazione e di test sono state effettuate a casa dai ragazzi e dalle ragazze, con i materiali presenti in casa, in particolar modo prediligendo materiali di riciclo e di riuso. I lavori sono stati caricati sulla piattaforma utilizzata per la DAD e sono stati condivisi durante una videolezione. I progetti hanno rispecchiato le diverse personalità e ognuno ha trasmesso la propria visione personale (Fig.2-3). Sono stati effettuati anche test di volo e di atterraggio dei lander e alcuni hanno effettuato anche modifiche all'assetto del proprio modello, per migliorare l'efficienza (Fig.4)

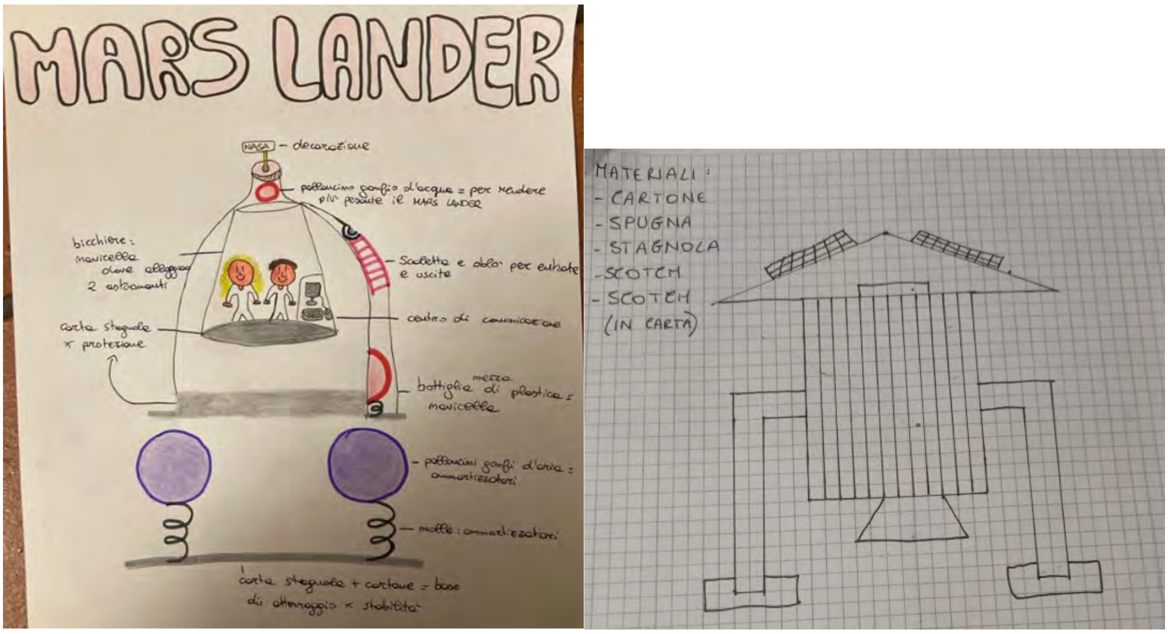


Figura 2. Esempi di progetti realizzati dagli studenti e dalle studentesse. Nel disegno a sinistra il focus è sull'ammortizzazione tramite molle e palloncini gonfiati. Da notare i differenti approcci anche stilistici.

Figura 3. Esempio di modellino costruito: palloncini e molle agiscono da ammortizzatori. I materiali utilizzati sono reperibili in casa e sono di riciclo (ex: bottiglia plastica)

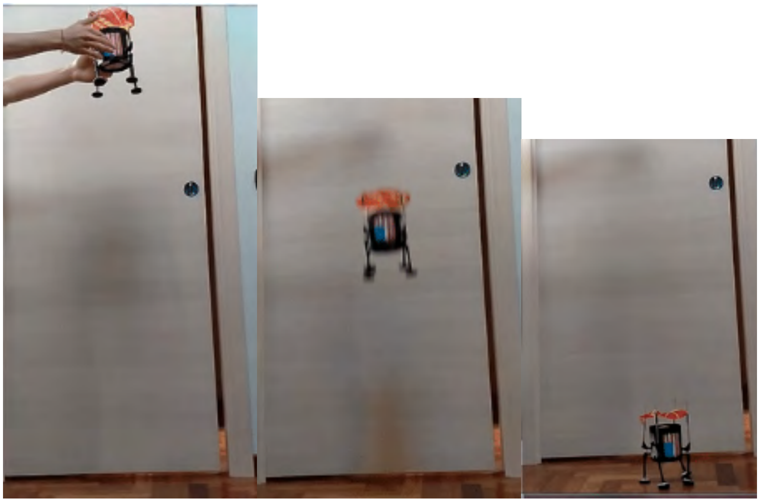


Figura 4. Frames del test di volo di uno dei modellini: da notare l'apertura del paracadute nel secondo pannello e la discesa nominale nel terzo.

CONCLUSIONI

I progetti realizzati dagli studenti e dalle studentesse in un periodo di didattica a distanza hanno dimostrato come in un contesto estremamente difficile, un approccio metodologico basato sull'esperienza, sulla pratica, sulla costruzione manuale, possa coinvolgere maggiormente gli studenti e possa favorire un apprendimento più efficace di una lezione frontale fruita tramite uno schermo. Il feedback ottenuto è stato positivo e l'approccio alla partecipazione alle lezioni è stato più positivo. A fine anno scolastico su sedici, ben cinque hanno inserito o dedicato l'elaborato finale ad una tematica spaziale, suggerendo che l'argomento universo ha lasciato un buon ricordo. Dal punto di vista della progettazione didattica, alcuni aspetti sono da migliorare, come la realizzazione di checklist più dettagliate e un maggiore approfondimento degli aspetti teorici della meccanica di volo (gravità, resistenza all'aria) e del pianeta di atterraggio. Nell'insieme è stata una esperienza apprezzata dai discenti, ma anche un momento di crescita formativa della componente docente.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio il comitato organizzatore di DI.FI.MA per aver accettato il mio contributo e per avermi dato la possibilità di condividere questo progetto. Ringrazio altresì i miei allievi e le mie allieve di 3C dell'anno scolastico 2020/2021 per aver accolto con entusiasmo questa attività e per aver creato progetti così innovativi e creativi.

BIBLIOGRAFIA

Ertas A. and Jones J.C. The engineering design process (1996). Wiley

SMARTPHONE AND STEM EDUCATION

Alessio Drivet
GeoGebra Institute of Turin

Abstract
Il Covid-19 ha avuto un grande impatto anche sulla scuola, il ricorso alla Didattica a distanza ha sollevato questioni già presenti, in particolare rispetto al significato di strumenti e tecnologie. Tralasciando gli aspetti legati all'uso della rete e quelli comunicativi, si vuole fornire una breve panoramica sulle principali problematiche legate all'utilizzo di uno smartphone per la didattica STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) e, in particolare, della matematica. Un tema che vede scontrarsi due posizioni contrapposte (favorevoli e contrari) e spesso poco disponibili al dialogo. Senza voler entrare nel merito del dibattito il testo esamina il problema da tre punti di vista: l'hardware, le App e i possibili argomenti matematici associabili alle principali funzionalità attivate dagli studenti.

Parole-chiave
Smartphone, STEM, Hardware, App, Matematica

PREMESSA

La devastante pandemia Covid-19 e la conseguente necessità di ricorrere alla Didattica a distanza (DAD) ha costretto studenti, docenti e famiglie a misurarsi su un terreno in larga parte sconosciuto. Un percorso educativo mediato da strumenti digitali e da Internet richiede adeguati dispositivi, accesso a connessioni veloci, competenze digitali. È comunque importante prendere in considerazione non solo gli effetti che una data tecnologia potrebbe avere sulla natura e sulla qualità dell'apprendimento degli studenti ma anche le pratiche degli insegnanti (Gardner & Tillotson, Legrottaglie & Ligorio, Sinclair & Robutti).
Nel momento in cui ci interroghiamo su quale approccio interdisciplinare tenere e come facilitare l'apprendimento STEM forse bisognerebbe fare riferimento ai device utilizzati e, in modo particolare, allo smartphone. Ormai si tratta di uno strumento che rappresenta quasi una estensione del corpo. Non a caso è stato coniato il termine *nomofobia* nel senso di *no mo(bile) fobia* per indicare la "dipendenza" da smartphone (Wai Than & Pyae Wai Shan). È interessante notare che il fenomeno tende a toccare fasce di età sempre più basse e con intensità crescente. Facendo riferimento ad indagine realizzata da Laboratorio Adolescenza e Istituto di ricerca Iard, nel 2019 aveva lo smartphone il 60% degli adolescenti con meno di 11 anni e attualmente la percentuale è salita al 78%. Secondo un altro recente sondaggio online condotto in Italia dall'Associazione Di.Te. i ragazzi controllano il proprio smartphone una media di 75 volte al giorno, e il 7% anche fino a 110 volte. Molte sono le riflessioni (Crescenza, Garavaglia & Petti, Keough, Ludwig et al., Raelovich et al., Roseli dos Santos), le ricerche su questo tema (González & Muñoz, Park & Kaye, Rodríguez-García et al.) e le rassegne della letteratura (Busch & McCarthy, Fadda & Vivanet, Jahnke & Liebscher). Particolarmente significative sono le indagini per determinare la relazione tra dipendenza da Internet, disturbi dell'uso dei social media e dipendenze da smartphone degli studenti (Horvath et al., Monyag et al., Ramazanoglu).
Gli smartphone (e i tablet) sarebbero "dannosi" per l'apprendimento delle materie scientifiche e, in particolare, della matematica? Le opinioni, come spesso accade, sono divergenti; giudizio negativo in alcuni studiosi (Twenge) o critico per TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) che sostiene che chi adopera per molto tempo i dispositivi mobili ha risultati peggiori nelle materie scientifiche; secondo alcuni esperti in didattica ciò non è vero (Bulus, Da Pra); altri presentato scenari differenziati (Salcines-Talledo). Si tratta sicuramente di un tema complesso e divisivo. Una rivista italiana dedicata alla scuola ha effettuato un sondaggio per conoscere l'opinione degli utenti; in base a tale rilevazione quasi il 75% si è dichiarata contraria all'utilizzo dei cellulari a scuola. Inghilterra, Norvegia e Spagna si sono dichiarate contrarie all'introduzione di questo strumento in classe, in Francia

vi è una legge molto restrittiva, in Italia la posizione ufficiale è ancora fluida e deve comunque tener conto che di un dibattito ancora non concluso visto che secondo alcune ricerche il 13% dei docenti crede nella bontà del cellulare come supporto.
Ad ogni modo, pur tra mille dubbi, forse vale la pena prendere in considerazione lo smartphone come strumento didattico (Kaimara et al., Mynbayeva et al., Subramanya & Farahani). A questo proposito è molto utile fare riferimento ad una recente ricerca. Gli autori (Fowler & Stickney) hanno esaminato 23 applicazioni che possono essere usate per fornire istruzione con lo smartphone (m-learning), classificate in sei categorie: partecipazione del pubblico, presentazione, collaborazione, valutazione, aggregatori di notizie o contenuti curati, e realtà aumentata.
Nel testo si farà cenno ai potenziali utilizzi dello smartphone (ma lo stesso discorso si può estendere al tablet) nell'ambito STEM. Come è noto il termine venne introdotto per la prima volta dalla National Science Foundation negli anni '90, e si riferiva all'insegnamento e all'apprendimento nei campi della Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica; spesso è usato per indicare qualsiasi pratica che coinvolga una o più delle sue discipline. Un particolare riguardo verrà dedicato, nell'ultima parte, alla matematica.

L' HARDWARE

Il tema può essere sviluppato da diversi punti di vista punti di vista.
Come il computer, il tablet, la macchina fotografica lo smartphone è, in primis, hardware. Gli smartphone non sono altro che dei particolari telefoni cellulari dotati di uno schermo tattile ma anche dotati di funzionalità proprie dei computer.
Ricordiamo che lo smartphone ha elementi sensoriali (Podlasov). In realtà spesso usufruiamo di queste estensioni senza esserne pienamente consapevoli. Ce ne sono di diverse tipologie ma una certa quota di sensori si trova su tutti gli apparecchi mentre altri rappresentano un valore aggiunto solo di certi dispositivi. In uno smartphone di fascia alta ci possono essere decine di "sensi".
Prendiamo come esempio solo i sensori più comuni, ordinati alfabeticamente:
Accelerometro: quando ruotiamo l'apparecchio notiamo che l'immagine si adatta alla posizione dello schermo. Un sensore misura l'accelerazione del dispositivo e questo risponde in modo adattivo. I moderni smartphone sono dotati di tre accelerometri, uno per ciascun asse. Visivamente possiamo considerare un accelerometro come una sfera a cui sono attaccate delle molle che si comprimono (o si allungano). La misurazione del grado di compressione delle molle permette di stabilire che c'è stata un'accelerazione nella direzione in cui si trova la molla compressa. Si tratta di uno strumento importante per l'insegnamento della fisica e su cui esiste una ampia letteratura già da molti anni (D'Ambrosio et al., Kaps & Stallmach, Listiaji, Monteiro et al., Raharja) e che permette di aiutare gli allievi nell'interpretazione di fenomeni fisici grazie ad un approccio sperimentale che poggia le sue basi su una corretta pianificazione degli esperimenti. Infatti si possono osservare le variazioni sui tre assi, esportarne i dati e vederne la rappresentazione grafica. Non bisogna però dimenticare gli aspetti matematici: vettori, funzioni sinusoidali, derivate sono alla base dello studio di questo strumento, quindi parliamo di una matematica impegnativa.
Fotocamera: sicuramente la maggioranza delle persone utilizza la fotocamera dello smartphone per scattare foto e video. Tutto ciò è normale ma ci sono altre opzioni più interessanti come la traduzione automatica di un testo o la sua scansione. Non solo, ad esempio con uno smartphone si possono calcolare la distanza di un oggetto dall'utente e la sua altezza utilizzando i principi della telemetria. Le misure possono poi servire per determinare lati ed angoli del triangolo così definito utilizzando la trigonometria. Un particolare utilizzo STEM (Hergemöller & Laumann, Samsuar et al.) si avvale della possibilità di trasformare lo smartphone in un microscopio grazie a lenti accessorie leggere e capaci di adattarsi a tutti i modelli di telefonini. In commercio ci sono poi anche microscopi, più avanzati tecnologicamente, che si collegamento direttamente ad un dispositivo mobile mediante una connessione Usb.
Giroscopio: serve a misurare l'inclinazione dello smartphone permettendo di individuare ogni movimento. Se stiamo utilizzando un videogame, grazie a questo strumento e all'accelerometro è sufficiente inclinare lo smartphone per cambiare prospettiva o muovere un oggetto all'interno del gioco.

Questo sensore è stato sviluppato per collaborare con l'accelerometro in ciò che riguarda l'orientamento del cellulare. Con l'avvento della realtà virtuale il ruolo del giroscopio ha assunto una rilevanza essenziale. Grazie ad esso basta muovere lo smartphone per spostare la visuale all'interno del videogame o muovere oggetti virtuali. Ma le funzionalità di questo piccolo componente sono molto più ampie, è possibile utilizzare lo smartphone come unità di base per un robot; il sensore di rotazione permette di trasmettere l'orientamento corrente del robot (Pedemonte & Operto). Una interessante esperienza è relativa alla dinamica di un artefatto molto noto come lo yo-yo (Salinas et al.). Come nel caso dell'accelerometro se non si vogliono toccare temi complessi di fisica e matematica ci si può mantenere su un piano sperimentale di raccolta ed elaborazione dati. Ricordiamo comunque che, se si vuole esaminare il tutto sotto l'aspetto matematico, l'equazione fondamentale che descrive un sistema rigido in rotazione è: $M = I \cdot a$. In cui M è il momento meccanico, I il momento di inerzia e a l'accelerazione angolare.

GPS: ormai molti navigatori automobilistici sono stati rimpiazzati da una applicazione di navigazione, come ad esempio Google Maps. La possibilità di individuare posizione e percorsi è basata sul Global Positioning System (GPS). La rilevazione della posizione si basa sullo sfruttamento dei segnali radio generati da tre satelliti; il ricevitore, grazie al tempo di percorrenza dei tre segnali, è in grado di calcolare il punto del pianeta in cui si trova, con un margine di errore contenuto. In più si sfrutta il segnale inviato da un quarto satellite che serve a sincronizzare l'orologio con quello satellitare. In questo modo lo smartphone diventa un navigatore satellitare e, in più, permette di essere localizzato in caso di smarrimento o furto. In chiave didattica il concetto di trilaterazione può essere facilmente compreso a livello elementare se visto come intersezione tra tre circonferenze.

Magnetometro: misura l'intensità e la direzione di un campo magnetico. Grazie ai dati del magnetometro viene calcolato lo spettro di frequenza mediante una trasformata di Fourier. È utilizzato per esempio per capire l'intensità delle emissioni di un qualsiasi dispositivo (radio, tv, PC, ecc.) e, in questo caso, il valore numerico dell'emissione può essere importante per valutarne l'intensità. Permette, laddove è presente, il funzionamento di diverse applicazioni, quali la bussola o metal detector. In chiave didattica citiamo l'uso dei magnetometri di uno smartphone per misurare la grandezza del campo magnetico terrestre (Hellesund). Chi fosse interessato ai risultati di un campione di esperimenti relativi all'insegnamento dell'equazione per il calcolo del campo magnetico di una bobina e la misurazione della permeabilità del vuoto in un ambiente scolastico può riferirsi ad un recente paper (Wannous & Horváth).

Sensore acustico: probabilmente molti utenti hanno registrato la propria voce o spedito un audio tramite WhatsApp. Meno evidente è la possibilità di impostare esperimenti di acustica. La fisica del suono è un argomento che non si è prestato a molte sperimentazioni, soprattutto a causa dei costi delle attrezzature. Utilizzando il sensore microfono di uno smartphone e del semplice materiale accessorio sono stati condotti esperimenti molto interessanti (D'Ambrosio, Parolin & Pezzi)).

Sensore di luminosità: è utilizzato dallo smartphone per adattare in maniera automatica la luminosità del display alla luce ambientale e ottimizzare in questo modo la visualizzazione dello schermo. I dati di questo sensore sono in grado di misurare la luminanza. La luminanza serve ad esprimere l'effettiva entità di un fascio luminoso che ha come sorgente una superficie, di dimensioni piuttosto estese, presa in considerazione nella direzione dell'osservatore della luce stessa. In termini matematici, la luminanza viene espressa come il rapporto tra intensità luminosa della sorgente posta in direzione dell'osservatore e la superficie per come viene percepita dall'osservatore stesso. Termine da non confondere con l'illuminamento, quest'ultimo esprime come il rapporto tra il flusso luminoso che termina su una superficie e l'area della superficie che viene presa in considerazione.

LE APP

Per poter sfruttare le potenzialità dello smartphone occorre appoggiarsi a delle applicazioni (App). Nel testo si farà riferimento a quelle per Android in quanto la maggior parte degli smartphone in mano agli studenti utilizza questo sistema operativo. Gli esperimenti si basano sul cosiddetto Bring Your Own Devices (BYOD), ovvero gli studenti possono portare e utilizzare i propri dispositivi in classe o nel laboratorio di scienze. Ovviamente non bisogna sottovalutare il fatto che variazioni nei risultati degli

esperimenti sorgono quando gli studenti effettuano misurazioni con i sensori a disposizione a causa delle diverse tecnologie (Alexandros et al.). anche se normalmente è un termine più ampio si parla di MobLeLab quando è il sistema operativo dello smartphone ad eseguire tutta l'acquisizione dei dati, e quindi è in grado di generare un insieme di valori e/o un grafico della variabile raccolta (Lellis-Santos & Abdulkader).
Phyphox (PHYsical PHOne eXperiment) è in grado di trasformare lo smartphone in un vero e proprio laboratorio di fisica e matematica (Pighini, Slipukhina et al.). L'App permette di utilizzare i sensori dello smartphone per raccogliere i dati indispensabili per un esperimento. Ad esempio, rilevare la frequenza di un pendolo usando l'accelerometro o misurare l'accelerazione lineare su una pista d'aria dotata di una serie di magneti sfruttando le variazioni di campo con il magnetometro. Un aspetto importante è quello che per il trasferimento datisi può collegare lo smartphone ad una rete Wi-fi. In alternativa si può usare il Bluetooth. Per un approfondimento si possono trovare diverse indicazioni su come sfruttare le potenzialità insite nel device sul sito di questa applicazione.
L'aspetto rilevante è legato alla possibilità di sviluppare abilità non standard nella ricerca di informazioni in modo da attivare delle competenze per evidenziare le proprietà essenziali di un particolare esperimento (Soboleva et al.). Numerose sono le App con queste caratteristiche, possiamo citare, come esempi, *SPARKvue* un'altra applicazione per la raccolta, la visualizzazione e l'analisi dei dati per l'apprendimento STEM o, cambiando decisamente area, *SkySafari* che consente agli studenti di esplorare, localizzare e identificare milioni di oggetti celesti, dai satelliti ai pianeti alle costellazioni. Sempre in ambito scientifico è da provare una App che aiuta ad acquisire una maggiore conoscenza del mondo vegetale; permette il riconoscimento di piante e fiori tramite foto realizzate sul posto, *Pl@ntNet*; si scatta la foto ad una pianta, una foglia o un fiore e la sua identificazione avviene dal confronto della foto con le immagini di un database con una precisione che dipende dalla qualità della foto. Un capitolo particolare andrebbe poi destinato alla Robotica, in un recente progetto (Andreotti et al.) è stata creata una App che consente di tradurre comandi vocali in testo che poi viene inviato e può essere interpretato dal programma sviluppato degli studenti per il controllo del robot.
Queste però non sono le uniche possibilità, è possibile andare oltre e prendere in considerazione altre possibilità. Tra le App particolarmente stimolanti citiamo quella del progetto *MathCityMap* (Barbosa & Vale, Cahyono, Gurjanow et al., Taranto et al.) e quella di *Kahoot!* (Curto Prieto et al., Wang & Tahir).
Il progetto MathCityMap è stato sviluppato in Germania (nel 2015) con l'intento di incentivare la pratica scolastica di attività matematiche all'aperto. Il progetto è costituito da due componenti digitali: un portale web che permette di costruire dei percorsi matematici in città con compiti basati su oggetti osservati con "occhio matematico" ed un'applicazione per dispositivi mobili, che permette agli studenti di svolgere questi percorsi, da soli o a gruppi, rispondendo alle domande proposte. Kahoot! è invece uno strumento utilizzato tipicamente per verificare l'esito di un insegnamento o fare delle gare tra i partecipanti. Basta collegarsi al sito, digitare il PIN che compare sullo schermo, inserire il proprio nome o un nickname ed inviare la risposta ad una domanda di un quiz a risposta multipla. L'impostazione di un timer fa sì che, ogni volta che il tempo definito è scaduto, si passa alla domanda successiva. Quindi appare la risposta corretta, un istogramma con il numero di risposte ricevute per ogni opzione e una classifica. I risultati finali possono essere scaricati in Excel per essere valutati.
Questi sono solo due esempi, ma molte altre potrebbero essere le applicazioni consigliate, di tutte ci limitiamo a segnalare una delle più diffuse e utili (Morales et al., Zhelezniakov et al.): con *Microsoft Math Solver* o *Photomath* basta scrivere una formula o scattare una foto di una domanda o di un problema matematico per ottenere una soluzione ampiamente commentata. Non a caso si tratta delle app di matematica più utili, visto che l'utilizzo è veramente semplice e si possono vedere i vari calcoli necessari, spiegazioni passo-passo per risolverlo, rappresentazioni grafiche.
Socratic by Google funziona come Microsoft Math Solver ma con uno spettro di applicazione più vasto. Si possono non solo scattare foto di problemi ponendo, grazie al microfono, domande su temi scientifici di biologia e chimica ma anche è possibile avere informazioni su discipline non STEM come storia o letteratura.
Un ambito su cui si sono concentrati gli sforzi è quello della realtà aumentata, si tratta di un'esperienza interattiva di un ambiente reale dove gli oggetti che risiedono nel mondo reale sono "aumentati" da

informazioni percettive (Сороко, Huang et al., Yildirim et al., Yuzbasheva & Kravtsov). Occorrono, oltre allo smartphone, un visore, le App per la visualizzazione della realtà virtuale ed eventualmente un controller/Joypad. Google sta incoraggiando l'uso nelle scuole di questi dispositivi attraverso *Expeditions*, che fornisce supporto a diversi temi educativi come, per esempio, *Science of Superheroes* or *Periodic Table*. Anche se le applicazioni sono in gran parte legate a volare, navigare, sparare, ecc. c'è anche qualche esempio più legato a contenuti tradizionali. Tra le App disponibili citiamo *VR Math* che aiuta gli studenti a comprendere la geometria 3D.

LO SMARTPHONE E LA MATEMATICA

Fin qui abbiamo esaminato alcune applicazioni che fanno riferimento a diverse aree scientifiche, ovviamente si è solo osservata la punta dell'iceberg. Ora focalizzeremo l'attenzione sulla matematica. Da un punto di vista didattico è possibile accennare a come attività proprie degli studenti possano rappresentare lo spunto per trattare aspetti, spesso un po' tralasciati, della matematica.
Anche in questo caso ci si può limitare ad alcuni esempi significativi.
Ad esempio le *ricerche su Google*. Numerosi studi si sono concentrati su stili cognitivi e strategie di ricerca (Parmigiani et al.) oppure tesi a comprendere e descrivere le pratiche degli studenti che utilizzano Internet per i compiti e che praticano il famoso plagio noto come copia-incolla (Sisti). Quanti docenti hanno però pensato di presentare la metrica basata sull'algoritmo Page Rank? Eppure si tratta di un classico esempio in cui, in una formula relativamente semplice, troviamo l'esplicazione di un algoritmo che dipende anche da una stima di probabilità soggettiva.
Un altro spunto potrebbe venite da cosa succede riguardo l'invio di messaggi. Secondo l'Istituto nazionale di statistica italiano (Istat) oltre l'ottanta per cento dei giovani oltre i 14 anni hanno utilizzato servizi di messaggeria istantanea. Parliamo soprattutto di *invio di un SMS* o di un *messaggio WhatsApp*. Nel primo caso non viene realmente inviato un messaggio scritto in lettere, il testo viene codificato e ogni lettera tradotta in una serie di 1 e di 0 tramite il codice ASCII. Si tratta di un esercizio che richiede non solo la conoscenza delle codifiche dei dati, ma anche l'acquisizione di competenze come saper codificare un'informazione alfanumerica e abilità come riconoscere i diversi tipi di informazioni. In rete si possono trovare numerosi convertitori, ma anche App come *Text Converter Encoder Decoder Stylish Text*. Nel secondo caso si tratta di uno strumento di messaggistica di enorme diffusione; oltre allo scambio di messaggi testuali, è possibile inviare immagini, video, audio, documenti, la propria posizione geografica e fare chiamate e videochiamate con chiunque abbia uno smartphone. Partendo da WhatsApp è possibile aprire un discorso (semplificato) sulla crittografia. Uno dei problemi più importanti è quello della sicurezza. La verifica dello stato si può facilmente osservare, basata seguire i passaggi: apri chat →mostra contatti→crittografia.
Gli esempi si potrebbero moltiplicare, pensiamo ad esempio al *gioco online*, è un dato di fatto che molti ragazzi utilizzano il cellulare per giocare alle slot, al blackjack o alla roulette. Vincendo la ritrosia degli insegnanti per il gioco d'azzardo si possono affrontare questioni legate al calcolo delle probabilità e, in particolare al concetto di valore atteso. È da segnalare il materiale utilizzato nella sperimentazione *BETonMATH* (Andrà et al.), un'esperienza di Matematica finalizzata alla prevenzione dell'abuso di gioco d'azzardo tra gli studenti della scuola secondaria di secondo grado. In particolare, sono didatticamente utili le App previste per il progetto: *Gratta e perdi* simula una o più "grattate" dei simboli presenti sul biglietto di questa lotteria istantanea.
Vorremmo ora aggiungere due altri ambiti: la *previsione dei gusti musicali su Spotify* e la *scelta dei film su Netflix*. Spotify è un servizio musicale che offre lo streaming on demand di una selezione, il catalogo offerto è composto da oltre 50 milioni di brani. Ad ogni apertura la home page mostra diversi riquadri creati ad hoc per l'utente e ordinati per stimolare la sua curiosità. Il cardine del servizio è il cosiddetto collaborative filtering una tecnica che prova a prevedere cosa può piacere sulla base degli schemi di ascolto e quelli di utenti simili. L'analisi del sistema è complicata, comunque ci sono almeno due termini da sottolineare: parametri e pattern. Invece di musica si può parlare di film e quindi non si può non considerare Netflix. Anche in questo caso le raccomandazioni sono basate su rating e scelte utenti. Ma non mancano altri elementi: ora del giorno, dispositivi utilizzati e tempo di visualizzazione. Tutte queste

informazioni costituiscono dati di input che vengono elaborati da un algoritmo. Le dimensioni del fenomeno sono imponenti, in pratica ci sono 200 milioni di utenti e 30 milioni di film. Tutto ciò può essere visto come una tabella con duecento milioni di righe e trenta milioni di colonne. Matematicamente si ha una gigantesca struttura che implica il ricorso alle matrici.
Per concludere potremmo ricordare come lo smartphone abbia, in parte, sostituito i navigatori satellitari per trovare la strada più breve. Ebbene, cos'altro è se non la ricerca di un cammino minimo su un grafo?

CONCLUSIONI

Il testo, per ovvi motivi di spazio, ha appena mostrato alcuni aspetti del problema. Nonostante si sia molto scritto e parlato del tema e diverse sia state le sperimentazioni rimane molto da scoprire. Ad esempio, la storia della matematica è costellata di strumenti che hanno permesso passi in avanti, liberandoci da estenuanti lotte sul piano del calcolo in modo da poterci concentrare sui contenuti; giusto per fare un po' di esempi: abaco, bastoncini di Nepero, tavole logaritmiche, regolo calcolatore, calcolatrice tascabile, computer. Lo smartphone rappresenta uno step diverso in quanto, vero concentrato di tecnologia, può aprire nuovi orizzonti. Come abbiamo cercato di dimostrare attività molto comuni tra gli studenti fanno riferimento a campi diversi della matematica.
Naturalmente ci sono diversi problemi aperti, non solo connessi a questioni didattiche, per esempio quelli legati alla sicurezza. Rispetto ai computer, gli smartphone sono meno protetti e vengono installati meno prodotti di sicurezza (Breitinger et al.). Una ricerca a cui ha collaborato Wiko, il marchio francese di telefonia, ha evidenziato un'attenzione ancora limitata da parte dei ragazzi alle impostazioni della privacy: uno studente su quattro, infatti, rende i propri contenuti accessibili a tutti sui canali social.
Un'ultima domanda un po' provocatoria. Come si può utilizzare lo smartphone nella didattica se in molte scuole (e Stati) ne è vietato l'uso?

BIBLIOGRAFIA

Alexandros, K., Panagiotis, L., Serafeim, T., Pavlos, T., & Athanasios, V. (2020). Possible technical problems encountered by the teacher in the incorporation of mobile phone sensors in the physics lab. European Journal of Physics Education, 11(2), 5-23.
Andrà, C., Verani, M., & Parolini, N. (2016). BetOnMath: Azzardo e matematica a scuola. Springer.
Andreotti, M., Astone, P., Campana, D., Casaburo, F., Cartoni, A., Cavanna, F., ... & Tehrani, F. S. (2021). Il progetto Lab2Go per la diffusione della pratica laboratoriale nelle Scuole Secondarie di II grado. arXiv preprint arXiv:2106.08308.
Barbosa, A., & Vale, I. (2020). Math Trails Through Digital Technology: An Experience With Pre-Service Teachers. Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age, 47.
Breitinger, F., Tully-Doyle, R., & Hassenfeldt, C. (2020). A survey on smartphone user's security choices, awareness and education. Computers & Security, 88, 101647.
Bulus, P. (2020). Significant of Smartphone: An Educational Technology Tool for Teaching and Learning. International Journal of Innovative Science and Research Technology, 1-634.
Busch, P. A., & McCarthy, S. (2021). Antecedents and consequences of problematic smartphone use: A systematic literature review of an emerging research area. Computers in human behavior, 114, 106414.
Cahyono, A. N. (2018). The MathCityMap Project. In Learning Mathematics in a Mobile App-Supported Math Trail Environment (pp. 43-52). Springer, Cham.
Сороко, Н. (2021). The augmented reality functions to support the STEAM education at general education institutions. Фізико-математична освіта, 29(3), 24-30.
Crescenza, G. (2020). Dal calamaio alla Didattica a distanza. La scuola ai tempi del COVID-19.
Curto Prieto, M., Orcos Palma, L., Blázquez Tobías, P. J., & León, F. J. M. (2019). Student assessment of the use of Kahoot in the learning process of science and mathematics. Education Sciences, 9(1), 55.
D'Ambrosio, A. (2015). Esperimenti di acustica con smartphone. Italian Journal of Educational Technology, 23(3), 176-180.

D'Ambrosio, A., Mameli, A., & Lai, P. L. (2017). Da Galileo ad Einstein: la Gravità per tutti-Esperimenti con lo smartphone. Logus mondi interattivi.
Da Pra, L. M. G. (2021). Mobile learning: esempi di buona pratica basata sull'uso dello smartphone in classe.
Fadda, D., & Vivanet, G. (2021). Tecnologie digitali e didattica laboratoriale nell'educazione STEM. Evidenze scientifiche e raccomandazioni pratiche.
Fowler, D. C., & Stickney, L. T. (2020). Smartphone apps for use in management education. In Handbook of Teaching with Technology in Management, Leadership, and Business. Edward Elgar Publishing.
Garavaglia, A., & Petti, L. (2020). Strategie di uso dello smartphone degli studenti della scuola secondaria di secondo grado= Secondary school students' strategies for using the smartphone. In Le Società per la società. Ricerca, scenari, emergenze. (Vol. 3, pp. 40-50). Pensa Multimedia.
Gardner, M., & Tillotson, J. W. (2019). Interpreting integrated STEM: Sustaining pedagogical innovation within a public middle school context. International Journal of Science and Mathematics Education, 17(7), 1283-1300.
González, E. B., & Muñoz, G. N. E. (2020). Implicaciones educativas del uso de dispositivos móviles en el aula: posibilidades y dificultades psicopedagógicas. Aproximación periodística y educomunicativa al fenómeno de las redes sociales, 571.
Gurjanow, I., Zender, J., & Ludwig, M. (2020). MathCityMap–Popularizing mathematics around the globe with math trails and smartphone. In Research on Outdoor STEM Education in the digital Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020 (pp. 103-110).
Hellesund, S. (2018). Measuring Earth's Magnetic Field Using a Smartphone Magnetometer. arXiv preprint arXiv:1901.00857.
Hergemöller, T., & Laumann, D. (2017). Smartphone magnification attachment: microscope or magnifying glass. The Physics Teacher, 55(6), 361-364. Horvath, J., Mundinger, C., Schmitgen, M. M., Wolf, N. D.,
Huang, K. T., Ball, C., Francis, J., Ratan, R., Boumis, J., & Fordham, J. (2019). Augmented versus virtual reality in education: an exploratory study examining science knowledge retention when using augmented reality/virtual reality mobile applications. Cyberpsychology, Behavior, and Social Networking, 22(2), 105-110.
Kaimara, P., Poulimenou, S. M., Oikonomou, A., Deliyannis, I., & Plerou, A. (2019). Smartphones at schools? Yes, why not?. European Journal of Engineering and Technology Research, 1-6.
Kaps, A., & Stallmach, F. (2020). Tilting motion and the moment of inertia of the smartphone. The Physics Teacher, 58(3), 216-217.
Keough, P. (2021). Educational Recovery for PK-12 Education During and After a Pandemic. IGI Global.
Invalsi. (2021). Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2020-21. Invalsi.
Jahnke, I., & Liebscher, J. (2020). Three types of integrated course designs for using mobile technologies to support creativity in higher education. Computers & Education, 146, 103782.
Legrottaglie, S., & Ligorio, M. B. (2014). L'uso delle tecnologie a scuola: il punto di vista dei docenti. Italian Journal of Educational Technology, 22(3), 183-190.
Lellis-Santos, C., & Abdulkader, F. (2020). Smartphone-assisted experimentation as a didactic strategy to maintain practical lessons in remote education: alternatives for physiology education during the COVID-19 pandemic. Advances in physiology education, 44(4), 579-586.
Listiaji, P., Darmawan, M. S., & Daeni, F. (2020). Comparison between the use of acceleration sensor and video tracker on smartphone for spring oscillation experiment. Physics Education, 56(1), 013001.
Ludwig, M., Jablonski, S., Caldeira, A., & Moura, A. (Eds.). (2020). Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020.
Monteiro, Martín & Cabeza, Cecilia & Martí, Arturo & Vogt, Patrik & Kuhn, Jochen. (2014). Angular velocity and centripetal acceleration relationship. The Physics Teacher. 52. 10.1119/1.4872422.

Morales, L. G. C., Chicaiza, C. V. V., Valles, V. M. R., & Armas, J. A. C. (2021). El Software Microsoft Math Solver como recurso tecnológico para la resolución de problemas de Matemática. Revista Conrado, 17(S1), 168-175.
Mynbayeva, A., Sadvakassova, Z., & Akshalova, B. (2018). Pedagogy of the twenty-first century: Innovative teaching methods. New Pedagogical Challenges in the 21st Century. Contributions of Research in Education.
Park, C. S., & Kaye, B. K. (2019). Smartphone and self-extension: Functionally, anthropomorphically, and ontologically extending self via the smartphone. Mobile Media & Communication, 7(2), 215-231.
Parmigiani, D., Traverso, A., Pennazio, V., & Olivieri, A. (2015). La ricerca di informazioni in rete: strategie e differenze tra tablet e pc. Italian Journal of Educational Technology, 23(3), 148-154.
Parolin, S. O., & Pezzi, G. (2013). Smartphone-aided measurements of the speed of sound in different gaseous mixtures. The Physics Teacher, 51(8), 508-509.
Pedemonte, G., & Operto, F. (2019). Roboable project: educational robotics for inclusive didactics. Form@ re-Open Journal per la formazione in rete, 19(1), 401-411.
Pighini, C. (2020). Development and evaluation of an Android app to exploit smartphone-embedded camera and inertial sensors for monitoring of physiological parameters.
Podlasov, S. (2020). Applied Aspects of Instrumental Digital Didactics: M-learning with the Use of Smartphone Sensors.
Raelovich, S. A., Mikhlievich, Y. R., Norbutaevich, K. F., Mamasolievich, J. D., Karimberdievich, A. F., & Suyunbaevich, K. U. (2020). Some didactic opportunities of application of mobile technologies for improvement in the educational process. Journal of Critical Reviews, 7(11), 348-352.
Raharja, E. P. (2021, March). Development of circular motion experiment tool using sensor smartphone for high school students. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1806, No. 1, p. 012048). IOP Publishing.
Ramazanoglu, M. (2020). The Relationship between High School Students' Internet Addiction, Social Media Disorder, and Smartphone Addiction. World Journal of Education, 10(4), 139-148.
Rodríguez-García, A. M., Moreno-Guerrero, A. J., & Lopez Belmonte, J. (2020). Nomophobia: An individual's growing fear of being without a smartphone—a systematic literature review. International journal of environmental research and public health, 17(2), 580.
Roseli dos Santos, C. & al. (2020). Il cellulare in classe: divieti, possibilità e riflessioni. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Anno 05, Ed. 12, Vol. 06, 85-104.
Salinas, I., Monteiro, M., Martí, A. C., & Monsoriu, J. A. (2020). Analyzing the Dynamics of a Yo-Yo Using a Smartphone Gyroscope Sensor. The Physics Teacher, 58(8), 569-571.
Samsuar, S., Artika, W., Sarong, M. A., Rahmatan, H., & Pada, A. U. T. (2021, May). Smartphone microscope based on the STEM approach as a practicum tool to improve students' scientific attitudes on Animalia. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1882, No. 1, p. 012158). IOP Publishing.
Sinclair, N., & Robutti, O. (2020). Teaching practices in digital environments. Encyclopedia of mathematics education, 845-849.
Sisti, D. A. (2007). How do high school students justify internet plagiarism?. Ethics & Behavior, 17(3), 215-231.
Slipukhina, I., Chernetckiy, I., Kurylenko, N., Mieniailov, S., & Podlasov, S. (2020, October). Instrumental Digital Didactics of Physics Study in the Aspect of M-learning. In International Conference on Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications (pp. 3-21). Springer, Cham.
Soboleva, E. V., Chirkina, S. E., Kalugina, O. A., Shvetsov, M. Y., Kazinets, V. A., & Pokaninova, E. B. (2020). Didactic potential of using mobile technologies in the development of mathematical thinking. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16(5), em1842.
Subramanya, S., & Farahani, A. (2012). Point-of-view article on: Design of a smartphone app for learning concepts in mathematics and engineering. International Journal of Innovation Science.
Taranto, E., Robutti, O., & Arzarello, F. (2020). Learning within MOOCs for mathematics teacher education. ZDM, 52(7), 1439-1453.
Twenge, J. M. (2017). Have smartphones destroyed a generation. The Atlantic, 9, 2017.

Wai Than & Pyae Wai Shan (2021). Prevalence of Nomophobia among Undergraduate Students from Sagaing University of Education. International Review of Social Sciences Research, Volume 1, Issue 1, pp. 54 – 76.
Salcines-Talledo, I., González-Fernández, N., & Briones, E. (2020). The smartphone as a pedagogic tool. Student profiles as related to its use and knowledge. Journal of New Approaches in Educational Research (NAER Journal), 9(1), 91-109.
Wang, A. I., & Tahir, R. (2020). The effect of using Kahoot! for learning–A literature review. Computers & Education, 149, 103818.
Wannous, J., & Horváth, P. (2021, February). Measuring the Permeability of Vacuum Using a Smartphone. In Proceedings INNODOCT/20. International Conference on Innovation, Documentation and Education (pp. 63-70). Editorial Universitat Politècnica de València.
Yildirim, B., Topalcengiz, E. S., Arikan, G., & Timur, S. (2020). Using virtual reality in the classroom: Reflections of STEM teachers on the use of teaching and learning tools. Journal of Education in Science Environment and Health, 6(3), 231-245.
Yuzbasheva, G., & Kravtsov, H. (2020). Augmented and Virtual Reality Technologies in Teacher Retraining.
Zhelezniakov, D., Cherneha, A., Zaytsev, V., Ignatova, T., Radyvonenko, O., & Yakovchuk, O. (2020, March). Evaluating new requirements to pen-centric intelligent user interface based on end-to-end mathematical expressions recognition. In Proceedings of the 25th International Conference on Intelligent User Interfaces (pp. 212-220).

UNA PIACEVOLE SINFONIA: MATEMATICA E MUSICA

Michele G. Fiorentino[1], Nicola Fusco[2], Antonella Montone[1]
[1]Università Di Bari, [2]Liceo Scientifico "Scacchi" - Bari
michele.fiorentino@uniba.it

Abstract
Questo lavoro presenta un percorso sul tema Matematica e Musica svolto nell'ambito delle attività del Liceo ad Indirizzo Matematico dell'Università di Bari. Il percorso didattico ha permesso di utilizzare la Matematica per interpretare alcuni aspetti musicali e la Musica per concettualizzare alcuni aspetti riguardanti la Matematica e la Fisica. In particolar modo si sono utilizzate le trasformazioni geometriche e i numeri razionali per la costruzione di elementi fondamentali della musica nel costruire uno spartito musicale; attraverso lo studio delle onde si è compresa la differenza tra note musicali e timbro degli strumenti musicali; infine la crittografia e le trasformazioni geometriche hanno permesso agli studenti coinvolti nel progetto didattico di comporre un piccolo brano musicale.

Parole-chiave
Liceo Matematico, Trasformazioni Geometriche, Numeri Razionali, Musica, Interdisciplinarietà.

INTRODUZIONE

In questo lavoro si presenta un percorso sperimentale-didattico svolto nell'ambito del Liceo ad Indirizzo Matematico (LIM) dell'Università di Bari, sul tema Musica e Matematica. Le attività hanno utilizzato principalmente la Matematica come strumento per interpretare alcuni aspetti musicali e viceversa la Musica per attivare un laboratorio di Matematica, stimolando in tal modo la creatività degli studenti. È quindi possibile "leggere" i concetti matematici e anche alcune leggi della fisica nell'armonia musicale e interpretare spartiti musicali attraverso "gli occhi" della Matematica e della Fisica. Conseguentemente la progettazione didattica si è concretizzata in una classe prima del Liceo Scientifico "Scacchi" di Bari, in cui è stato sviluppato un ampio percorso, caratterizzato da molteplici aspetti. Tale percorso nasce dall'idea di educazione al pensiero matematico come via privilegiata, da un lato per favorire il pensiero libero e autonomo e dall'altro per interpretare le diverse realtà del mondo contemporaneo.
La scelta di fondo del LIM è quella di vedere la Matematica come chiave di interpretazione di aspetti specifici utili a comprendere il senso più profondo di altre discipline come ad esempio quello della Musica. La Matematica, presente in tutte le forme dell'arte, le rende ancora più piacevoli, svelando alcune sue importanti caratteristiche strutturali. In definitiva, il LIM non mira tanto al rafforzamento di concetti matematici, quanto a mettere in luce gli aspetti culturali relativi alla Matematica, cioè a considerare la Matematica non fine a se stessa ma aperta al mondo esterno, in grado di stimolare la ricerca di senso e di interpretare quello che accade nella realtà, favorendo la consapevolezza di contenuti integrati tra le discipline.
L'aspetto principale di questo lavoro è appunto l'interdisciplinarietà tra Matematica, Musica e Fisica (Bakker, 2021), che, in una sorta di "meticciamento", utilizza la Matematica e la Fisica come strumenti per conoscere la Musica e viceversa, la Musica diventa un "laboratorio" di Matematica e Fisica (Maor, 2018).
Nel percorso didattico è stato inizialmente introdotto il foglio di calcolo excel come strumento per parlare di crittografia. Successivamente, mediante l'ascolto di un "canone musicale" e la costruzione di una "scatola sonora" sono stati introdotti argomenti quali le note, le onde e le corde musicali. Sono stati evidenziati in seguito i legami tra tali elementi musicali e concetti matematici quali i numeri razionali e le trasformazioni isometriche. Sono stati quindi introdotti il concetto di frequenza, le proprietà delle onde e la scala dodecafonica con potenze di numeri razionali attraverso l'uso dell'artefatto "scatola

sonora” e della molla slinky. In una fase successiva, mediante l’utilizzo dell’app MuseScore, sono state introdotte le trasformazioni isometriche (traslazione, rotazione e simmetria assiale) su note e sequenze di note (Iacino, 2021). La convergenza tra le varie parti del percorso si sviluppa attraverso l’analisi di un sistema di crittografia musicale (clarallel.com), scoprendo così l’algoritmo generativo. Infine, rielaborando una sequenza di note mediante le suddette trasformazioni, gli studenti hanno composto dei brani musicali. L’intero lavoro si è svolto in DDI e DAD e le attività sono state realizzate mediante una metodologia laboratoriale e una serie di discussioni matematiche orchestrate dal docente curriculare.

GLI INTRECCI TRA LE DISCIPLINE

Alcune trasformazioni geometriche, quali ad esempio la simmetria assiale, la traslazione e la rotazione, intervengono strutturalmente per la costruzione di elementi fondamentali della musica nel costruire uno spartito musicale. Nell’attività proposta è stato interpretato il pentagramma come grafico orario e di conseguenza come piano cartesiano sul quale è possibile operare mediante le suddette trasformazioni geometriche. In questo contesto le trasformazioni geometriche si identificano nella manipolazione di note.

Inoltre, nella tabella sinottica (Tab. 1) in cui nelle tre colonne sono riportate le tre discipline coinvolte, si possono vedere, su ogni riga, gli argomenti di tali discipline intrecciati tra loro.

Tabella 1. Intreccio tra discipline

Musica	Matematica	Fisica
Le note e la scala dodecafonica	Prodotto e potenza di frazioni	Le onde in un oggetto elastico
Il timbro degli strumenti musicali	Suddivisione in parti uguali di un segmento	La frequenza fondamentale e gli armonici superiori delle onde stazionarie
La notazione musicale sul pentagramma	Le trasformazioni geometriche, la crittografia per sostituzione	I grafici orari

La costruzione delle note musicali e della scala dodecafonica richiede da un lato l'uso delle frazioni e delle loro operazioni di prodotto e potenza, dall'altro la conoscenza delle caratteristiche delle onde nei mezzi elastici. Comprendere la differenza tra note e timbro degli strumenti musicali, invece, richiede il concetto di onde stazionarie e armonici superiori che a loro volta sono collegati con la suddivisione in parti uguali di un segmento (la corda vibrante). Infine, una volta appresa la notazione musicale sul pentagramma essa può essere messa in relazione con i grafici orari della fisica ed è possibile procedere ad una composizione guidata dalla matematica mediante le trasformazioni geometriche e la crittografia per sostituzione.

QUADRO TEORICO

In accordo con la Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008; 2009), si ritiene fondamentale il ruolo degli artefatti sia in fase di progettazione, sia in fase di realizzazione della proposta didattica. Gli artefatti utilizzati nell’attività proposta sono di tipo concreto/manipolativo (la scatola sonora e lo spartito) e digitale (software di crittografia). I tre artefatti fanno riferimento a concetti matematici quali le trasformazioni geometriche e concetti musicali, come ad esempio il timbro, le scale musicali, il tono. La TMS prende in considerazione il sistema complesso di relazioni semiotiche tra artefatto, compito, sapere matematico oggetto dell’attività e i processi di insegnamento-apprendimento in classe. In questa ottica la scelta di artefatti “opportuni”, lo studio del loro potenziale semiotico, e la strutturazione di consegne ad essi connessi, guida verso l’emergere di significati matematici.

Strutturare un percorso di tipo interdisciplinare, inoltre, risulta essere quanto mai attuale. La definizione delle discipline e delle loro relazioni è un problema epistemologico di cui la filosofia si occupa da tempo. Secondo Morìn (2000), la disciplina istituisce la divisione e la specializzazione del lavoro, rispondendo ai diversi domini delle scienze. Essa pertanto diviene strumento organizzatore della conoscenza scientifica.
Nella nostra società, caratterizzata da rapidi mutamenti e proiettata verso la globalizzazione oltre che radicata su tradizioni locali, la settorizzazione delle discipline appare essere problematica. (Bakker, 2021). La conoscenza, infatti, progredisce principalmente attraverso la capacità di contestualizzare e globalizzare. Questi fenomeni culturali e sociali hanno una ricaduta inevitabile nel contesto educativo. Infatti, il processo di insegnamento - apprendimento, che si evolve al passo con i tempi, tende verso la riorganizzazione della conoscenza. Questo richiede una riforma del pensiero che non solo separa per focalizzare la conoscenza, ma anche connette ciò che è separato. In definitiva in tal modo si può riorganizzare la conoscenza (Morìn, 2000). Secondo Bourguignon (1997) è proprio l'interdisciplinarietà che permette di "stabilire una cooperazione tra le discipline autonome per ampliare la comprensione di un individuo o di un obiettivo comune".
Nella Didattica della Matematica, già negli anni '70 e '80, Emma Castelnuovo (2013), Claude Gaulin (1986) e Hans Freudenthal (1986), hanno cercato di rompere il "nobile isolamento" della matematica: c'è stato il tentativo di proiettare la matematica pura verso le altre scienze, privilegiando il metodo piuttosto che i contenuti.

> *"La matematica cerca e chiede le ragioni…: la certezza deve essere cercata e garantita, ed in matematica ciò si ottiene con una attività mentale del tutto particolare. Ed è questa attività mentale, piuttosto che i contenuti, che caratterizza la matematica come il campo in cui essa può essere esercitata nel modo più adeguato ed efficiente (Freudenthal, 1986),*
>
> *Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere "belle", le idee, come i colori e le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale ... è senza dubbio molto difficile "definire" la bellezza matematica, ma questo è altrettanto vero per qualsiasi genere di bellezza. Possiamo anche non sapere che cosa intendiamo per "bella poesia", ma questo non ci impedisce di riconoscerne una quando la leggiamo (Hardy, 2002).*

CARTA D'IDENTITÀ DELLA CLASSE

La classe I di Liceo Scientifico in cui è stata svolta la sperimentazione è composta da 24 studenti, di cui 12 sono "musicisti in erba". Tale aspetto si è rivelato determinante sia per le discipline coinvolte nella progettazione didattica sia per le attività svolte.
La progettazione didattica è stata direttamente integrata nel curricolo di studio, permettendo agli studenti di svolgere 2 ore settimanali in più rispetto al corso "classico" in orario antimeridiano.
Inoltre, le ore dedicate al progetto sono svolte dal docente curricolare di Matematica e Fisica della classe, appassionato di musica e di artefatti tecnologici musicali.

METODOLOGIA

La metodologia utilizzata è stata quella del laboratorio di Matematica come ambiente di apprendimento.Infatti, come sottolinea l'Unione Matematica Italiana (UMI) all'interno del progetto curricolare Matematica per il cittadino del 2001:

> *"Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).*

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.".

La ricerca in didattica della Matematica mostra quanto sia importante proporre agli studenti attività che consentano una "reinvenzione guidata" (Freudenthal, 1994) dei contenuti matematici. Il laboratorio di matematica permette di partire da un'esplorazione di materiali o da una particolare situazione problematica e, attraverso la collaborazione tra studenti, la riflessione e la discussione matematica guidata dal docente, i concetti matematici emergono e vengono sistematizzati.
I tempi più distesi permettono a ciascuno studente la possibilità di individuare soluzioni proprie, di fare ipotesi e di confrontarsi con i compagni. Ciascun alunno potrà, in tal modo, costruire un proprio sapere matematico che si manterrà nel tempo
Condividiamo quindi l'idea di laboratorio intesa come metodologia didattica, volta alla promozione di pratiche matematiche che coinvolgono in maniera attiva l'allievo (Paola, 2008), in cui si vuole favorire l'operatività dell'allievo e le sue interazioni con i compagni e con l'insegnante.

LA SPERIMENTAZIONE

Il percorso annuale di questa classe LIM si è articolato in varie fasi apparentemente indipendenti, ma che si sono integrate nelle attività finali. Una fase preliminare ha previsto l'introduzione del foglio excel e dei fogli elettronici in generale come strumento per eseguire facilmente calcoli ripetuti e visualizzare grafici, finalizzata alla elaborazione di un breve percorso di Crittografia classica. Successivamente la classe ha affrontato un percorso più specifico riguardante Matematica e Musica. I due percorsi, apparentemente distanti, hanno poi visto una convergenza nella parte finale dell'anno scolastico mediante l'uso di un algoritmo di Crittografia musicale.
La metodologia di lavoro utilizzata per l'attività è stata progettata appositamente per la circostanza. Infatti le prime attività si sono svolte quando le classi pugliesi seguivano in parte in presenza e in parte a distanza. Circa a metà percorso, poi, le classi sono andate completamente a distanza.
Gli studenti hanno lavorato da casa e in classe per la costruzione di una scatola sonora (Fusco, 2021) e per la composizione di due spartiti.

Figura 1. La costruzione della scatola sonora.

Tutti gli alunni hanno partecipato attivamente alla costruzione durante le ore scolastiche procedendo poi in modo autonomo a sperimentare le caratteristiche della scatola, riportando i risultati in un incontro successivo.
In seguito, in un periodo dell'anno in cui tutta la classe stava seguendo a distanza, gli studenti hanno lavorato in gruppi per la composizione di spartiti musicali usando le trasformazioni geometriche e la crittografia. Da notare che questa fase è stata fortemente favorita, anziché ostacolata, dal fatto di svolgersi a distanza: la disponibilità di un PC per ogni alunno ha permesso loro di lavorare direttamente sugli spartiti (mediante un apposito software) in collaborazione con i compagni di gruppo.

Dopo una prima iniziale riflessione sul concetto di nota, stimolata dall'ascolto di un canone musicale, si è sperimentato direttamente l'effetto delle frazioni sulla produzione dei suoni. A tal fine ai ragazzi è stata fatta costruire una scatola sonora con materiale povero (nella foto 1 alcune fasi della costruzione, un video tutorial della sua costruzione è disponibile al link https://youtu.be/tqSN9SNxTOk). La scatola sonora costruita dai ragazzi è stata una riproduzione del "monocordo di Pitagora". La finalità di questa attività è stata quella di far scoprire agli studenti le relazioni tra la lunghezza di una corda, le vibrazioni e le note musicali. Per gli studenti è stato possibile in questo modo per via sperimentale identificare delle note specifiche tendendo una corda e facendola vibrare.
Sulla scatola sonora sono stati fatti svolgere esperimenti in autonomia in modo che gli studenti ne scoprissero proprietà e caratteristiche da soli, anche in funzione della propria preparazione musicale. Operando con prodotti e potenze di frazioni gli studenti hanno sperimentato come si modifica il suono di una corda elastica variando la lunghezza secondo proporzioni definite.
È stata poi fornita una molla slinky con cui hanno potuto visualizzare tutte le caratteristiche delle onde elastiche.
Con un software di composizione gli studenti hanno prodotto spartiti mediante trasformazioni geometriche. All'attività di composizione è stata anche affiancata un'attività di analisi di un meccanismo di crittografia musicale (clarallel.com) al fine di scoprirne l'algoritmo di cifratura.
Al termine dell'attività gli studenti hanno riportato ai docenti una descrizione dettagliata delle loro attività e le loro reazioni.
In Figura 2 è possibile vedere uno degli spartiti prodotti con l'evidenziazione di alcuni gruppi di note collegate tra loro da trasformazioni geometriche (in arancione una dilatazione orizzontale, cioè variazione di tempo di esecuzione; in blu una traslazione verticale, cioè una modulazione di tono).

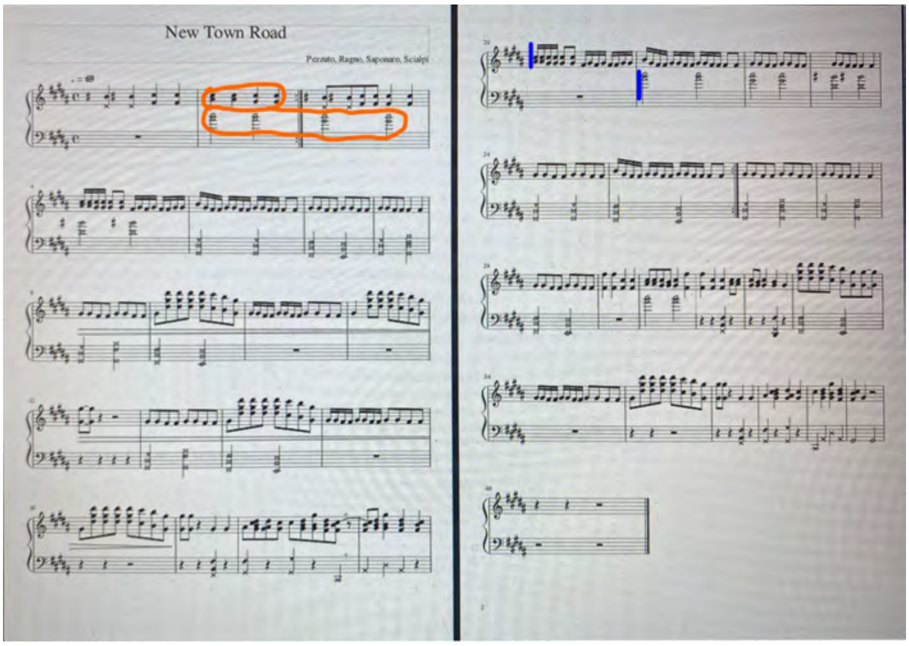


Figura 2. Le trasformazioni geometriche applicate alle note

L'attività di composizione è stata svolta in due fasi, in ciascuna delle quali la classe è stata divisa in cinque gruppi (la cui composizione è variata da una fase all'altra mantenendo un equilibrio nella distribuzione delle competenze musicali presenti).
Ogni gruppo ha composto un brano (per cui in totale sono stati composti 10 brani musicali).
Nella prima fase le note da cui partire sono state scelte a piacere dagli alunni, anche da porzioni di brani musicali già esistenti. Nella seconda fase le note da cui iniziare sono state ricavate per crittografia musicale (mediante il sito clarallel.com) di una frase scelta da loro.

Nelle immagini in Figura 3 è possibile vedere altri quattro spartiti dei dieci prodotti. Osservandone la struttura complessiva è facile individuare le regolarità "geometriche" di queste composizioni.

Figura 3. (Continua nella prossima pagina)

Figura 3. Alcune produzioni degli studenti

CONCLUSIONI

Il percorso sperimentale-didattico presentato, svolto nell'ambito del Liceo ad Indirizzo Matematico (LIM) dell'Università di Bari, ha permesso, tramite le connessioni con la Musica, di svelare agli alunni la Matematica come uno strumento per interpretare e scoprire aspetti nascosti della realtà e viceversa usarla come linguaggio espressivo e per supportare la creatività. Tale idea è emersa nel gruppo classe in modo naturale nel corso del progetto, in contraopposizione alla usuale visione più arida della matematica sovente condivisa anche dagli studenti più capaci.
L'organicità con cui si sono integrate, intrecciate e mescolate la Matematica e la Musica ha provocato una "transizione di fase", cambiando radicalmente il loro modo di rapportarsi a queste discipline, in particolare alla Matematica, vista, forse per la prima volta, come una disciplina artistica e culturale.

BIBLIOGRAFIA

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. Educational Studies in Mathematics, 107(1), 1-24.
Bartolini Bussi , M.G. & Mariotti, M.A. (2009) Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 32 3A-B, 269-294.
Bourguignon A. (1997) De la pluridisciplinarité à la transdisciplinarité, congrès de Locarno, 30 avril-2 mai, Annexe au document de synthèse UNESCO http://ciret-transdisciplinarity.org/locarno/loca5c1.php
Castelnuovo E. (2013) Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva. La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 6(1), pp.137-148.
Freudenthal F. (1986) Didactical phenomenology of mathematical structures (Vol. 1). Springer Science & Business Media
Freudenthal, H.: Ripensando l'educazione matematica, (a cura di CF Manara). Editrice La Scuola, Brescia, (1994).
Fusco N. (2021), video tutorial per la costruzione di una scatola sonora: https://youtu.be/tqSN9SNxTOk
Gaulin C. (1986) Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional. In Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14, pp. 11-18

DI.FI.MA. 2021: Apprendimento Laboratoriale in Matematica e Fisica in Presenza e a Distanza.

Iacino S. (2021), La Geometria di Bach:
https://www.youtube.com/watch?v=O7WtoQ4ZiLw&feature=youtu.be
Maor E. (2018), La musica dai numeri. Musica e matematica da Pitagora a Schoenberg, Codice Edizioni
Morin, E. (2000) La testa ben fatta: riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero. Milano: Cortina, 2000.
Paola, D. (2008). Il laboratorio per l'insegnamento-apprendimento della matematica: le proposte rivisitate della commissione UMI, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31(6A/B), 517-552.
Peres, E. (2007). Concerto pitagorico: le basi matematiche della musica, Iacobelli

LA STORIA DELLA MATEMATICA INSEGNATA ATTRAVERSO LA SCRITTURA CREATIVA: UN PONTE TRA CULTURA UMANISTICA E CULTURA SCIENTIFICA

Rosa Buono - Anna Montedoro
IISS Alpi Montale - Rutigliano (BA)
rosabuono@alice.it - anna02monte@libero.it

Abstract
In questo lavoro presentiamo una esperienza didattica multidisciplinare, finalizzata alla promozione dello sviluppo del pensiero razionale e della capacità di operare collegamenti tra le culture umanistica e scientifica. Partendo dai concetti di *esattezza, coerenza, non contraddittorietà,* mutuati da *Italo Calvino*, gli studenti hanno individuato i principi matematici all'interno di un testo letterario e sono stati guidati nella riscrittura della fiaba "Quattordici" dello stesso Calvino, variando le funzioni dei personaggi. A partire dall'idea di creazione letteraria come un gioco basato su regole logico-matematiche, propria del movimento letterario dell'*OuLiPo*, è poi stato proposto agli studenti di produrre acrostici, tautogrammi, lipogrammi. La scrittura di dialoghi impossibili, infine, è stata per gli studenti veicolo di informazioni sul pensiero di importanti personalità matematiche del passato e del presente. I ragazzi hanno appreso che alla base della ideazione di un testo vi è una riflessione basata su vere e proprie regole di scrittura, grammaticali ma anche logico-matematiche, e hanno potuto apprezzare l'aspetto ludico della scrittura e scoprire la dimensione storica della matematica.

Parole-chiave
Scrittura creativa; Storia della Matematica; Liceo Matematico.

INTRODUZIONE

In questo lavoro presentiamo una esperienza didattica multidisciplinare, finalizzata alla promozione dello sviluppo del pensiero razionale e della capacità di operare collegamenti tra le culture umanistica e scientifica, che ha visto gli studenti protagonisti del processo di apprendimento e pronti a cogliere gli aspetti epistemologici della matematica attraverso proposte di lavoro creative e ludiche.
"La storia della matematica insegnata attraverso la scrittura creativa: un ponte tra cultura umanistica e cultura scientifica" si colloca in seno al progetto "Alla scoperta di nuovi linguaggi per imparare a pensare matematicamente", sviluppato in sinergia con un gruppo di docenti di Matematica e Fisica del Liceo "E. Amaldi" di Bitetto (BA), nell'ambito della collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Bari sui Licei ad Indirizzo Matematico.
Concepita come un laboratorio multidisciplinare dalle docenti di Lettere e Matematica dell'IISS "I. Alpi-E. Montale" di Rutigliano, questa attività è stata indirizzata agli studenti delle classi prime e seconde del liceo scientifico, per un totale di 20 ore per ciascuna classe.
Le docenti coinvolte nel progetto hanno operato perseguendo finalità e obiettivi educativi miranti a promuovere nei discenti l'idea della matematica come "una gioiosa conquista invece che un odioso sforzo" (Pascal Dupont); di motivare e stimolare gli studenti ad apprendere alcuni concetti matematici come strumento cognitivo. Il piacere della scoperta e del confronto esplicito con problemi legati alla dimensione storico-epistemologica della matematica permette di capirne "il valore culturale".
Trattandosi di attività laboratoriali, i discenti sono stati attori del processo cognitivo e hanno così imparato a utilizzare linguaggi espressivi e/o creativi per parlare e riflettere su alcuni principali personaggi e sull'evoluzione di alcuni concetti matematici che hanno contribuito alla formazione e allo sviluppo del pensiero matematico. Quindi, gli studenti hanno imparato a riconoscere e a valorizzare la dimensione culturale e interculturale della matematica attraverso i riferimenti ai contesti storici,

nell'ambito dei quali hanno operato i matematici oggetto di studio, e dunque essi hanno altresì colto il continuo dialogo che intercorre tra la cultura umanistica e quella scientifica, nell'ottica di un sapere unitario, fatto di interconnessioni. In questo modo, gli studenti sono stati guidati all'idea della Matematica come disciplina viva e alla comprensione della complessità del reale; sono stati messi nella condizione di saper cogliere l'influenza della matematica sulla società e sulla cultura, e l'interazione con altre scienze.

FASI ATTUATIVE DEL PROGETTO

Le strategie metodologiche adoperate vanno nella direzione dell'autodeterminazione del discente. In primis, le docenti hanno presentato l'argomento attraverso la lezione frontale, soffermandosi principalmente sugli aspetti storico-culturali di riferimento; quindi, i ragazzi sono stati invitati a reperire materiale anche in rete attraverso la metodologia del web quests; infine, gli studenti, divisi in piccoli gruppi, hanno elaborato le conoscenze acquisite, –sia attraverso la spiegazione della docente, sia attraverso la ricerca in rete– producendo testi letterari, articolati secondo linguaggi espressivi e creativi nuovi, originali. I lavori svolti dagli studenti hanno riguardato principalmente tre tipi di scrittura creativa: la fiaba variata, la scrittura oulipienne e i dialoghi impossibili.

Fiaba Variata

"Fiaba variata" è il titolo dato alla prima esperienza laboratoriale di scrittura creativa. Partendo dai concetti di "esattezza", "coerenza" e di "non contraddittorietà" mutuati dalle Lezioni americane di Italo Calvino, la docente ha proposto alla classe la lettura della fiaba Quattordici, tratta dalle Fiabe italiane dello stesso Calvino, invitando i discenti a cogliere i principi matematici presenti nel testo. Quindi, gli studenti hanno analizzato le funzioni dei personaggi delle fiabe, formalizzate dal linguista russo Vladimir Propp, e sono stati guidati nella riscrittura della fiaba di Calvino, assegnando funzioni diverse a ciascuno dei personaggi, sempre nel rispetto dei principi matematici precedentemente ravvisati all'interno del testo in oggetto. Al termine della prova, ciascun gruppo aveva riscritto la fiaba Quattordici, ottenendone una diversa rispetto al testo di partenza e rispetto ai testi proposti dagli altri gruppi; inoltre i discenti hanno colto l'importanza del rispetto delle norme logico-grammaticali e "matematiche" nella redazione di un testo letterario.
Di seguito è riportato un lavoro svolto da un gruppo di alunni:

FIABA QUATTORDICI VARIATA

Quattordici era stufo dei suoi fratelli, che non facevano altro che oziare ed erano incapaci di mantenere i suoi ritmi, perciò tutto solo, prese la decisione di cacciarli e con fare arrogante affermò: "Andatevene un po' in giro per il mondo, non ho bisogno di voi, saprò cavarmela da solo!". Udite quelle parole, i fratelli, con evidenti segni di frustrazione, lanciarono per terra i bidenti e si avviarono verso la città. La vicenda di Quattordici e dei suoi fratelli scosse il paese e in molti furono interessati nel vedere come un semplice ragazzetto di campagna riusciva così bene in un lavoro tanto faticoso, quanto poco retribuito.

I tredici fratelli trovarono rifugio presso un potente proprietario terriero, che anche con una scarsa paga, forniva almeno vitto e alloggio ai poveri ragazzi cacciati dalla loro casa. Quattordici nel mentre, non si dava per vinto e continuava sempre più assiduamente il suo lavoro nei campi; fino a quando un bel giorno, assieme a una schiera di demoni, Lucibello, capo dei diavoli, andò a fargli visita.

Scrittura Oulipienne

Per "scrittura oulipienne" si intende una tipologia di scrittura creativa, modulata secondo i principi dell'OuLiPo, acronimo di Ouvroir de Litterature Potentielle (Laboratorio di Letteratura Potenziale). L'OuLiPo si colloca a Parigi a partire dal 1960 e nasce su iniziativa di un gruppo di matematici appassionati di letteratura e letterati cultori della matematica, guidati dallo scrittore Raymond Queneau, uniti dalla volontà di rinnovare i linguaggi e la comunicazione, esaltando il ruolo cruciale della struttura.

Gli esponenti dell'OuLiPo concepiscono la creazione letteraria come un gioco basato su regole logico-matematiche, le cosiddette restrizioni. Alcune tra le produzioni letterarie di questo gruppo – acrostici, tautogrammi, lipogrammi -sono state collocate al centro delle attività di gruppo dei discenti, i quali le hanno utilizzate come veicolo di informazioni relative al pensiero di importanti personalità matematiche del passato e del presente. Attraverso le suddette esperienze i ragazzi hanno appreso che alla base della ideazione di un testo, letterario e non, vi è una riflessione basata su vere e proprie regole di scrittura, grammaticali e logico-matematiche, ben ponderate e bilanciate fra loro; hanno potuto apprezzare l'aspetto ludico della scrittura e scoprire, con entusiasmo e curiosità, la dimensione storica della matematica.
Di seguito sono riportati esempi di scrittura oulipienne svolta da alcuni gruppi di studenti.

- *Acrostico* (Componimento letterario con restrizione, nel quale le prime lettere di ogni verso, lette in ordine dall'alto verso il basso, danno un nome o altre parole determinate)

PITAGORA
Per Pitagora, matematico e filosofo del VII secolo a.C.
Il numero governa la forma e le idee
Tanto viaggia nella sua vita dall'Oriente all'Occidente
A Crotone fonda la setta religioso-scientifica dei Mathematikoi
Gioca e si diverte con la matematica
Occhi ha soprattutto per triangoli e quadrati
Riprende dai Babilonesi quel che sarà il famoso Teorema
Al suo seguito lascia la scoperta dell'importanza teorica della matematica

- *Lipogramma* (componimento letterario con restrizione, in cui si omette intenzionalmente una lettera o un gruppo di lettere)

CLAUDIO TOLOMEO, "ALMAGESTO"
Restrizione alla "i"

L'Almagesto è un trattato del II secolo redatto dal celebre astronomo e geografo greco Tolomeo, reputato padre delle suddette branche. "Almagesto" è una parola araba presa dal greco, che è tradotta con "La grande" o "La somma", ed è pertanto legata alla grandezza dell'opera. Nel trattato Tolomeo parla delle sue congetture, legate al moto della Terra, del Sole e della Luna. Secondo l'astronomo la Terra è ferma al centro del Cosmo e qualunque corpo celeste le ruota attorno. Tolomeo calcolò anche la grandezza del loro percorso attorno alla Terra e l'arco temporale nel quale un moto è completato. Queste scoperte sono state adoperate molto nella cultura greca, dove erano usate soprattutto per prevedere un evento futuro. L'"Almagesto" ha concorso al progresso del sapere, perché fu fondamentale per qualunque astronomo. Durante l'età moderna, però, le conoscenze esposte nello stesso vennero contraddette.

- *Tautogramma* (componimento letterario con restrizione, in cui ogni parola inizia con la stessa lettera)

TALETE
Restrizione alla "t"

Talete, talento turco, trovò tanti teoremi testardamente, tentando tantissime tattiche. Tra trecento tentativi trovò tre teoremi triangolari. Talete trattò, tra tutti, teorie, tecniche, tangenti, trascritte tra taccuini.

Dialoghi impossibili
L'ultimo esercizio di scrittura creativa, il "dialogo impossibile", ha visto gli studenti alle prese con le teorie di grandi personalità della storia della matematica, appartenenti a epoche diverse. Attraverso la struttura dialogica e grazie all'inserimento di un terzo personaggio, avente la funzione di allievo-

intervistatore-moderatore, è stato possibile riprodurre la dimensione dialogica, essenziale in ambito scientifico e propria del metodo sperimentale galileiano.
Di seguito è riportato uno stralcio del dialogo impossibile realizzato da un gruppo di studenti.

EUCLIDE E PITAGORA DIMOSTRANO UN TEOREMA
Personaggi: Euclide, Pitagora, discepolo Aristide

EUCLIDE: *Innanzitutto vorrei presentarmi, sono Euclide, direttore Biblioteca di Alessandria, ho fatto molta strada per incontrarla, maestro Pitagora di Samo, piacere di conoscerla!*

PITAGORA: *Il piacere è tutto mio! Ma come fa lei a conoscere il mio nome, maestro Euclide?*

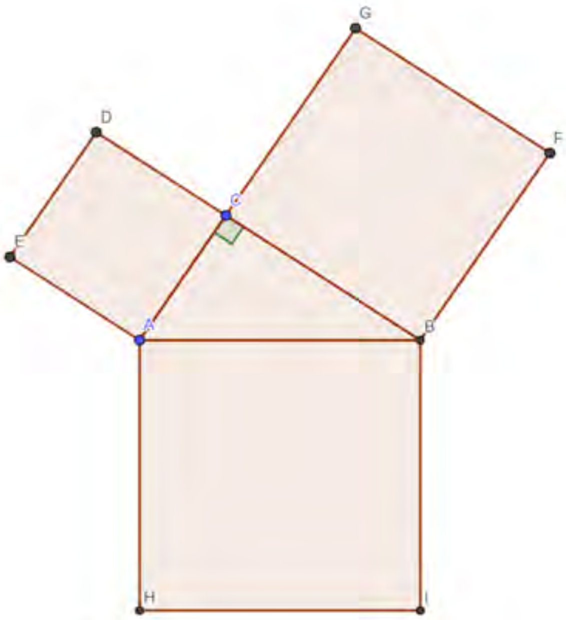
EUCLIDE: *Lei è molto famoso, maestro Pitagora. Il suo pensiero e le sue scoperte sono studiate in ogni angolo del Mediterraneo, è proprio questo il motivo della mia visita. Vede, sto scrivendo un saggio sulla geometria e voglio che contenga tutte le definizioni e le proposizioni della storia, assieme alle loro dimostrazioni. Sicuramente un grande matematico come lei saprà aiutarmi in questo arduo compito.*

PITAGORA: *Certo! Proprio adesso mi stavo cimentando nella dimostrazione di questa proprietà dei triangoli con il mio allievo Aristide.*

[…]

EUCLIDE: *Certo che sì! L'ho insegnata molte volte ai miei allievi ad Alessandria: «Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto». Mi piacerebbe inserirla nel mio saggio, ma prima devo riuscire a dimostrarla.*

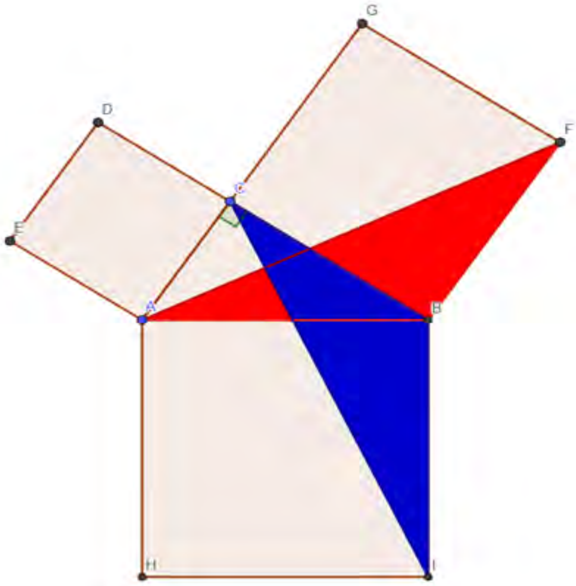
PITAGORA: *Proviamoci insieme! Aristide ha già disegnato la figura. Vede? Ci sono già*



disegnati i quadrati, quindi ora dobbiamo capire come dimostrare.

[…]

PITAGORA: *Guarda qui, ragazzo. Visto che conosciamo questa definizione dobbiamo trovare la misura di un angolo e dei due lati, tra cui è compreso. Noi sappiamo che l'angolo ACF è uguale all'angolo BCF, perché se osserviamo attentamente, notiamo che entrambi corrispondono alla somma dell'angolo ACB con un angolo retto. Inoltre, sappiamo che BC è congruente a CF e che AC è congruente a CI, perché sono i lati di un quadrato. Quindi possiamo dire che i due triangoli sono congruenti.*



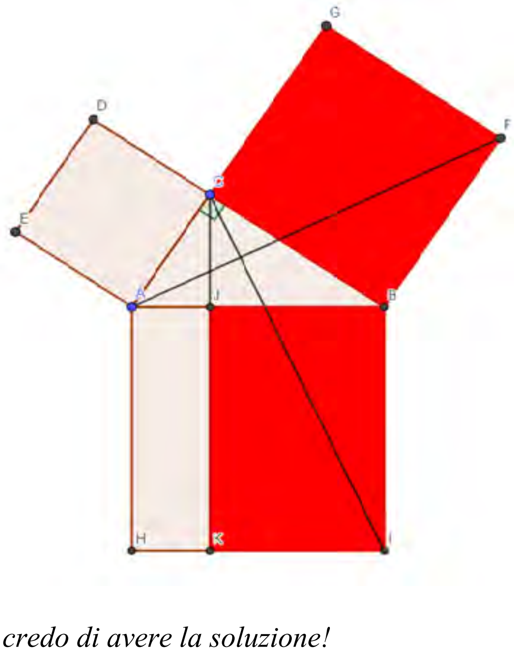
EUCLIDE: *Perfetto! Credo che ci potrà tornare utile un'altra dimostrazione della raccolta. Forse questa qui: «Un triangolo è equivalente a un parallelogramma che ha l'altezza congruente a quella del triangolo e base congruente a metà di quella del triangolo».*

PITAGORA: *Ma certo! Visto che i triangoli sono congruenti anche i parallelogrammi di cui sono metà lo saranno! Quindi così possiamo capire che ABF è uguale alla metà di BCFG e BCI è uguale alla metà di… aspetta un attimo, i conti non tornano!*

ARISTIDE: *Cosa c'è maestro?*

PITAGORA: *Vedi, Aristide, se procediamo così riusciamo a capire che BCI è uguale alla metà di quest'altro rettangolo, che chiameremo BIJK, ma questo non corrisponde a nessun altro elemento! Come facciamo a proseguire la dimostrazione?*

ARISTIDE: *Se solo riuscissimo a metterlo in relazione con un'altra parte della figura…*



EUCLIDE: *Aspettate… credo di avere la soluzione!*

PITAGORA: *Davvero?*

EUCLIDE:	*Si, possiamo applicare una proprietà che sono riuscito a dimostrare proprio qualche giorno fa. L'enunciato è questo: «In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa».*
ARISTIDE:	*É proprio il nostro caso!*
PITAGORA:	*Esatto! Quindi adesso noi sappiamo che ACDE è congruente a AJHK e BIJK a BCFG. Quindi la somma di ACDE e BCFG è uguale a quella di BIJK e BCFG.*
EUCLIDE:	*E la somma di questi ultimi è uguale…*
ARISTIDE:	*Al quadrato ABHI! Il quadrato costruito sul lato maggiore del triangolo!*
PITAGORA:	*Esatto, quindi "Il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.". Abbiamo dimostrato la definizione!*
EUCLIDE:	*Finalmente! Che lavoro!*
[…]	
ARISTIDE:	*Che ne dite di passeggiare un po' per la città per chiacchierare un po'?*
PITAGORA:	*Ottima idea Aristide!*
EUCLIDE:	*Già! Anche perché tutto questo ragionare mi ha messo fame. Potremmo sgranocchiare qualcosa per la strada.*
PITAGORA:	*Ci sto! Per me va bene qualsiasi piatto, basta che non ci siano le fave!*
EUCLIDE:	*Perché non può mangiare le fave, maestro Pitagora?*
PITAGORA:	*Ehm… è una lunga storia.*

RISULTATI

Attraverso l'inserimento di tematiche storiche nell'insegnamento della matematica gli studenti sono stati in grado di capire il "valore culturale" della matematica e di migliorarne la percezione. Inoltre, hanno conosciuto la matematica come un prodotto storico, intrecciato con le vicende umane dei suoi protagonisti, non solo come l'arida disciplina scolastica fatta di numeri e simboli.
Grazie alle attività qui esposte, i discenti hanno acquisito la consapevolezza della complementarità tra cultura umanistica e cultura scientifica, hanno riflettuto sull'importanza della fase progettuale di un testo, che è regolato da norme grammaticali e logico-matematiche. Hanno potuto ampliare il bagaglio lessicale e imparato a padroneggiare la microlingua, nonché gli aspetti tecnici e precipui di uno specifico ambito disciplinare.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Calvino, I. (1956) *Fiabe italiane*, Einaudi
Boyer, C. (1982) *Storia della Matematica*, Oscar Studio Mondadori
Queneau, R. (1983) *Esercizi di stile*, Einaudi
Calvino, I. (1988) *Lezioni americane*, Oscar Mondadori
Lapprand, M. (1998) *Poétique de l'OuLiPo* (vol. 142), Rodopi

Treccani, Enciclopedia dei ragazzi
Storia della Matematica parte I - YouTube
Storia della Matematica parte II – YouTube

MISURARE LE CONCENTRAZIONI CON LO SMARTPHONE: UNA SEMPLICE ESPERIENZA SULLA TARATURA DEGLI STRUMENTI.

Enrico Paschetta[1], Irene Demaggio[1]
IIS G.Natta, Rivoli (TO)

Abstract
Viene spiegato un semplice metodo per svolgere un'esperienza di spettrofotometria utilizzando materiali comuni e una app per lo smartphone. Per la semplicità dei materiali, l'esperienza si presta alla didattica a distanza. In particolare, si illustra una metodica per correlare le misure del colore ottenute con lo smartphone e la concentrazione delle soluzioni così da potere determinare la concentrazione di un campione incognito utilizzando una misura spettrofotometrica. Per raggiungere lo scopo si fa riferimento alla legge di Lambert Beer e allo spazio di colore HSV; per i calcoli si usa GeoGebra. L'applicazione di questo metodo permette di fissare i concetti principali dell'uso di molti strumenti di misura senza la necessità di usare dispositivi costosi, spesso non disponibili nei laboratori scolastici.

Parole chiave: misure con lo smartphone, taratura, regressione lineare, spettrofotometria, concentrazione.

INTRODUZIONE

Lo studio delle materie scientifiche si compone di una parte teorica ed una parte pratica. Per un apprendimento efficace, le due parti devono essere strettamente correlate, in modo da dare la possibilità agli studenti di apprendere conoscenze, abilità e competenze, cioè di arrivare a sapere e a saper fare.
Nello studio della chimica nelle scuole, la parte legata al laboratorio spesso si compone di esperienze che vengono svolte utilizzando la vetreria tipica di un laboratorio chimico… degli anni 80. Spesso vengono infatti proposte metodiche di analisi efficaci, utili a fissare i concetti illustrati in teoria, però superate dalla tecnologia attuale. Negli ultimi anni, la strumentazione analitica e l'evoluzione dell'elettronica hanno reso rapidamente obsolete le tecniche di analisi tradizionali. Chiaramente, risulta difficile per una scuola adeguarsi all'evolversi della tecnologia: un conto è dar modo ad ogni studente di maneggiare la vetreria tradizionale, che ha un costo contenuto, un altro è dotare ogni studente di strumenti come gli spettrofotometri IR e UV-VS, lo spettrometro di massa, i cromatografi. Anche le scuole più attrezzate possono avere uno strumento di ogni tipo, possono quindi proporre esperienze dimostrative, in cui pochi studenti riescono ad usare praticamente gli strumenti e a sentirsi veramente coinvolti nell'attività. Bisogna inoltre considerare che la scuola non può e non deve insegnare come si usa un determinato strumento, che probabilmente sarà già obsoleto al termine del corso di studi, deve invece creare le basi del ragionamento che permette di capire i principi base che saranno utili in futuro per imparare ad utilizzare gli strumenti che man mano si incontreranno.
Considerate queste premesse, si illustra in questo articolo un semplice metodo che si basa su semplici concetti matematici e fisici, come la correlazione lineare, la regressione lineare, la taratura degli strumenti e che da modo agli studenti di operare praticamente con strumenti semplici e facilmente reperibili. Svolgendo questo tipo di esperienza, gli studenti saranno in grado di utilizzare uno spettrofotometro e di interpretare i risultati ottenuti.

PRINCIPI TEORICI

Come è fatto uno spettrofotometro

Lo spettrofotometro è uno strumento che consente di determinare la concentrazione di una soluzione misurando la quantità di luce assorbita dal campione .

Si compone delle seguenti parti fondamentali (Figura 1):
-la sorgente
-il monocromatore
-il porta campione
-il detector.

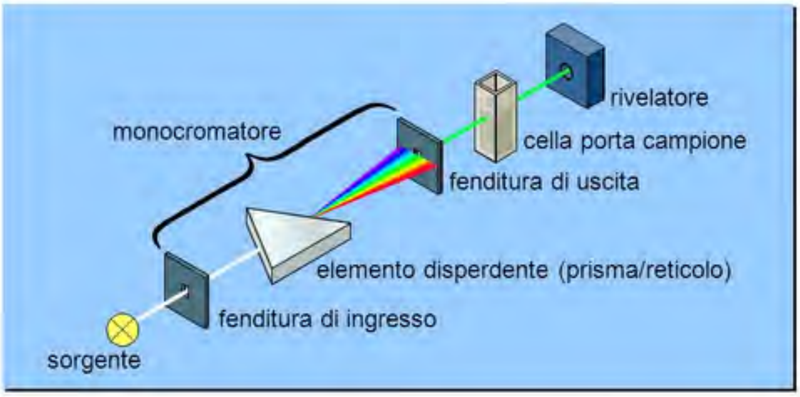


Figura 1. Schema dello spettrofotometro

La sorgente di solito è composta da due lampade: una che emette luce visibile, l'altra che emette principalmente luce ultravioletta. In questo modo è possibile coprire tutta la zona dello spettro desiderata.
Il monocromatore serve a selezionare la lunghezza d'onda utile per svolgere l'analisi. Ogni sostanza assorbe solo alcune lunghezze d'onda caratteristiche.
Il porta campione è un contenitore di dimensioni standard che permette di creare uno spessore di campione costante in tutte le prove. Si vedrà in seguito che lo spessore del campione è determinante per avere un risultato affidabile.
Il rivelatore permette di misurare la quantità di luce trasmessa dal campione. Tramite opportuni calcoli, si può determinare l'assorbanza a partire dalla trasmittanza.

La legge di Lambert-Beer
La legge di Lambert-Beer si esprime secondo la seguente formula:
$A=\varepsilon bC$
A = assorbanza
ε = coefficiente di assorbimento molare
b = cammino ottico
C= concentrazione
Dato che per una sostanza il valore di ε è costante e il cammino ottico è stabilito dalle dimensioni del portacampione, risulta evidente che esiste una correlazione lineare tra il valore dell'assorbanza, determinato dallo strumento, e la concentrazione della soluzione.
Sfruttando questa relazione lineare, è possibile determinare una concentrazione incognita.
Per procedere alla determinazione, devono essere svolti i seguenti passaggi:

1) preparazione degli standard: si preparano alcune soluzioni a concentrazione crescente e nota.
2) misurazione degli standard: si misura l'assorbanza per ogni standard
3) correlazione lineare: si riportano i dati su un grafico in cui saranno espressi i valori di concentrazione in funzione dei valori di assorbanza. In questo modo, tramite regressione lineare, si ottiene la retta di taratura.
4) determinazione del campione incognito: si misura l'assorbanza del campione incognito. Utilizzando la formula inversa della retta di taratura, si riesce ad ottenere il valore della concentrazione.

Il modello HSV

Spesso può essere utile identificare in modo univoco un colore. Per farlo, non è sufficiente utilizzare soltanto la lunghezza d'onda. Un colore può essere il risultato di un miscuglio di più radiazioni diverse, può essere inoltre più o meno luminoso o più o meno trasparente.

Per identificare un colore, sono stati messi a punto vari modelli. Il più conosciuto è il modello RGB, che permette di determinare un colore in base alla quantità di rosso, verde e blu presenti in esso. Questo protocollo è utilizzato nella maggior parte delle fotocamere e dei proiettori.

Un altro modello è quello identificato con HSV.

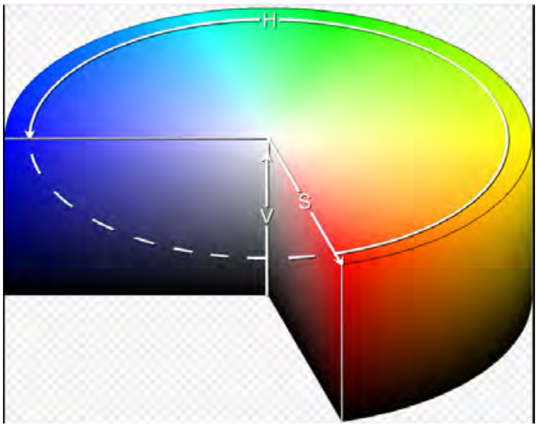


Figura 2. Modello HSV

Come si vede nella figura 2, si elabora uno "spazio di colore" in cui ogni punto è identificabile in modo univoco con una serie di tre numeri, così come avviene in qualunque spazio tridimensionale. Ogni numero è identificato con una lettera:

H= tonalità. Indica il tipo di colore, ad esempio: rosso, giallo, verde....

S= saturazione. Indica la quantità di colore rispetto alla quantità di grigio presente. Si indica in percentuale

V= luminosità. Indica la quantità di bianco e di nero che sono presenti in un colore. Se V vale 0, c'è solo nero, se vale 100 c'è solo bianco.

SVOLGIMENTO DELL'ESPERIENZA

Prerequisiti

L'esperienza viene proposta alle classi del primo biennio del liceo scientifico. In questo corso di studi, vengono illustrati i seguenti argomenti, che costituiscono i prerequisiti per comprendere a fondo l'esperienza:

-percentuali e concentrazione delle soluzioni

-relazione di dipendenza lineare e sua rappresentazione sul piano cartesiano

-taratura degli strumenti

-utilizzo base di un foglio di calcolo.

Preparazione della strumentazione

L'esperienza consiste nell'utilizzo dello smartphone per la determinazione della concentrazione di una soluzione colorata. In questo modo, si simula l'utilizzo di uno spettrofotometro, applicando tutti i ragionamenti che permettono di comprendere il funzionamento di questo strumento, utilizzando materiali facilmente reperibili e utilizzabili in prima persona da tutti gli studenti.

Per svolgere l'esperienza quindi si dovrà trovare un modo per sostituire ogni parte dello spettrofotometro.

Per sostituire la sorgente di luce, è sufficiente utilizzare la luce dell'ambiente. Per farlo, bisogna decidere un punto in cui si faranno tutte le misure, in modo da avere un'illuminazione costante. Dato che di solito l'esperienza viene fatta in pochi minuti, si può ritenere costante la luce incidente in un determinato punto del bancone, anche se in teoria l'illuminazione dovuta al sole varia nel tempo.
Per sostituire il porta campione, è sufficiente utilizzare un semplice bicchiere di plastica. Riempiendo il bicchiere con un volume costante di soluzione, si può decidere lo spessore del "cammino ottico" e mantenerlo costante.
Per sostituire il rivelatore, si usa lo smartphone. La fotocamera dello smartphone distingue senza problemi le radiazioni comprese tra 390 e 700 nm, che fanno parte della radiazione visibile.
E' possibile scaricare dalla rete l'app "Color Grab" per dispositivi Android.
Questa app permette di identificare un colore secondo il modello HSV prima descritto.
Quando si diluisce una soluzione colorata, questa diventa sempre più trasparente, per questo, man mano che si aggiunge acqua si vede che il valore di S relativo alla soluzione scende sempre di più. Sfruttando questo fenomeno, si riesce a sostituire il rivelatore di uno spettrofotometro usando lo smartphone.
E' possibile individuare le giuste condizioni per ottenere una correlazione lineare.
Di solito uno spettrofotometro ha anche il monocromatore. Dato che la fotocamera riesce a "vedere" contemporaneamente tutti i colori e dato che in questo contesto si usano soluzioni colorate che vengono semplicemente diluite, il monocromatore non è necessario perchè non c'è bisogno di distinguere le varie lunghezze d'onda che possono comporre un colore.
Per svolgere l'attività in modo appropriato, bisogna lavorare in modo ripetibile, mantenendo costanti tutte le condizioni ad eccezione della concentrazione delle soluzioni. E' stato spiegato in precedenza come mantenere costante il cammino ottico e la luce dell'ambiente. Bisogna anche considerare la posizione relativa della fotocamera e del bicchiere di plastica: una distanza variabile tra i due oggetti porta a misurazioni diverse.
Per evitare questo inconveniente, è sufficiente montare un sistema come quello in figura 3.

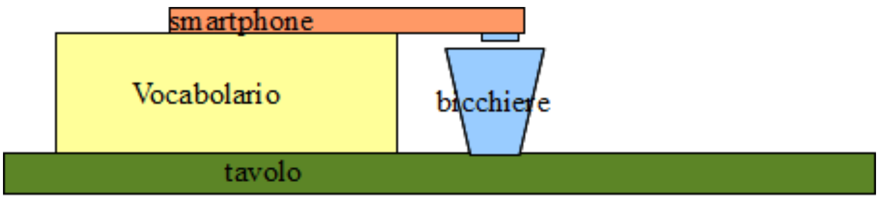


Figura 3. Setup sperimentale

Si nota che la fotocamera è posizionata sopra l'imboccatura del bicchiere. Questa posizione fa sì che la luce proveniente dal campione non attraversi la plastica del bicchiere, che potrebbe rappresentare una fonte di errore.

Preparazione degli standard

L'utilizzo dell'applicazione Color Grab fornisce un numero che può essere messo in relazione con la concentrazione delle soluzioni. Iniziando con prove ingenue, gli studenti arrivano subito a capire che il dato restituito dall'applicazione varia al variare della concentrazione. Dopo un breve ragionamento guidato, emerge subito che il dato ottenuto non è propriamente una misura, è solo un numero decontestualizzato. Per fare in modo di ottenere una vera misura, è necessario stabilire dei termini di paragone certi, cioè è necessario avere delle soluzioni standard, di cui si conosce la concentrazione, che vengono misurati secondo il metodo prima descritto.
E' possibile utilizzare vari metodi per preparare gli standard. Si possono usare varie soluzioni colorate e vari strumenti da laboratorio chimico. Qualora l'attività sia svolta in presenza, è possibile utilizzare le pipette graduate per prelevare le soluzioni e i matracci per avere le soluzioni diluite. Si potrebbe anche lavorare in piccoli gruppi, assegnando ad ogni studente la preparazione di uno standard da utilizzare per la costruzione di una retta di taratura condivisa. In questa trattazione si sceglie di descrivere un metodo

facilmente applicabile anche a casa, in modo da dare la possibilità di svolgere questa esperienza anche in periodi di lock down, in cui si è costretti a svolgere le lezioni in didattica a distanza.
Le soluzioni colorate più facilmente reperibili sono le bibite: il ginger è rosso, la cedrata è gialla, la coca-cola è bruna.
La strumentazione utilizzabile consiste in una semplice siringa con sensibilità 0,1 ml e portata 2,5 ml. Una siringa di questo tipo costa pochi centesimi, si trova in qualunque farmacia ed ha una sensibilità uguale ai migliori strumenti che costituiscono la vetreria di un laboratorio scolastico.
Utilizzando la siringa per le misurazioni di volume, si riempiono 5 bicchieri di plastica, tutti uguali, con le seguenti quantità di bibita e di acqua.

Tabella 1. Dati delle soluzioni per la taratura dello strumento

soluzione	concentrazione
10 ml bibita	100%
8 m bibita, 2 ml acqua	80%
6 m bibita, 4 ml acqua	60%
4 m bibita, 6 ml acqua	40%
2 m bibita, 8 ml acqua	20%

In questo modo si ottengono cinque soluzioni che saranno i cinque standard per la taratura dello strumento. Leggendo il valore S con la app, si vedrà una correlazione lineare tra la concentrazione e il valore S.

Costruzione della retta e misurazione.
Utilizzando GeoGebra, si tabulano i dati, mettendo come variabile indipendente il valore di S, come variabile dipendente la concentrazione (Figura 4). Si procede poi alla determinazione della retta ai minimi quadrati e del parametro R^2.La scelta di costruire il grafico in questo modo risulta comoda quando si procede alla misurazione del campione incognito, risulta infatti molto semplice calcolare un valore di y partendo da un valore di x, senza bisogno di impostare una formula inversa. Dato che questa attività richiede già molti passaggi logici non banali, si ritiene utile non aggiungere un eccessivo carico di ragionamenti matematici al fine di permettere a tutti di non perdere la visione d'insieme.
Dal grafico si nota che con questi semplici strumenti si può ottenere una retta di buona qualità.
Utilizzando la funzione Reg.Lin( ) si ottengono i valori di pendenza ed intercetta della retta. In questo caso specifico, la formula impostata è la seguente:

=Regr.Lin(I1)

Impostando poi la formula della retta, si ha la possibilità di calcolare la concentrazione di un campione incognito a partire dalla lettura del parametro S.

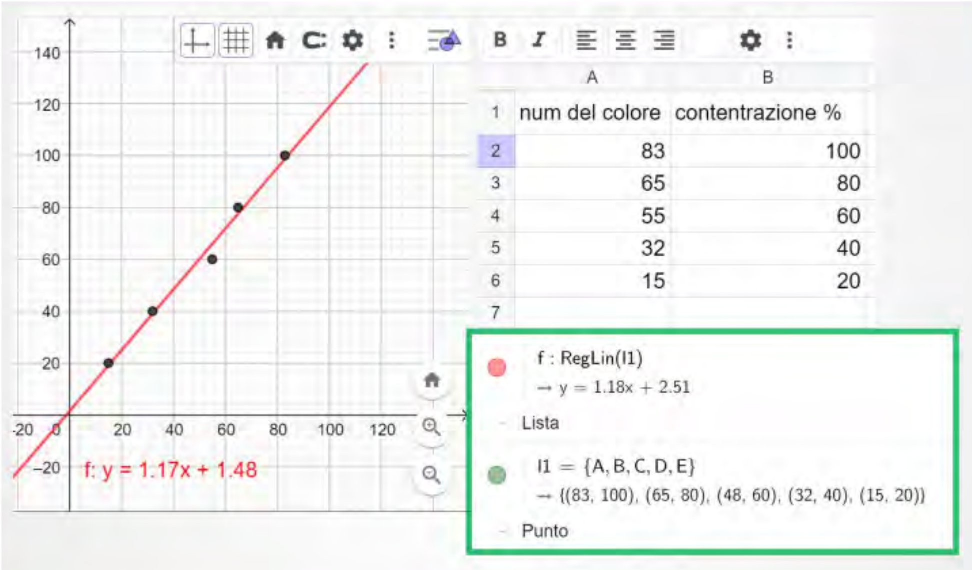


Figura 4. Schermata dell'applicazione GeoGebra

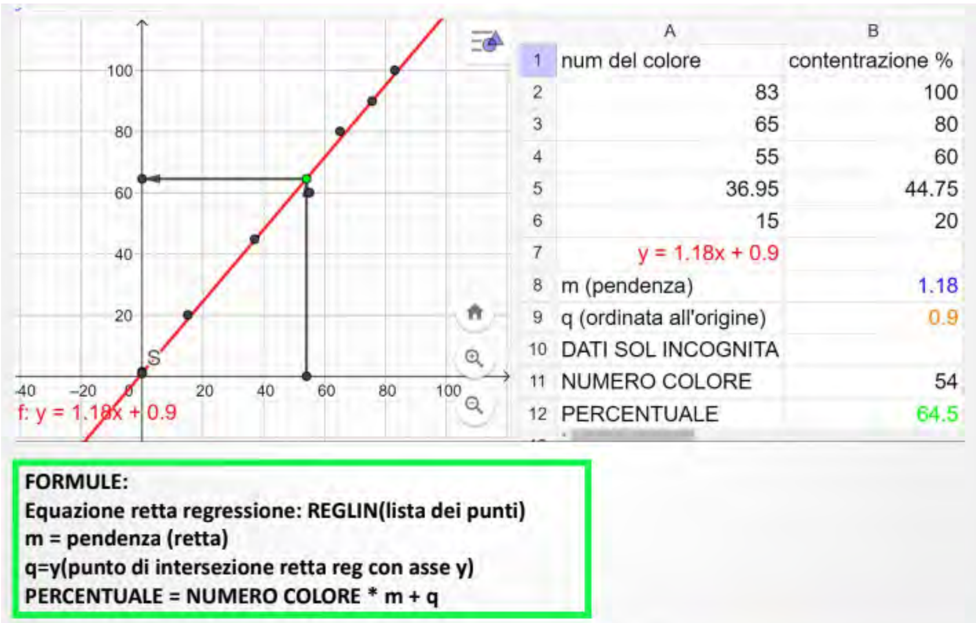


Figura 5. Calcolo della concentrazione a partire dal parametro S

Come evidenziato nella figura 5, si imposta il programma in modo che restituisca una concentrazione calcolata a partire dall'equazione della retta e da un parametro S ottenuto misurando un campione incognito con la app.
La formula impostata è:

PERCENTUALE=NUMERO COLORE *m + q

Per la misura del campione incognito, si procede come per gli standard, avendo cura di utilizzare sempre lo stesso volume di soluzione, così da non variare il cammino ottico.
Se l'attività viene svolta in DAD, non è possibile fornire agli studenti un vero e proprio campione incognito. Per forza di cose, ogni studente dovrà produrre un campione diverso dagli standard per poi misurarlo, testando così la validità del metodo.

ELABORAZIONE DEI DATI

Da questa esperienza a volte si ottengono dei dati non conformi a ciò che ci si aspetta. L'abilità dello sperimentatore è individuare le cause di queste difformità in modo da correggere gli errori.Per valutare la qualità della retta di taratura, il modo più immediato è considerare il valore del parametro R^2. Più questo parametro è vicino a 1, più la retta è fatta bene. Dato che si considerano dati sperimentali, è praticamente impossibile che il parametro sia uguale a 1.Questo parametro però non aiuta a capire le cause che portano ad una retta sbagliata, per farlo bisogna svolgere ragionamenti più complicati.
Si possono distinguere almeno quattro casi:

1) *c'è un dato non allineato rispetto agli altri (Figura 6)*

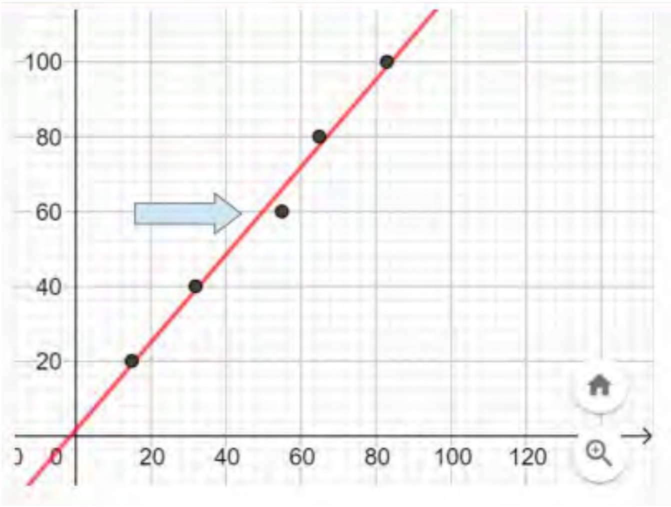


Figura 6. Caso del dato non allineato

In questo caso, è evidente che per migliorare la retta è sufficiente rifare la misura per quello specifico punto. L'errore può essere dovuto principalmente a due fattori: un errore durante la preparazione dello standard oppure un errore durante la misurazione.Nel primo caso, è necessario ripreparare lo standard, nel secondo caso invece bisogna rifare la misura. Per migliorare la qualità della retta, si potrebbe pensare di svolgere più volte la misura di ogni standard, facendo poi la media per ogni punto. Se si desidera ampliare l'attività, si può richiedere agli studenti di cercare il numero di misure adeguato per migliorare i risultati senza un eccessiva serie di ripetizioni.

2) *I punti mostrano un andamento non lineare*

A volte i punti mostrano un andamento non lineare, come nella figura 7.
In questo caso, non si può individuare un errore su un punto specifico, c'è invece un andamento sbagliato.
Questo fenomeno si giustifica ammettendo che la fotocamera sia andata "in saturazione".
Qualunque rivelatore funziona solo in un certo intervallo di dati. Nel nostro caso, la fotocamera non è in grado di distinguere tra l'intensità di due colori entrambi molto intensi, allora è portata a restituire un numero vicino al 100% anche per concentrazioni diverse.
Per ovviare a questo inconveniente, è sufficiente diminuire il cammino ottico, quindi utilizzare per ogni campione una quantità di soluzione inferiore a 10 ml.

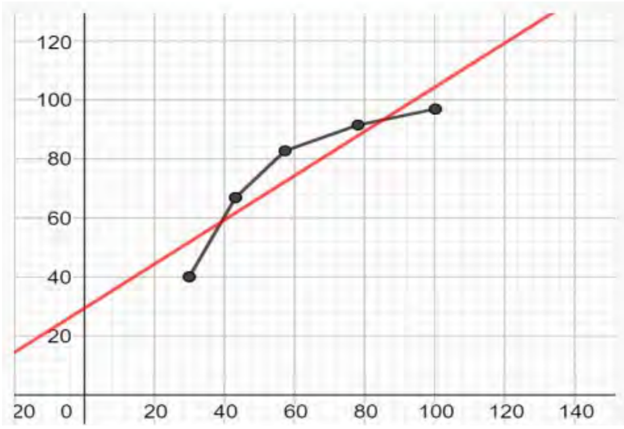


Figura 7. Caso di andamento nonlineare

3) *Molti dati vengono letti come zero*

In questo caso, si sta svolgendo una lettura sotto il limite di rilevabilità dello strumento. Per questo motivo, per ovviare a questo inconveniente è sufficiente aumentare il cammino ottico, cioè utilizzare una quantità di soluzione superiore a 10 ml.

4) *I dati ottenuti non sono intercambiabili*

Se si confrontano i singoli valori del parametro S relativi a due rette di taratura diverse, risulta evidente che non questi valori non sono uguali, pur riferendosi a concentrazioni identiche. Se poi si prova a misurare un campione incognito utilizzando una retta di taratura elaborata da uno studente diverso, si vede che si commette un errore. Tutto quello che è stato descritto evidenzia che non esiste la taratura universale utile per tutti gli strumenti; esiste invece una taratura per ogni smartphone.

CONCLUSIONI

Questa semplice esperienza ha il vantaggio di utilizzare nozioni di matematica, informatica e fisica per consentire di svolgere una misurazione di natura chimica. Grazie alla sua interdisciplinarietà, questa esperienza è utile per svolgere un percorso di scienze integrate nel biennio della scuola superiore.La possibilità di utilizzare strumenti semplici e facilmente reperibili rende questa attività idonea per essere svolta in qualunque laboratorio, anche i meno attrezzati, oltre che in qualunque casa. In questo modo è possibile proporre agli studenti un'attività pratica non banale anche in situazioni di lock down. L'utilizzo di strumenti largamente disponibili permette a tutti di sperimentare, quindi fa sì che tutti possano sentirsi coinvolti attivamente nell'esperienza didattica. La metodica illustrata è comune nell'utilizzo di molti strumenti elettronici di misura, per questo fornisce una competenza trasversale che permette agli studenti di costruire una "forma mentis" utile per affrontare il mondo del lavoro. In molti campi della scienza è importante sapere contestualizzare un dato, senza soffermarsi solo su un valore numerico. La capacità di interpretare un andamento su un grafico dà la possibilità di ricavare informazioni molto più indicative rispetto a quelle che può fornire un solo valore numerico.

La possibilità di procedere per tentativi ed errori riuscendo ad interpretare l'andamento dei dati sui vari grafici consente di sviluppare la capacità di problem solving.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA:

(1) http://www.science-on-stage.eu/sites/default/files/material/istage2_en_how-deep-is-your-blue_0.pdf
(2) https://it.wikipedia.org/wiki/Hue_Saturation_Brightness

WORKSHOP

GIOCHI DI CRITTOGRAFIA ELEMENTARE PER STUDENTI DI SCUOLA PRIMARIA

Marina Cazzola,Valentina Grazian
Università degli Studi di Milano - Bicocca
valentina.grazian@unimib.it

Abstract
In questo articolo descriviamo una serie di attività-gioco riguardanti la crittografia elementare, sfruttando un ambiente di gioco matematico web "pronto all'uso" da noi elaborato su WIMS. Nello specifico, proponiamo problemi di codifica e decodifica di messaggi segreti, prendendo ispirazione dal Codice di Cesare, e un gioco ispirato a tecniche di crittografia moderne, quali il codice a correzione di errore di Hamming, presentato come un gioco di magia. Inoltre, condividiamo i risultati della somministrazione delle attività sopra descritte a quattro classi di scuola primaria (due terze e due quarte).

Parole-chiave
Matematica, giochi interattivi, giochi educativi, game-based learning, software per l'apprendimento.

COINVOLGERE GLI STUDENTI ATTRAVERSO IL GIOCO

Partiamo dal presupposto che la risoluzione di problemi *à la* Polya (1980) rappresenti un passo cruciale per una reale comprensione della matematica. L'apprendimento risulta efficace solo se gli studenti "condividono una parte ragionevole del lavoro" (Polya, 1945). In questa visione, metodologie didattiche attive quali il Problem-Based Learning (PBL, Savery, 2006) sono particolarmente indicate sia per promuovere una comprensione profonda di fatti e regole matematiche, che per spingere gli studenti ad acquisire competenze fondamentali quali il pensiero critico e l'autoregolazione. Nel progettare laboratori di tipo PBL, il gioco può rappresentare il punto di partenza. In questo senso, l'utilizzo dei giochi nell'insegnamento (Game-Based Learning - GBL) è uno stratagemma chiave per coinvolgere gli studenti, in particolare nella scuola primaria, in attività matematiche. Il gioco diventa il problema che deve essere risolto e come tale può coinvolgere, migliorare l'approccio degli alunni alla matematica, motivare e stimolare il ragionamento complesso. Nonostante la ricerca documenti l'importanza di questi obiettivi nella progettazione didattica e l'efficacia dell'utilizzo dei giochi, che rendono l'apprendimento attivo e pongono lo studente al centro (Divjak & Tomić, 2021), ci rammarica constatare che tali metodologie non sono diffuse nella pratica didattica nelle scuole e la frase "a scuola non si viene per giocare!" purtroppo non è rara. Gli insegnanti troppo spesso continuano ad affidarsi a metodi "tradizionali", e anche i docenti più volenterosi in varie occasioni esprimono lo sconforto nel non riuscire a progettare attività coinvolgenti per i loro alunni. Per questi motivi, riteniamo sia importante che la ricerca in didattica della matematica ponga tra i suoi obiettivi anche quello di aiutare gli insegnanti a pianificare le attività didattiche, producendo e discutendo esempi pronti all'uso. La proposta che presentiamo va proprio in questa direzione.

WIMS

Il software WIMS (WWW Interactive Multipurpose Server) è un sistema molto flessibile che permette la creazione di una grande varietà di *learning objects* con correzione automatica. È stato sviluppato da Xiao Gang e reso pubblico nel 1998 (Xiao, 1999). Una descrizione dettagliata di WIMS è disponibile in (Cazzola, Lemaire & Perrin-Riou, 2020).
Per gli scopi di questo lavoro, si può pensare a WIMS come ad "una rete di server che condividono risorse interattive su vari livelli riguardanti diversi argomenti" (Cazzola, Lemaire & Perrin-Riou, 2020).

Negli ultimi anni WIMS ha incluso sempre più moduli rivolti agli studenti della scuola primaria, ma talvolta la complessità della sua struttura può rendere difficile l'accesso ai materiali adatti alle proprie esigenze. Possono allora essere d'aiuto i documenti presenti su WIMS che costituiscono percorsi all'interno dell'immensa quantità di attività effettivamente disponibili. La proposta che descriviamo parte proprio da un documento WIMS (Cazzola, 2021a), che è liberamente accessibile a partire dall'indirizzo https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=E4/number/doccrypto.it. Tale documento, che connette vari moduli, alcuni dei quali sviluppati specificatamente per questo progetto, può essere utilizzato dal docente per organizzare l'attività, eventualmente modificandolo per adattarlo alle specificità della propria classe, ma può essere anche esplorato autonomamente dagli alunni.

PERCHÉ LA CRITTOGRAFIA?

La Crittografia non è un argomento tipico per la scuola primaria, ma crediamo che esso possa essere un potente alleato dell'insegnante. Per prima cosa, gli argomenti coinvolti sono sfidanti e utili a catturare l'attenzione degli studenti, dal momento che sono collegabili facilmente a problemi reali. In secondo luogo, la Crittografia consente di creare collegamenti con altre discipline, quali la storia (dai metodi antichi di cifratura e decifratura di codici segreti fino al suo utilizzo durante la Seconda Guerra Mondiale), la letteratura (utilizzando testi famosi come esempi di cifratura e decifratura) e l'educazione civica (ad esempio ragionando sulle frodi digitali e sulla necessità di limitare la condivisione di dati personali). Inoltre, molti problemi di crittografia possono essere presentati nella forma di gioco e si prestano quindi per la progettazione di attività di tipo PBL. Infine, la crittografia può fungere da ponte per introdurre argomenti profondi di matematica, aiutando gli studenti a riconoscere gli argomenti stessi come interessanti, utili e significativi. Tutte queste ragioni ci hanno portato a progettare l'attività descritta nella sezione seguente.

GIOCHI DI CRITTOGRAFIA ELEMENTARE

La nostra proposta riguarda il problema di cifrare e decifrare messaggi segreti e un gioco ispirato alla tecnica crittografica moderna del codice a correzione d'errore di Hamming (si veda Cameron, 1994, p. 271-273).

Cifrare e decifrare messaggi segreti.

La nostra proposta si articola in 5 passi.

Passo 1: Introdurre il problema. La capacità di inviare e ricevere messaggi segreti è un argomento che suscita sempre l'entusiasmo degli studenti. Iniziamo la nostra attività ricordando che una tale pratica ha una lunga storia ed era utilizzata anche nell'antica Roma per le comunicazioni in battaglia; questo approccio non solo cattura l'attenzione degli alunni, ma consente connessioni multidisciplinari.

Passo 2: Cifrare. A questo punto possiamo presentare il Codice di Cesare. L'idea è quella di fissare una chiave k e di muovere in avanti di k posti ogni lettera dell'alfabeto utilizzato. Ad esempio, se utilizziamo l'alfabeto inglese (che è composto da 26 lettere) e scegliamo la chiave $k = 2$, allora la lettera "A" diventa "C", la lettera "B" diventa "D" e così via (notare che la lettera "Y" diventa "A" e la lettera "Z" diventa "B"). Dunque, la parola "CASA" cifrata con chiave $k = 2$ diventa ECUC. Uno strumento efficace per visualizzare questo meccanismo è la doppia ruota, realizzabile con due dischi di carta concentrici con su scritto l'intero alfabeto utilizzato e fissati in modo che il più grande possa ruotare mentre il più piccolo è fermo. Sfruttando la doppia ruota e ruotando quella esterna in senso orario di 2 posti, possiamo vedere che la lettera esterna "C" è sopra alla lettera interna "E", la lettera esterna "A" è sopra alla lettera interna "C" e così via (si veda la Figura 1).

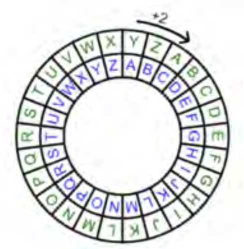


Figura 1. Utilizzare la doppia ruota per cifrare un messaggio con chiave $k = 2$

Il documento WIMS (Cazzola, 2021a) contiene una descrizione dettagliata e vari giochi sul metodo di cifratura con la doppia ruota. Questi giochi possono essere utilizzati indipendentemente dal documento, in quanto disponibili nel modulo WIMS (Cazzola, 2021b), e possono essere configurati dal docente con difficoltà crescente: prima la cifratura di una lettera, poi di una parola e infine di un'intera frase. Inoltre, ogni gioco ha due versioni: cifrare utilizzando la doppia ruota già ruotata del corretto numero di posti (come in Figura 1) o visualizzando unicamente la ruota interna (avvalendosi quindi solo dell'immaginazione per riconoscere lo spostamento delle lettere). Dal punto di vista didattico, riteniamo molto utile chiedere agli studenti di creare una versione cartacea della doppia ruota, da utilizzare in aggiunta a quella virtuale. In questo modo verranno coinvolte anche tecniche manipolative e gli alunni saranno ancora più coinvolti nell'attività.

Passo 3: Decifrare. La naturale continuazione di questo percorso riguarda l'abilità di decifrare i messaggi cifrati con il codice di Cesare. Se conosciamo la chiave k utilizzata per cifrare il messaggio, allora basterà ruotare la ruota esterna di k posti in senso antiorario (Figura 2).

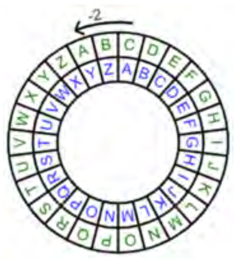


Figura 2. Utilizzare la doppia ruota per decifrare un messaggio con chiave $k = 2$

Ad esempio, è facile notare che la parola "IKQEQ" cifrata con chiave $k = 2$ corrisponde alla parola "GIOCO".

Come per il Passo 2, il documento WIMS (Cazzola, 2021a) contiene la spiegazione della tecnica di decifratura e vari giochi di crescente difficoltà, tutti disponibili nello stesso modulo (Cazzola, 2021b). L'attività risulta più efficace se la scoperta della regola di decifratura è lasciata agli studenti, a partire da quanto appreso sul processo di cifratura.

Passo 4: Scoprire la chiave. È giunto il momento di evidenziare l'importanza di conoscere la chiave di cifratura: senza di essa il compito di decifrare un messaggio segreto diventa molto più difficile (e ciò è un bene per le applicazioni quotidiane!). Proponiamo quindi dei giochi incentrati sulla scoperta della chiave di cifratura. Il modulo WIMS (Xiao, 1999) contiene dei lunghi testi cifrati (estratti da "Le Avventure di Pinocchio" di Carlo Collodi e "Alice nel Paese delle Meraviglie" di Lewis Carroll) e al giocatore è richiesto di determinare la chiave utilizzata. Ad esempio, viene richiesto di capire di quanti posti spostare in avanti ogni lettera per decifrare il testo:
"Paadgp vgpcsx gxhpit sprrped: bp a'dbxcd, xcktrt sx gxstgt, hx htcix egthd sp ipcid pbdgt etg fjtaa'xggtfjxtid phxctaad rwt, rdc jc qprxd, vax edgid kxp sx ctiid ap btip sx fjtaa'paigd dgtrrwxd. Edx sxhht pa qjgpiixcd: - Gxbdcip ejgt p rpkpaad, t cdc pktg epjgp. Fjta rxjrwxcd pktkp fjparwt vgxaad etg xa rped: bp xd vax wd stiid sjt epgdaxct ctvax dgtrrwx, t hetgd sx pktgad gthd bpchjtid t gpvxdctkdat."

Con un po' di lavoro, si può notare che la chiave corretta è $k = 11$ e il testo originale è

"Allora grandi risate daccapo: ma l'omino, invece di ridere, si sentì preso da tanto amore per quell'irrequieto asinello che, con un bacio, gli portò via di netto la metà di quell'altro orecchio. Poi disse al burattino: - Rimonta pure a cavallo, e non aver paura. Quel ciuchino aveva qualche grillo per il capo: ma io gli ho detto due paroline negli orecchi, e spero di averlo reso mansueto e ragionevole."

Ci sono varie strategie per determinare la chiave, come osservare le parole corte (la lettera "t" appare diverse volte isolata e ci sono buone probabilità che corrisponda alla lettera "e"), o considerare quanto spesso una lettera è ripetuta (analisi di frequenza) o analizzare la posizione delle lettere all'interno delle parole (ricordando che nella lingua italiana molte parole terminano in vocale). Nella nostra esperienza, gli studenti hanno trovato il problema molto intrigante e hanno proposto una grande quantità di strategie per indovinare la chiave corretta. Il modulo WIMS (Xiao, 1999) contiene vari testi cifrati con cui esercitarsi, distinti in due livelli: "Testo lungo (più facile)" e "Testo breve (più difficile)".

Passo 5: Conclusioni. Questa attività stimola gli studenti a ragionare sul fatto che lo scambio di messaggi segreti con amici/alleati prevede la conoscenza di un metodo di cifratura e decifratura e che quest'ultimo coinvolge una chiave. Tale chiave è fondamentale per il processo e quanto più difficile è da indovinare, tanto più il messaggio segreto sarà sicuro. Infine, è importante sottolineare che il codice di Cesare non è l'unico metodo di cifratura! Nel modulo WIMS (Xiao, 1999) si possono trovare altri giochi di decifratura in cui i testi proposti sono stati cifrati utilizzando tecniche diverse. Ad esempio, dato un testo cifrato, ai giocatori è richiesto di scoprire quali lettere devono essere scambiate a due a due per ottenere il messaggio originale.

Il gioco "7 domande e 1 menzogna". La seconda attività che proponiamo è presentata come un gioco di magia; ciò è espresso esplicitamente agli alunni per suscitare la loro curiosità. Si chiede a un volontario di pensare ad un numero compreso tra 0 e 15, senza rivelarlo, e di rispondere a 7 domande:

1. Il numero che hai pensato è maggiore di 7 (e diverso da 7)?
2. È uno tra i numeri 4,5,6,7,12,13,14,15?
3. È uno tra i numeri 2,3,6,7,10,11,14,15?
4. È dispari?
5. È uno tra i numeri 2,3,4,5,8,9,14,15?
6. È uno tra i numeri 1,2,4,7,9,10,12,15?
7. È uno tra i numeri 1,3,4,6,8,10,13,15?

Per rendere il tutto più accattivante, il volontario ha la possibilità di mentire una volta (cioè di dare la risposta errata ad al più una delle domande). Una volta ottenute le 7 risposte, l'insegnante mate-mago è in grado di indovinare velocemente il numero pensato dal volontario e di individuare anche l'eventuale menzogna. La reazione tipica degli studenti è lo stupore e, aspetto più rilevante, la formulazione della domanda "Come funziona?". La spiegazione è fornita in vari passi, che richiedono il contributo attivo degli studenti, cioè, una loro ragionevole parte di lavoro.

Passo 1: introdurre lo strumento principale. Per prima cosa, viene rivelato che il mate-mago utilizza uno schema speciale per risolvere il problema, come mostrato in Figura 3. Ogni pallino numerato è associato a una domanda. Il primo compito consiste nel rispondere alle 7 domande senza mentire e a procedere secondo queste istruzioni: colorare i pallini corrispondenti alle risposte positive e lasciare bianchi quelli corrispondenti alle risposte negative.

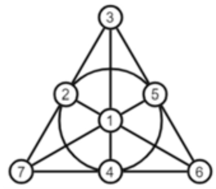


Figura 3. Schema utilizzato nel gioco 7 domande e 1 menzogna

Al fine di coinvolgere attivamente gli alunni, abbiamo progettato l'attività nel modo seguente. Ad ogni studente viene assegnato un numero da 0 a 15 e dato il compito di colorare lo schema secondo le istruzioni date basandosi sulle proprie risposte (evitando le menzogne per ora). Tale attività può essere svolta anche in coppia: prima uno studente risponde alle domande riguardo al proprio numero e l'altro colora lo schema e poi i ruoli si invertono. Al termine dell'attività ogni studente avrà uno schema colorato corrispondente a un numero preciso noto (vedere ad esempio la Figura 4).

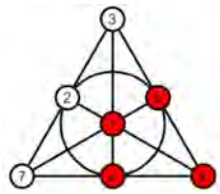


Figura 4. Schema colorato corrispondente al numero 9

Passo 2: condivisione di osservazioni. Ogni studente è chiamato a descrivere come ha colorato il proprio schema e a quale numero esso corrisponde. L'idea è che tutti gli studenti possano visualizzare i vari schemi colorati e i numeri ad essi associati (ad esempio l'insegnante può riprodurre gli schemi colorati sulla lavagna o sulla lim). A questo punto si svolge la parte più importante dell'attività: gli studenti sono invitati a condividere le loro osservazioni sugli schemi colorati e a descriverne le proprietà, motivando i propri interventi. Si tratta di un problema aperto, in cui non c'è un'unica risposta corretta. Eventualmente guidati dall'insegnante, gli alunni sono portati a scoprire due regole fondamentali:

1. Ogni numero da 0 a 15 corrisponde a uno e un solo modo di colorare lo schema. Questo significa che avendo a disposizione l'elenco di tutti i possibili schemi colorati secondo le istruzioni (Figura 5) è possibile risolvere il gioco delle 7 domande (senza bugie).

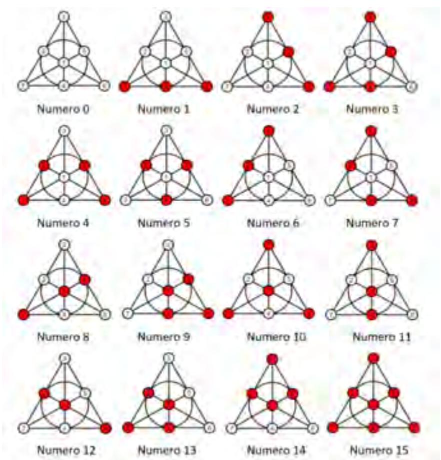


Figura 5. Elenco di tutti gli schemi colorati secondo le istruzioni (e senza menzogne)

2. Tutti gli schemi colorati rispettano uno di questi 4 comportamenti:
    - Tutti i pallini sono bianchi (e il numero associato è lo 0);
    - Tutti i pallini sono colorati (e il numero associato è il 15);
    - Ci sono 4 pallini colorati e 3 bianchi allineati o posizionati attorno alla circonferenza;

- Ci sono 4 pallini bianchi e 3 colorati allineati o posizionati attorno alla circonferenza.

Passo 3: Riconoscere la menzogna. La seconda regola scoperta al Passo 2 fornice un metodo per identificare la menzogna. Infatti, se lo schema colorato secondo le risposte del volontario non soddisfa una delle 4 possibilità elencate, allora c'è un unico pallino che rompe il modello e sarà sufficiente trovarlo e correggerlo (colorandolo se è bianco e viceversa). Questa procedura permette di prendere due piccioni con una fava: riconoscere la menzogna (corrispondente al pallino errato) e ottenere lo schema colorato correttamente, che assieme all'elenco di Figura 5 permette di indovinare il numero pensato dal volontario.

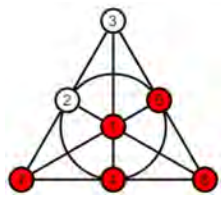


Figura 6. Schema corrispondente al numero 9 con una menzogna nella risposta alla domanda 7

Il modulo WIMS (Cazzola, 2021b) contiene il gioco in due versioni: una in cui il software gioco il ruolo del mago (senza spiegare il trucco ma indovinando solo il numero e la menzogna) e una, chiamata "Ora indovina tu", in cui il trucco è spiegato e al giocatore è richiesto di indovinare il numero misterioso e identificare la menzogna a partire da uno schema colorato (come in Figura 6).

Passo 4: i numeri in base 2. L'attività può considerarsi conclusa al Passo 3, ma uno dei nostri obiettivi è quello di sfruttare il gioco per introdurre argomenti profondi di matematica. Pertanto, possiamo mostrare agli studenti un metodo alternativo alla consultazione dell'elenco di schemi colorati per indovinare il numero misterioso. Una volta che la menzogna è stata identificata e corretta (come descritto al Passo 3), la strategia consiste nel porre l'attenzione solo sui pallini numerati da 1 a 4. L'istruzione è quindi la seguente: scrivere 1 se il pallino è colorato e 0 se il pallino è bianco. Ad esempio, lo schema (corretto) associato al numero 9 fornirà la sequenza 1001. Il lettore avrà notato che la sequenza 1001 è proprio la scrittura del numero 9 in base 2. Infatti, questo gioco può essere un buon espediente per introdurre le base numeriche. Anche in questo caso, il documento WIMS (Cazzola, 2021a) fornisce un prezioso aiuto per l'insegnante, offrendo vari giochi interattivi sull'argomento. L'idea è quella di utilizzare dei cubetti che rappresentano le unità e che possono essere raggruppati in blocchi di colori e dimensioni diverse (le potenze di 2). Al giocatore viene dato un numero e la richiesta di trovare il numero minimo di blocchi necessari per rappresentarlo (Figura 7).

Figura 7. Blocchi in Base 2

Passo 5: Conclusioni. Ora che il trucco è completamente svelato, è possibile analizzare quanto fatto. Gli studenti hanno scoperto un codice speciale (lo schema colorato) che può contenere un errore (il pallino che corrisponde alla menzogna). Una volta corretto l'errore e recuperato lo schema corretto, questo può essere associato a una stringa di 4 cifre in codice binario che fornisce la soluzione al gioco. Inoltre, si può notare che le risposte alle domande dalla 5 alla 7 non servono a rivelare il numero misterioso ma ad identificare l'errore (la menzogna): se non fosse consentito mentire, basterebbero le prime 4 domande. Questo è un esempio di codice a correzione d'errore di Hamming.

LA NOSTRA ESPERIENZA

Abbiamo proposto queste attività ad Aprile 2021 a quattro classi di scuola primaria (due terze e due quarte), per un totale di 74 studenti. La tutor era collegata per via telematica, mentre gli studenti si trovavano in classe assieme alle insegnanti. Questa disposizione ha permesso alla tutor di proiettare le pagine di WIMS sullo schermo della lavagna interattiva e allo stesso tempo ha dato la possibilità agli studenti di lavorare in coppie e di utilizzare strumenti concreti: la doppia ruota di carta descritta nel paragrafo 4.1 e una scheda contenente lo schema introdotto nel paragrafo 4.2. Le attività si sono svolte come descritto nella sezione 4 e sono state suddivise in due incontri da due ore ciascuno. Dopo ogni incontro, gli studenti hanno risposto per iscritto alle domande "Cosa hai imparato oggi?" e "Quale domanda, dubbio o curiosità ti rimane dopo l'incontro di oggi?". Abbiamo costruito la nostra analisi basandoci sulle risposte a queste domande e su osservazione diretta durante lo svolgimento delle attività. Gli alunni hanno dimostrato un grande entusiasmo nello svolgimento delle attività proposte, come dimostrato dall'uso frequente di parole quali "divertimento, molto interessante, bello" nei loro feedback scritti. Si sono dimostrati coinvolti nei vari compiti e desiderosi di condividere le loro scoperte. In particolare, nel Passo 2 del gioco "7 domande e 1 menzogna" gli studenti hanno elaborato moltissime osservazioni e sono stati in grado di individuare le regole fondamentali. Ci teniamo a sottolineare che gli studenti non si sono limitati alla descrizione di proprietà degli schemi colorati, ma hanno cercato di motivare i loro interventi. Ad esempio, hanno osservato che il numero 0 era associato allo schema completamente bianco perché tale numero corrisponde a risposte negative alle domande 1 e 4 e non compare in alcuna delle altre. Il gioco di magia da noi proposto stimola, quindi, lo sviluppo della competenza dell'argomentazione, esempio di ragionamento matematico di alto livello. Risultati simili sono stati prodotti anche dall'attività "Cifrare e decifrare messaggi segreti". Nel Passo 4, infatti, gli alunni miravano ad essere i primi a scoprire la chiave segreta e hanno proposto molte strategie per svolgere questo compito. Hanno così dimostrato la loro abilità nel riconoscere schemi in testi lunghi e nell'utilizzarli per risolvere problemi di decifratura. È interessante notare che una delle tecniche da loro proposte è stata quella di considerare quanto spesso comparivano certe lettere, applicando in modo informale la tecnica crittografica di analisi di frequenza. Altro beneficio del nostro approccio giocoso è stato il fatto che gli alunni si sono sentiti liberi di condividere le soluzioni elaborate, senza paura di commettere errori o essere giudicati, lavorando come gruppo per giungere alla soluzione. Questo ha portato ad interessanti scambi di idee. Ad esempio, nel Passo 2 del gioco "7 domande e 1 menzogna", uno studente ha commesso un errore nel colorare il proprio schema, corrispondente al numero 5. Immediatamente un'altra studentessa ha alzato energicamente la mano, cercando di attirare il più possibile l'attenzione di insegnanti e tutor. Ha quindi dichiarato con fermezza che l'amico doveva per forza aver commesso un errore, perché anche lei aveva analizzato il numero 5 e il suo schema era colorato diversamente. Nel condividere questa osservazione, l'alunna ha anche dimostrato di aver già individuato la corrispondenza biunivoca tra schemi colorati e numeri, aspetto non ovvio a priori. Questo è un esempio di come un ambiente di gioco possa incoraggiare in maniera naturale lo sviluppo di ragionamento matematico. Dai feedback scritti degli studenti, abbiamo inoltre riscontrato che le attività svolte hanno avuto un impatto positivo sulla loro concezione della matematica, scoperta come disciplina divertente e utile (ad esempio per scambiare messaggi segreti con gli amici). Infine, è emerso il desiderio di approfondire gli argomenti proposti: uno studente, ad esempio, ha espresso la curiosità di capire se il gioco di magia continuasse a funzionare ammettendo più di una bugia. Questa richiesta, apparentemente semplice, rivela un tentativo di generalizzazione ed è legata a un difficile problema matematico.

CONCLUSIONI

L'esperienza descritta ci porta a concludere che le attività da noi progettate possono fornire una base solida per la costruzione di attività che pongano gli studenti al centro e che siano coinvolgenti e significative per studenti di scuola primaria. Come descritto nella Sezione 5, la nostra proposta ha raggiunto gli obiettivi preposti di coinvolgere gli studenti, aumentare la motivazione, migliorare l'approccio alla matematica e stimolare il ragionamento matematico. Inoltre, la nostra proposta fornisce ulteriore evidenza dei benefici derivanti dall'introdurre la crittografia nella scuola primaria, in particolare all'interno di laboratori di matematica basati sulla risoluzione dei problemi. Infine, la presenza di una proposta virtuale realizzata con il software WIMS, offre un valore aggiunto al progetto, combinando competenze tecnologiche all'utilizzo di strumenti più tradizionali, quali carta e penna. consente di coinvolgere varie competenze

Il nostro obiettivo è quello di fornire esempi pronti all'uso per gli insegnanti e speriamo che i materiali disponibili su WIMS si rivelino utili allo scopo. Inoltre, confidiamo che il nostro lavoro contribuisca a mostrare quanto l'approccio legato al gioco possa effettivamente migliorare l'insegnamento della matematica.

BIBLIOGRAFIA

B. Divjak e D. Tomić (2021). The Impact of Game-Based Learning on the Achievement of Learning Goals and Motivation for Learning Mathematics - Literature Review. *Journal of Information and Organizational Sciences*, 35(1).
M. Cazzola, S. Lemaire, and B. Perrin-Riou (2020). Wims, a Community of Teachers, Developers and Users. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 67, pp. 1770 – 1779.
M. Cazzola (2021a). Numeri e codici.
https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=E4/number/doccrypto.it. *WIMS learning object*.
M. Cazzola (2021b). OEF crittografia elementare. 1
https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=E4/game/oefcesare.it. *WIMS learning object*.
G. Polya (1980). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* John Wiley and Sons, Combined ed.
G. Polya (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.
J. R. Savery (2006), Overview of problem-based learning: Definition and distinctions. *The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, vol. 1, no. 1, pp. 9–20.
G. Xiao (2001). WIMS: An Interactive Mathematics Server. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, vol. 1, no. 1.
P. J. Cameron (1994). *Combinatorics: topics, techniques, algorithms.* Cambridge University Press.
G. Xiao (1999). Decrypt.4
https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=H6/algebra/decrypt.en. *WIMS learning object*.

NUMERALI E ALGORITMI CON LE BACCHETTE DELL'ANTICA CINA: UN'ESPERIENZA DI TRASPOSIZIONE CULTURALE

Raffaele Casi[1 2], Chiara Pizzarelli[3]
[1] Università di Torino; [2] I.C. Andezeno; [2] I.C. Alberti-Salgari
raffaele.casi@unito.it

Abstract
Si intende analizzare sotto la lente teorica della trasposizione culturale (Bartolini, Xuhua, Ramploud, 2013; Mellone, Ramploud, 2015; Mellone et al., 2018) un percorso didattico sperimentato in una classe prima di Scuola Secondaria di primo grado, incentrato sulla scoperta dei numerali dell'antica Cina e degli algoritmi dell'addizione e sottrazione con le bacchette da calcolo cinesi. Il percorso – oggetto del workshop che ha visto i partecipanti lavorare attivamente sulle schede studente – mira a sviluppare processi di scoperta e *problem solving* in un contesto laboratoriale. L'obiettivo matematico è di aumentare la consapevolezza sul nostro sistema di numerazione posizionale e decimale, e sull'addizione e sottrazione, nello specifico sui meccanismi del riporto e del prestito.
L'ampio uso di artefatti (e.g. immagini tratte da testi antichi, bacchette cinesi e supporti audio-video) consente di analizzare l'esperienza anche sotto la lente teorica dell'analisi semiotica (Rabardel, 1999; Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005): si mostreranno così le potenzialità di un uso formativo di antichi strumenti e tecniche di calcolo, provenienti da un contesto culturale, storico e geografico differente.

Parole-chiave
Trasposizione culturale; Storia della matematica cinese; Artefatti; Algoritmi; Fangcheng.

QUADRO TEORICO DI RIFERIMENTO

In una scuola multietnica e alla continua ricerca di strumenti inclusivi, l'approccio interculturale si può rivelare assai produttivo didatticamente. L'ispirazione per questo percorso storico, che gli autori hanno analizzato in un precedente lavoro (Casi, Pizzarelli, 2020), viene da una ricerca di Bagni (2006 e 2009, pp. 157-162), che ha svolto un'analisi semiotica dell'artefatto che le bacchette da calcolo cinesi offrono. L'intento è di ampliare tale ricerca, analizzando la sperimentazione sotto la lente teorica della trasposizione culturale (Bartolini, Xuhua, Ramploud, 2013; Mellone, Ramploud, 2015; Mellone et al., 2018). Si tratta di un costrutto teorico che definisce una "condizione di decentramento dalla pratica didattica del proprio contesto culturale, passando attraverso il contatto con pratiche didattiche di altri contesti culturali" (Mellone, Ramploud, Di Paola e Martignone, 2018).
L'obiettivo nel nostro caso specifico è di affrontare con gli studenti una riflessione sul sistema di rappresentazione dei numerali dell'antica Cina, al fine di aumentare la consapevolezza sul sistema di numerazione posizionale decimale indo-arabico. Allo stesso modo si intende mostrare gli algoritmi dell'addizione e della sottrazione nell'ottica di un confronto con le operazioni usuali, al fine di vederne il funzionamento in un'ottica più matura e consapevole. Tale lente teorica consente *in primis* un avvicinamento tra due culture, ma anche una vera e propria interazione, capace di mettere in risalto differenze e potenzialità.
Nel nostro percorso abbiamo scelto di applicare l'approccio teorico della trasposizione culturale ad un contesto culturale diverso dal nostro sia geograficamente, sia storicamente. L'ormai ampia letteratura attuale ha rilevato l'importanza dell'utilizzo della Storia delle matematiche nell'insegnamento (Furinghetti, F. & Radford, L. 2002; Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. 2000; Radford, L. 2003).
Ci sembra che l'unione di questi due importanti quadri teorici – la trasposizione culturale e la storia delle matematiche in classe – possa essere didatticamente efficace, non solamente per veicolare concetti

matematici in sé, ma anche e soprattutto in ottica di un insegnamento di cittadinanza attiva nella cultura e società attuale.
All’interno del percorso alcuni spunti mirano a riflettere sul fatto che non esiste un’unica storia della matematica, ovvero quella eurocentrica. La nostra cultura occidentale pervade la didattica della matematica: gli autori che usualmente si citano in classe sono tutti occidentali – Pitagora, Eratostene, Fibonacci, Tartaglia – con un minimo spostamento verso l’oriente con Al-Khwaritzmi. Una visione più globale si rivela necessaria per operare un importante cambiamento di prospettiva, non solo nella visione che un insegnante vuole dare della matematica, ma più in generale sulla cultura.

LA MATEMATICA CINESE

Viene da chiedersi allora perché abbiamo scelto proprio la matematica cinese. Le ragioni risiedono in primo luogo sul fatto che la scrittura dei numerali cinesi era piuttosto intuitiva ed esplicita, in grado di mettere bene in evidenza il sistema decimale e posizionale.
Per rappresentare i numeri si utilizzavano bacchette da calcolo di bambù o avorio e una tavola di calcolo strutturata come una griglia. Probabilmente è proprio l’utilizzo di quest’ultima che ha influenzato la scrittura posizionale, come si può vedere in Figura 1.

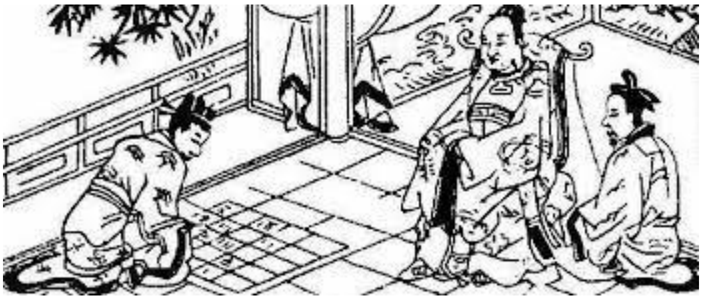


Figura 1. Utilizzo della tavola da calcolo nell’antica Cina.[1]

I numeri fino al 5, così come le dita della mano, si rappresentano affiancando la corrispondente quantità di bacchette verticali; dal 6 al 9 ci si vale di una bacchetta orizzontale per indicare cinque unità e sotto di essa tante aste verticali quante ne servono per completare il numero. Per le decine i simboli sono analoghi, ma la disposizione è orizzontale. Per gli ordini di grandezza successivi si continua ad alternare la disposizione verticale (*Tsung*) – valida quindi per unità, centinaia, decine di migliaia, etc. – con quella orizzontale (*Heng*) – per decine, migliaia, centinaia di migliaia, etc. Il sistema è a base 10 e posizionale, ovvero il valore della cifra dipende dalla sua posizione nel numero; posizione che è ben definita grazie alla tavola da calcolo che inquadra i numerali dentro a delle celle.

𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Figura 2. Rappresentazione dei numerali nell'antica Cina.

Per quanto riguarda il simbolo dello zero, almeno fino al VIII secolo d.C. non esistevano simboli, semplicemente sulla tavola si lasciava la cella vuota o, nello scritto, uno spazio (Figura 3). Successivamente è stato introdotto il simbolo di un pallino vuoto.

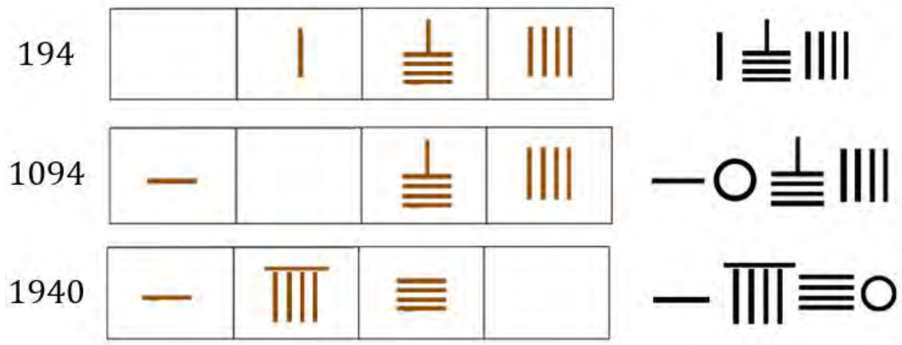


Figura 3. Rappresentazione di alcuni numeri: a sinistra in cifre indo-arabiche, al centro con bacchette sulla tavola da calcolo, a destra rappresentazione scritta cinese antica.

Il sistema di scrittura è di tipo *operatorio*: la forma di rappresentazione del numero conserva la somma dei simboli che lo compongono; ma è anche *immanente*: il simbolo fornisce un'immagine concreta del numero che rappresenta. I numerali rappresentano concretamente il valore del numero, lo stesso accade per gli ideogrammi delle parole cinesi: ad esempio, la parola cavallo è una stilizzazione del disegno di un cavallo. Diversamente, la notazione occidentale si è sviluppata nei secoli seguendo processi di astrazione: i simboli non hanno nessun legame con il valore numerico che rappresentano.
Un altro fattore che ci ha indotti a scegliere proprio la matematica cinese è la disponibilità di fonti originali, che possono essere utilizzate in classe sia in lingua sia in traduzione, e che sono in grado di aumentare il coinvolgimento e la curiosità degli studenti stessi. I due testi di cui ci siamo valsi sono i *I Nove Capitoli sui procedimenti matematici* (I a.C.-d.C., anonimo), il più antico testo matematico cinese ad oggi noto, la cui influenza sulla matematica cinese è paragonabile a quella degli *Elementi* di Euclide in Occidente; e il *Prezioso Specchio dei Quattro Elementi* (1303), che rappresenta il punto più alto raggiunto dall'algebra nell'antica Cina. Proprio da quest'ultimo testo abbiamo tratto l'immagine che dà l'avvio al nostro percorso didattico e al workshop qui proposto.

IL WORKSHOP

La situazione stimolo di partenza è la seguente: due storici occidentali hanno trovato un libro antico, ma – essendo in cinese – non sono riusciti a decifrarlo. Hanno solo capito che forse parla di matematica. Si è quindi chiesto ai partecipanti di aiutare i due storici a trovare ciò che c'è di matematico in questa immagine (Figura 4) e riscriverlo con i caratteri occidentali, argomentando.
Per questa fase dei lavori a gruppi ci siamo serviti delle potenzialità offerte dall'applicazione Google Jamboard, grazie alla quale i partecipanti hanno potuto interagire a piccoli gruppi per affrontare il compito assegnato.
Nella discussione successiva è emerso che il triangolo è proprio il triangolo dei coefficienti binomiali, da noi oggi attribuito a Tartaglia (1500) o Pascal (metà 1600), ma che si scopre così essere ben più antico. Nel *Prezioso Specchio dei Quattro Elementi* l'autore Zhu Shije la chiama la *Tavola dell'antico metodo per elevare all'ottava potenza*, già descritta intorno all'anno 1000, ma nota ancor prima. Ecco che appare evidente un primo cambiamento di prospettiva: è il triangolo di Tartaglia per noi, ma non per i cinesi.
Nella fase successiva del workshop si è proseguito nell'esplorazione del laboratorio proposto agli studenti, ai quali è stato chiesto di comprendere come funzionavano gli algoritmi di addizione e sottrazione nell'antica Cina. Il problema stimolo dato ai partecipanti è banale, ma è stato ugualmente apprezzato: abbiamo ricevuto due video di matematici cinesi che mostrano gli algoritmi, ma senza audio. Si chiede di interpretare i video per comprendere il funzionamento degli algoritmi (cfr. bit.ly/addizioni; bit.ly/sottrazioni).

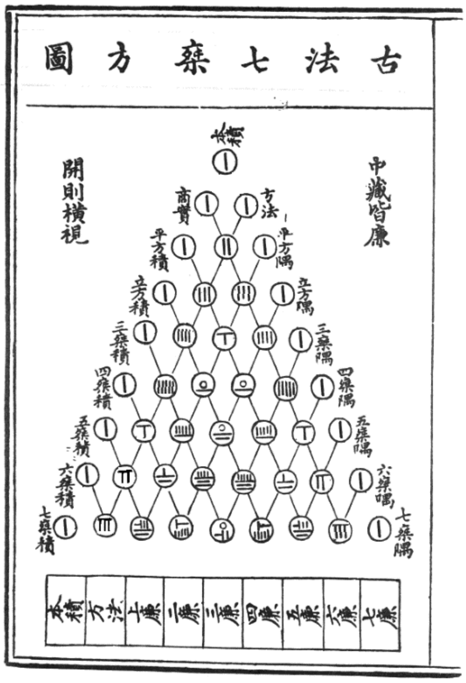


Figura 4. Attività 1: Tavola dell'antico metodo per elevare all'ottava potenza

Si scopre così che per eseguire l'addizione fra due numeri si rappresentano sulla tavola da calcolo gli addendi su due righe separate da una riga vuota. In tale riga si fanno slittare tutte le bacchette degli addendi colonna per colonna. Dopo opportuni aggiustamenti ed eventuali riporti, si legge la somma. Come possiamo vedere nell'esempio di Figura 5, le bacchette cinesi mostrano la presenza di una grandezza superiore a 9 nelle unità, dobbiamo quindi riportare fisicamente due volte cinque nell'ordine di grandezza superiore.

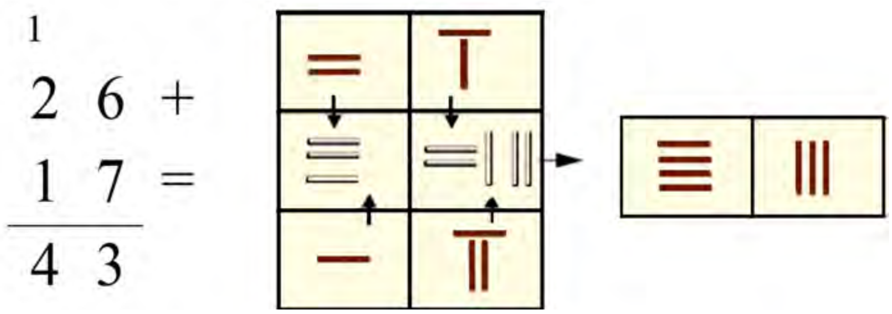


Figura 5. Confronto fra l'algoritmo dell'addizione con cifre indo-arabiche e numerali cinesi.

Dal confronto con "il nostro" usuale algoritmo di addizione in colonna, si vede che in quest'ultimo compare un 1 come riporto, e meccanicamente diciamo "6+7 è 13, scrivo 3 riporto 1". Non è quindi evidente che quell'1 riportato sia in realtà un 10. Ciò non accade con l'algoritmo cinese, dove si apprezza a colpo d'occhio la quantità superiore a 10 e si rende necessario spostare "fisicamente" due volte 5 nell'ordine di grandezza superiore.

Anche l'algoritmo della sottrazione si rivela particolarmente intuitivo. Se nell'addizione si mettono insieme le bacchette, nella sottrazione si tolgono, in una prospettiva più chiara secondo la quale all'operazione (addizionare o sottrarre) corrisponde l'azione (aggiungere o togliere). Si dispone il minuendo nella riga in alto della tavola e poi si rappresenta il sottraendo nella riga sottostante, prendendo le bacchette che servono direttamente dal minuendo. Il metodo è particolarmente efficiente in caso di differenze senza cambio, mentre in caso di cambio l'algoritmo porta a ragionare sui "valori che formano il cambio". Nell'esecuzione del "nostro" usuale algoritmo di sottrazione è piuttosto meccanico dire: "2-

7 non si può fare, prendo il prestito dal 3 che diventa 2 e il 2 diventa 12”. Con le bacchette da calcolo invece è necessario spostare la decina nella casella adiacente, trasformandola in 5+5, in modo da avere sufficienti bacchette da cui prelevare il sottraendo. Si veda a tal proposito l’esempio fornito in Figura 6.

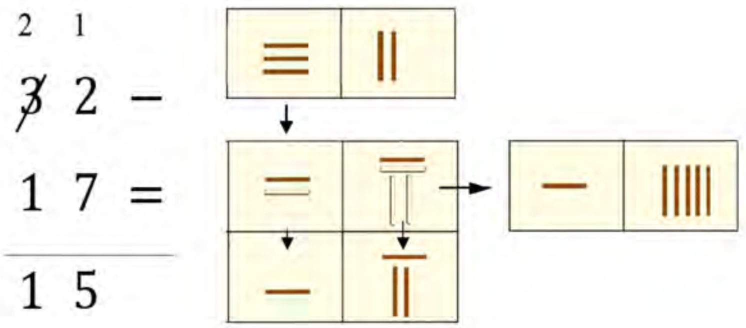


Figura 6. Confronto fra l’algoritmo della sottrazione con cifre indo-arabiche e numerali cinesi.

Il metodo del Fangcheng

Oltre alla riflessione sul senso dell’algoritmo della sottrazione, l’operazione risulta essere alla base del metodo del Fangcheng: l’approfondimento finale del nostro percorso. Si tratta di una procedura usata nell’antica Cina per risolvere sistemi di equazioni di 1° grado, basata su sottrazioni successive. Il metodo è descritto nel testo *I nove capitoli sui procedimenti matematici*, in cui sono proposti diversi altri problemi. Eccone qui un esempio:

5 casse uguali di grano aggiunte a 3 sacchi uguali di grano pesano 19 kg.
3 casse di grano e 2 sacchi di grano pesano 12 kg.
Quanti kg pesa 1 cassa e quanti kg pesa 1 sacco?

Il problema è risolubile in modo empirico per tentativi già a livello di scuola primaria, e negli ordini di scuola successivi anche impostando un sistema di equazioni e applicando metodi algebrici. Il Fangcheng si può considerare come l’analogo del metodo di eliminazione oggi attribuito a Gauss: si basa su un’impostazione matriciale, in cui ogni colonna contiene i coefficienti numerici di una stessa incognita – sacchi e casse – e l’ultima colonna i termini noti. La differenza sta nel fatto che si tratta di un metodo pre-algebrico, ossia non fa un uso esplicito di incognite e sfrutta le potenzialità dell’artefatto delle bacchette e della tavola da calcolo.
Durante il workshop abbiamo spiegato come è stata condotta la sperimentazione in classe: è stato mostrato agli studenti il funzionamento del metodo tramite un video nel quale le procedure di soluzione del sistema di equazioni vengono messe in analogia con azioni fisicamente svolte con due bilance a due piatti. Il video proposto, di cui si possono vedere i passaggi salienti in Figura 7, si trova al seguente link: bit.ly/fangcheng.

Le due bilance a piatti in equilibrio aiutano a capire il senso del metodo: per mantenere l’equilibrio occorre togliere la stessa quantità dai due piatti. Quindi sottraggo dalla riga più “pesante” le quantità indicate nell’altra riga: “so che 3 casse più 2 sacchi sono 12 kg, allora tolgo 3 casse, 2 sacchi e 12 kg nella prima riga”. L’obiettivo è continuare a togliere quantità, mantenendo l’equilibrio delle bilance, finché in una bilancia non rimane un sacco e nell’altra una cassa.

Per l'esempio presentato nel video è stata sufficiente la sottrazione successiva di righe termine a termine, in altri casi può servire prima moltiplicare e poi sottrarre. Il metodo, basato sulla scrittura posizionale, è il primo esempio noto di un metodo matriciale, analogo a quello di Gauss, che però risale a circa 18 secoli dopo.

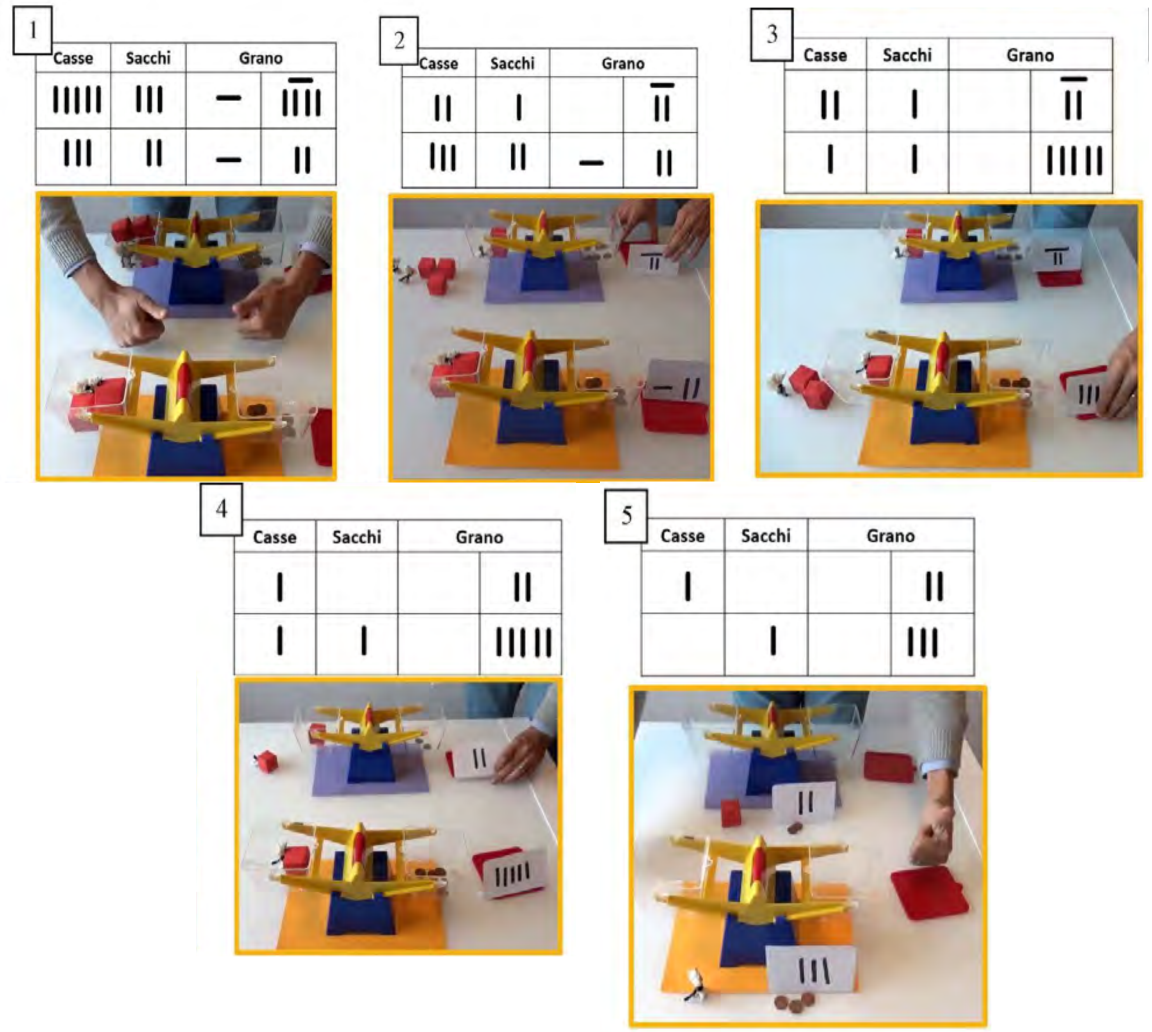


Figura 7. Fasi della procedura del Fangcheng sulla tavola da calcolo, interpretate con la doppia bilancia a piatti.

La scelta di utilizzare la metafora concettuale delle due bilance a piatti anziché fornire la regola della sottrazione ripetuta in modo procedurale, ha permesso agli studenti di costruire il senso delle operazioni svolte: l'intento delle azioni sulla bilancia è quello di far sparire da uno dei due piatti un tipo di merce, togliendo quantità equivalenti per rispettare le leggi di equilibrio. Nel Fangcheng, in modo analogo, la strategia è di sottrarre i numeri (qui fisicamente, proprio grazie all'artefatto delle bacchette di calcolo) al fine di eliminare un'incognita, rispettando i principi di equivalenza delle equazioni.
Nella sperimentazione in classe, dopo aver percorso la via delle strategie empiriche degli studenti, si è fatto loro interpretare il metodo per poi concludere con la sua applicazione in altri problemi, tutti tratti dal testo de *I Nove capitoli sui procedimenti matematici*.
Al termine del workshop, abbiamo chiesto ai partecipanti – nuovamente attraverso lo strumento di Google Jamboard – quali ritenevano fossero i possibili pro e contro nell'utilizzare questi algoritmi di calcolo nella scuola secondaria di I grado. Dalla discussione è emerso quanto riportato in Figura 8.

CONCLUSIONI

I risultati della sperimentazione hanno mostrato come l'esperienza di trasposizione culturale sia stata utile: da un lato per stimolare l'interesse e il coinvolgimento degli studenti, che hanno apprezzato l'idea di analizzare e scoprire da un testo storico originale; dall'altro lato l'esperienza ha aiutato a rinforzare negli studenti la comprensione del funzionamento del nostro sistema di numerazione indo-arabico, quando paragonato con quello cinese. Per quanto riguarda il Fangcheng pare che il metodo si presti ad attività di Early Algebra, nelle quali gli studenti apprendono in maniera relazionale e non procedurale, agendo strategicamente anche grazie all'aiuto della presenza fisica delle bacchette.
Le basi concettuali gettate con l'uso degli artefatti delle bacchette e bilance possono così essere richiamate nel momento dello studio delle equazioni di I grado e dei principi di equivalenza, e saranno importanti semi gettati per quando gli studenti affronteranno i sistemi di equazioni.

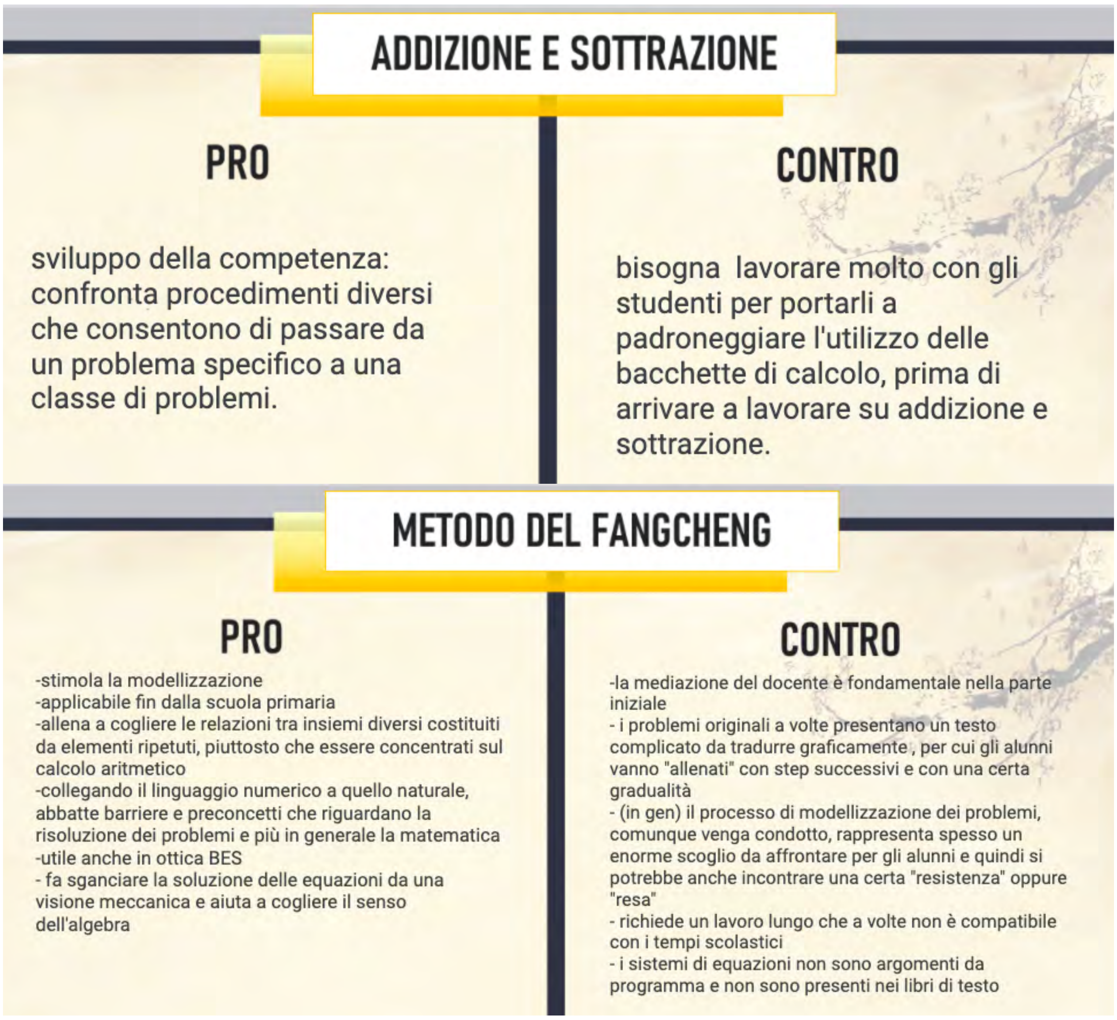


Figura 8. Risultati della discussione con i partecipanti al workshop.

BIBLIOGRAFIA

Bagni G.T. (2006). Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni. In L. Giacardi, M. Mosca & O. Robutti (eds.), *Associazione Subalpina Mathesis. Conferenze e seminari 2005-2006* (pp. 53-62). Torino: Kim Williams Books.

Bagni, G.T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica.* Bologna: Pitagora.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic Mediation in The Primary School: Dûrer's Glass. In H. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte)* (pp. 77-90). New York, USA: Springer.

Bartolini, M. G., Xuhua, S., & Ramploud, A. (2013). A dialogue between cultures about task design for primary school. In Margolinas C. & al. (Eds.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 551-560). Oxford: U.K.

Casi, R., Pizzarelli, C. (2020). Dalle bacchette da calcolo cinesi al metodo del Fangcheng. Un percorso di trasposizione culturale nella Scuola Secondaria di I grado, *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* **7**, 76-101.

Chemla, K., & Shuchun, G. (2004). *Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Paris: Dunod.

Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 162-167). The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

Di Paola, B., & Spagnolo, F. (2009). I sistemi indeterminati nei "Nove Capitoli" di Liu Hui. Il ruolo del "contesto" per determinare l'"algoritmo fondamentale" come strumento argomentativo. *Quaderni di ricerca in didattica della matematica* **19**, 101-171.

Di Paola, B., Martignone, F., Mellone, M., & Ramploud, A. (2018). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM-Mathematics Education* **51**(1), 199-212.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631-654), Hillsdale: Erlbaum.

Mellone, M. & Ramploud, A. (2015). Additive structure: An educational experience of cultural transposition. In Sun X., Kaur B. & Novotná N. (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 23*, 567-574. China, Macau: University of Macau.

Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques*, 203-213. Caen: ARDM.

Radford, L. (2003). *On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek thematics Education*. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

CAPIRE CONCETTI MATEMATICI CON I MANIPOLATORI VIRTUALI E NON, ALLA SECONDARIA DI I GRADO: PERCHÉ NO?

Mangiarotti Maria Aurora, Mapelli Rosangela
mangiarotti.aurora@gmail.com

Abstract
L'articolo propone esperienze didattiche con i manipolatori, per alunni di scuola secondaria di primo grado. Questi strumenti favoriscono negli studenti la comprensione di concetti matematici; legnetti, cubetti, cannucce sono essenziali per comprendere come si eseguono le operazioni fra numeri, chiarire il significato delle frazioni e le loro operazioni, appropriarsi dei concetti di area e perimetro o modellizzare un problema.

Parole chiave
manipolatori-fisici, manipolatori-virtuali, laboratorialità, matematica-attiva, strategie-apprendimento

PREMESSA

Come insegnano le esperienze sul campo e le tante ricerche accademiche, i manipolatori sviluppano negli alunni la comprensione dei concetti matematici: legnetti, cubetti, cannucce sono essenziali per capire come si eseguono le operazioni fra numeri, chiarire il significato delle frazioni e le loro operazioni, appropriarsi dei concetti di area e perimetro o modellizzare un problema. Nelle nostre scuole i manipolatori vengono proposti per lo più all'infanzia e alla primaria o agli studenti con difficoltà di apprendimento, ma siamo convinte che possano essere utilizzati per supportare anche studenti più grandi, nel loro percorso di apprendimento.
Il pensiero, il ragionamento, la riflessione e l'argomentazione sono priorità nelle nostre proposte con i manipolatori: essi devono fungere da "impalcatura" per sostenere gli studenti nella costruzione di conoscenza, impalcatura che va rimossa una volta raggiunta la comprensione.
Grazie ai manipolatori gli alunni riescono a dare senso concreto alle idee matematiche o a mettere in relazione nuovi concetti con ciò che hanno già imparato.
Quando gli studenti esplorano con i manipolatori, creano modelli tattili e visivi che non solo aiutano a sviluppare comprensione, ma anche fiducia nelle loro capacità matematiche. Le manipolazioni agevolano gli studenti nella ricerca di strategie e di un risultato concreto, inducendoli a ragionare sul come e sul perché.
Abbiamo progettato diverse situazioni problematiche per studenti di scuola secondaria di primo grado, vicine alla loro esperienza; grazie alle manipolazioni gli alunni svolgono attività concrete e avviano un processo graduale di astrazione e generalizzazione.

ATTIVITA' CON CARTONCINO E FORBICI

Utilizzando i manipolatori più semplici da realizzare con cartoncino, forbici e colori, si possono affrontare nodi concettuali importanti come la divisione nei razionali, nel caso in cui il divisore sia minore dell'unità e dunque il quoziente risulti maggiore del dividendo (per esempio 8:0,5=16).
Si tratta di un risultato controintuitivo in quanto i ragazzi, riferendosi al modello dei numeri naturali, fanno difficoltà ad accettare la soluzione. Nell'attività presentata di seguito, il problema è così posto: quale divisore sta nel dividendo (che è 8) 16 volte?
Gli alunni disegnano e ritagliano nel cartoncino cerchi uguali e sanno che devono ottenere come risultato 16 forme. La conclusione a cui giungono è abbastanza naturale: si devono dividere i cerchi a metà, ottenendo 16 semicerchi, dunque il divisore è ½ oppure 0,5. L'attività viene ripetuta con altre

proposte e altre manipolazioni, riuscendo così a superare il misconcetto "in una divisione il quoziente deve essere un numero inferiore al dividendo". Di seguito l'immagine che documenta la proposta didattica.

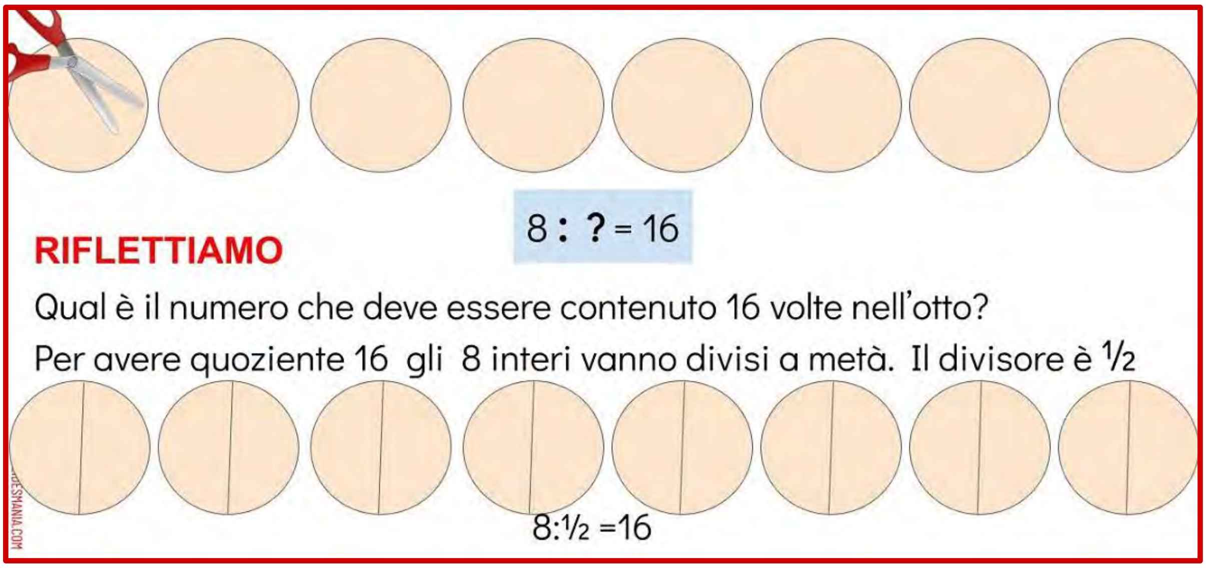


Figura 1

Anche la divisione tra frazioni può essere proposta come problem solving, grazie ai manipolatori, come si evince dalla seguente immagine:

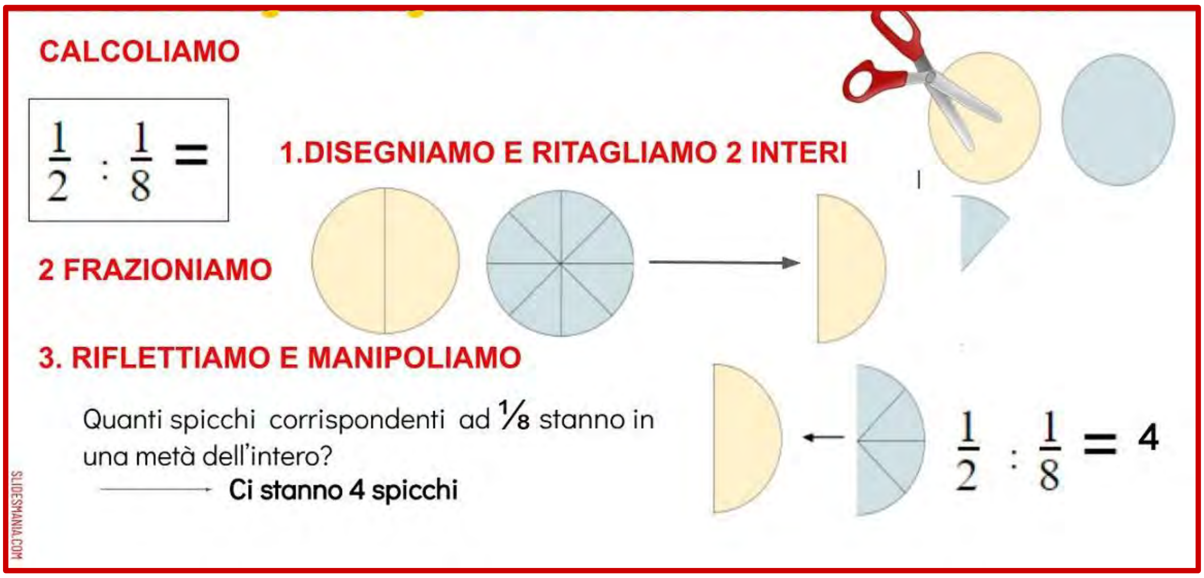


Figura 2

Dopo aver proposto come lavoro a coppie alcune divisioni tra frazioni utilizzando forbici e cartoncino, gli alunni sono guidati a riflettere sui risultati ottenuti e a formulare il loro algoritmo per il calcolo del quoziente fra frazioni.

Figura 3

Questo passaggio genera una discussione in classe che porta alla formulazione corretta dell'algoritmo e alla successiva sistematizzazione da parte del docente.

TANGRAM

Sempre con cartoncino e forbici possiamo far realizzare il Tangram, un antico gioco cinese che sviluppa creatività, intelligenza spaziale e offre occasioni per tanti ragionamenti matematici. Si tratta di un quadrato composto da 7 pezzi detti Tan (5 triangoli, un parallelogramma e un quadrato, ritagliati secondo precise regole). Con il Tangram è possibile riprodurre tantissime forme e figure a partire da modelli o crearne di nuove stimolando la creatività. In matematica il Tangram permette di studiare i rapporti fra i Tan e di affronta la questione che figure piane equivalenti non sono isoperimetriche).

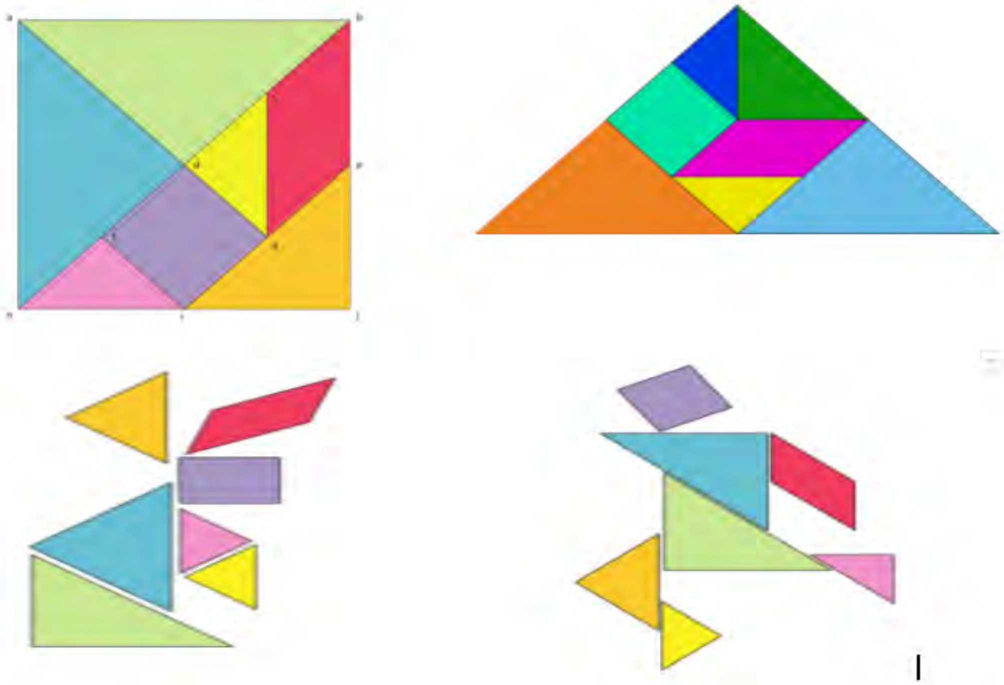


Figura 4

QRCODE Scheda didattica sul tangram

QRCODE La costruzione del Tangram

Figura 5

Tra gli obiettivi che i docenti si pongono usando tangram citiamo:

- ripassare le caratteristiche e la classificazione di triangoli e quadrilateri;
- riflettere sulle simmetrie;
- scoprire che figure equivalenti non necessariamente hanno lo stesso perimetro;
- lavorare sulle frazioni: unità frazionaria ed equivalenza tra frazioni
- sviluppare creatività

Di seguito altri esempi di attività:

Figura 6

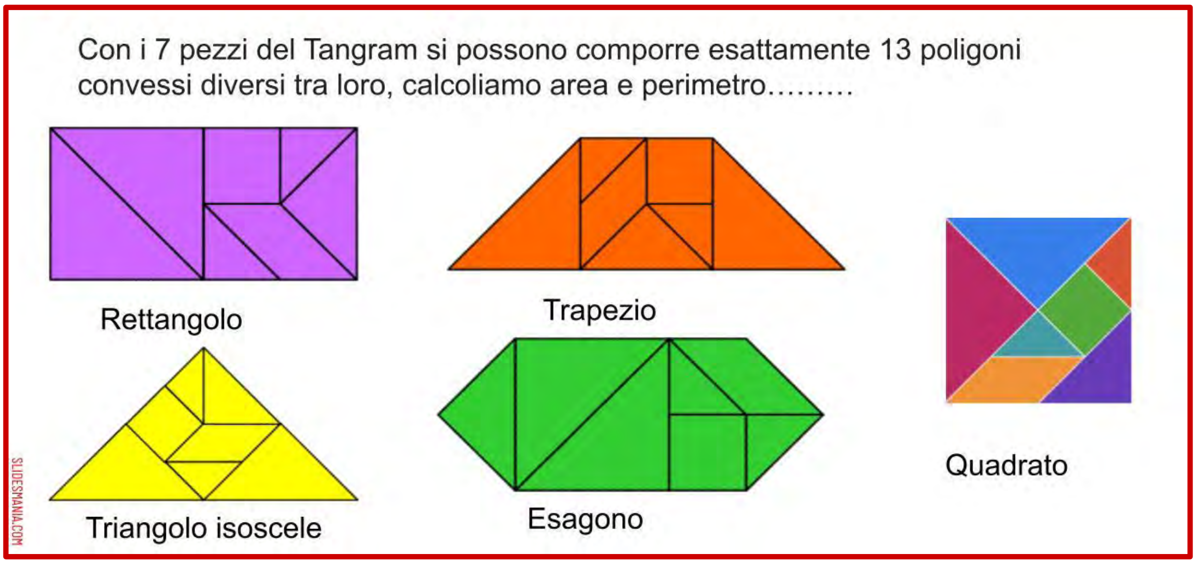


Figura 7

MANIPOLATORI VIRTUALI

POPYPAD

Ma i manipolatori non sono solo fisici, in rete se ne trovano di virtuali gratuiti e senza bisogno di account per gli alunni. Il primo manipolatore virtuale di cui vi parliamo è Polypad di Mathigon https://it.mathigon.org/polypad
Polypad è una web app, che si può utilizzare anche da cellulare, permette di interagire con tanti oggetti ed è anche possibile condividere le attività in piattaforme come Google Classroom. Nel pannello a sinistra è possibile selezionare poligoni, barre numeriche, barre delle frazioni, numeri, tangram e tanto altro. Con un clic si inseriscono forme nel foglio di lavoro, che possono essere spostate o ruotate.
In basso al centro c'è una barra di menù che include strumenti per il disegno, come penne ed evidenziatori, caselle di testo, pannello colori.

Figura 8

La prima attività che proponiamo riguarda il riconoscimento di numeri primi, grazie all'interpretazione geometrica della scomposizione in fattori di un numero n.

Assegnato il numero "n", il problema è capire se è un numero primo, senza scomporlo come solitamente viene richiesto.
Gli studenti con il manipolatore Polypad costruiscono un rettangolo di base n ed altezza 1, con area pari a "n" (unità di misura al quadrato): se è possibile trasformare per trascinamento il rettangolo di partenza in uno equivalente con base e altezza diverse da 1, il numero è fattorizzabile. L'immagine seguente chiarisce la strategia.

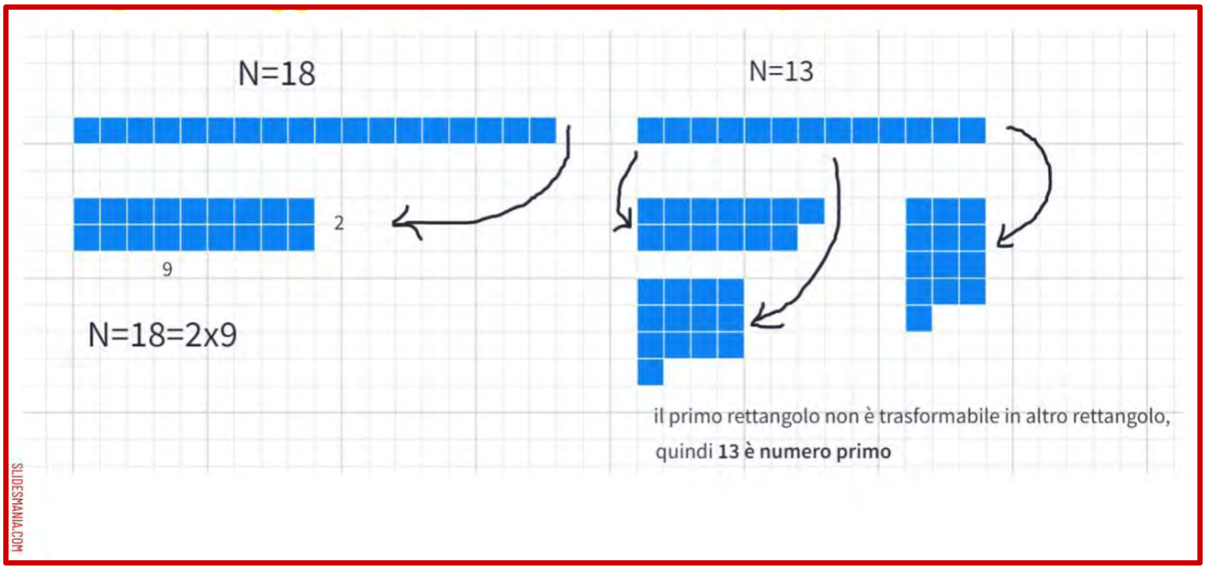


Figura 9

Una seconda attività riguarda la fattorizzazione, come documenta la seguente immagine

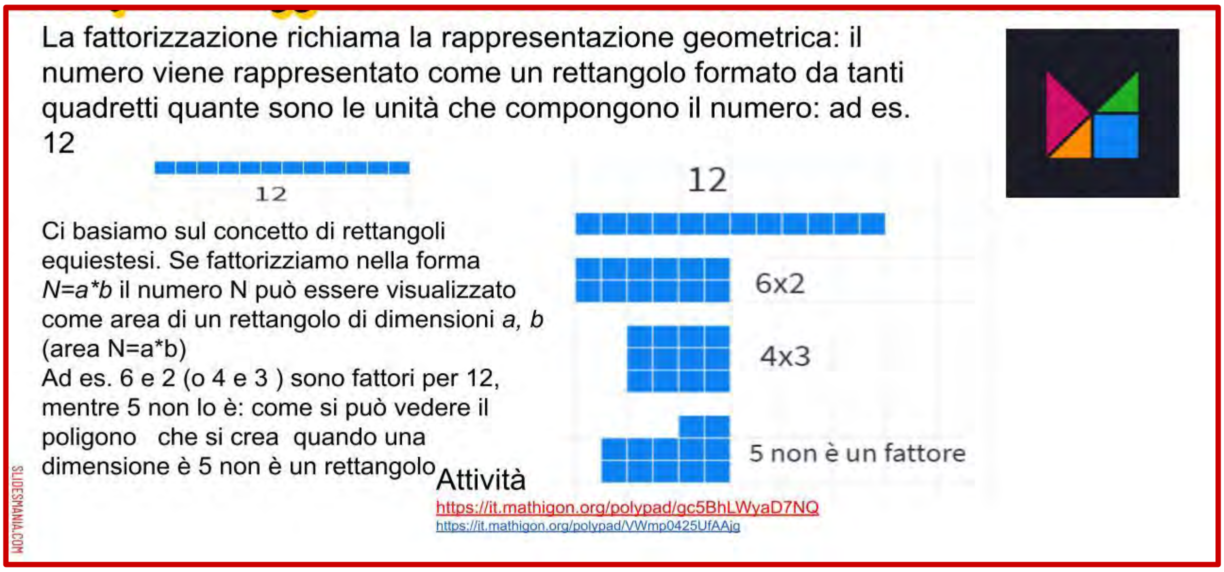


Figura 10

Grazie alla manipolazione virtuale di un quadrato con Polypad è possibile dare un senso al prodotto notevole "Somma per differenza", come dimostra la seguente immagine.

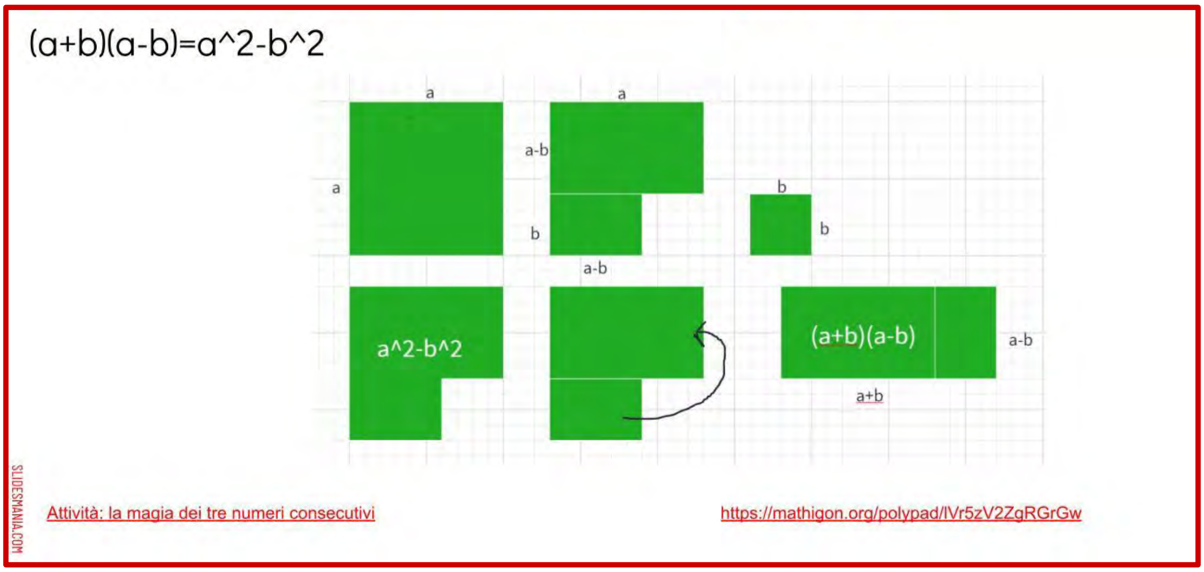


Figura 11

GOOGLE DISEGNI

Un'altra attività, è relativa alla risoluzione di problemi con le frazioni, attraverso l'uso di pittogrammi. L'approccio al problem solving attraverso il modello a barre in cui i disegni sono creati con Google disegno. Nel problema della palestra, mostrato nella seguente immagine, la rappresentazione visuale dei dati permette di risolvere il problema senza affrontare l'ostacolo della frazione come operatore.

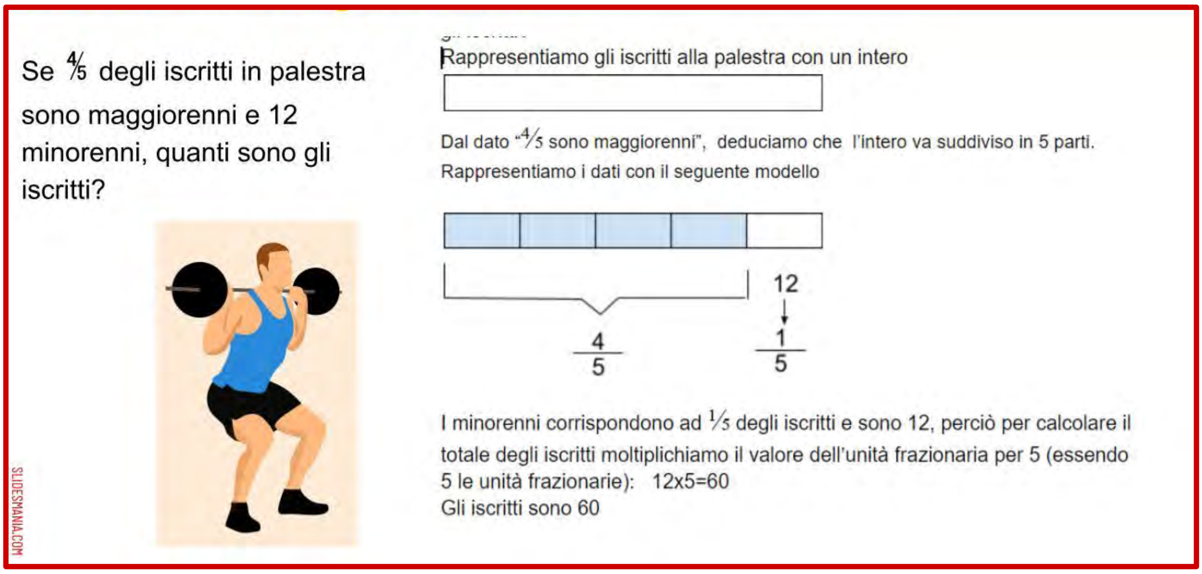


Figura 12

GEOBOARD

Un altro manipolatore che vogliamo citare è Geoboard, https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/ con cui si può trattare lo studio delle trasformazioni geometriche. I manipolatori risultano utili anche nel riconoscimento di regolarità e costruzione di sequenze per l'avvio al pensiero funzionale.

CONCLUSIONI

Non vogliamo trascurare il fatto che ci sono posizioni contrarie all'uso dei manipolatori per l'apprendimento della matematica. Il rischio è che il loro uso può mantenere lo studente ancorato all'esempio concreto, ostacolando il formarsi della successiva rappresentazione mentale simbolica.
Baroody[16] raccomanda di usare i manipolatori con attenzione in quanto la loro efficacia dipende dalle modalità con cui l'insegnante ne incoraggia l'uso: vanno infatti proposti per stimolare la riflessione e la ricerca di strade alternative per la risoluzione di problemi che poi vanno generalizzate. L'uso dei manipolatori (es. bastoncini) deve aiutare gli studenti a trovare una prima risposta al problema, avviandoli alla comprensione concettuale passando dal concreto, all'astratto, al simbolico.

SITOGRAFIA

https://cutt.ly/MIqgYi7 presentazione utilizzata al convegno del 12 ottobre
https://it.mathigon.org/activities
https://www.aft.org/ae/fall2017/willingham
https://eric.ed.gov/?id=EJ405968
https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1097/1/012135/meta
https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/943/1/012023/pdf
https://digscholarship.unco.edu/cmt/vol53/iss1/3/
https://www.teachermagazine.com/au_en/articles/teaching-resources-using-manipulatives-in-mathematics-learning
https://toytheater.com/category/teacher-tools/virtual-manipulatives/

[16] https://pubs.nctm.org/view/journals/at/37/2/article-p4.xml

CHE PROBLEMA C'E'

Manilii Maria Rosaria, Menegazzo Giulia, Sacco Silvia, Vernero Maria Cristina
Istituto Comprensivo "Paolo e Rita Borsellino" – Valenza (AL)
Istituto Comprensivo "Rita Levi Montalcini" – Civitella del Tronto (TE)
Università del Piemonte Orientale
maniliimariarosaria@gmail.com

Abstract
L'esperienza didattica che presentiamo in questo contributo è nata dalla collaborazione tra docenti del primo ciclo d'istruzione e di ordini di scuola differenti. Mostreremo esempi di attività sviluppate in sperimentazioni svolte nelle classi IV e V della scuola primaria e nelle prime classi della scuola secondaria di I grado. Dall'analisi dei risultati è emerso che attraverso il problem solving e la metodologia laboratoriale è possibile aumentare la motivazione e far crescere la competenza degli studenti.

Parole-chiave
Problem solving, argomentazione, INVALSI, competenze

PENSARE, RIFLETTERE, DISCUTERE, ARGOMENTARE, IDEARE STRATEGIE, CERCARE SOLUZIONI, … L'ARTE DEL PROBLEM SOLVING

Le attività presentate in questo contributo sono state realizzate dal Gruppo di Ricerca e Sperimentazione di Didattica della Matematica formato da docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado dell'I.C. Paolo e Rita Borsellino di Valenza (AL) e dell'I.C. Civitella-Torricella (TE), dalla Prof.ssa Francesca Martignone e dal Prof. Pier Luigi Ferrari dell'Università del Piemonte Orientale.
Il gruppo di lavoro ha come scopo generale quello di supportare i docenti nella loro attività di insegnamento attraverso la progettazione di attività in linea con le Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012) ed alla luce delle ricerche in didattica della matematica. Il gruppo negli anni è diventato una comunità di indagine (Jaworski, 2020) che ha progettato, svolto e analizzato diversi percorsi didattici di lungo termine focalizzando l'attenzione su problemi, metodologia laboratoriale e soprattutto sull'argomentazione. Nei paragrafi successivi, dopo aver descritto la metodologia di lavoro del gruppo, mostreremo le analisi qualitative di alcuni esempi di attività.

METODOLOGIA DI LAVORO DEL GRUPPO

Le attività del nostro Gruppo seguono delle fasi ben precise che si ripetono ogni anno:

1. *individuazione del filo conduttore*

All'inizio di ogni anno scolastico i docenti si incontrano per decidere i temi protagonisti delle attività: dopo aver analizzato le esigenze delle classi e i percorsi svolti negli anni precedenti, i docenti concordano gli ambiti (numeri, relazioni e funzioni, figure, dati e previsioni) all'interno dei quali verranno costruiti i quesiti.

2. *la scelta dei quesiti*

Non solo è importante attribuire peso alla risoluzione del problema ma anche al modo in cui esso viene posto. Gran parte dell'attività del gruppo è dedicata alla scelta e costruzione dei quesiti: il gruppo, dopo un'analisi dei quesiti proposti dai docenti e dai ricercatori, sceglie alcuni di questi per creare una serie di attività utilizzabili nelle classi. In molti casi sono stati usati e modificati dei quesiti INVALSI: questi problemi infatti, spesso hanno rappresentato un buon punto di partenza per condividere riflessioni e analisi a priori (Martignone, 2016; 2020) prima di progettare attività di classe. Successivamente si formulano i quesiti da proporre, dedicando un'attenzione particolare al linguaggio, attraverso il confronto e la discussione condividendo la stesura finale.

3. *analisi a priori e compilazione della scheda di progettazione*

Prima di proporre agli alunni ogni attività, i docenti pensano e condividono eventuali strategie risolutive (corrette oppure errate) che gli alunni potrebbero mettere in atto. In tale contesto l'individuazione di possibili errori è uno spunto di riflessione importante, come è importante cercare di immaginare quante più risoluzioni possibili (corrette o no). A questo punto ciascun docente comincia a compilare la scheda di progettazione: nella figura 1 è possibile visionarne lo schema.

Progettazione delle sperimentazioni

Scuola:

TITOLO – Argomento

Classi coinvolte
Periodo e durata della sperimentazione
Caratteristiche del contesto classe
Obiettivi generali della sperimentazione in relazione ai traguardi per lo sviluppo delle competenze scritti nelle Indicazioni Nazionali e allo sviluppo delle competenze chiave
Elenco delle lezioni programmate e descrizione delle consegne e della metodologia
Modalità di valutazione
Documentazione programmata (Fotografie delle attività e/o sbobinature delle discussioni collettive. Schede individuali e di gruppo. Testi prodotti dagli studenti, video…)
Elenco allegati:

Testo del quesito

Competenze richieste

Possibili strategie risolutive

Possibili errori e difficoltà

Valutazione degli elaborati

Figura 1. Schema di una scheda di progettazione

La scheda di progettazione è un documento articolato che tiene traccia di tutto il lavoro svolto. Nella prima parte contiene le informazioni relative alla classe e al periodo di sperimentazione, il riferimento alle Indicazioni Nazionali e la descrizione delle lezioni. La seconda parte comprende:

- il testo del quesito scelto,
- l'analisi a priori (competenze richieste, possibili strategie risolutive, possibili errori e difficoltà),
- l'analisi a posteriori (valutazione degli elaborati).

4. *il lavoro in classe*

Le attività vengono programmate accuratamente e svolte seguendo una metodologia comune: l'insegnante presenta il quesito agli studenti e propone una risoluzione individuale; in seguito, se possibile, gli alunni si confrontano in piccoli gruppi e scrivono la risoluzione spiegando il procedimento usando anche diverse rappresentazioni: grafiche, simboliche. Nella lezione successiva l'insegnante

presenta alla classe il lavoro svolto dagli alunni, individualmente o a piccoli gruppi, mostrando i punti di forza, le soluzioni corrette, i ragionamenti messi in atto e raccontando gli errori. Gli alunni vengono coinvolti per spiegare i procedimenti utilizzati e successivamente, attraverso una discussione collettiva, per decidere la strategia comune che verrà descritta in un testo narrativo.
Il confronto è vissuto da molti allievi come efficace modalità di lavoro mentre la didattica laboratoriale favorisce la cooperazione tra pari ed è una strategia utile per l'inclusione perché offre, a ciascun alunno, la possibilità di apprendere attraverso molteplici canali.

5. *analisi a posteriori*

Ogni insegnante analizza i protocolli dei propri alunni individuando quelli significativi, successivamente tutti i docenti del gruppo di Ricerca discutono sulle strategie risolutive degli studenti, si confrontano sui risultati ottenuti e sulle attività successive che possono essere di consolidamento oppure di approfondimento.
Tutto il materiale prodotto (compresi i protocolli considerati significativi) viene salvato su una piattaforma Moodle e quindi rimane disponibile a tutti i componenti del gruppo anche negli anni futuri.

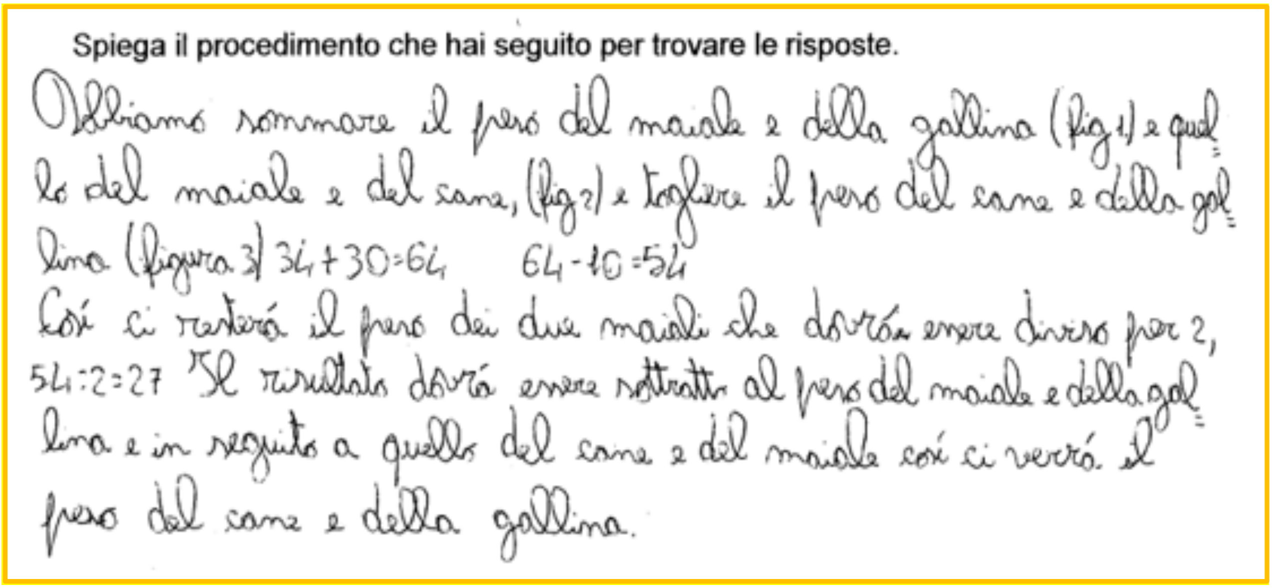
ESEMPI DI ATTIVITÀ

Di seguito vengono presentate due attività proposte agli alunni.
Il primo quesito (figura 2.) è tratto dalla Prova INVALSI di matematica dell'anno scolastico 2017/2018 prevista per la classe quinta della Scuola Primaria (grado 5). È stato proposto agli alunni di classe quarta della scuola primaria. Le informazioni per risolvere il problema devono essere ricavate da testo e immagini che devono essere interpretati e collegati.
Durante l'analisi a priori i docenti hanno preso in esame la "Guida di lettura della prova di matematica" realizzata da INVALSI: solo il 36.5% degli alunni ha risposto correttamente. Inoltre hanno individuato le competenze richieste, ad esempio: sa cogliere le relazioni tra gli elementi, sa ricavare informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici, sa descrivere il procedimento seguito e riconoscere strategie di soluzione diverse dalla propria.
I docenti hanno individuato errori e difficoltà come ad esempio: non riuscire ad interpretare la situazione problematica, non identificare le relazioni tra gli elementi, utilizzare in modo non appropriato i dati, non accorgersi di ottenere un risultato non inerente alla realtà, calcoli errati o approssimativi.


INVALSI
D 17. Osserva le immagini.
Quanto pesa il cane?
Risposta ….. Kg

Figura 2. Quesito tratto dalla prova INVALSI di matematica a.s. 2017/2018 grado 5 quesito D17 e proposto ad alunni della scuola primaria di classe quarta a.s. 2018/2019

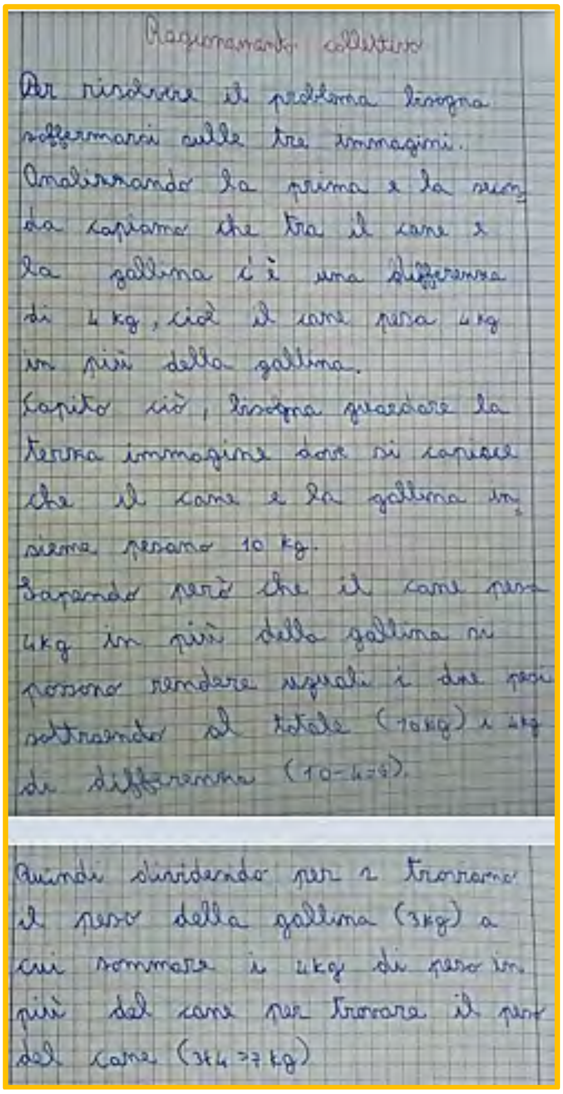
Nella figura 3. viene proposto il ragionamento di un alunno che ha prima calcolato il peso del maiale (utilizzando i primi due dati) e poi ha determinato il peso del cane considerando il terzo dato.



Spiega il procedimento che hai seguito per trovare le risposte.

Abbiamo sommare il peso del maiale e della gallina (fig 1) e quello del maiale e del cane, (fig 2) e togliere il peso del cane e della gallina (figura 3) 34+30=64   64-10=54
Così ci resterà il peso dei due maiali che dovrà essere diviso per 2, 54:2=27 Il risultato dovrà essere sottratto al peso del maiale e della gallina e in seguito a quello del cane e del maiale così ci verrà il peso del cane e della gallina.

Figura 3. Esempio di ragionamento



Ragionamento collettivo

Per risolvere il problema bisogna soffermarsi sulle tre immagini.
Analizzando la prima e la seconda capiamo che tra il cane e la gallina c'è una differenza di 4 kg, cioè il cane pesa 4 kg in più della gallina.
Capito ciò, bisogna guardare la terza immagine dove si capisce che il cane e la gallina insieme pesano 10 kg.
Sapendo però che il cane pesa 4kg in più della gallina si possono rendere uguali i due pesi sottraendo al totale (10kg) i 4kg di differenza (10-4=6).
Quindi dividendo per 2 troviamo il peso della gallina (3kg) a cui sommare i 4kg di peso in più del cane per trovare il peso del cane (3+4=7 kg).

Figura 4. Esempio di ragionamento collettivo

La Figura 4. contiene il ragionamento condiviso da tutti gli alunni della classe; infatti, dopo aver presentato le diverse strategie risolutive utilizzate dagli alunni individualmente o a piccoli gruppi, l'insegnante apre una discussione di bilancio (Bartolini-Bussi, Bona & Ferri, 1995) per concordare il procedimento risolutivo condiviso da tutti gli alunni che partecipano quindi attivamente alla stesura.
Il quesito proposto ha suscitato perplessità in alcuni alunni in quanto i dati erano racchiusi nelle immagini. In ogni caso il problema è stato risolto correttamente da 30 alunni su 35 che rappresenta l'85.7%; a livello nazionale le risposte corrette rappresentavano il 36.5%. È importante precisare che, oltre alla risposta numerica, nel quesito proposto durante la sperimentazione agli alunni era richiesto di scrivere anche il ragionamento.

Figura 5. Quesito inventato dai docenti e proposto ad alunni di classe quinta della scuola primaria e di classe prima della scuola secondaria di primo grado.

Sulla base del precedente quesito, i docenti hanno inventato un nuovo quesito, ispirato a prove INVALSI per la scuola primaria, proposto agli alunni della classe quinta della scuola primaria e della classe prima della scuola secondaria di primo grado (Figura 5). Tale quesito è inserito all'interno di un percorso formato da più attività: per la classe quinta della scuola primaria rappresenta la terza attività, mentre per la classe prima della scuola secondaria di I grado rappresenta la seconda attività.
Di seguito vengono riportati i procedimenti risolutivi di alcuni alunni.
La Figura 6. presenta l'elaborato di un alunno di classe quinta della scuola primaria; nella prima parte l'alunno lavora individualmente, nella seconda parte si confronta con un compagno e capisce di avere sbagliato.

Figura 6. Esempio di risoluzione di alunni di classe quinta della scuola primaria.

Le seguenti figure propongono la risoluzione di alunni di classe prima della scuola secondaria di primo grado: la Figura 7. risulta significativa perché i dati vengono rappresentati in modo simbolico e successivamente interpretati mediante la rappresentazione pittorica; la figura 8. è stata scelta perché il ragionamento risulta scritto in modo narrativo.

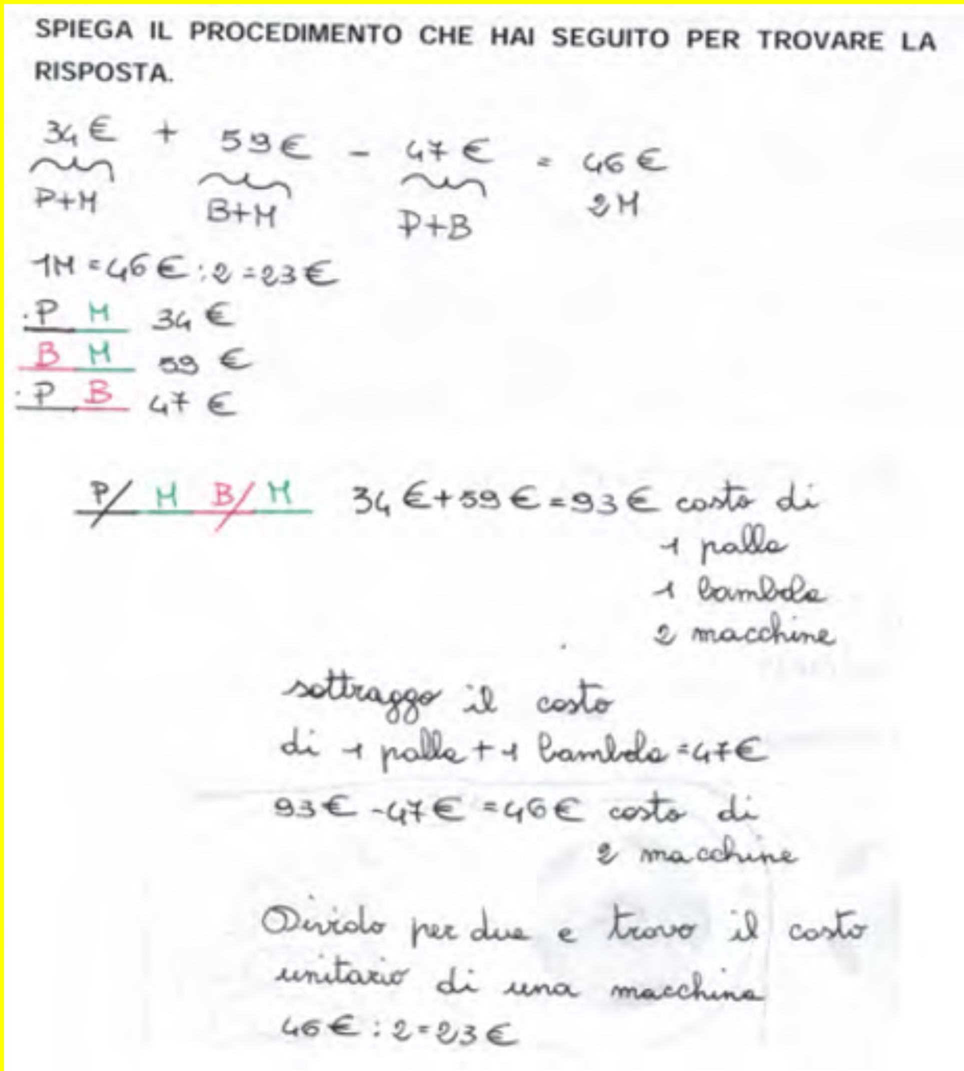
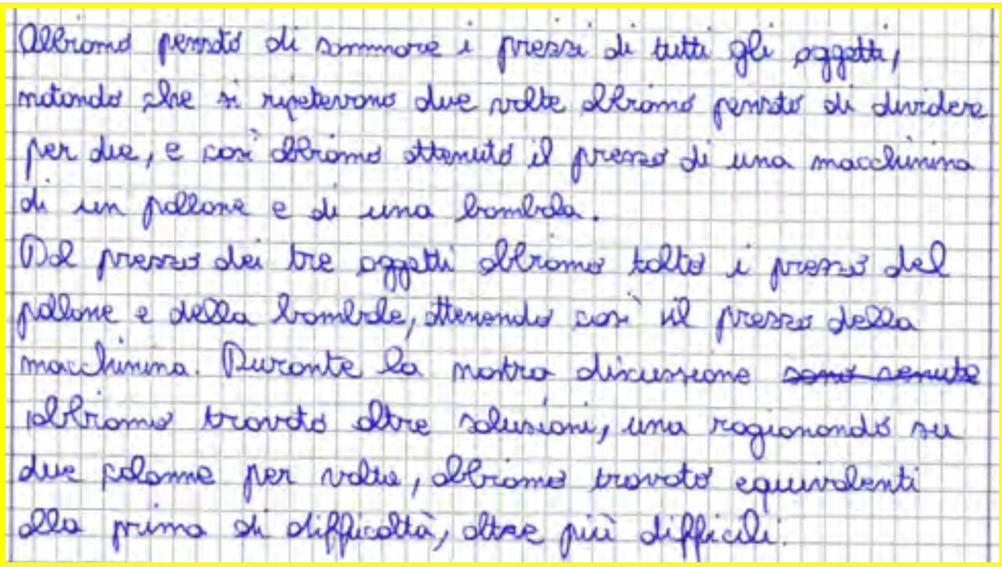


Figura 7. Esempio di risoluzione di un alunno di classe prima della scuola secondaria di primo grado.



Abbiamo pensato di sommare i prezzi di tutti gli oggetti, notando che si ripetevano due volte abbiamo pensato di dividere per due, e così abbiamo ottenuto il prezzo di una macchinina di un pallone e di una bambola.
Dal prezzo dei tre oggetti abbiamo tolto i prezzi del pallone e della bambola, ottenendo così il prezzo della macchinina. Durante la nostra discussione ~~sono venute~~ abbiamo trovato altre soluzioni, una ragionando su due colonne per volta, abbiamo trovato equivalenti alla prima di difficoltà, altre più difficili.

Figura 8. Esempio di ragionamento di alunni di classe prima della scuola secondaria di primo grado.

CONCLUSIONI

Le attività che abbiamo realizzato e di cui abbiamo mostrato alcuni esempi in questo contributo, sono in linea con quanto contenuto nelle Indicazioni Nazionali e hanno permesso agli alunni di migliorare le loro competenze matematiche e trasversali (come ad esempio quelle legate alla comunicazione e all'argomentazione). Inoltre abbiamo riscontrato una maggior sicurezza nell'affrontare i problemi e una partecipazione attiva di tutti gli alunni, anche di quelli con bisogni educativi speciali. Dalle analisi svolte emerge che la metodologia laboratoriale e il focus sull'argomentazione e sulla discussione sono risultati efficaci sia dal punto di vista relazionale sia dell'apprendimento della matematica.

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare i Dirigenti Scolastici dell'Istituto Comprensivo "Paolo e Rita Borsellino" Prof. Maurizio Primo Carandini che ha proposto e incentivato la formazione del Gruppo di ricerca e dell'Istituto Comprensivo "Rita Levi Montalcini" PH. D. Dott.ssa Sandra Renzi.
Ringraziamo tutti i colleghi e gli alunni che hanno partecipato alla sperimentazione.
Un ringraziamento particolare al Prof. Ferrari e alla Prof.ssa Martignone dell'Università del Piemonte Orientale che ci hanno accompagnato in questi anni condividendo la loro esperienza nell'ambito della didattica della matematica e fornendo un costante supporto in ogni fase del nostro lavoro di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: La discussione matematica*, Comune di Modena, CDE.

Jaworski, B. (2020). Communities of inquiry in mathematics teacher education. In S. Lerman (Ed.). Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham.

Martignone, F. (2016). Un'attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove Invalsi di matematica. *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*. *16*, 1, 70-86.

Martignone, F. (2020). I problemi nelle prove INVALSI. *La Vita Scolastica,10*, 14-17.

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Annali della Pubblica Istruzione. No. Speciale. Disponibile in: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

LA COSTRUZIONE DI ISOMETRIE NELLA REALTÀ, TRA ARTEFATTI MANIPOLATIVI E DIGITALI, DA UNA "VIGNETTA KLEIN"

Antonella Montone, Michele G. Fiorentino, Giuditta Ricciardiello
Università Di Bari
antonella.montone@uniba.it

Abstract
Si propone un workshop che prende avvio dalle attività proposte nell'ambito del progetto Klein Italia, sulla vignetta "Le isometrie passo passo" e che ha come obiettivo primario la scoperta e la descrizione delle proprietà caratterizzanti le isometrie nel piano, contestualizzate nel mondo reale. Obiettivo del laboratorio è la costruzione dei significati e delle proprietà della simmetria assiale e della rotazione come composizione di simmetrie assiali, attraverso l'uso sinergico di due artefatti, uno manipolativo e uno digitale, per realizzare il modello di una pavimentazione. A partire dall'assegnazione di un tassello, che rappresenta una mattonella, e attraverso varie fasi di difficoltà crescente, con discussioni matematiche, si favorisce l'apprendimento delle suddette proprietà.

Parole-chiave
Vignetta Klein, Trasformazioni Isometriche, Sinergia di artefatti, Duo di artefatti, Rotazione

INTRODUZIONE

Il workshop presentato in questo lavoro affronta la tematica della costruzione di isometrie a partire dalla realtà, mediante l'utilizzo di artefatti manipolativi e digitali in sinergia. Il lavoro parte da una ricerca fatta precedentemente sulle trasformazioni geometriche, e poi si arricchisce in seguito di ulteriori elementi. Esso è stato ispirato da una delle vignette Klein, "Simmetrie passo passo", all'interno del progetto Klein Italia, in atto da qualche tempo, che a sua volta ha come obiettivo la trasposizione didattica di alcune vignette Klein che affrontano particolari argomenti di Matematica.
A partire dall'assegnazione di un tassello, che rappresenta una mattonella, e attraverso varie fasi di difficoltà crescente, con discussioni matematiche (Bartolini Bussi, 1998), si favorisce l'apprendimento delle suddette proprietà, utilizzando un metodo laboratoriale innovativo. Tali fasi prevedono l'utilizzo di un foglio di carta A4, di uno spillo e di pieghe, alternati ad alcuni strumenti del software GeoGebra. In questo modo gli studenti di una prima classe di scuola secondaria di primo grado realizzano lo sviluppo di una pavimentazione con disegni isometrici, riprendendo un modello di pavimentazione presente nella vignetta Klein. La sperimentazione didattica proposta si colloca all'interno di un percorso che ha come obiettivo primario la scoperta e la descrizione della proprietà caratterizzanti le isometrie nel piano, guidando gli studenti ai nodi concettuali delle trasformazioni isometriche con l'utilizzo di strumenti tecnologici, digitali e non, attraverso attività laboratoriali che rendano attivo lo studente nella costruzione del sapere.

QUADRO TEORICO

Il workshop che proponiamo si basa su un nostro progetto di ricerca – ovvero la progettazione di una sequenza didattica, la sua implementazione e l'analisi dei dati raccolti – inquadrato all'interno della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Uno degli obiettivi del nostro progetto di ricerca è stato quello di indagare l'uso combinato di una coppia di artefatti di diversa natura, e la potenziale sinergia di questa combinazione. La natura degli artefatti dipende dal fatto che

siano artefatti concreti o digitali anche denominati duo di artefatti, come indicato da Maschietto e Soury-Lavergne (2013).
Nelle sezioni seguenti diamo un breve resoconto delle idee chiave del TMS impiegate ed elaboriamo la nozione di sinergia che è uno degli elementi portanti di questo contributo.

LA TMS: UNA PANORAMICA

La Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) sviluppata da Bartolini Bussi e Mariotti (2008) costituisce il riferimento teorico fondamentale del nostro studio sperimentale, finalizzato alla costruzione del concetto di isometria come composizione di più simmetrie assiali.
Sviluppata in una prospettiva vygotskijana, la TMS considera il sistema complesso di relazioni semiotiche (vedi Figure 1) tra gli elementi fondamentali relativi all'uso di artefatti nella costruzione di significati matematici: l'artefatto, il compito, il sapere matematico oggetto dell'attività, e i processi di insegnamento-apprendimento in classe. L'idea fondamentale è che uno strumento, incorporando un sapere, possa offrire, a chi lo usa, una via di accesso proprio al sapere che in esso è incorporato (Vygotskij, 1980). Per cui un artefatto può essere visto in riferimento a un significato matematico e quindi come tale può diventare uno strumento di mediazione semiotica: l'allievo lo usa per svolgere un compito e l'insegnante lo usa con l'intenzione didattica di sviluppare significati matematici.

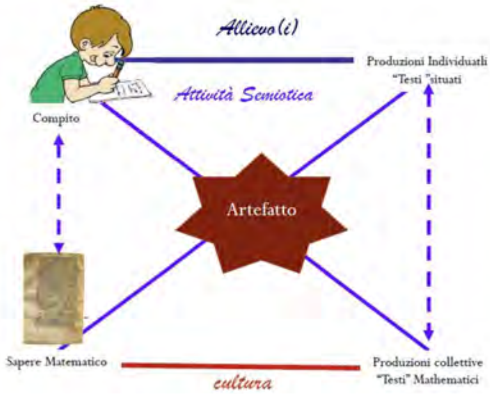


Figure 1. Sistema complesso di relazioni semiotiche.

Lo schema in Figure 1 (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008) illustra in maniera sintetica il sistema complesso di relazioni semiotiche, che si sviluppano durante un'attività di mediazione semiotica. Tra l'allievo e il sapere matematico si genera una frattura: l'allievo costruisce un sapere situato, strettamente connesso al compito da risolvere e all'artefatto utilizzato talvolta fatto di misconcezioni. Nell'artefatto, individuato dall'insegnante per risolvere il compito, risiede un potenziale semiotico che consiste nel doppio legame semiotico che tale artefatto ha da un lato con i significati personali che si prevede emergano dal suo uso, da un altro lato con la conoscenza matematica evocata da tale uso, in quanto può essere riconosciuta da un esperto di matematica.
Grazie al potenziale semiotico dell'artefatto e alla mediazione svolta dall'insegnante in fase di discussione, i segni individuali prodotti dagli studenti si evolvono in segni collettivi e matematici che indirizzano l'allievo verso la costruzione di significati matematici condivisi, connessi con l'attività realizzata. Inoltre, attraverso l'analisi del potenziale semiotico di un artefatto, è possibile descrivere ciò che ci si aspetta emerga in classe, in termini di azioni e di segni prodotti dagli studenti nell'affrontare il compito con l'artefatto. Tale analisi fornisce anche informazioni sulla relazione tra l'artefatto e i significati matematici in gioco, in relazione al compito. Per questa ragione, l'analisi del potenziale semiotico costituisce un elemento fondamentale nella fase di progettazione di una sequenza didattica.
In particolare, i significati legati all'uso dell'artefatto possono essere messi in relazione con gli schemi d'uso (Rabardel, 1995), messi in atto dagli studenti in relazione ad uno specifico compito. Di conseguenza, la progettazione del compito deve essere sviluppata sulla base dell'analisi a priori dei processi di soluzione e sull'identificazione degli schemi d'uso attesi. D'altro canto, l'analisi del

potenziale semiotico dell'artefatto costituisce una importante guida nell'analisi dei risultati dell'intervento didattico, in quanto fornisce anche il riferimento per l'analisi dei comportamenti degli allievi e dell'evoluzione dei segni nelle discussioni collettive.
La realizzazione del passaggio dall'uso dell'artefatto alla costruzione di un significato, avviene nel cosiddetto ciclo didattico, attraverso cui si rendono trasparenti i significati potenzialmente incorporati nell'artefatto, e l'insegnante organizza le attività collettive e tutte le fasi del lavoro oltre ad orchestrare le discussioni matematiche.

LA NOZIONE DI SINERGIA

Una delle ipotesi di ricerca del nostro studio è che, durante la risoluzione di compiti specifici, l'uso alternato di un artefatto digitale e di uno manipolativo, generi una sinergia cognitiva tra l'uso di uno dei due artefatti e i segni riferiti all'uso dell'altro artefatto. In una prospettiva semiotica, coerente con il TMS, la nozione di sinergia fa riferimento all'emergere e all'evoluzione dei segni, sia nella fase individuale che in quella collettiva delle attività in classe, e in relazione ai diversi artefatti coinvolti. Sulla base dei primi risultati presentati separatamente e discussi in precedenti articoli (Faggiano, Montone & Mariotti, 2018; Montone, Fiorentino & Mariotti, 2019), sono stati delineati alcuni elementi che inquadrano l'analisi delle trascrizioni delle sperimentazioni didattiche divenuti elementi chiave di una definizione operativa di sinergia di un duo di artefatti (Mariotti & Montone, 2020).
Classifichiamo come evento sinergico qualsiasi fenomeno in cui sia possibile riconoscere che un riferimento implicito o esplicito ad entrambi gli artefatti crea una relazione tra significati che emergono dal loro utilizzo. Maffia & Maracci (2019) chiamano interferenza semiotica un concatenamento di segni che emergono dai contesti d'uso di artefatti diversi e si riferiscono l'uno all'altro (ibid, p. 58). Pertanto, consideriamo una manifestazione di sinergia quando l'emergere di un fenomeno di interferenza semiotica favorisce l'evoluzione dei segni in una catena semiotica efficace. Quando i significati legati all'uso di uno degli artefatti completano i significati emersi dall'uso dell'altro, ad esempio fornendo caratteristiche extra, possiamo dire che si è verificata una sinergia che mostra come contribuisce ad approfondire e tessere la trama semiotica in grado di catturare il significato matematico. La sinergia si verifica quando segni specifici risuonano con i diversi significati radicati nell'esperienza con diversi artefatti.
Ciò favorisce uno sviluppo adeguato e coerente dei significati matematici di particolari trasformazioni geometriche e delle loro proprietà specifiche. (Mariotti & Montone, 2020)
L'attività riprende una ricerca già sviluppata sull'analisi della sinergia che si attiva quando si utilizzano in modo alternato artefatti di natura diversa (Faggiano et al, 2018). Nella sperimentazione che si propone in questo workshop, come nella precedente ricerca, utilizzeremo due artefatti di tipo diverso, uno manipolativo e uno digitale. La novità di questo specifico lavoro ispirato alla vignetta Klein, risiede nell'utilizzare un contesto strettamente reale, quale la realizzazione di un pavimento e nel costruire il teorema fondamentale delle isometrie e cioè che ciascuna isometria si compone di al più tre simmetrie assiali.

GLI ARTEFATTI

Gli artefatti scelti per l'attività sono uno di tipo manipolativo e l'altro di tipo digitale. L'artefatto di tipo manipolativo è costituito da un foglio di carta (A4) che contiene le rette lungo le quali piegare e uno spillo che sarà utilizzato per forare in corrispondenza dei punti da simmetrizzare. Nel caso della simmetria assiale, un foglio di carta bianco ha una figura (che corrisponde alla mattonella di base del pavimento) e una linea, tracciate su di esso e il compito richiede allo studente di piegare lungo la linea e disegnare la figura simmetrica usando lo spillo per realizzare la corrispondenza, prima punto per punto e poi completare il disegno.
L'artefatto digitale, invece, è costituito da un ambiente di lavoro di GeoGebra con solo alcuni strumenti consentiti. Nello specifico, gli strumenti scelti sono quelli che consentono la costruzione di oggetti geometrici di base: punto, retta, segmento, vettore, retta perpendicolare e parallela e punto di

intersezione – quelli che corrispondono a tre trasformazioni geometriche (rispettivamente simmetria assiale, rotazione e traslazione) – e lo strumento Traccia. Un ruolo fondamentale è svolto anche dalla funzione di trascinamento, che, potenziata dallo strumento Traccia, permette all'utente di sperimentare la relazione di covariazione, oltre a quella di invarianza delle proprietà che caratterizzano ogni trasformazione geometrica.
Il foglio di carta piegato evoca l'idea di una retta come intersezione di due piani, lo spillo che fora un foglio, evoca l'azione di trasferire un punto del piano su un altro piano, quindi la corrispondenza puntuale, inoltre l'azione di forare evoca l'idea di punto del piano. In una corrispondenza riferita all'artefatto digitale, su GeoGebra il trascinamento potrebbe evocare la dipendenza tra variabili.

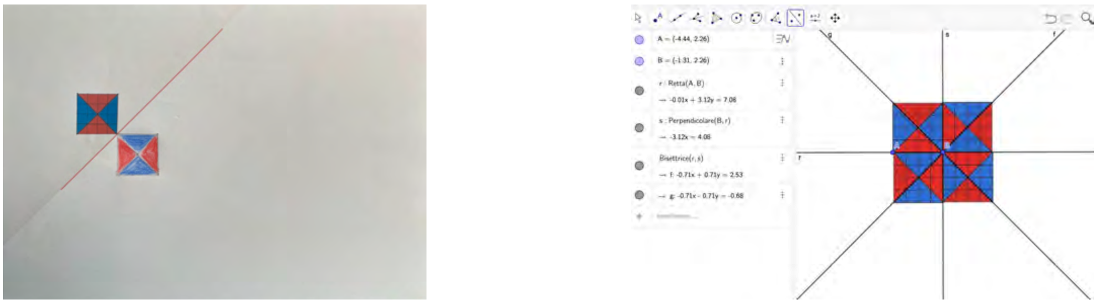


Figure 2. Artefatto manipolativo e artefatto digitale

LA SEQUENZA DIDATTICA

Si presenta il dettaglio della progettazione didattica strutturata in riferimento agli artefatti su descritti e al compito inserito di seguito, che prende ispirazione dalla vignetta Klein "Simmetria passo passo" tradotta e sviluppata nel progetto Klein Italia.
L'attività proposta ha come obiettivo la concettualizzazione della rotazione come composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti, utile alla costruzione di una figura ruotata di una figura data rispetto al centro, punto di intersezione dei due assi di simmetria.
Il problema consiste nell'individuare gli assi di simmetria necessari per riprodurre, mediante opportune piegature e l'utilizzo di uno spillo, l'immagine di una pavimentazione formata da mattonelle con disegni geometrici, disposte mediante opportune rotazioni. Inoltre, con l'aiuto di alcuni strumenti del software GeoGebra, è possibile riconoscere la tipologia di trasformazione geometrica utilizzata, individuare i suoi invarianti e le differenti modalità per ottenerla. In particolare è possibile scoprire che una rotazione si ottiene sia mediante l'assegnazione del centro e dell'angolo di rotazione, sia mediante due simmetrie assiali con assi incidenti, opportunamente inclinati.

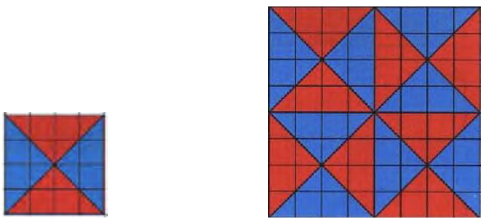


Figure 3. Piastrella e schema di montaggio delle piastrelle

Di seguito il testo del problema:
"Dobbiamo pavimentare una stanza quadrata (60X60 piastrelle) utilizzando la piastrella mostrata in Figure 3, montando le piastrelle nella modalità indicata in Figure 4."
In altri termini, il problema richiede di posizionare a partire dalla piastrella assegnata (Figure 3), la seconda piastrella ruotata di 90° in senso orario rispetto al vertice in basso a destra della prima, di posizionare la terza piastrella ruotata di 180° in senso orario rispetto al vertice in basso a destra della prima ed infine di posizionare la quarta piastrella ruotata di 270° in senso orario (oppure di 90° in senso

antiorario), rispetto al vertice in basso a destra della prima piastrella. Per avviare questo percorso, seguendo le ricerche effettuate sulla sinergia di artefatti per costruire le trasformazioni geometriche (Faggiano et al, 2018; Montone et al. 2019; Mariotti & Montone 2020), l'attività sviluppata è stata suddivisa nelle seguenti fasi:
FASE 1: Dato un foglio A4 su cui sono disegnati una figura e una retta rossa (Figure 5), si vuole far disegnare la figura simmetrica di quella data, rispetto alla retta rossa, facendo utilizzare la piegatura lungo la retta e uno spillo per individuare i punti simmetrici necessari, mediante foratura del foglio. Viene quindi fornita la seguente consegna: *"Piega il foglio lungo la retta rossa in modo che la figura data Q1 resti visibile sulla parte esterna del foglio. Disegna la figura simmetrica rispetto alla retta rossa con l'aiuto dello spillo: fai dei piccoli fori puntando lo spillo, poi apri il foglio e unisci i fori. Colora poi, seguendo lo schema del quadrato iniziale. Chiama S1 la figura ottenuta."*

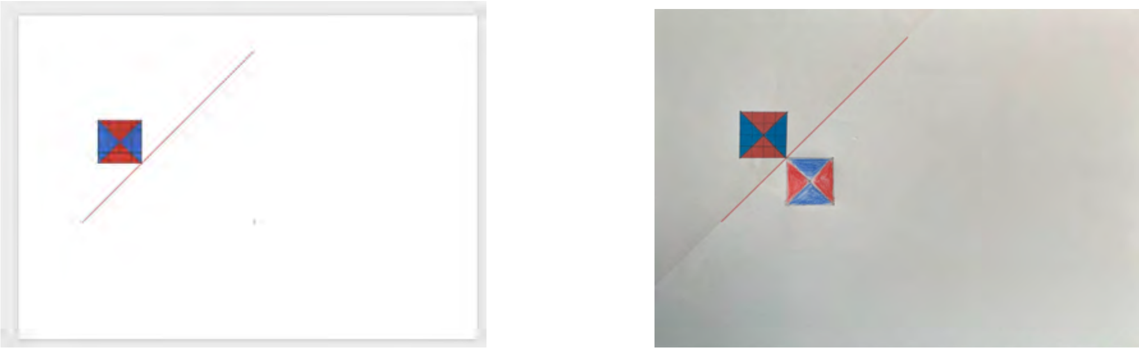
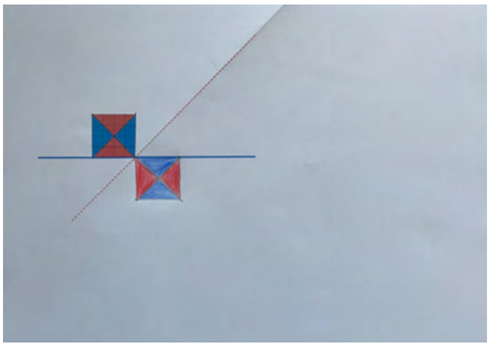


Figure 4. Fase 1 e rappresentazione della piastrella S2

Le immagini in Figure 4 mostrano il risultato raggiunto dopo aver eseguito la costruzione richiesta.
FASE 2: In questa fase l'insegnante chiede di disegnare la figura simmetrica rispetto ad un nuovo asse, incidente il primo (retta blu), della figura simmetrica prodotta rispetto al primo asse di simmetria, sempre utilizzando piegatura e spillo. Le due pieghe rappresentano due assi incidenti che formano un angolo di 45° e ciò permette di ottenere la figura ruotata di 90° in senso orario rispetto alla prima.
Viene quindi fornita la seguente consegna: *"Traccia una retta blu come in figura. Piega il foglio lungo la retta blu in modo che la figura S1 che hai appena creato resti visibile sulla parte esterna del foglio. Disegna la figura simmetrica rispetto alla retta blu con l'aiuto dello spillo: fai dei piccoli fori puntando lo spillo, poi apri il foglio e unisci i fori. Colora poi, seguendo lo schema del quadrato iniziale. Chiama Q2 la figura ottenuta."*
Si otterrà quindi la mattonella ruotata visibile nella seconda immagine in Figure 5.
Dopo questa costruzione, si chiede agli studenti di rispondere per iscritto al seguente questionario:

- *Osserva le figure Q1 e S1. Cosa hanno di uguale? Cosa hanno di diverso? Spiega perché.*
- *Osserva le figure Q1 e Q2. Cosa hanno di uguale? Cosa hanno di diverso? Spiega perché.*
- *Come sono posizionati i triangoli colorati che compongono le figure Q1 e Q2? Spiega perché.*
- *Come sono posizionati i due assi?*

L'obiettivo del questionario è quello di attivare una discussione per far emergere innanzitutto che la posizione della mattonella Q2 è ruotata di 90° rispetto a Q1 e tale rotazione è visibile attraverso la posizione dei triangoli. Inoltre far scoprire che tale rotazione è dovuta alla doppia piegatura e cioè alla composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti. In tal modo comincia ad emergere l'idea di poter ottenere una rotazione attraverso la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti con centro nel punto di intersezione e di ottenere l'angolo di rotazione voluto attraverso una opportuna inclinazione reciproca dei due assi. In particolare otteniamo una figura ruotata di 90° quando i due assi formano tra loro un angolo di 45°.



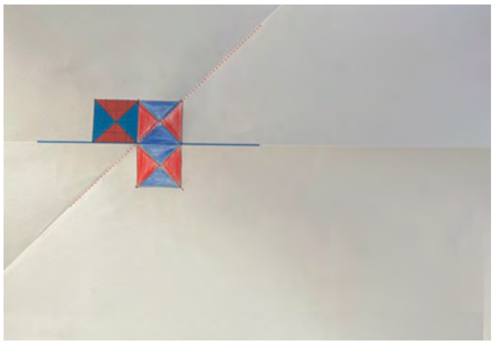


Figure 5. Fase 2 e immagine sul foglio dopo la fase 2

FASE 3: Per proseguire la costruzione, è necessario rendere la figura S2 trasparente per poter disegnare nella posizione di S2 la figura Q3. Naturalmente con l'artefatto manipolativo non è possibile rendere una figura trasparente, pertanto risulta necessario il passaggio all'artefatto di tipo digitale.
Viene quindi fornita agli studenti, nella fase 3, una scheda di lavoro da realizzare mediante GeoGebra, per completare il percorso di costruzione, ripercorrendo la costruzione delle figure delle fasi 1 e 2 e completare la pavimentazione richiesta. La sequenza delle azioni da eseguire in GeoGebra per ottenere Q2 è la seguente:

- *Sulla schermata di lavoro rimuovi "Mostra la griglia" e "Mostra gli assi".*
- *Importa nel File di GeoGebra l'immagine della piastrella dal seguente Link.*
- *Rinomina gli estremi del Segmento che rappresenta l'immagine con le lettere A e B.*
- *Rappresenta la retta passante per A e B e chiamala r.*
- *Costruisci la retta perpendicolare a r passante per B e chiamala s, utilizza lo strumento "Retta perpendicolare".*
- *Costruisci la retta bisettrice alle rette r e s, utilizza lo strumento "Bisettrice".*
- *Costruisci la figura simmetrica S2 della figura importata rispetto alla bisettrice che non interseca la figura, utilizzando lo strumento "Simmetria assiale".*
- *Costruisci la figura simmetrica Q2 della figura ottenuta nel passaggio precedente rispetto alla retta r, utilizzando lo strumento "Simmetria assiale".*
- *Nascondi S2.*

Seguendo questa sequenza, gli studenti avranno costruito, anche su GeoGebra, la piastrella Q2, ruotata di 90° in senso orario rispetto al vertice in basso a destra della prima piastrella. Attraverso la funzione trascinamento è possibile che gli studenti muovano le varie parti della figura simmetrica scoprendo quali sono gli invarianti, quali sono gli elementi dipendenti e quelli indipendenti nella trasformazione operata e mettano in rotazione la figura costruita rispetto a quella assegnata riconoscendo le proprietà caratterizzanti le trasformazioni in gioco. Infine, mediante l'ultimo comando *Nascondi S2*, potranno continuare la costruzione della pavimentazione realizzando Q3 nella stessa posizione di S2.
FASE 4: A questo punto il percorso procede in maniera parallela, con artefatto manipolativo e digitale, con l'obiettivo di individuare la posizione esatta delle altre piastrelle. La piastrella Q3 risulterà posizionata così come mostrato in Figure 6, ruotata di 180° in senso orario rispetto a Q1. Attraverso l'utilizzo sinergico dei due artefatti gli studenti individueranno la posizione degli assi di simmetria utili a realizzare la rotazione richiesta.

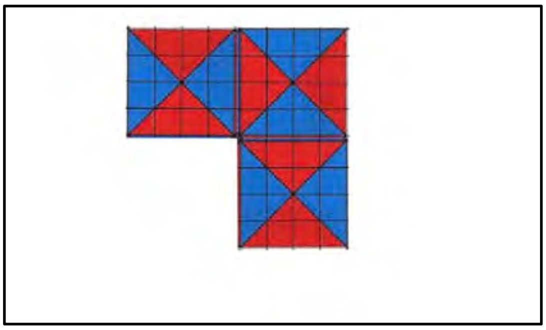


Figure 6. Fase 4

FASE 5: Per la costruzione dell'ultima piastrella Q4 è richiesto agli studenti di individuare le opportune piegature (con artefatto manipolativo) o le opportune rette (su artefatto digitale) per ottenerla, tramite composizione di simmetrie assiali.
Infatti alle attività fin qui realizzate si fa seguire la seguente consegna:
"Individua le piegature opportune (rette opportune) che ti permetteranno di costruire la quarta mattonella Q4, ruotata di 270° in senso orario (oppure di 90° in senso antiorario) rispetto a Q1 e al vertice in basso a destra della prima piastrella."
In questo modo gli studenti costruiscono le immagini componendo simmetrie assiali sia su GeoGebra sia sul foglio A4, ottengono immagini ruotate e consolidano l'idea che la composizione di simmetrie assiali con assi incidenti corrisponde ad una rotazione con centro nel punto di intersezione degli assi.
I due artefatti, usati in modo alternato, permettono sinergicamente di ottenere lo schema di montaggio della pavimentazione richiesta (vedi Figure 7) e di costruire il teorema fondamentale delle isometrie: "tutte le isometrie si ottengono componendo al più tre simmetrie assiali".

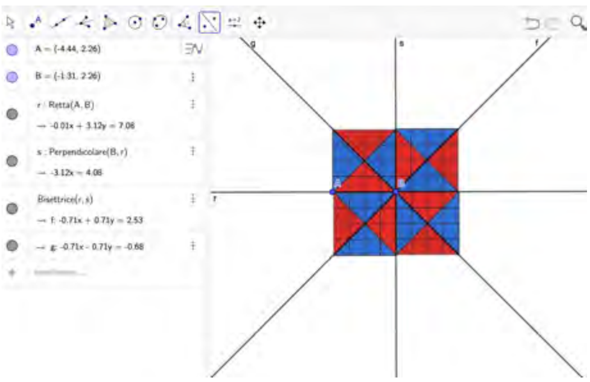


Figure 7. Fase 5

FASE 6: L'ultima fase del percorso richiede di ricoprire un pavimento 60x60 utilizzando lo schema di montaggio delle piastrelle ottenuto in Figure 3. La consegna è la seguente: *"Con le quattro mattonelle individua le piegature opportune per ricoprire un pavimento 60x60 seguendo la rappresentazione di base delle 4 mattonelle."*.
Tale ultima consegna permette agli studenti di andare oltre la rotazione e di scoprire che per realizzare la pavimentazione richiesta si può utilizzare anche la traslazione ottenuta come composizione di simmetrie assiali con assi paralleli.

CONCLUSIONI

Questo lavoro sperimentale è stato progettato per il biennio di scuola secondaria di secondo grado, ma è realizzabile, in continuità, anche nella scuola secondaria di primo grado.

La proposta di progettazione sperimentale mette in evidenza l'efficacia della scelta degli artefatti e la padronanza da parte dell'insegnante di una metodologia che permette di interpretare e valutare il lavoro della classe e dei singoli studenti all'opera con artefatti opportunamente scelti per risolvere il compito. Inoltre questa metodologia di lavoro permette di valutare i processi che avvengono durante tutto il percorso didattico.
Infine, tale percorso è realizzabile anche in modalità di didattica a distanza oltre che in presenza, quindi ben si adegua allo stato attuale dell'educazione.

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in mathematics classroom (pp. 65–84). Reston, VA: NCTM

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, (second edition), (pp. 746¬–783). New York: Routledge.

Faggiano, E., Montone, A., Mariotti, M.A. (2018). Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. https://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1449908.

Maffia, A. & Maracci, M. (2019). Multiple artifacts in the mathematics class: a tentative definition of semiotic interference. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Eds.). Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 57-64). Pretoria, South Africa: PME.

Mariotti, M.A., Montone, A., (2020). The Potential Synergy of Digital and Manipulatives Artefacts. Digital Experiences in Mathematics Education, vol. 6(2), p. 109-122, ISSN: 2199-3254, doi: 10.1007/s40751-020-00064-6

Maschietto, M. & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a Duo of Material and Digital Artifacts: the Pascaline and Cabri Elem e-books in Primary School Mathematics. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45(7), 959-971.

Montone, A., Fiorentino, M. G., & Mariotti, M. A. (2019). Learning translation in geometric transformations through digital and manipulative artefacts in synergy. In International Conference on Human-Computer Interaction (pp. 191-205). Springer, Cham.

Rabardel, P., (1995) Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, Paris

Vygotskij, L.S. (1980) Il processo cognitivo, Torino, Boringhieri.

LA DIDATTICA DEL SENZA ZAINO INCONTRA IL LESSON STUDY

Anna Maria Peirone[1*], Stefania Villella[1], Carola Manolino[2]
[1]I.C. Revello (CN)
[2]Dipartimento di Matematica ''G. Peano'', Università degli Studi di Torino
[*]Referente per il modello Senza Zaino - Scuole Primarie
[*]Referente per il progetto "L'ora di lezione Non Basta"
e-mail: maestrasenzazaino@gmail.com

Abstract
La scuola Senza Zaino è un "modello" di scuola che, nell'incontro con il Lesson Study, potrebbe godere della possibilità di avere un "modello" di formazione permanente e di scambio di pratiche tra docenti. Questa esigenza formativa nasce nei docenti dell'Istituto Comprensivo di Revello al termine della formazione fatta per entrare nella Rete Nazionale SZ. Obiettivo primo del connubio tra Lesson Study e Senza Zaino è l'attivazione di una formazione in servizio dei docenti, capace di attivare la collaborazione costante e costruttiva tra colleghi, anche verticalmente tra i diversi gradi scolastici. Nasce da un'esigenza espressa dai docenti stessi di tenere "le porte dell'aula aperte" dove, avere colleghi che osservano la propria attività didattica diventi una pratica rassicurante. Creare contenuti ed esperienze per gli alunni all'interno del Lesson Study è formare le professionalità docente. La formazione permanente e continua, esaltata da questa unione SZ+LS, è una fusione dello sguardo interno ed esterno all'azione educativa.

Parole chiave
Senza Zaino, Lesson Study, Lesson Plan, Rotazione, Avanzamento

L'INSIEME È MAGGIORE DELLA SOMMA DELLE PARTI…

Partendo da questa massima aristotelica, i puntini di sospensione aggiunti in fondo ci fanno pensare ad una possibile conclusione del pensiero che abbiamo "preso in prestito", cercando di dare un nome, un significato intriso di azioni, all'insieme caratterizzante la Scuola.
Proviamo ad analizzare: l'insieme è un contenitore in cui possiamo inserire "oggetti", ma come può diventare quindi maggiore della somma delle sue parti? Il valore che l'insieme aggiunge alla somma delle sue singole parti sta nel non lasciale singole, cioè sta nel creare una relazione tra loro. L'insieme è quindi, in sintesi, un costruttore che accoglie e modula (compensando eccesso\difetto) le sue singole componenti. Questo è il fine ultimo del modello Senza Zaino. Sperimentando in classe con i bambini ci si rende conto di quanto sia arricchente cooperare e confrontarsi. Da studenti molti di noi, adulti oggi, non hanno sperimentato questa pratica. Il peer to peer era quasi "clandestino".
Incontrando per la prima volta il consiglio che Senza Zaino dà ai propri docenti di "scambio di buone pratiche", ci si rende tuttavia conto di quanto possa essere difficile da realizzare in pratica. Scambiarsi buone pratiche introduce competenze relazionali, team building solution e una serie di competenze organizzative e comunicative che un insegnate forma, utilizza e perfeziona negli anni nella relazione con i propri alunni, ma non altrettanto con i propri colleghi.

Il Lesson Study, in quanto metodologia di formazione docenti, è una esperienza codificata e protetta di scambio di buone pratiche. Un contenitore ordinato che, nell'esperienza qui presentata, è diventato il mezzo per sperimentare da "studenti" il confronto, la condivisione e l'osservazione formativa.
In ogni passaggio dell'esperienza Lesson Study descritta in questo contributo, creare contenuti ed esperienze per gli alunni è stato formare le nostre professionalità. La formazione permanente e continua arriva dalla fusione dello sguardo interno ed esterno all'azione educativa.

SENZA ZAINO E LESSON STUDY: L'INCONTRO

Premessa

Nell'anno scolastico 2001-2002 il modello di Scuola Senza Zaino, per una scuola comunità muove i primi passi, su una idea del dirigente Marco Orsi, con una sperimentazione che coinvolge quattro istituti toscani (Lucca 7, Fauglia, Massarosa 1 e Capannnori 3, a cui l'anno dopo si aggiungono Lucca 5 e Montespertoli). Gli insegnanti e i dirigenti scolastici, con studi approfonditi e esperienze di ricerca azione, confrontano le "buone pratiche" realizzate nelle proprie classi. Nasce così la piccola Rete delle scuole Senza Zaino (SZ), a norma del DPR n. 275 del 1999, e viene data vita al Gruppo Fondatore. Nel 2009 viene poi promossa una ricerca sugli esiti degli apprendimenti nelle scuole SZ della Toscana, condotta dall'Università di Firenze, i cui risultati confortanti sono contenuti nel volume edito da Carocci *Apprendimento e competenza sociale nella scuola. Un approccio psicologico alla valutazione e alla sperimentazione* (Menesini, Pinto & Nocentini, 2014). La ricerca spinge il Gruppo Fondatore a fare due nuove grandi azioni: nel 2012 viene costituita l'Associazione Senza Zaino e nel 2013 viene pubblicato il testo *Linee-Guida per le scuole. Un Approccio Globale al Curricolo* edito da Tecnodid, dove si individuano i 5 passi per la realizzazione del modello di scuola:

- organizzare gli spazi, dotarsi di strumenti e tecnologie didattiche;
- organizzare la classe, differenziare l'insegnamento;
- progettare, valutare e organizzare le attività didattiche,
- sviluppare i saperi e la cultura;
- gestire la scuola/comunità nell'istituto/rete di comunità, coinvolgere i genitori, aprirsi al territorio.

Questo nuovo modello di scuola si sta oggi consolidando (sono pubblicati anche i primi libri: Orsi, 2015; 2016[17]). La Rete Nazionale e l'Associazione costituiscono un movimento dal basso che si amplia e si espande costantemente. Oggi la Rete è composta da 684 scuole, riunite in 308 istituti, distribuiti in tutte le regioni; 22 di queste scuole sono scuole Polo regionali che coordinano reti territoriali.

Per la sua realizzazione servono da parte di ogni scuola impegno, formazione, coraggio, alleanze. Serve avere una visione di scuola aperta all'innovazione, alla ricerca, al dialogo con i territori. La Scuola Senza Zaino non è un progetto fra i tanti ma un *Modello di Scuola* che nasce da una visione culturale e valoriale che abbiamo definito "Approccio Globale al Curricolo". L'Approccio Globale è una caratteristica della formazione dello studente che si basa sull'idea che il soggetto possa e debba diventare protagonista responsabile del proprio apprendimento.

> [Il SZ è] un modello dinamico frutto di un lavoro di ricerca costante che si confronta con i tempi ed i cambiamenti della società anche quelli attuali generati da una pandemia che sta coinvolgendo la scuola di ogni ordine e grado (Pompaloni, 2022).

Il contesto della sperimentazione

L'Istituto Comprensivo di Revello è iscritto alla Rete Nazionale delle Scuole SZ dal 2016 e in questi anni ha formato tutto il personale di ruolo e parte del personale precario delle sue scuole primarie e della scuola secondaria di primo grado. Questo percorso di formazione ha fatto nascere nei docenti un grande interesse rispetto alle tematiche di team building e di scambio di buone pratiche.

Dall'anno scolastico 2021-2022 tutte le classi delle primarie e della secondaria di primo grado sono SZ. L'incontro con il Lesson Study (Bartolini Bussi & Ramploud, 2018) nell'anno scolastico 2020-2021 apre una nuova prospettiva: mette le "gambe" a ciò che finora era chiamato "scambio di buone pratiche".

La formazione docenti "Il Lesson Study in Matematica", proposta dalla dottoressa Carola Manolino del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino, e promosso dall'Ufficio Scolastico

[17] https://www.senzazaino.it/pubblicazioni/senza-zaino

Regionale per il Piemonte, ha permesso a 4 docenti di Revello di sperimentare qualcosa di più significativo ancora: la formazione permanente in peer-to-peer tra docenti.

Figura 1. A chi diamo da mangiare? (Orsi, M., 2020[18]).

Osservando l'immagine con cui Marco Orsi, nel primo dei tre incontri del seminario sulla *leadership educativa leggera* (dicembre 2020-febbraio2022), apriva la sua riflessione sulla mission della leadership educativa nella scuola italiana, possiamo notare due "macro-atteggiamenti": la competizione, cioè il lupo; e la collaborazione, cioè il levriero. Il *lupo* rende ogni collega un avversario e trasforma l'ambiente scuola in micro-mondi in continuo conflitto. Un tale ambiente è poco sostenibile e incredibilmente "lento", pronto a non cambiare mai il suo canone. Il *levriero* guarda a ogni collega, sia egli neoassunto o in servizio da tempo, come a una vera risorsa e rende merito alla grandissima professionalità dei docenti, rendendo l'ambiente scuola una comunità in evoluzione. Allora "dar da mangiare al levriero" permette di realizzare un profondo e doveroso focus sulla didattica: programmare contenuti, azioni, tempi, definire obiettivi e osservare percorsi. Tutte azioni che nessun "super prof" potrebbe fare sempre da solo.

È in questo contesto che la stesura di un *lesson plan* condiviso stimola riflessioni critiche da parte del gruppo e aumenta la possibilità di avere un rimando dall'osservazione di un collega. In qualche modo permette di scoprire, attraverso check-list, i punti di forza e di debolezza di un'azione educativa e rende (finalmente) concreta, visibile e spendibile la differenziazione e la personalizzazione dei percorsi di apprendimento. La co-progettazione e l'analisi collaborativa proposta dal Lesson Study crea la possibilità di arrivare a offrire ai nostri allievi un insegnamento significativamente equo, spostando concretamente la lancetta da uguaglianza verso equità (figura 2).

[18] Corso di formazione docenti "La leadership educativa leggera", di Marco Orsi. Immagine tratta dalle slide del primo incontro, tenutosi il 18\12\2020.

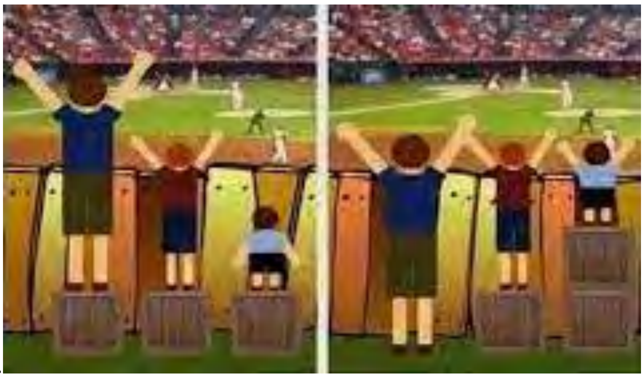


Figura 2. Uguaglianza ed equità (Facebook: Nicolò Scarano blog 21\01\2018)

IL SENZA ZAINO: L'INTERAZIONE CON GLI ALUNNI

Nella scuola SZ la differenza che si nota a prima vista entrando in classe è la strutturazione di un ambiente di apprendimento diverso dalla classica aula. I bambini\ragazzi non sono seduti al loro banco sistemato in file parallele di fronte alla cattedra. La cattedra anzi non c'è proprio. Gli studenti sono seduti intorno a tavoli quadrati e sono presenti uno spazio agorà con una biblioteca, due o più spazi dedicati alle singole discipline, una pannellistica e un diario di classe concepito per costruire con gli studenti autonomia e responsabilità nella fruizione dello spazio d'apprendimento.

Gli obiettivi che la metodologia senza zaino persegue nella propria didattica sono:
- attuare una didattica differenziata, inclusiva e responsabilizzante;
- proporre una scelta varia di attività su cui chiediamo al bambino step progressivi e variabili di attenzione e concentrazione;
- facilitare la crescita e l'auto-consapevolezza dei tempi di attenzione di ciascuno (che sono vari e sicuramente sappiamo essere anche piuttosto contenuti).

In quest'ottica la logistica delle aule SZ permette attività di avanzamento con spiegazione del docente al tavolo (quindi piccolo gruppo) che si dimostrano molto efficaci per catturare l'attenzione del singolo, ridurre la richiesta di tempo di attenzione a un messaggio verbale e personalizzare\individualizzare l'insegnamento attraverso la differenziazione in un'ottica completamente inclusiva. In concreto la proposta metodologica è un'*attività a rotazione* su quattro tavoli, contemporanea, e della durata di 20\30 minuti ciascuna. La rotazione viene dettagliata in un *piano della lezione* (in terminologia Lesson Study chiamato *lesson plan*) corredato di tempi e ordine di rotazione, il tutto esplicitato ai bambini nel tempo dell'*agorà* di inizio settimana\mattinata. Per ogni singola attività viene fornita ai bambini una I.P.U. (Istruzione Per l'Uso) che permetta loro di utilizzare in autonomia lo strumento consegnato, predisposto e tarato dal docente rispetto agli obiettivi (sempre espliciti). A seconda del tipo di attività che si vuole svolgere in classe si possono predisporre tre tipi di azioni: rotazione con avanzamento, dove con un tavolo alla volta si affronta un argomento nuovo; rotazione "contemporanea", dove i diversi tavoli affrontano attività di ripasso o potenziamento; ed infine rotazione a scelta multipla. Questi tre tipi di azioni didattiche sono di seguito descritte nel dettaglio.

Azione di tipo 1: Rotazione con avanzamento.

Si ruota su 4 tavoli con una tempistica standard di 20 minuti per ciascun turno. Nelle classi più basse, dalla 1° alla 3° – ma anche oltre se necessario –, si può allungare fino a 30 minuti.
I quattro tavoli svolgono a rotazione:

al tavolo 1: l'AVANZAMENTO, ovvero la trattazione di un argomento nuovo;
al tavolo 2: il CONSOLIDAMENTO, ovvero si iniziano a fare esercizio sull'argomento svolto nella settimana precedente;
al tavolo 3: il RIPASSO, ovvero una ripresa dei contenuti trattati e la trattazione di un macro-argomento affine su cui fare esercizio;

al tavolo 4: l'ALLENAMENTO PROPEDEUTICO, ovvero la trattazione di un argomento propedeutico all'avanzamento successivo.

In questo tipo di rotazione il docente è presente al tavolo dell'avanzamento per affrontare con i bambini il nuovo argomento proponendo una piccola spiegazione ed esercizi interattivi guidati. Gli altri tre tavoli lavorano in autonomia utilizzando strumenti noti e corredati di I.P.U.

Azione di tipo 2: Rotazione in contemporanea.

Si ruota su 4 tavoli con una tempistica standard di 20 minuti per ciascun turno. Nelle classi più basse, dalla 1° alla 3° – ma anche oltre se necessario –, si può allungare fino a 30 minuti.

I quattro tavoli svolgono a rotazione proposte di diverse attività sul potenziamento, ripasso e recupero della medesima competenza. In questo tipo di azione i quattro tavoli lavorano in autonomia con strumenti noti e corredati di I.P.U. e autovalutazione sotto forma di check-list che comprenda domande soggettive e oggettive inerenti all'obiettivo esplicitato nel Lesson Plan.

Nell'esperienza di Lesson Study dell'anno 2020\2021 la prima lezione implementata è stata di questo tipo.

Azione di tipo 3: Rotazione a scelta multipla.

La rotazione, in questo caso, non si muove "a tavoli", ma questa è una scelta legata alle intenzionalità didattiche del docente esplicitate nel piano della lezione.

I bambini hanno a disposizione un numero predeterminato di scatole che contengono proposte diverse per tipo, contenuto, tipologia di autovalutazione\auto-correzione (si può "costruire" una diversissima gamma di versioni), e a partire da questo materiale lavorano in modo autonomo. Il docente resta a disposizione degli alunni per chiarimenti e si "mimetizza" con l'ambiente d'apprendimento esplicitando i tempi.

In questa rotazione può restare la tempistica standard di 20 minuti per ogni cambio, ma si può anche ridurre a 10 minuti (tarando le richieste\quesiti) per garantire un lavoro più dinamico e, nelle classi dei piccoli, anche la concentrazione.

BREVE DESCRIZIONE DELL'ESPERIENZA DIDATTICA

Il primo ciclo LS

Nella prima delle due lezioni implementate in classe l'argomento trattato è denominato *Introduzione ai numeri relativi attraverso più attività pratiche (compito autentico) con il termometro.*

La classe 5°A è composta da 18 alunni, 10 maschi e 8 femmine. È presente un alunno con certificazione BES di serio impatto sull'autonomia scolastica e la costruzione degli apprendimenti. Sono presenti 4 alunni (2 maschi e 2 femmine) con almeno un genitore non italofono, ma nessun alunno non italofono. Si tratta di un gruppo classe eterogeneo, in generale curioso ed abituato alla collaborazione. Negli anni ci sono stati trasferimenti di compagni, soprattutto in entrata, ma essendo una classe aperta e collaborativa, ha presto integrato proficuamente i compagni senza destabilizzare le dinamiche di classe. Sono presenti alunni che dimostrano difficoltà di autocontrollo nelle situazioni non strutturate, ma non sono presenti problemi di comportamento di impatto. Gli alunni di questa classe sono molto abituati al confronto e alla collaborazione. Gli obiettivi didattici vengono normalmente perseguiti attraverso la costruzione di esperienze significative e relative a situazioni reali.

L'attività è stata pensata e progettata per scoprire, dal confronto tra esperienze, l'esistenza dei numeri relativi e il loro utilizzo pratico e sperimentare un *cooperative* costruttivo finalizzato ad auto-valutare l'efficacia delle azioni di scoperta diretta attraverso uno strumento e le sue istruzioni d'uso.

Il Lesson Plan:

Introduzione: consegna degli strumenti e delle I.P.U ai tavoli (10 minuti) e spiegazione della tempistica e del dettaglio delle due distinte parti del lavoro (10 minuti). In plenaria.

1° parte a tavoli tempo complessivo 30 minuti.

GRUPPO 1 = Il termoscanner: a cosa serve, come si usa e cosa rileva.

GRUPPO 2 = Il termometro digitale: a cosa serve, come si usa e cosa rileva.
GRUPPO 3 =Il termometro per ambienti digitale: a cosa serve, come si usa e cosa rileva.
GRUPPO 4 =Il termometro per ambienti analogico: a cosa serve, come si usa e cosa rileva.

2° parte a tavoli tempo complessivo 15 minuti.
Ad ogni tavolo viene consegnato un questionario da compilare, prima di far partire il tempo per la compilazione si chiede ai componenti di ogni tavolo di stabilire i compiti di ogni singolo componente (modello cooperative: il lettore, lo scrittore, il coordinatore, il "cerca-info"), Tempi: 5 minuti cooperative set + 10 minuti questionario.
I tavoli consegnano il proprio questionario, con document camera si proiettano alla LIM in griglia e si analizzano i dati emersi dalle risposte (frontale conta mediazione del docente).
Ai bambini viene chiesto di appuntarsi domande o dubbi, tempo 10 minuti.
Si apre quindi la discussione, tempo 20 minuti, volta a trovare il titolo per il lavoro di AVANZAMENTO sui numeri relativi della settimana successiva.
I docenti presenti in aula o a distanza con il collega "implementatore" hanno a disposizione due griglie di osservazione: una per il docente e una per gli alunni.

Dalla restituzione fatta dopo la lezione e dall'analisi dei dati emersi dalle griglie di osservazione il gruppo di docenti crea una I.P.U., che illustra la lezione su un modello condiviso tra docenti dell'Istituto e che abbiamo chiamato "I.P.U. cognitiva".
Di queste I.P.U. è stata creata una *reposity* sulla piattaforma Moodle di Istituto, in modo che siano fruibili dai colleghi nell'ottica di uno scambio significativo di buone pratiche.

Il secondo ciclo LS
Nella seconda delle due lezioni implementate in classe l'argomento trattato è l'utilizzo delle percentuali nella realtà.
La classe è la stessa, così come l'insegnante "implementatore". La lezione implementata è stata predisposta per essere svolta in presenza sempre a rotazione, ma la classe è finita in DAD quindi il gruppo docente ha adattato i contenuti perché fosse possibile fruirne a distanza.
La piattaforma utilizzata è il Moodle d'Istituto e la modalità è sincrona e asincrona con l'utilizzo di una sola stanza.
Il lesson plan tiene conto del tempo di fruizione dello spazio video (45 minuti) per la parte sincrona e per la parte asincrona viene stabilito un tempo di 60 minuti in cui gli alunni possano comunicare con i docenti attraverso una chat interna alla classe virtuale prima di consegnare in piattaforma il proprio manufatto sotto forma di pdf, documento word o ppt.
Nei primi 45 minuti viene presentata ai ragazzi una scelta tra quattro ppt che sono disponibili nella loro classe in piattaforma che contengono strumenti ed indicazioni per quattro diversi compiti di realtà. Poi simuliamo insieme nella lavagna condivisa una delle attività proposte.
Gli alunni possono poi sperimentare, scegliendo tra le quattro proposte, un acquisto scontato, oppure un acquisto con finanziamento, oppure ancora una previsione di spesa a cui applicare l'IVA.
Il lavoro asincrono è di tipo individuale e va consegnato in piattaforma, tempo 60 minuti.

Nell'incontro successivo alla lezione implementata i docenti coinvolti durante la restituzione, dandosi una check-list d'analisi, hanno individuato la collaborazione tra docenti nella programmazione come primo e fondamentale insegnamento pratico e ormai irrinunciabile dell'esperienza di incontro tra Lesson Study e didattica SZ. Inoltre, tra i punti di forza dell'attività implementata, è stato individuato l'utilizzo di problemi di situazioni di vita quotidiana e reale. Avere un'esperienza pregressa di attività di cooperative e compiti autentici ha infatti permesso ai ragazzi di mettere in gioco le proprie capacità di utilizzo di differenti strategie per risolvere un unico problema. La corrispondenza tra progettazione e tempi resta invece un punto di debolezza. Per quanto riguarda poi l'implementazione di una lezione in DAD, il gruppo ha identificato come complesso il coinvolgimento di tutti gli alunni collegati, sia per limiti tecnici che per aspetti relazionali. Tecnologie e relazioni, ma anche le scelte didattiche sull'uso del lessico, risultano infatti più difficili da gestire se la classe si trova dietro uno schermo.

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia la Rete Nazionale delle Scuole Senza Zaino, il suo presidente Dott. Marco Orsi, tutte le formatrici dell'Associazione Sera Zaino ed in particolare Marzia Nieri, instancabile ricercatrice, docente e tutor.

BIBLIOGRAFIA

A.A.V.V. (2013). *Linee-Guida per le scuole. Un Approccio Globale al Curricolo.* Tecnodid.
Bartolini Bussi, M. G., & Ramploud, A. (2018). *Il lesson study per la formazione degli insegnanti*. Carocci.
Menesini, E., Pinto, G. & Nocentini, A. (Eds.) (2014). *Apprendimento e competenza sociale nella scuola. Un approccio psicologico alla valutazione e alla sperimentazione.* Carocci.
Orsi, M. (2015). *L'ora di lezione non basta. La visione e le pratiche dell'ideatore delle Scuole Senza Zaino.* Maggioli Editore.
Orsi, M. (2016). *A scuola senza zaino. Il metodo del curricolo globale per una didattica innovativa*. Erikson.
Pompaloni, D. (2022). *I nostri primi 20 anni*. Senza Zaino. https://www.senzazaino.it/blog/i-nostri-primi-20-anni-932.html

COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO

Rosanna Pellillo
IC Piazza Forlanini (Roma)
rosanna.pellillo@posta.istruzione.it
pellillo.rosanna@gmail.com

Abstract
In questo articolo viene presentata un'attività svolta in una classe seconda della secondaria di primo grado, riguardante particolari costruzioni con riga e compasso, necessarie per costruire geometricamente sia il numero aureo che il rettangolo aureo. L'argomento è stato affrontato prima dal punto di vista storico e poi, successivamente, in modo laboratoriale con l'ausilio del software GeoGebra, esaminando l'importanza didattica e le potenzialità di riflessione che offriva ogni costruzione affrontata. Al termine dell'attività si è poi discusso dei tre problemi classici della matematica che sono particolari problemi non risolubili con riga e compasso. Infine vengono forniti degli spunti per affrontare tale argomento sia in ottica orizzontale (interdisciplinare), sia in ottica verticale (dalla prima alla terza classe della secondaria primo grado con eventuali approfondimenti per la secondaria di secondo grado). Scopo dell'attività è quello di mettere al centro del proprio apprendimento lo studente attraverso un approccio storico-laboratoriale che ritengo vincente, in quanto connette il lato storico di ogni argomento matematico con il corrispondente lato pratico.

Parole-chiave
costruzioni con riga e compasso, numero aureo, sezione aurea, i tre problemi classici, GeoGebra

INTRODUZIONE STORICA DEGLI ARGOMENTI

Costruzioni con riga e compasso

Le costruzioni con riga e compasso sono al centro della matematica greca e si basano sui 5 postulati di Euclide (*Gli Elementi*, 300 a.C.):
1) Per due punti distinti qualsiasi sia possibile tracciare una ed una sola retta
2) Si possa prolungare un segmento indefinitamente
3) Dato un punto e una lunghezza, sia possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza
4) Tutti gli angoli retti siano uguali
5) Data una retta ed un punto esterno ad essa, sia possibile tracciare per quel punto una ed una sola parallela alla retta data

Eseguire una costruzione con riga e compasso equivale, quindi, a dimostrare l'esistenza di un oggetto, utilizzando solo una riga non graduata (non si può far riferimento alle tacche della riga per prendere misure) e un compasso collassabile (si richiude su se stesso appena viene staccata la punta dal foglio).
L'esistenza di questi strumenti è garantita dai primi 3 postulati, che dettano anche le operazioni grafiche di base permesse:
1) Dati due punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento)
2) Dato un punto O e una lunghezza AB, tracciare una circonferenza di centro O e raggio AB
3) Determinare il punto di intersezione di due rette
4) Determinare i punti d'intersezione di una circonferenza con una retta
5) Determinare i punti d'intersezione di due circonferenze

Numero aureo e rettangolo aureo

Il numero aureo appare definito per la prima volta nel VI secolo a. C da Ippaso di Metaponto appartenente alla scuola pitagorica. Successivamente Euclide ne dà una definizione come divisione di un segmento in "ultima e media ragione". Luca Pacioli, invece, nella sua opera *De Divina Proporzione* del 1509 definisce il rapporto aureo come “divina proporzione”, perché sono necessari solo tre elementi e coesistono quindi insieme l’unità e la trinità. Infine Keplero nel 1611 scopre la relazione tra la sezione aurea e la famosa successione di Fibonacci, che verrà poi dimostrata circa un secolo dopo ad opera di Robert Simson e Jacques Binet.

In matematica il numero aureo o numero di Fidia indica il numero irrazionale 1,6180339887…, è rappresentato dalla lettera greca φ (phi) e corrisponde a una delle due soluzioni dell’equazione di secondo grado $x^2 - x - 1 = 0$. Geometricamente si parla di sezione aurea di un segmento quando si riesce a suddividerlo in modo che sia il rapporto tra l’intero e il tratto più lungo sia il rapporto tra il tratto più lungo e quello più corto, risulti proprio uguale a φ. Varrà quindi la seguente uguaglianza: AC/AB=AB/BC, che equivale alla proporzione AC: AB=AB: BC (Figura 1).

Figura 1: Sezione aurea del segmento AC

Il rettangolo aureo invece è un rettangolo in cui la parte aurea del lato maggiore è uguale al lato minore del rettangolo, in particolare valgono le relazioni GF=AG, BH=BC e così via (Figura 2)

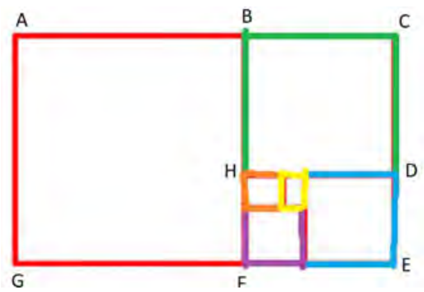
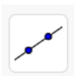


Figura 2: Rettangolo aureo

DALLA TEORIA ALLA PRATICA, UTILIZZANDO GEOGEBRA

In questo paragrafo vengono illustrate le istruzioni per realizzare le costruzioni utilizzate durante l’attività proposta.

Punto Medio

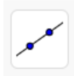
Disegniamo un segmento AB con lo strumento 

Disegniamo un punto C che dista più della metà del segmento AB con lo strumento 

Tracciamo quindi la circonferenza di centro A e raggio AC con lo strumento 

Tracciamo quindi la circonferenza di centro B e raggio AC con lo strumento 

Determiniamo i due punti D, E di intersezione tra le circonferenze con lo strumento 

Tracciamo la retta passante per questi due punti D, E con lo strumento 

Determiniamo il punto di intersezione della retta col segmento AB con lo strumento 

Questo sarà il nostro punto medio M (da rinominare)

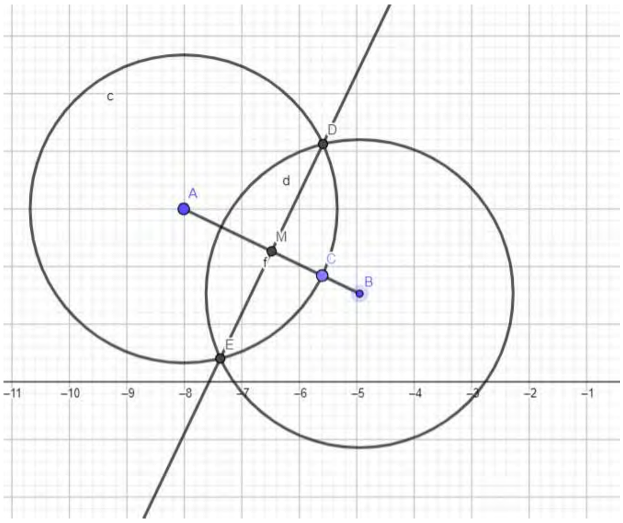
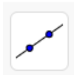


Figura 3: Costruzione del punto medio

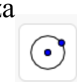
Perpendicolare

Disegniamo una retta r, dati due punti A e B con lo strumento 

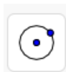
Disegniamo un punto C esterno alla retta con lo strumento 

Tracciamo quindi la circonferenza di centro C e raggio AC con lo strumento 

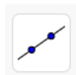
Determiniamo i due punti D, E di intersezione tra la retta e la circonferenza (uno coinciderà con A) con lo strumento 



Tracciamo quindi la circonferenza di centro E e raggio EC con lo strumento

Tracciamo quindi la circonferenza di centro A e raggio AC con lo strumento 

Determiniamo i due punti di intersezione tra le due circonferenza G, F con lo strumento 

Tracciamo la retta passante per questi due punti G, F con lo strumento 

Questa sarà la nostra perpendicolare

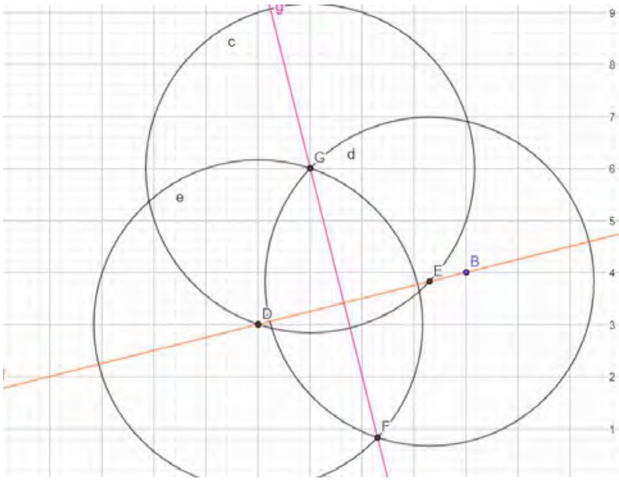
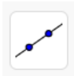


Figura 4: Costruzione della perpendicolare

Sezione Aurea

Disegniamo un segmento AB con lo strumento 

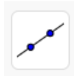
Tracciamo la perpendicolare nel punto B con lo strumento 

Disegniamo il punto medio di AB con lo strumento 

Tracciamo la circonferenza di centro B e raggio BC con lo strumento 

Disegniamo il punto di intersezione E tra la circonferenza e la perpendicolare con lo strumento 

Tracciamo quindi la circonferenza di centro E e raggio BE con lo strumento 

Disegniamo la retta passante per il punto A e per il punto E con lo strumento 

Determiniamo i due punti di intersezione F e G tra la retta e la circonferenza con lo strumento 

Tracciamo quindi la circonferenza di centro A e raggio AF con lo strumento 

Determiniamo il punto di intersezione H tra la circonferenza e il segmento AB con lo strumento 

Otteniamo così che il segmento AH è sezione aurea di AB

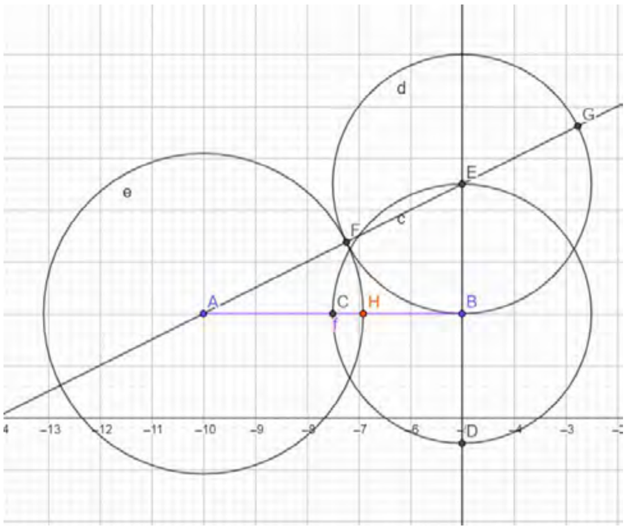
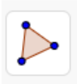


Figura 5: Costruzione della sezione aurea

Rettangolo Aureo

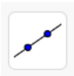
Costruiamo il segmento AB con lo strumento 

Costruiamo il quadrato di lato AB con lo strumento 

Individuiamo il punto medio E del lato AB con lo strumento 

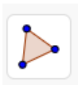
Tracciamo la circonferenza di centro E e raggio EC con lo strumento 

Individuiamo il punto di intersezione G della circonferenza con il prolungamento del lato AB con lo strumento 

Tracciamo il segmento AG, con lo strumento  verificando che AB è la sua sezione aurea

Il rettangolo, quindi, di lati AB e AG sarà il nostro rettangolo aureo

Si può visualizzare tale rettangolo tracciando la tangente alla circonferenza nel punto G con lo strumento  e intersecandola con la retta passante per DC nel punto H

Si disegna il rettangolo AGHD con lo strumento 

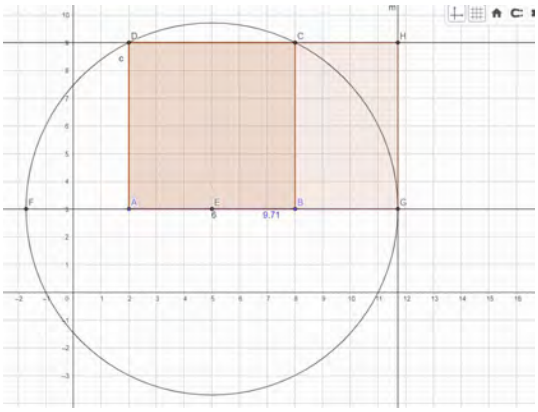


Figura 6: Costruzione del rettangolo aureo

I TRE PROBLEMI CLASSICI

Nonostante numerose costruzioni siano risolubili con riga e compasso, i Greci scoprirono che altre non lo erano. In particolare concentrarono la loro attenzione su 3 problemi particolari: la duplicazione del cubo, la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo, lasciando però aperta la questione sulla loro risolubilità con riga e compasso. Fu così che questi problemi divennero i problemi più studiati nella storia della Matematica per secoli, superando addirittura l'ambito matematico e entrando nel parlare comune. Quando, infatti, si affronta qualcosa di difficilissimo si dice che si cerca di "quadrare il cerchio". Dopo parecchio tempo in cui i matematici cercarono invano di dimostrare la risolubilità con riga e compasso dei suddetti problemi, cambiarono prospettiva e si chiesero *Come si potesse dimostrare che tali problemi non fossero risolubili con riga e compasso*. Per dare risposta a quest'ultima domanda si deve aspettare la nascita dell'algebra moderna e i risultati di Galois, Abel, Ruffini, Gauss e in particolare di Wantzel con il suo *Teorema: un numero reale costruibile con riga e compasso è algebrico e il suo polinomio minimo ha grado del tipo 2^n.*

Duplicazione del cubo

Questo problema consiste nel costruire un cubo che abbia volume doppio rispetto ad un altro cubo dato. Ciò equivale a costruire con riga e compasso la $\sqrt[3]{2}$, ma ciò non è possibile perché il polinomio minimo che ha come soluzione $\sqrt[3]{2}$, è $x^3 - 2$. Tale polinomio non rispetta il teorema enunciato e questo comporta che $\sqrt[3]{2}$ non è costruibile con riga e compasso e di conseguenza il problema della duplicazione del cubo non è risolubile.

Quadratura del cerchio

Questo problema consiste nel costruire un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio dato e ciò equivale a costruire con riga e compasso π. Lindemann nel 1882 dimostrò che π è trascendente, quindi non algebrico e ciò non rispetta il teorema enunciato. Questo comporta che π non è costruibile con riga e compasso e di conseguenza il problema della quadratura del cerchio non è risolubile.

Trisezione dell'angolo

Questo problema consiste nel dividere un qualsiasi angolo dato in tre parti uguali: in alcuni casi ciò è effettivamente possibile con riga e compasso, mentre in altri non lo è. Considerando ad esempio l'angolo $\pi/3$ e utilizzando la formula di trisezione, il problema si risolve se si può costruire con riga e compasso il $\cos(\pi/9)$. Effettuando particolari calcoli, il polinomio minimo avente come soluzione $\cos(\pi/9)$, è $4x^3 - 3x - ½$ che non rispetta il teorema enunciato. Questo comporta che $\cos(\pi/9)$ non è costruibile con riga e compasso e di conseguenza il problema della trisezione dell'angolo non è risolubile.

SPUNTI DI RIFLESSIONE

Ogni costruzione descritta nei precedenti paragrafi offre la possibilità di ragionare sull'utilizzo specifico degli strumenti utilizzati in GeoGebra e di eseguire delle dimostrazioni algebriche di quanto prodotto. In particolare si può far notare agli alunni che l'equazione della retta perpendicolare costruita con riga e compasso rispetta la regola di perpendicolarità tra rette. Inoltre nel costruire la sezione aurea si può osservare che il rapporto tra l'intero segmento e la sua parte maggiore tende al numero aureo all'aumentare della precisione decimale delle misure ottenute nella costruzione e questo comporta una profonda riflessione sul concetto di troncamento e approssimazione dei risultati.

SPUNTI PER SVOLGERE L' ATTIVITA' IN VERTICALE E IN ORIZZONTALE

L'argomento si può sviluppare sia in verticale che in orizzontale. In verticale sarà sufficiente suddividere le varie fasi dell'attività nei tre anni della scuola secondaria di primo grado partendo dalle semplici costruzioni con riga e compasso passando per le proporzioni e concludendo con i problemi non risolubili con riga e compasso. In orizzontale, invece, sarà sufficiente impostare il seguente percorso: affrontare in tecnologia le costruzioni basilari con riga e compasso, effettuare in matematica, utilizzando GeoGebra, la costruzione della sezione aurea che verrà poi studiata in scienze e arte. Alla base del percorso verrà approfondito l'aspetto storico e geografico degli argomenti trattati.

RINGRAZIAMENTI

Un sentito ringraziamento al comitato scientifico di Di.Fi.Ma per aver accettato questo mio contributo, dandomi fiducia e fornendomi l'opportunità di sperimentare il ruolo di formatore, anche se "in erba". Spero vivamente che questo convegno diventi il "trampolino di lancio" per un nuovo percorso professionale: quello di formatore specializzato in Didattica della Matematica.

BIBLIOGRAFIA

Boyer Carl B. (1990). *Storia della Matematica.* Milano: Oscar Saggi Mondadori.
Dotto E. (2007) *Dispense di Costruzioni geometriche* (pp 21-22). Corso di Disegno dell'Architettura, Facoltà di Architettura dell'Università di Catania, sede di Siracusa.
Gabelli S. (2008). *Teoria delle equazioni e teoria di Galois.* Milano: Springer Verlag.
Klein F. (1956). *Famous problems of elementary geometry. The duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of the circle.* New York: Dover Publications Inc.
Livio M. (2002). *The golden ratio. The story of phi, the world's most astonishing number.* New York: Broadway Books.
costruzione con riga e compasso in "Enciclopedia della Matematica" (treccani.it)
numero aureo in "Enciclopedia della Matematica" (treccani.it)
Elementi di Euclide (scienzaatscuola.it)

MOLTO PIU' DI UN GIOCO

Gemma Gallino[1], Stefania Serre[2]
[1]Centro Scienza – Torino, [2]Scuola Internazionale Europea "Altiero Spinelli" di Torino
CDO – Centro Diffusione Origami
stefyserre@gmail.com

Abstract
L'attività dell'origami si presta ad essere pensata principalmente come un gioco: spesso si realizzano con questa tecnica oggetti come l'aereo, la cavalletta o il windsurf, che ben si adattano a una attività ludica e ricreativa. In realtà però tutto ciò che accade nelle pieghe dell'origami è geometria,.

Parole-chiave
Assiomi. Geometria della carta piegata. Gioco. Origami. Teorema di Pitagora.

UN LABORATORIO DI MATEMATICA FATTO DI CARTA

Piegare un modello origami in un'aula scolastica è un'attività sempre interessante perché permette di lavorare su diversi obiettivi, a partire dalla manualità, dalla socializzazione e collaborazione. In questo workshop vogliamo però finalizzare le ricche opportunità offerte dagli origami al di là del gioco, cogliendo la possibilità di operare attraverso un laboratorio di matematica e legando un vissuto concreto a definizioni e teoremi: l'atto di piegare la carta e di interpretare passo passo il significato di quello che ne consegue consente di arricchire e radicare gli apprendimenti. Ovviamente adattando la complessità geometrica ai vari livelli scolari: nella scuola primaria sarà ad esempio importante riconoscere figure geometriche in base alla loro definizione, laddove lavorare con le misure e calcolare angoli potrà dare consapevolezza e concretezza alle parole. Nella secondaria di primo grado ci sarà l'occasione di lavorare con proprietà più complesse e la manipolazione della carta renderà le argomentazioni degli studenti più ricche e articolate. Nella secondaria di secondo grado l'origami permette infine di approfondire il concetto di dimostrazione, osservando come variare le ipotesi inevitabilmente modifica la tesi oppure giustificando passaggi apparentemente elementari attraverso rigorose deduzioni geometriche.

Il windsuf: angoli, frazioni, deltoidi e molto altro

Mettiamoci in situazione prendendo in considerazione un modello tradizionale, di cui proponiamo i diagrammi in Figura 1. Verbalizziamo sinteticamente quello che in un laboratorio verrebbe detto da chi insegna il modello, seguendo la traccia dei diagrammi.

1- Si parte da un quadrato di qualunque dimensione. Si porta un vertice sul vertice opposto, segnando la piega di una diagonale, e poi occorre riaprire.
2- Si portano due lati simmetrici rispetto alla diagonale sulla diagonale stessa, con una piega che passa per il vertice: tale piega sarà una bisettrice per ciascuno dei due angoli.
3- Si porta il vertice inferiore a coincidere con quello superiore, ottenendo un pentagono
4- Si portano i due lati minori del pentagono sul suo asse di simmetria ottenendo un nuovo pentagono.
5- Si solleva tutto lo strato superiore a 90° rendendo il modello tridimensionale e realizzando così il windsurf.

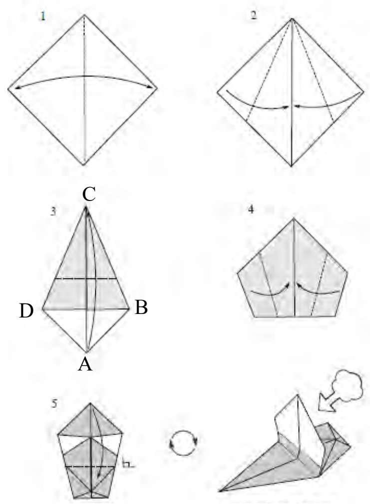


Figura 1. Il windsurf – modello origami tradizionale. Diagrammi di Francesco Mancini.

Si può subito osservare che numerosi sono i termini geometrici e relativi all'orientamento che vengono utilizzati anche solo per questo semplice modello. Ciascuno di essi viene però utilizzato in un contesto concreto, costruito e manipolato da bambini e ragazzi prima della definizione, che potrà costruirsi a partire da questa dimensione operativa.
Nella scuola primaria si possono utilizzare le pieghe del windsurf per parlare di angoli: a riguardo si possono ripercorrere i primi tre passaggi di piegatura fermandosi al punto 3) e ribaltando sul piano d'appoggio il modello. Si ottiene un quadrilatero che ha un angolo retto, uno acuto e due ottusi. Le affermazioni devono però essere sempre supportate da argomentazioni, che a seconda del livello scolare potranno essere più o meno approfondite:

- l'angolo A è retto perché è un angolo del quadrato di partenza
- l'angolo C è acuto ed è facile calcolare la sua misura avendo dimezzato con le due pieghe un altro angolo del quadrato.
- gli angoli B e D sono ottusi, come si può osservare per semplice confronto con un angolo retto oppure più precisamente lavorando sulla somma degli angoli interni di un quadrilatero. Inoltre ripiegando il quadrilatero sul proprio asse di simmetria si può evidenziare la congruenza degli angoli B e D e dei lati ad essi adiacenti, e si può utilizzare così la somma degli angoli interni di un triangolo per calcolare l'ampiezza di tali angoli.

Il nostro quadrilatero ha quindi le caratteristiche per essere definito un deltoide: nella scuola secondaria di primo grado il lavoro può essere esteso alle definizioni e proprietà caratteristiche dei vari quadrilateri, confrontando ad esempio il parallelogramma (coppie di lati opposti congruenti) con il deltoide (coppie di lati consecutivi congruenti). Nella scuola secondaria di secondo grado l'ingrediente in più potranno essere le dimostrazioni delle proprietà prima indicate.
Prima di lasciare questo modello poniamo ancora un quesito: fin qui abbiamo parlato di pieghe che rappresentano diagonali, bisettrici o assi di simmetria, ma che cosa rappresentano le due pieghe al passaggio 4) dei diagrammi del windsurf? Possiamo ritornare a questo passaggio riaprendo il nostro modello. La risposta sarà evidente se anche per gli origami seguiamo le orme di Euclide.

Le pieghe preliminari: tra geometria euclidea e geometria origami
Euclide costruisce i suoi Elementi su ventitrè definizioni, cinque assiomi, otto nozioni comuni; a seguire le proposizioni, la prima delle quali dimostra come costruire un triangolo equilatero a partire da un lato. Anche in origami ci sono gli assiomi, che in alcuni casi richiamano esattamente quelli della geometria euclidea. A esempio:

- Assioma 1 Euclideo: per due punti passa una sola retta.
- Assioma 1 Origami: per due punti è possibile tracciare una sola piega.

A seguire abbiamo quelle che possiamo chiamare le pieghe preliminari: per meglio comprenderle possiamo ipotizzare di piegare un rettangolo anche se la loro validità è del tutto generale.

Piega lato su lato: se i due lati sono paralleli la piega sarà la linea mediana, parallela ai due lati. Se i due lati sono consecutivi la piega sarà la bisettrice dell'angolo individuato dai due lati perché la piega lo dimezza (Fig. 2).

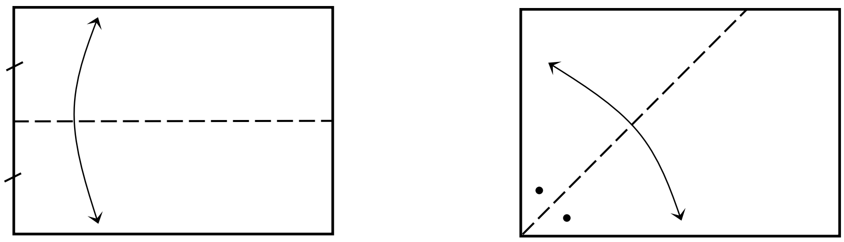


Figura 2. Piega lato su lato: mediana e bisettrice.

Piega punto su punto: portando A su B, la piega CD dimezza il segmento AB e ne rappresenta l'asse (Fig. 3). Infatti ciascun punto P della piega sarà equidistante dai due estremi del segmento, come è immediato osservare congiungendo P con A e ripiegando il foglio: il segmento PA cade esattamente su segmento PB. Lavorando con gli origami sapremo quindi che ogni volta che portiamo un punto su un altro punto dimezziamo il segmento che li unisce e tracciamo la perpendicolare nel punto medio.

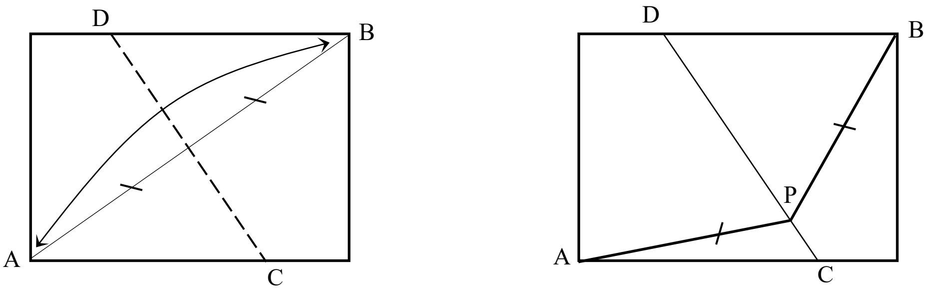


Figura 3. Piega punto su punto: asse del segmento.

Dunque la piega del windsurf al passaggio n.4 non ha più segreti, ma se ci fosse ancora qualche incertezza suggeriamo di riaprire il deltoide e osservare il prolungamento delle pieghe oggetto di studio.

Teoremi

Parlare di teoremi e di dimostrazioni è importante perché sono l'essenza della matematica, sono ciò che la contraddistingue dalle altre scienze. Una proprietà matematica dimostrata è 'per sempre', dà sicurezza sul verificarsi di determinate situazioni a partire da particolari condizioni iniziali. Saper dimostrare è senz'altro un punto di arrivo di un lungo percorso, che nei primi livelli scolari parte dall'osservazione e passa per la formulazione di una congettura che viene sostenuta attraverso l'argomentazione. Nella scuola secondaria questi passaggi vengono strutturati su definizioni, assiomi e proprietà precedentemente acquisite.

Questo percorso può essere favorito dal lavoro con gli origami: le pieghe spesso nascondono proprietà geometriche, tracciate in un certo modo rappresentano le ipotesi di lavoro e ci si può aspettare che proprio da lì nascano altre conseguenze che rappresentano quindi la tesi di un teorema.

Ad esempio piegando una semplice barchetta a partire da un foglio triangolare si può osservare come

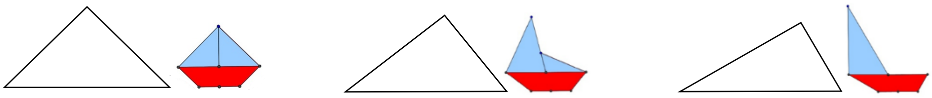


Figura 4. Barchette origami da triangoli rettangoli di diverso tipo.

Al variare della tipologia del triangolo di partenza si modifichi l'artefatto finale (cfr. Serre (2016)).

FIGURE CHE SVILUPPANO LA DIMOSTRAZIONE

Proprio come accade con la geometria di Euclide, le pieghe e i teoremi preliminari ci consentono di andare molto lontano, trovando facilmente le dimostrazioni di altri teoremi.
Restando su una idea semplice vi proponiamo quello che chiameremo "Teorema delle due pieghe".
Descriviamo l'attività:

- Prendi un foglio qualunque
- Scegli un punto su uno dei lati
- esegui una piega che parte da quel punto (Fig.5a)
- esegui una seconda piega che parte dal medesimo punto e porta la restante parte del lato a combaciare con quella già piegata (Fig. 5b,c)

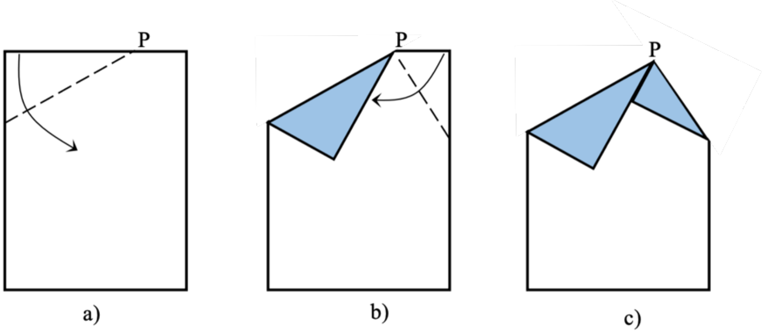


Figura 5. Una piega passante per P, poi una piega per P che porta i lati a combaciare

Che cosa si è ottenuto?
La parte sorprendente è che tutti, se hanno seguito tutte le indicazioni, indipendentemente dalla piega iniziale, otterranno lo stesso risultato. Le ipotesi certificano esattamente il verificarsi del risultato finale, cioè della tesi.

Il teorema di Pitagora: la dimostrazione di Thabit ibn Qurra

Tra le tante dimostrazioni del Teorema di Pitagora alcune si prestano molto bene a una visualizzazione tramite la piegatura di un foglio. Vi proponiamo la dimostrazione di Thabit ibn Qurra perché utilizza sapientemente gli strumenti fin qui introdotti unitamente al concetto di equiscomposizione.

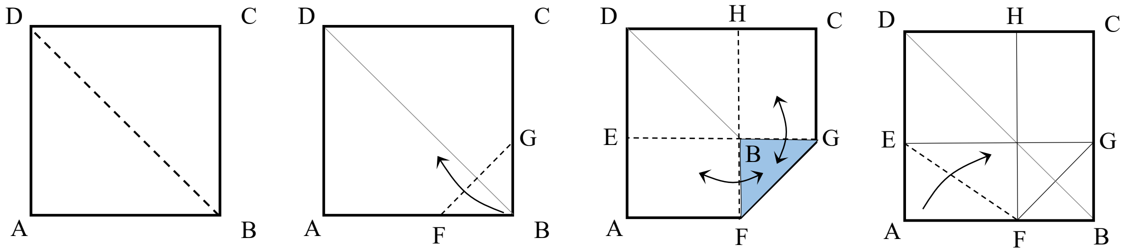


Figura 6. Le prime pieghe per la dimostrazione di Thabit ibn Qurra

Si consideri un quadrato e se ne tracci la diagonale BD. Si porti il vertice B su un punto a piacere di BD tracciando la piega FG. Si traccino poi le pieghe EG e HF a filo di BF e BG, riaprendo tutto. Si pieghi quindi la diagonale EF.

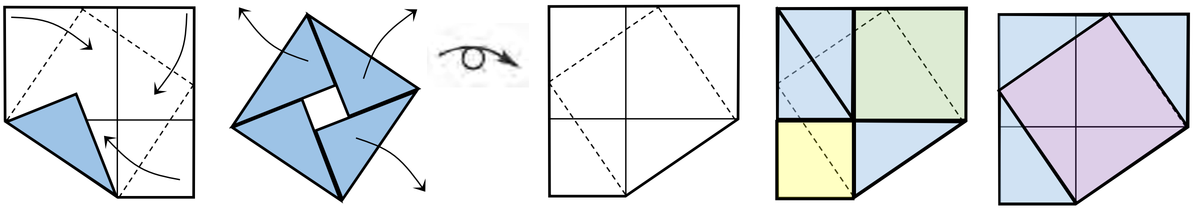


Figura 7. Una dimostrazione del teorema di Pitagora

A questo punto, applicando per tre volte il 'Teorema delle due pieghe', si ripieghino i tre angoli del triangolo, fino ad ottenere un nuovo quadrato: la dimostrazione che si tratta effettivamente di un quadrato e che i tre nuovi triangoli sono tutti congruenti al precedente è davvero il cuore del ragionamento. Si riaprano le ultime tre pieghe fatte, si ribalti il foglio per procedere a nuove osservazioni, che ci limitiamo a sintetizzare in figura 7.
Non è tutto questo molto più di un gioco?

BIBLIOGRAFIA

Baruk S.(1998). *Dizionario di matematica elementare*. Bologna: Zanichelli
Frajese A., Maccioni L. a cura di (1970), *Gli Elementi di Euclide*, Torino: UTET
Serre S. (2016). GeoGebra e Origami: una barchetta per navigare da ipotesi a tesi, *La formazione docente con GeoGebra*, Atti del IV GeoGebra Italian Day 2014 (pp. 237-242). Milano: Ledizioni.

SITOGRAFIA

Numerosi esempi di origametria: http://origamimaths.blogspot.com
Sul teorema di Pitagora: https://www.youtube.com/watch?v=R4IMaeZmgLA&t=31s

LABORATORIO DI MATEMATICA E PROVE INVALSI

Donatella Merlo (1) **Elisabetta Vio** (1) **Valeria Perotti** (2)
(1)**Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica Università di Torino**
(2) **Scuola primaria di Agazzano (PC)**
donatellamerlo@icloud.com

Abstract
Un quesito delle Prove Invalsi, modificato e strutturato per consentire una metodologia laboratoriale, è utilizzabile anche nella Dad. Nell'esperienza proposta l'insegnante accompagna gli alunni nell'elaborazione di strategie personali per risolvere un problema di geometria costruito su un ostacolo cognitivo: il conflitto perimetro/area.

Parole-chiave
perimetro/area; equiestensione; isometrie; didattica a distanza; GeoGebra.

LE PROVE INVALSI IN UN'ATTIVITÀ DI LABORATORIO

Molti quesiti delle Prove Invalsi si prestano ad essere modificati e strutturati in funzione di una metodologia laboratoriale che, come nel caso che illustreremo, è proponibile anche in Didattica a distanza. Le prove di solito invitano al ragionamento non solo all'applicazione di regole e possono diventare vere e proprie situazioni problematiche adottando una modalità di approccio valida in qualsiasi situazione.
Introducendo queste attività nella pratica didattica si riduce lo spaesamento degli alunni nel momento della somministrazione delle prove reali evitando un mero allenamento alle prove stesse poco produttivo.
Nell'esperienza che proponiamo l'insegnante ha accompagnato gli alunni nell'elaborazione di strategie personali per la risoluzione di un problema di geometria costruito su un ostacolo cognitivo: il conflitto perimetro/area.
Gli alunni hanno prodotto le loro rappresentazioni per risolvere il problema e le hanno condivise tramite la webcam; è avvenuto quindi il confronto con la mediazione dell'insegnante.
Le soluzioni molto differenti hanno generato una ricca discussione, ampliando e generalizzando la situazione di partenza verso casi che nemmeno l'insegnante aveva previsto: questo è stato un ottimo risultato.
Gli alunni, stimolati dal contesto e nonostante le difficoltà generate dalla connessione, hanno costruito vere argomentazioni, giustificando le scelte fatte per rispondere al quesito, valutando le soluzioni proposte dai compagni, portando esempi e contro-esempi all'occorrenza.

DALLA PROVA INVALSI ALLA SITUAZIONE PROBLEMA

Un item[19] reperito con una ricerca sul sito www.gestinv.it sul tema dell'equiestensione, ci ha ispirato questa esperienza.

Il problema che abbiamo costruito con l'insegnante Valeria Perotti è il seguente:

«Osserva la figura:

[19] Item D20 della prova Invalsi per la classe quinta del 2014.

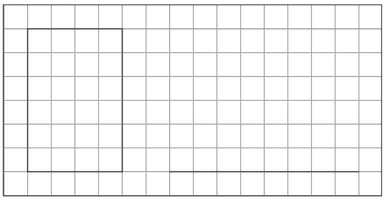


Figura 1. La situazione problema.

A destra del rettangolo è stato tracciato un segmento che rappresenta la base di un triangolo. Completa il triangolo in modo che la sua area sia uguale a quella del rettangolo.»

Il problema didattico è come ricreare le condizioni del laboratorio anche nella Dad sfruttando le potenzialità dei software (uso della webcam, della chat, delle istantanee ecc.) in modo da far coesistere e operare sinergicamente i tre livelli di azione che si sperimentano nel laboratorio: la comprensione del testo del problema, la ricerca della soluzione e la formulazione di un'argomentazione per giustificare le proprie scelte.

LA CLASSE VIRTUALE

La classe è stata suddivisa in 4 gruppi che hanno lavorato in tempi diversi.
Al termine l'insegnante ha proposto una sintesi del lavoro di tutti i gruppi all'intera classe.

Figura 2. Uno dei gruppi in chat con l'insegnante.

Il percorso didattico si compone di cinque step.
1. Riproduzione del disegno: i bambini usando gli strumenti ricopiano sul quaderno la figura presentata nella slide.
2. Descrizione del disegno: l'insegnante chiede ai bambini di descrivere quello che vedono (il rettangolo e il segmento) e, in particolare, di evidenziare le caratteristiche delle figure (lati paralleli, angoli retti, segmento ecc.), una specie di "interrogazione" per saggiare le conoscenze di partenza dei bambini e condividere il linguaggio usando i termini geometrici specifici. È molto importante, anche in questa situazione, tener conto non solo delle parole ma anche della gestualità con cui i bambini esprimono i loro concetti sintetizzandoli e a volte anticipandone l'espressione verbale.

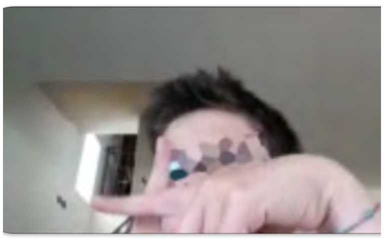


Figura 3. Il gesto di un alunno per indicare la perpendicolarità dei lati.

3. Consegna: l'insegnante dà la consegna con il problema da risolvere e assegna un tempo per produrre

la soluzione individualmente (7 minuti circa).
4. Esecuzione: i bambini lavorano individualmente in silenzio sul quaderno.
5. Discussione: l'insegnante pone alcune domande stimolo, ad esempio:
- I triangoli che avete disegnato sono tutti uguali?
- Che differenze ci sono?
- Che cosa hanno di uguale e di diverso?
- Che cosa dovete fare per trasformare il triangolo nel rettangolo? …

IL LAVORO DEI 4 GRUPPI

Il comportamento dei 4 gruppi è molto differente ma tutti arrivano a una soluzione.
Nel gruppo 1 RB[20] dà subito la soluzione aritmetica e dice: «I due lati più corti misurano 4 e il segmento a fianco è lungo 8… 8x6/2=24».
Intanto RP risolve il problema sia graficamente che aritmeticamente. Costruisce un triangolo isoscele dentro un rettangolo doppio di quello dato. Su richiesta di RB spiega come ha costruito la sua figura e specifica che il vertice in alto del triangolo è a metà del lato del rettangolo. Poi dice: «...se facciamo combaciare questi due (indica metà triangolo isoscele e il triangolo rettangolo esterno) sono grandi uguali».

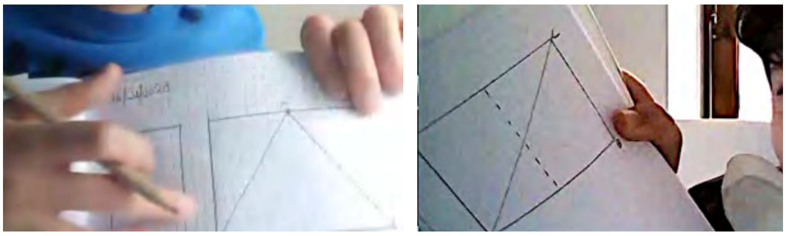


Figura 4. Le soluzioni dei primi due alunni.

RB è d'accordo, ma dice che ha un'altra idea e la mostra al gruppo: ragiona sul fatto che il triangolo deve essere la metà di un rettangolo doppio quindi traccia la diagonale che sicuramente lo divide in due e dice: «Le due figure (le mostra con il dito) sono formate dagli stessi pezzi». Il rettangolo, infatti, risulta composto di due parti uguali che, diversamente assemblate, costituiscono o un rettangolo uguale a quello di partenza o un triangolo rettangolo.

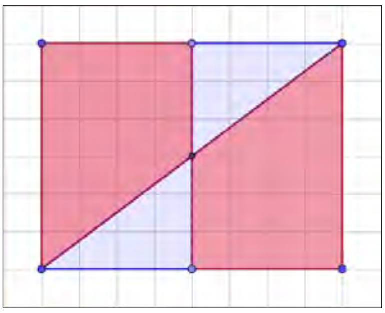


Figura 5. La soluzione di RB riportata in GeoGebra.

DE, terza componente del gruppo, inizialmente sembra non capire, fa fatica ad inserirsi nel discorso dei due compagni che vanno molto veloci, ma quando spiega la sua soluzione è l'unica a usare la parola "altezza" per affermare l'equivalenza delle figure e dice: «...come altezza ricopre la stessa area». Il suo disegno è impreciso, il vertice del triangolo non è esattamente a metà rispetto alla base, ma la soluzione è analoga a quella di RP.

[20] I nomi degli allievi sono indicati con sigle.

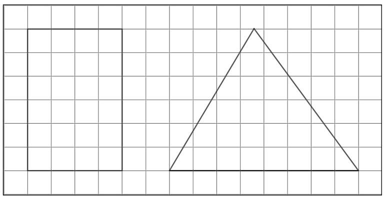


Figura 6. La soluzione di DE.

Quando DE parla di “altezza” l’insegnante coglie la palla al balzo e usa prima il dito e poi una matita per far vedere che l’altezza “si sposta” da una figura all’altra mantenendosi uguale.

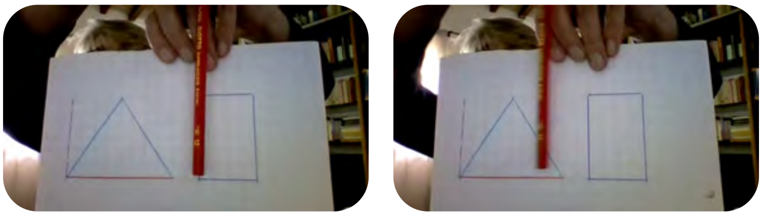


Figura 7. L’intervento dell’insegnante sulla traslazione dell’altezza.

Intanto RB continua a pensare e, ragionando su base e altezza e sulla commutatività del prodotto, trova ancora un’altra soluzione: scambiando base e altezza le figure risultanti sono diverse ma la congruenza fra le parti rimane.
Anche RP continua i suoi ragionamenti e conclude spiegando che qualsiasi punto su quella larghezza produrrebbe triangoli con la stessa area perché avrebbero sempre la stessa base e la stessa altezza. Usa un gesto molto significativo: il dito indice che scorre sul lato superiore del rettangolo.

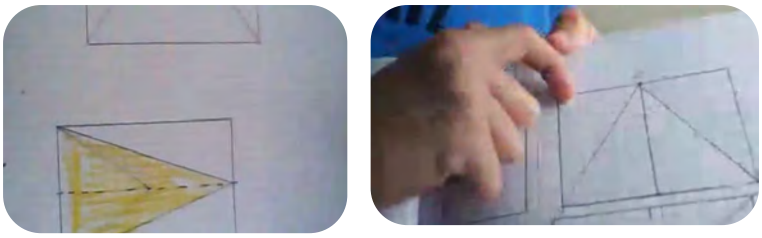


Figura 8. Le elaborazioni finali di RB e RP.

In questo gruppo avviene una prima generalizzazione: non importa la forma che assumono le parti in cui si divide la figura ma solo che alla fine triangolo e rettangolo abbiano stessa base e stessa altezza.
Tutto questo lavorio mentale, indotto dal problema, può anche essere letto come un modo per confermare la formula dell’area del triangolo *base x altezza: 2* cioè il problema inverso. Questo potrebbe essere un punto ulteriore di discussione da proporre al termine del percorso nei momenti del confronto fra i vari gruppi.
Nel gruppo 2, VA scompone prima il rettangolo in triangoli tutti uguali tracciando le mediane e le diagonali, poi mostra con la mano la rotazione dei triangoli che produrrebbe la figura richiesta.

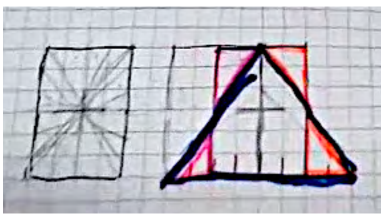


Figura 9. La soluzione di VA con la rotazione dei triangoli.

Un altro componente del gruppo, GI, mostra questa soluzione:

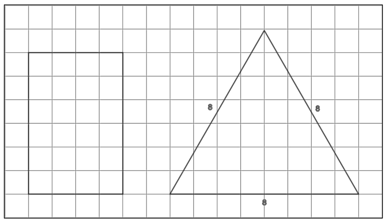


Figura 10. La comparsa del conflitto perimetro/area.

e spiega che il triangolo ha l'area di 24 quadretti perché 8x3=24. Pensa in questo modo di aver dimostrato l'equivalenza: i numeri sono uguali ma hanno significati diversi ed emerge chiaramente il conflitto perimetro/area.
Spesso i bambini confondono i due concetti; questo fatto è da considerare un vero e proprio ostacolo da affrontare avendone analizzato le cause.
L'ostacolo può essere di origine didattica in quanto nella scuola primaria presentiamo il perimetro come contorno di una figura e per i bambini il contorno contiene anche quanto c'è dentro la linea. Ma è anche possibile che la confusione sia generata dal fatto che alcuni bambini contano i quadretti invece dei lati di quadretto e quindi usano una superficie anche per misurare una lunghezza. Una ricerca più raffinata ci porterebbe invece a discutere sul fatto che il perimetro non esiste se non associato alla figura generata da quel contorno. Quindi i bambini per comprendere il significato geometrico di perimetro dovrebbero estrarre i segmenti che lo compongono e lasciare da parte l'interno. Questa considerazione ci porta ad affermare che il modo migliore per superare questo ostacolo è far costruire concretamente questa somma di segmenti staccandola dalla figura che l'ha originata.
L'uso di GeoGebra in questo caso si rivela molto efficace.[21]
Nel gruppo 3, accanto alle soluzioni già trovate dagli altri gruppi, si discute sulla proposta di AT.

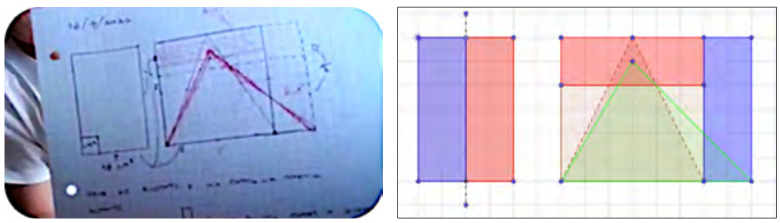


Figura 11. I tentativi di AT .

Esaminando il disegno e le cancellature abbiamo provato a ricostruire il suo ragionamento. Secondo noi AT ha capito che è necessario raddoppiare l'area del rettangolo, quindi disegna un primo rettangolo ottenuto da una rotazione di 90° di quello originario, a questo si aggiungono poi i due mezzi rettangoli disposti perpendicolarmente come in figura.
Inizialmente il triangolo richiesto ha la base e l'altezza di 6 cm; quando si accorge che la base deve essere di 8 cm "per compensare" abbassa l'altezza di 1 cm e allunga il lato obliquo pensando così di aver trovato la soluzione. Se avesse verificato con il calcolo, si sarebbe accorto dell'errore: 8 x 5 : 2 = 20 e non 24 come richiesto.
Nel gruppo 4 riemerge il conflitto perimetro/area ma in un modo diverso:

[21] Perimetro come somma di segmenti (creato da D. Merlo) https://www.geogebra.org/m/kbtanbwp; Perimetro dinamico (creato da Maria Cantoni) https://www.geogebra.org/m/p2fj3k6u

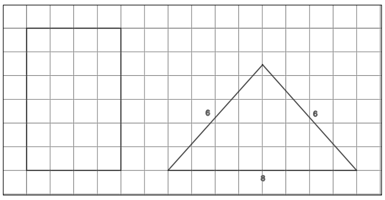


Figura 12. Un secondo conflitto perimetri/area.

MS dice: "Ho fatto gli altri due lati di 6 cm… il vertice opposto alla base è esattamente a metà ...perché il segmento è di 8 quindi sono i due lati da 4 del rettangolo e gli altri due lati hanno la stessa lunghezza di quelli del rettangolo, quindi ho pensato di far così perché secondo me andava bene."
Ragiona sui lati: se i lati sono tutti uguali (2 di 4 e 2 di 6) anche l'area è uguale. Applica una regola intuitiva che in certe situazioni funziona ma qui purtroppo no.
Nello stesso gruppo LU propone la soluzione in figura 13:

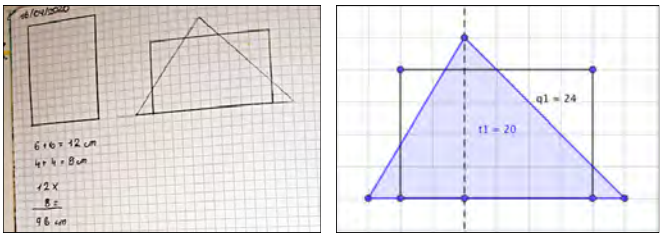


Figura 13. I tentativi di LU per trovare l'equivalenza.

Cerca di trovare i pezzi da spostare per ottenere l'uguaglianza per sovrapposizione, ma non c'è nulla che combaci. Anche i calcoli rivelano le sue difficoltà.
Infine NT trova una soluzione adeguata e dice: «...questo è il triangolo (lo indica) e poi l'ho fatta qua e questo invece è il lato un po' più lungo (indica il segmento di 8) quindi io lo considererei un po' un triangolo equilatero» poi si corregge e dirà che è isoscele.

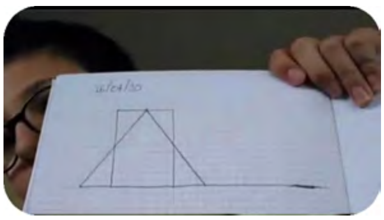


Figura 14. La soluzione corretta di NT.

MS commenta il lavoro di NT: «Tu l'hai fatto giusto, si vede già a occhio…».
NT aggiunge: «Sposti questo qua (indica il triangolino superiore) e poi combacia».
La sua costruzione è molto simile a quella di LU ma il rettangolo non è stato ruotato: le due altezze combaciano e i triangoli esterni ricoprono quelli interni.

CONCLUSIONI

Per trovare le congruenze fra le figure servono due concetti importanti: *uguaglianza per sovrapposizione* (intuitiva) e *isometrie* (simmetria, traslazione e rotazione). Per fissarli l'insegnante prepara una lezione dialogata supportata da alcune slide, pone un semplice problema per far riflettere gli allievi sulla differenza tra perimetro e area e poi li invita a confrontare le diverse soluzioni date al problema di partenza.

Figura 15. Il confronto delle soluzioni.

Infine rilancia con un nuovo problema: i bambini devono valutare le affermazioni scritte nella tabella con la scelta vero/falso, ma devono anche scrivere il perché.

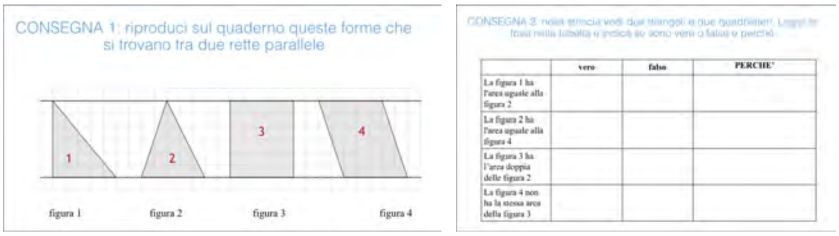


Figura 16. Il rilancio con un nuovo problema.

Giustificare la propria scelta abitua i bambini ad argomentare, competenza che in matematica è fondamentale.
La soluzione del problema ha messo in evidenza un ostacolo didattico e nei vari momenti del percorso i bambini sono stati accompagnati, con la guida dell'insegnante ma anche grazie alle interazioni con i compagni, nella costruzione di strategie idonee a superarlo. Il setting predisposto dall'insegnante, che simulava la modalità laboratoriale a cui gli allievi erano abituati, si è quindi rivelato efficace anche nella didattica a distanza.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. et al. (2011). *Matematica. non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe.* Trento: Erickson.
Castelnuovo, E. (2017). *Didattica della matematica.* A cura di F. Arzarello, M. G. Bartolini Bussi. Novara: De Agostini.
Ferrari, M. (2018). Insegnare matematica nella scuola primaria. Una proposta suddivisa per anni. Geometria e misura. *Quaderno didattico n. 22, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.*
Gruppo Matematica Avimes (2008). *Argomentare: un "laboratorio per le competenze"*, Torino: MIUR USR Piemonte, Progetto AVIMES.
Marastoni, G. (2017). *Facciamo geometria. Esperienze curricolari con alunni del primo ciclo di istruzione.* Contributi di S. Mosca, D. Merlo, E. Vio. Intervista a F. Arzarello. Parma: Edizioni Junior.
Merlo, D., Vio, E. (2021). *Destinazione Invalsi. Classe quinta.* Milano: Mondadori Education.
Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer Verlag Italia.

ESPLORARE A DISTANZA CON GEOGEBRA

Gabriella Pocalana[1], Francesca Cicero[2]
[1]Dipartimento di Matematica "G. Peano" - Università di Torino
[2]I. C. "Primo Levi", Rivoli (TO)
gabriella.pocalana@unito.it

Abstract

In questo contributo presentiamo il prodotto del lavoro congiunto di insegnanti di scuola secondaria di primo grado e di ricercatori in didattica della matematica, all'interno di un modulo formativo del progetto Piano Lauree Scientifiche del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino. Focus del modulo formativo è la costruzione collaborativa di risorse didattiche con l'utilizzo del software di geometria dinamica GeoGebra. L'obiettivo didattico delle risorse progettate è quello di promuovere negli studenti la costruzione di competenze chiave quali la capacità di congetturare, argomentare e visualizzare proprietà di figure geometriche, presentate in modalità non stereotipata. Nel contributo presentiamo e commentiamo alcuni risultati della sperimentazione di due risorse didattiche progettate, svolta da una delle insegnanti partecipanti al modulo formativo, in una sua classe seconda di scuola secondaria di primo grado.

Parole-chiave
Software, geometria dinamica, scuola secondaria di primo grado, formazione insegnanti.

IL MODULO FORMATIVO

Il modulo formativo per insegnanti, condotto da ricercatori in didattica della matematica, tra cui la prima autrice del contributo, e al quale ha partecipato la seconda autrice, si è svolto a distanza a causa delle restrizioni dovute alla pandemia di Covid-19. Il modulo è inserito all'interno del progetto Piano Lauree Scientifiche (PLS) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino e prende il nome di SSPM (Scuole Secondarie Potenziate in Matematica). In particolare, presentiamo risultati ottenuti nel contesto della formazione denominata "medie 2.0", che coinvolge insegnanti che hanno già frequentato almeno tre anni di formazione nell'ambito del progetto. I partecipanti durante l'anno accademico 2020/2021, al quale si riferiscono i risultati, sono stati, in media, 15-17 insegnanti. Tali insegnanti lavorano in scuole che hanno siglato un protocollo d'intesa con il Dipartimento di Matematica, che prevede l'aggiunta al curriculum standard di 33 ore annue di matematica, che gli alunni possono seguire su base volontaria.
Durante gli incontri sincroni, svoltisi tramite piattaforma web, sono stati presentati agli insegnanti spunti per attività didattiche da svolgere, a loro discrezione, in classe durante le ore curricolari, oppure durante le ore aggiuntive con un gruppo ristretto di studenti. Agli insegnanti è stato richiesto di completare la progettazione di tali attività, tenendo conto delle esigenze specifiche dei propri alunni e scegliendo le strategie che ritenevano più idonee per l'inclusione di tutti. L'obiettivo didattico delle risorse progettate doveva essere quello di promuovere negli studenti la costruzione di competenze chiave quali la capacità di congetturare, argomentare e visualizzare proprietà di figure geometriche, presentate in modalità non stereotipata. Gli insegnanti hanno poi fornito resoconti scritti delle sperimentazioni effettuate nelle loro classi.

RIFERIMENTI TEORICI PER LE RISORSE DIDATTICHE PROGETTATE

Il laboratorio di matematica

Le attività proposte durante il corso di formazione sono state ispirate dall'approccio tipico della tradizione italiana del *laboratorio di matematica* (Anichini et al., 2004). Tale approccio si basa su attività centrate sullo studente, sulle interazioni sociali in classe, tra studenti e con l'insegnante, sul confronto di idee e sulla discussione di classe. Fondamentale, in tale ottica, è l'attività di *problem solving*, come momento di esplorazione collettiva di problemi, di proposta di congetture e di discussione di strategie alternative per la soluzione di problemi significativi. L'errore, nell'approccio proposto, non può essere visto come qualcosa da censurare ma come generatore di significati e, quindi, come elemento su cui basare la riflessione in classe.

Problemi aperti

I problemi aperti (Arsac, 2007) sono problemi in cui viene descritta una configurazione e viene chiesto agli studenti di produrre congetture riguardanti le relazioni tra gli elementi della configurazione descritta. Si tratta di problemi di "ricerca", per i quali gli studenti non possiedono una strategia risolutiva specifica. Tali problemi si adattano particolarmente all'approccio del laboratorio matematico, perché favoriscono il confronto tra diverse strategie risolutive e consentono una ricca discussione di classe.

Dualismo figurale/concettuale

Le attività che presentiamo, in particolare, in questo contributo, riguardano la risoluzione di problemi aperti nell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra. Tale scelta è motivata dall'importanza che la tecnologia assume come strumento per rafforzare la capacità di formulare e verificare ipotesi (Arzarello et al., 2002).
La caratteristica distintiva di GeoGebra è infatti il *dragging* (trascinamento): un oggetto geometrico, una volta costruito, può essere trascinato senza cambiare le proprietà di costruzione. Questo permette agli studenti di esplorare le proprietà delle figure e di formulare congetture. Esplorare le figure muovendole, guardare il modo in cui cambia (o non cambia) la loro forma, permette di scoprire le proprietà invarianti. La possibilità di trascinare offre un feedback nella fase di scoperta e, quindi, supporta il ruolo della dimostrazione come una vera "spiegazione" di congetture o proprietà.
Dal momento che una dimostrazione geometrica riguarda oggetti teorici e non specifici disegni, il ruolo del *dragging* è di particolare interesse per gestire il dualismo figurale/concettuale e si rivela cruciale nella dialettica tra aspetti teorici e aspetti percettivi, che caratterizza tutto il ragionamento geometrico.

Metodo della Ricerca Variata

Il Metodo della Ricerca Variata (Arzarello, 2019) si inserisce a pieno titolo nell'ambito dell'approccio del *laboratorio di matematica* e propone una modalità di presentazione delle attività matematiche basate sulla variazione delle esperienze. Discernere informazioni, infatti, non coincide con ricevere informazioni: per cogliere a pieno le caratteristiche delle cose è necessario fare esperienze («sensate», secondo Galileo) di come queste cose possono variare, ovvero sperimentare il cambiamento, la variazione di grandezze.
Pertanto, tale metodo comporta la scelta di problemi che offrono l'opportunità di fare generalizzazioni. Le domande tipicamente utilizzate per favorire l'argomentazione sono: "Come?", "In quale modo si ottiene?". Le domande possono diventare progressivamente più complesse, in modo da favorire la generalizzazione: "Che cosa succede se ...?", "Che cosa succede se non ...?"

Il Metodo della Ricerca Variata è caratterizzato da alcuni elementi fondamentali (Arzarello, 2016):

- Si introduce un problema che può offrire la possibilità di fare generalizzazioni;
- Si fanno osservazioni, domande, e si danno risposte;
- Si fanno variare uno o più aspetti della situazione in esame
- Si fanno nuove osservazioni, si fanno ulteriori domande e si danno nuove risposte.

La caratteristica principale di tale metodo è quella di spingere gli studenti ad agire come ricercatori. Infatti, gli studenti fanno osservazioni sulla situazione problematica iniziale, fanno variare alcuni aspetti della stessa situazione didattica, formulano ipotesi, previsioni e congetture, che richiedono di essere argomentate e spiegate in linguaggio matematico. In particolare, il principio di base del metodo della ricerca variata – "per capire meglio qualcosa, occorre considerarla da più punti di vista e variarne le proprietà, per vedere l'effetto che fa" – è in linea con quelli che per Marton (Marton et al., 2004) sono i quattro aspetti necessari per la comprensione di un concetto:
• contrasto: fare esperienza di un concetto, sperimentando anche qualcosa di diverso, al fine di poterli confrontare;
• generalizzazione: fare esperienza di diverse rappresentazioni dello stesso concetto o delle situazioni in cui il concetto di manifesta, in modo da coglierne gli aspetti critici, separandoli da quelli non rilevanti;
• separazione: cogliere la distinzione tra i diversi aspetti critici di uno stesso concetto, osservandone separatamente la variabilità, mentre gli altri aspetti non cambiano;
• fusione: cogliere diversi aspetti critici di un concetto, osservandone simultaneamente la variabilità.

LA SPERIMENTAZIONE IN CLASSE

Le attività co-progettate da insegnanti e ricercatori durante il modulo formativo sono state sperimentate in alcune classi di scuola secondaria di primo grado. In particolare, presentiamo un esempio tratto dalla sperimentazione della seconda autrice di questo contributo in una sua classe seconda, cui hanno partecipato tutti gli alunni. La classe, in quel periodo, si trovava in didattica a distanza ed erano presenti fisicamente a scuola soltanto l'insegnante e due alunne con bisogni educativi speciali (BES). La sperimentazione ha richiesto in tutto un'ora e trenta minuti e ha riguardato la risoluzione di due problemi di geometria piana, presentati nell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra.

Problema 1
Il primo problema che presentiamo riguarda l'esplorazione geometrica di una situazione che coinvolge la relazione tra base, altezza e area di un triangolo. Il testo fornito ai ragazzi è il seguente:

*Dato un triangolo ABC, trovare un altro triangolo avente base AB e area uguale ad ABC***.**
1) Quanti triangoli di base AB e aventi la stessa area si possono trovare?
2) Come si possono trovare?

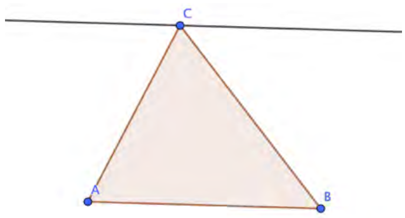


Figura 1. Figura che accompagna il testo del primo problema.

L'insegnante, durante gli incontri del modulo formativo, ha fornito un resoconto scritto della sperimentazione condotta. Di seguito riportiamo un estratto di tale resoconto, dal quale si evince che non tutti i ragazzi hanno condotto l'esplorazione geometrica con GeoGebra, ma alcuni hanno lavorato su un supporto cartaceo. Tuttavia, chi ha lavorato con il software ha chiesto di condividere le proprie riflessioni con tutta la classe, favorendo la discussione collettiva.
"Per i ragazzi con BES in presenza ho preparato diverse copie ingrandite delle figure dei triangoli e dei parallelogrammi proposti nella scheda attività. Nel mio gruppo di docenti avevamo pensato, infatti, di proporre ai ragazzi presenti in classe di lavorare anche con un modellino di carta. Effettivamente, gli allievi con BES hanno preferito seguire questa modalità e non lavorare su GeoGebra: su carta hanno tracciato altezze, rette parallele, ritagliato, provato a far coincidere figure, sovrapposto,

misurato con il righello le basi e le altezze. Hanno lavorato bene e con impegno attraverso la manipolazione.
Dei 16 allievi collegati da casa, invece, alcuni hanno usato GeoGebra durante lo svolgimento dell'attività e tre di questi hanno anche condiviso lo schermo, nel momento della successiva fase di discussione, per spiegare cosa avessero pensato e a quali conclusioni fossero arrivati. Altri ragazzi hanno preferito lavorare sul quaderno anche da casa, riproducendo le figure e scrivendo il ragionamento seguito. Infine, alcuni allievi hanno risolto lavorando su Documenti di Google."

L'insegnante ha riportato di aver lasciato lavorare i ragazzi individualmente, in autonomia, per circa 15 minuti e di aver poi fornito "domande-aiuto" per favorire l'esplorazione:

"Le mie domande – aiuto in questa prima fase:
a) Se sposti il punto C cosa succede al triangolo?
b) Cambia l'area dei triangoli?
c) Riesci a capire dove si trovano tutte le posizioni che occupa il punto C?"

Dopo una ulteriore decina di minuti, i primi alunni hanno iniziato a chiedere di condividere lo schermo con la propria proposta di soluzione.

La proposta di Annibale
Riportiamo la prima parte della risposta di Annibale (nome di fantasia) e l'immagine della schermata che il ragazzo ha condiviso (Figura 2):

"I triangoli aventi la stessa base e la stessa area sono 3. Questo perché dato che la base e l'area devono essere le stesse anche l'altezza lo dovrà essere. Quindi l'unica cosa diversa che il triangolo potrà avere sono gli angoli. Calcolando che la figura iniziale è un triangolo acutangolo, rimangono solo due triangoli che possono avere o un angolo retto, o un angolo ottuso."

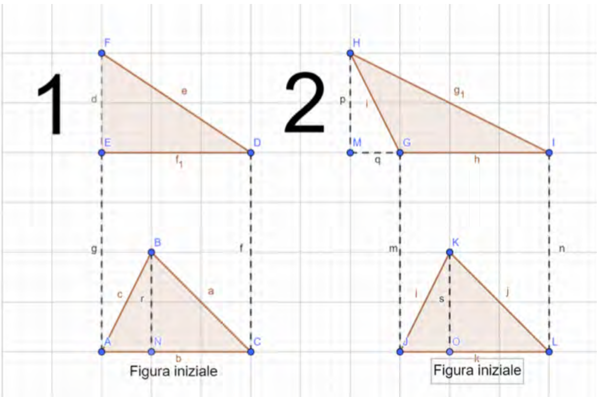


Figura 2. Immagine dello schermo di Annibale, che riporta la sua proposta di soluzione del primo problema.

Successivamente, in seguito alla domanda dell'insegnante che gli chiedeva se i triangoli fossero proprio solo tre o di tre tipologie, il ragazzo ha scritto:
"*I triangoli diversi che hanno stessa base e stessa area sono infiniti. Per vederli basta muovere il punto C su una retta immaginaria parallela alla base AB del triangolo. In questo modo né base, né altezza e né area cambieranno, ma cambierà solo la gradazione degli angoli. I triangoli sono infiniti, perché su una retta si trovano infiniti punti (quindi C può occupare infinite posizioni)."*

La proposta di Maurizio
Anche l'alunno Maurizio (altro nome di fantasia) chiede di poter mostrare il proprio schermo (Figura 3) e di spiegare la propria proposta di soluzione. Riportiamo di seguito un estratto della sua risposta scritta:

"Tenendo conto che la retta che passa per C e i prolungamenti di A e di B formerebbero due linee parallele, che presentano sempre la stessa distanza si possono tracciare infinite altezze, dunque infiniti triangoli avente la stessa base AB e area uguale ad ABC."

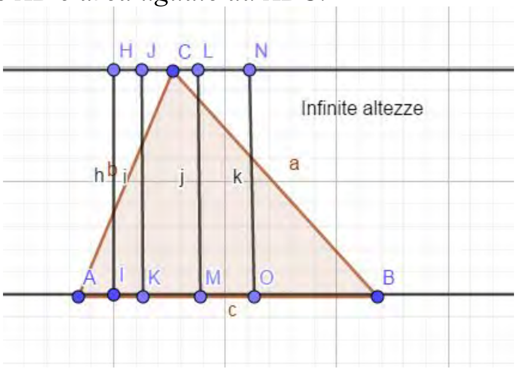
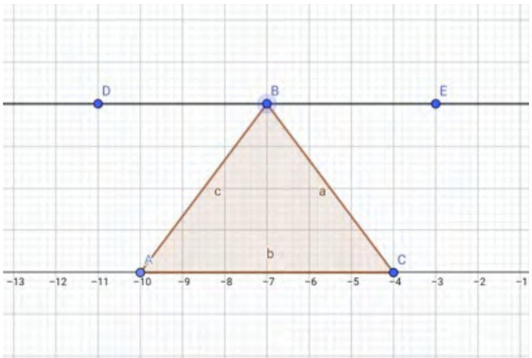


Figura 3. Immagine dello schermo di Maurizio, che accompagna la sua proposta di soluzione del primo problema.

Rispondendo poi alle tre domande-aiuto (vedi pag. 3) proposte dall'insegnante, Maurizio scrive:
"a) Se sposto il punto C, il triangolo cambia forma ma la base AB e l'altezza non cambia mai.
b) No, l'area dei triangoli non cambia perché le due dimensioni (base e altezza) restano invariate.
c) Tutte le posizioni che occupa il punto C si trovano lungo la retta, e le sue posizioni sono infinite"

La proposta di Barbara

Presentiamo, infine, la risposta di Barbara (bisogna tenere conto che l'alunna ha denominato diversamente i punti rispetto al testo originale del problema, scambiando le lettere B e C):
"Spostando il punto B lungo la retta D (parallela alla base), il triangolo ACB cambia forma mantenendo però la stessa altezza e la stessa area."



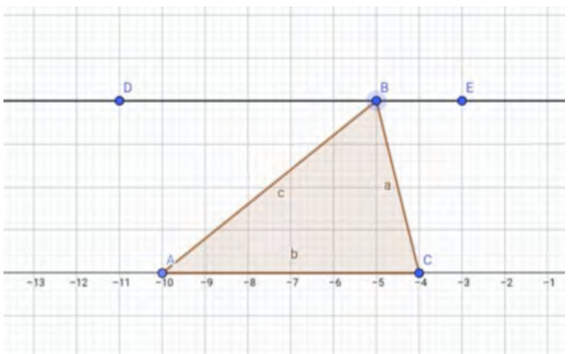


Figura 4. Immagini dello schermo di Barbara, che accompagnano la sua proposta di soluzione del primo problema.

Problema 2

Il primo problema (Fig. 5) che presentiamo riguarda l'esplorazione geometrica di una situazione che riguarda ancora la relazione tra base, altezza e area di un triangolo, però nel contesto di un parallelogramma. Il testo fornito ai ragazzi è suddiviso in due parti, di cui la prima è la seguente:

Nel parallelogramma ABCD, E è il punto medio di AC.
1) Come sono tra loro le aree dei due triangoli verdi, ABE e DEC?
2) Com'è l'area di ogni triangolo verde, rispetto all'area del triangolo rosso BED?
3) Giustifica le tue risposte.

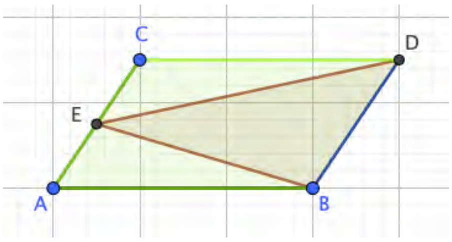


Figura 5. Figura che accompagna il testo della prima parte del secondo problema.

La seconda parte del problema (Fig. 6), pensata per essere fornita ai ragazzi dopo che la conclusione della prima parte, è la seguente:

Nel parallelogramma ABCD, E si muove lungo AC.
Al variare della posizione di E:
1) Com'è l'area del triangolo rosso BED, rispetto all'area del parallelogramma ABDC?
2) Cosa puoi dire delle aree dei due triangoli verdi rispetto all'area del triangolo rosso?
3) Giustifica le tue risposte.

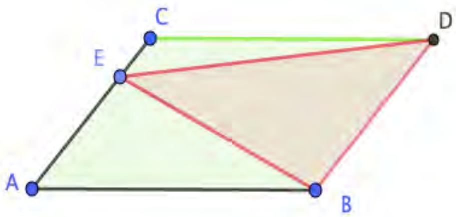


Figura 6. Figura che accompagna il testo della seconda parte del secondo problema.

Di seguito riportiamo un estratto del resoconto scritto fornito dall'insegnante, dal quale si evince che la domanda di un allievo è servita come risorsa anche per gli altri:
"La domanda – aiuto, dopo alcuni minuti, è partita da un allievo:
«Posso trasformare il parallelogramma in un rettangolo e dopo lavorare sul parallelogramma?»
Successivamente, l'unica domanda – aiuto che ho dato è stata: «Provate a costruire le altezze.»
Infatti, mi ero accorta che i ragazzi in presenza erano un po' in difficoltà e, aiutandoli a tracciare le altezze, erano riusciti a confrontare le aree dei triangoli verdi con quella del triangolo rosso. È stato molto utile ritagliare le figure e sovrapporle.
Anche in questa seconda parte Annibale e Maurizio hanno chiesto di condividere lo schermo. Annibale, in particolare, ha fatto vedere che ha trasformato il parallelogramma in rettangolo perché, secondo lui «in questo modo la dimostrazione è più evidente»."

La proposta di Annibale
Riportiamo la risposta scritta di Annibale, che spiega il suo ragionamento per risolvere la prima parte del problema, e le immagini del suo schermo (Fig.7), con le esplorazioni svolte nell'ambiente GeoGebra.

"*Prima di tutto ho trasformato il parallelogramma in un rettangolo muovendo il punto C e il punto D fino a formare quattro angoli retti. A quel punto ho notato che i due triangoli verdi sono uguali tra di loro, dato che hanno la stessa altezza e dato che il punto E divide a metà il lato del rettangolo ABCD in ED, la base del triangolo EDC e in EA, la base del triangolo EAB.*
Ho notato anche che i due triangoli verdi hanno la stessa altezza del triangolo rosso (CD = AB) e che le loro basi, se sommate, formano la base del triangolo rosso. Quindi, se sommati tra di loro, i triangoli verdi formano il triangolo rosso."

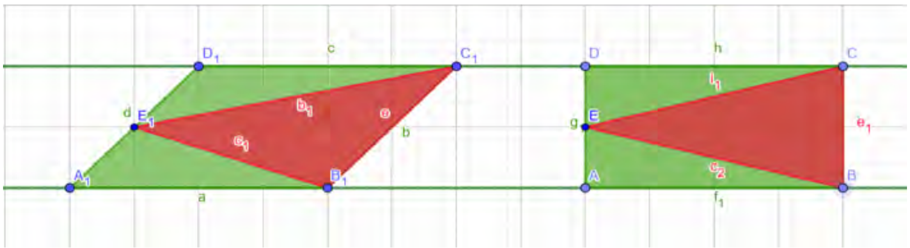


Figura 7. Immagine dello schermo di Annibale, che accompagna la sua proposta di soluzione della prima parte del secondo problema.

La proposta di Maurizio
Riportiamo la risposta scritta di Maurizio, che spiega il suo ragionamento per risolvere sia la prima che la seconda parte del problema:

"*Facendo finta che il quadrilatero sia un rettangolo, notiamo che i due triangoli verdi tra loro sono congruenti, e di conseguenza avendo la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti. Usando il principio di equiscomponibilità notiamo che unendo i due triangoli verdi, formiamo il triangolo rosso, dunque ogni triangolo verde è uguale alla parte opposta del triangolo rosso.*
Secondo me se il punto E si muove su AC, i due triangoli verdi, non sono più equivalenti e congruenti, ma vanno lo stesso a completare il triangolo rosso, dunque l'area dei triangoli non cambia.

CONCLUSIONI

Le attività presentate in questo contributo sono un esempio di ricaduta del lavoro svolto durante un modulo formativo per insegnanti, tenuto da ricercatori in didattica della matematica, sulla didattica in classe.
La proposta di problemi aperti, che richiedevano un'attività di esplorazione geometrica da condurre, preferibilmente, tramite il software di geometria dinamica GeoGebra ha consentito di raggiungere diversi obiettivi didattici. Innanzitutto, come abbiamo visto dagli estratti dei protocolli riportati, ha consentito ai ragazzi di condividere la propria proposta di soluzione con i compagni, mostrando anche l'attività svolta tramite la condivisione del proprio schermo. In questo modo, il fatto di svolgere la lezione in didattica a distanza non è stato un limite, anzi, ha probabilmente stimolato nuovi modi di interagire.
L'insegnante, durante lo svolgimento del primo problema, ha fornito alcune domande-aiuto, per indirizzare l'esplorazione degli studenti, dopo aver constatato che alcuni erano in difficoltà. Durante il modulo formativo si era infatti discusso di strategie per favorire la partecipazione di tutti gli studenti, come per esempio, "schede di aiuto", contenenti domande, rappresentazioni alternative del problema, ulteriori stimoli per la riflessione. Il termine "domande-aiuto" è stato però introdotto dall'insegnante stessa (la seconda autrice), a testimonianza della creatività e dello spirito di indipendenza che ha caratterizzato, in genere, la partecipazione degli insegnanti al modulo formativo e le loro sperimentazioni in classe.

RINGRAZIAMENTI

Le autrici desiderano ringraziare il Prof. Ferdinando Arzarello e la Prof.ssa Ornella Robutti, che hanno supervisionato la progettazione del modulo formativo per insegnanti, fornendo preziosi consigli per la proposta delle attività da sperimentare nelle classi.

BIBLIOGRAFIA

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (Eds.). (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario).* Matteoni Stampatore.
Arsac, G., Mante, M. (2007), *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.
Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. et al., (2002) A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34: 66.
Arzarello, F. (2016). Basing on an inquiry approach to promote mathematical thinking in the classroom. In Maj-Tatsis, B., Pytlak, M. & Swoboda, E. (Eds.), *Inquiry based mathematical education.* Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego. 9-20.
Arzarello, F. (2019). Variare le sensate esperienze per costruire le necessarie dimostrazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* vol.42 A-B, 5, 542-554.
Marton, F., Runesson, U., Tsui, A. (2004). The space for learning. In: Marton, F., Tsui, A. B., Chik, P. P., Ko, P. Y., & Lo, M. L. (Eds.) *Classroom discourse and the space of learning*. Routledge. 3-40

LE ROTAZIONI NELLA SCUOLA SECONDARIA: UN PERCORSO TRA FOGLI DI CARTA E GEOGEBRA

Francesco Nicolò Cutrone, Marcantonio de Candia, Giulia Marchese e Federica Mennuni
Dipartimento di Matematica – Università di Bari Aldo Moro
federica.mennuni@uniba.it

Abstract
In questo laboratorio si propone un percorso sulle rotazioni che può essere utilizzato nella Scuola Secondaria di Primo Grado ma anche, con minime variazioni, nella Scuola Secondaria di Secondo Grado. La caratteristica principale del percorso risiede nell'uso sinergico di strumenti manipolativi e digitali: le proprietà che emergono dall'interazione con i fogli di carta, le squadrette e il compasso, sono riprese e approfondite con l'ambiente di geometria dinamica GeoGebra e viceversa.
In accordo con la Teoria della Mediazione Semiotica (TMS), il percorso sulle rotazioni è costituito da cicli di attività di gruppo, basate sull'interazione con gli strumenti, e discussioni collettive finalizzate alla costruzione condivisa di significati. I partecipanti al laboratorio sono stati invitati a sperimentare alcuni passaggi chiave del percorso e a riflettere sull'efficacia della proposta e dell'uso sinergico degli strumenti in gioco. L'articolo si conclude con alcuni esempi di protocolli ed estratti di discussione tratti dai risultati di sperimentazioni didattiche del percorso.

Parole-chiave
Rotazioni, Scuola Secondaria, Teoria della Mediazione Semiotica, Strumenti manipolativi e digitali, Sinergia tra artefatti.

INTRODUZIONE

La presenza delle risorse digitali nella vita quotidiana e nelle pratiche didattiche odierne si diffonde esponenzialmente. Il loro uso condiziona direttamente le attività, le modalità di svolgerle e le concettualizzazioni a esse connesse. Nel contesto scolastico, sta crescendo costantemente l'attenzione rivolta agli ambienti di geometria dinamica come strumenti di costruzione dei concetti matematici. Soprattutto in questo periodo di emergenza sanitaria, ci si è interrogati sull'efficacia di questi strumenti, anche in contesti di didattica a distanza. In questo laboratorio si è proposto un percorso, che prevede l'utilizzo di strumenti digitali e non, incentrato sul concetto matematico di rotazione e su come introdurlo nella Scuola Secondaria sia di Primo che di Secondo Grado. Facendo riferimento alla Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008), il percorso laboratoriale è stato suddiviso in quattro cicli didattici, i quali, nell'ordine, hanno lo scopo di introdurre il concetto di rotazione come un movimento rigido, progredire verso il concetto di rotazione intesa come isometria, comprendere l'importanza del centro e dell'angolo di rotazione evidenziando alcune delle proprietà, caratterizzare il centro di rotazione. I primi due cicli sono stati pensati per essere svolti con strumenti manipolativi, quali fogli A4 e carta da forno, squadrette, riga, compasso e goniometro. Le proprietà che emergono dalle prime due attività diventano funzionali per lo svolgimento degli ultimi due cicli, i quali sono stati pensati per essere svolti nell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra sfruttando le potenzialità didattiche del software stesso. La scelta nell'uso degli strumenti manipolativi e dell'ambiente di geometria dinamica GeoGebra è supportata dai risultati delle ricerche che hanno mostrato come l'uso sinergico di strumenti di natura diversa ne possano potenziare l'efficacia didattica (Faggiano e Montone, 2019).

QUADRO TEORICO

La Teoria della Mediazione Semiotica

Lavorando sull'idea di mediazione semiotica introdotta da Vygotskij (1978), Bartolini Bussi e Mariotti (2008) hanno elaborato un modello che si focalizza sull'utilizzo da parte degli studenti di uno strumento specifico per svolgere un compito, portando lo studente all'appropriazione di un particolare concetto matematico. Il segno (oggetto intermedio nel rapporto stimolo-risposta) rappresenta una sorta di mediatore tra il soggetto e l'ambiente, favorendo il processo di interiorizzazione di un concetto.
Da questi presupposti, la TMS fornisce un modello del processo d'insegnamento e di apprendimento sviluppandosi attorno a due elementi chiave: il potenziale semiotico di un artefatto e la nozione di ciclo didattico.
Per potenziale semiotico di un artefatto si intende il rapporto sviluppatosi tra i significati matematici e individuali emersi dall'utilizzo dello stesso.
Una sequenza didattica può essere progettata come una iterazione di cicli, in ciascuno dei quali differenti tipologie di attività prendono posto, con lo scopo ultimo di pervenire al concetto matematico atteso. La fase iniziale di ciascun ciclo prevede lo svolgimento di un'attività semiotica, di un compito, svolto dagli studenti individualmente o in piccoli gruppi. La task può essere risolta attraverso l'uso di strumenti manipolativi o digitali e attraverso le potenzialità di tali artefatti iniziano ad emergere i primi segni, germi di significati matematici. Nella fase successiva, la discussione collettiva, il docente guida gli studenti verso l'evoluzione di tali segni, cogliendo gli interventi, le osservazioni, i gesti degli studenti e "rilanciandoli" per approfondire quanto da loro emerge e costruire sapere collettivo, condiviso dalla classe. In particolare, durante la discussione collettiva il docente può sfruttare in modo intenzionale il potenziale semiotico di un artefatto per favorire l'evoluzione da segni personali a segni matematici, secondo un preciso obiettivo didattico.
Il ruolo dell'insegnante è cruciale nel pensare situazioni che favoriscano la produzione di segni e la loro evoluzione verso significati matematici attraverso l'interazione con gli strumenti e la comunicazione fra e con gli studenti. Il docente ha il compito di predisporre le task da svolgere con l'uso degli strumenti e orchestrare la discussione collettiva col fine di mediare l'interazione degli studenti sia tra loro sia con il sapere matematico evocato dall'uso dello strumento. L'insegnante mediatore ha come obiettivo la costruzione dei processi di comunicazione e di decisione; guida lo sviluppo di strategie risolutive e ufficializza la conoscenza costruita nel corso dell'attività di classe. In quanto moderatore, l'insegnate rende scorrevole la discussione e stimola gli allievi ad interagire nonostante eventuali dubbi o incomprensioni.

L'uso sinergico di strumenti digitali e manipolativi

L'ipotesi principale alla base di questa proposta didattica è che dall'uso combinato di due artefatti di natura differente (in questo caso artefatti manipolativi e l'ambiente di geometria dinamica GeoGebra) possa emergere, a livello cognitivo, una sinergia tale da accrescere le funzioni di mediazione semiotica di ciascuno di essi, se usato singolarmente. In letteratura sono presenti diversi studi che mostrano la valenza didattica dell'utilizzo di più artefatti in una stessa attività. Maschietto e Soury-Lavergne (2013) hanno messo in evidenza come con un "duo di artefatti", costituito da un artefatto concreto/manipolativo e da un artefatto digitale, che fanno riferimento allo stesso oggetto matematico, è possibile ampliare e migliorare l'esperienza di apprendimento degli studenti. Faggiano, Montone e Mariotti (2018) hanno inoltre mostrato come, con una opportuna progettazione, sia possibile sfruttare la sinergia che si genera dall'uso alternato di artefatti di natura diversa, potenziandone il ruolo di mediazione e l'efficacia nella costruzione di significati.
Gli ambienti di geometria dinamica, come GeoGebra, risultano efficaci nella costruzione di significati matematici come strumento di mediazione. La loro caratteristica principale, infatti, è quella di permettere agli studenti di indagare, elaborare e interpretare le proprietà di specifici oggetti matematici attraverso l'interazione e la manipolazione. Di fatto, per gli studenti, questo tipo di approccio consente di formulare delle congetture e sviluppare tecniche risolutive, a seguito di una crescita in consapevolezza circa le relazioni matematiche che sussistono nei processi matematici coinvolti.

DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ

Il percorso, che con gli opportuni accorgimenti può essere sviluppato in vari ordini di scuola, è strutturato in quattro cicli didattici e si pone l'obiettivo di sfruttare il potenziale semiotico degli strumenti manipolativi e digitali e la possibile sinergia che si genera tra di essi. In particolare, i primi due cicli sono caratterizzati dall'uso di strumenti manipolativi quali carta da forno, fogli a quadretti e A4, squadrette e compasso per costruire figure ruotate. Il terzo ciclo sfrutta le potenzialità di GeoGebra, con lo scopo di indirizzare gli studenti verso la scoperta delle proprietà della rotazione. L'ultimo ciclo didattico è caratterizzato dall'applicazione di queste proprietà per risolvere uno specifico compito che può essere svolto sia con strumenti manipolativi sia con GeoGebra.
Lo strumento che caratterizza le attività del primo ciclo è costituito dalla sovrapposizione di un foglio di carta da forno su un foglio bianco A4 su cui sono disegnati una bandierina, e due punti (P e Q). I due fogli sono tenuti assieme da un fermacampione (o uno spillo) puntato inizialmente nel punto P, che fungerà da centro di rotazione.
Agli studenti si chiede di:

- ricalcare sulla carta da forno la bandierina del foglio bianco utilizzando un pennarello nero;
- ruotare il foglio bianco in senso orario portandolo dalla posizione orizzontale a quella verticale, tenendo invece ferma la carta da forno;
- ricalcare sulla carta da forno la bandierina del foglio bianco, nella nuova posizione, utilizzando un pennarello rosso;
- riportare il foglio bianco nella posizione iniziale e spostare il fermacampione nel punto Q;
- ruotare nuovamente il foglio bianco in senso orario portandolo nella posizione verticale, e ricalcare la nuova bandierina, utilizzando un pennarello verde;
- riportare il foglio bianco nella posizione iniziale e poi ruotarlo ancora di un angolo a piacere, ricalcando la bandierina così ottenuta con un pennarello blu.

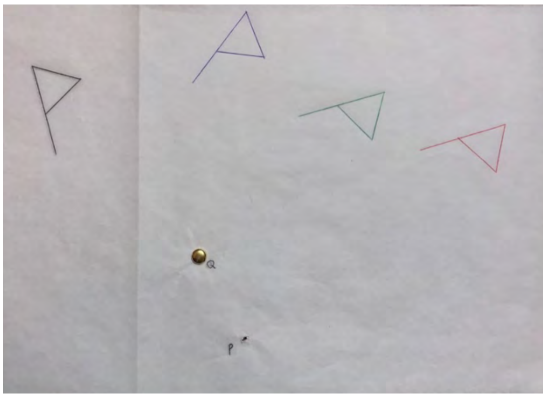


Figura 1: Strumento manipolativo utilizzato per svolgere l'attività del primo ciclo didattico

Ottenute sulla carta da forno le quattro bandierine in Figura1, quella nera di partenza e le tre colorate/ruotate, si chiede agli studenti di rispondere alle seguenti domande:

- come sono le bandierine colorate rispetto a quella nera?
- cosa hanno in comune e cosa hanno di diverso la bandierina rossa e quella verde? Perché?
- cosa hanno in comune e cosa hanno di diverso la bandierina verde e quella blu? Perché?

In accordo con la nozione di ciclo didattico nell'ambito della TMS, le risposte date dagli studenti a queste domande sono oggetto di discussione collettiva il cui obiettivo è quello di vedere la rotazione come un movimento rigido dipendente da un punto fisso, chiamato centro di rotazione, e da un angolo, detto angolo di rotazione e far emergere una prima proprietà fondamentale: le distanze dei punti delle bandierine colorate dal centro sono uguali a quelle dei corrispondenti punti della bandierina nera dallo stesso centro.

Nel secondo ciclo si chiede agli studenti di costruire la bandierina ruotata in senso orario di 90° di una bandierina iniziale disegnata su un foglio, rispetto ad un assegnato punto P, e di descrivere il procedimento di costruzione. Gli strumenti a disposizione sono: compasso, goniometro, riga e squadrette.
L'obiettivo della discussione al termine del secondo ciclo è quello di far evolvere negli studenti l'idea di rotazione, fino ad ora intesa come movimento rigido, verso la nozione di isometria. Per questo motivo è importante far riflettere gli studenti sulle proprietà che è necessario sfruttare per costruire la bandierina ruotata.
Si sottolinea che la costruzione richiede di riconoscere che per ottenere la bandierina ruotata occorre:
- individuare i quattro punti che caratterizzano la figura;
- tracciare le distanze dai 4 punti dal centro;
- costruire le circonferenze centrate in P aventi come raggio le rispettive distanze;
- disegnare le perpendicolari ai raggi tracciati, nel punto P;
- considerare le intersezioni tra circonferenze e rispettive perpendicolari;
- collegare le intersezioni ricavate.

Nell'eventualità che l'attività venga svolta con studenti che conoscano il software di geometria dinamica GeoGebra, si può richiedere loro di costruire la bandierina ruotata sfruttando l'artefatto digitale. Infatti, attraverso gli strumenti di GeoGebra (*Circonferenza-centro e punto, Retta perpendicolare, Segmento*) la costruzione precedentemente descritta può essere reiterata.
In alternativa, qualora il docente volesse introdurre GeoGebra ottimizzando simultaneamente i tempi, può decidere di utilizzarlo all'interno della discussione collettiva.
Il terzo ciclo didattico, come già specificato, richiede l'uso del GeoGebra. In particolare, occorre condividere con gli studenti un file in cui è presente una figura (per esempio ancora una bandierina), un punto P e uno slider α, che varia da 0° a 360°, tramite il quale si modifica l'angolo di rotazione (Fig. 2).

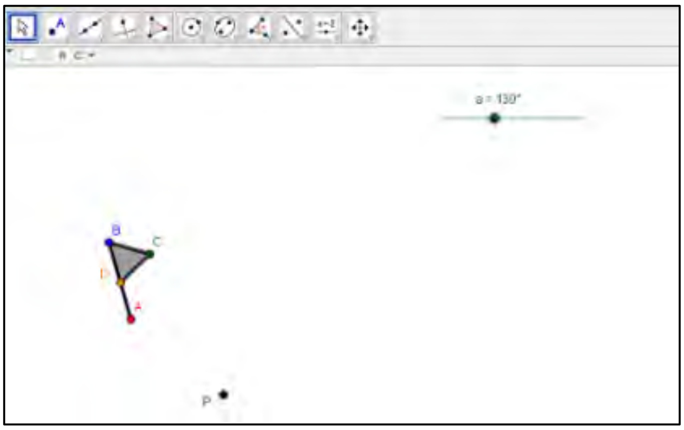


Figura 2.: Terzo ciclo didattico: seconda attività su GeoGebra

Si chiede agli studenti di costruire la figura ruotata con centro di rotazione P ed angolo α attraverso lo strumento "rotazione" e di rispondere alle seguenti domande:
- Attivare la traccia su A' e far variare l'angolo α attraverso lo slider. Cosa si può osservare?
- Disattivare la traccia su A' e spostare la bandierina di partenza. Cosa si può osservare?
- Spostare il punto P. Cosa si può osservare?

L'obiettivo di questa attività è quello di far comprendere l'importanza del centro e dell'angolo di rotazione, andando a mettere in evidenza alcune delle proprietà principali di questa trasformazione geometrica. La richiesta della costruzione della bandierina ruotata attraverso lo strumento "*rotazione*" fa emergere fin da subito la dipendenza dal centro e dall'angolo e soprattutto, evoca anche l'idea di rotazione come una corrispondenza fra punti.
Tutte le proprietà, che emergeranno durante le discussioni collettive al termine di ogni ciclo, saranno utili agli studenti per completare il quarto ed ultimo ciclo didattico dell'attività.

In particolare, nel quarto ciclo si chiede agli studenti di determinare il centro e l'angolo della rotazione che trasforma una nell'altra due bandierine, già presenti in un file GeoGebra.
In questa fase l'obiettivo è quello di caratterizzare il centro di rotazione come punto di intersezione di almeno due assi dei segmenti congiungenti coppie di punti corrispondenti. A tal fine è importante far emergere la proprietà che descrive l'asse del segmento come luogo geometrico di punti equidistanti dagli estremi del segmento.
Si sottolinea che per la costruzione è necessario:

- usare lo strumento *Segmento* per congiungere un punto della bandierina di partenza con il rispettivo punto ruotato e ripetere il procedimento per almeno un'altra coppia di punti;
- usare lo strumento *Punto medio o centro* per individuare i punti medi dei segmenti appena tracciati, e costruire gli assi dei segmenti utilizzando lo strumento *Retta perpendicolare*, oppure utilizzare lo strumento *Asse di un segmento;*
- riconoscere che il punto di intersezione tra i due assi ottenuti è il punto cercato.

Si può anche pensare di chiedere agli studenti di verificare che il punto trovato sia effettivamente il centro della rotazione assegnata.

ALCUNI RISULTATI DI SPERIMENTAZIONI DEL PERCORSO

Durante il laboratorio gli insegnanti partecipanti sono stati invitati a svolgere alcune delle attività di questo percorso al fine di discuterne l'efficacia in termini di costruzione del significato di rotazione.
In questa sezione mostriamo alcuni esempi di protocolli e di estratti di discussione delle sperimentazioni sul percorso didattico fatte con studenti sia di Scuola Secondaria di Primo Grado sia di Secondo Grado.
In particolare, di seguito analizziamo le discussioni collettive sull'attività del quarto ciclo didattico, svolte durante le due sperimentazioni del percorso didattico presentato.
Il primo esempio, discusso nella fase finale del laboratorio riguarda la discussione sull'attività del quarto ciclo didattico svolta con un gruppo di studenti di classe quarta di un liceo scientifico (Faggiano e Mennuni, 2020).
L'aspetto cruciale dell'estratto che segue è relativo alla determinazione del centro fatta "a occhio" da V. (Fig. 3):

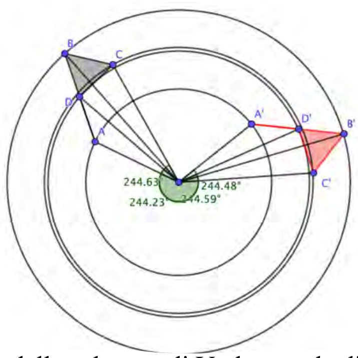


Figura 3.: Screenshot dello schermo di V. durante la discussione finale

V.: Ho per prima cosa disegnato una circonferenza che passasse per i punti A e A', però diciamo partendo da un centro qualsiasi; quindi, non ho preso un centro preciso, ho semplicemente disegnato una circonferenza partendo da un punto che ho considerato come centro e che passasse per A e A'. E così con le altre circonferenze… […]
Ins.: C'è una cosa che non ho capito: Il passaggio per i punti lo hai fatto ad occhio?
V.: Si… […] Si, l'ho fatto ad occhio, perché non avevo altre idee in quel momento.
V.: E poi ho unito A con questo punto che si chiama F se non sbaglio. AFA', DFD', CFC' e BFB' e ho calcolato l'angolo… Ora secondo me l'angolo esce, poco poco diverso…cioè i vari angoli si differenziano di pochissimo…

Come si vede dall'estratto e dalla Figura 3, V. ha prima preso un punto nel piano di GeoGebra e poi ha verificato se le proprietà erano ancora soddisfatte: ha disegnato prima le circonferenze con centro nell'ipotetico punto, facendole passare per i punti principali della prima figura e per i corrispondenti punti della figura ruotata. È stato quando V. ha verificato se gli angoli di rotazione ottenuti fossero tutti uguali che le sono sorti i dubbi sulla sua procedura.
Durante la discussione un altro studente ha spiegato all'insegnante di aver considerato il punto medio tra A e A', anche se ha capito poi che questo punto non poteva essere il centro di rotazione. Nonostante la titubanza degli studenti nel tenere in considerazione l'idea del suo compagno sul punto medio tra coppie di punti corrispondenti per determinare il centro di rotazione, gli studenti stessi erano consapevoli del fatto che, proprio a partire da questa osservazione, per determinare il centro era necessario dover ricercare un punto che fosse equidistante dalle due bandierine. A questo punto l'invito dell'insegnante ad utilizzare le proprietà della rotazione costruite con le attività dei cicli precedenti, ha spinto gli studenti, in particolare V., a determinare il centro sfruttandone l'equidistanza da coppie di punti corrispondenti (Fig. 4):

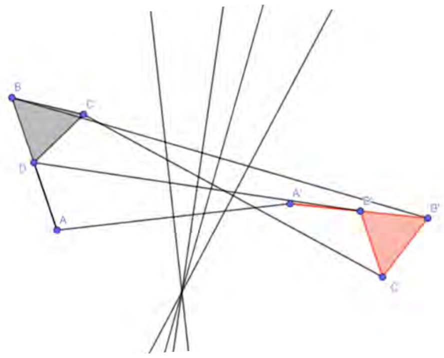


Figura 4.: Screenshot dello schermo di V. durante la discussione finale

V.: Noi Potremmo disegnare i segmenti AA', BB', CC' e DD'... e considerare l'asse del segmento per ciascuno di essi... Allora il centro dovrebbe essere... questo punto… [indica il punto di intersezione degli assi]
Ins.: Perché hai scelto questi quattro assi?
V.: Poiché… noi sappiamo che una delle proprietà della rotazione è quella della conservazione delle distanze dei punti delle due figure dal centro di rotazione, io ho pensato che… il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento AA', così come per gli altri segmenti, è l'asse del segmento. Quindi, se noi intersechiamo tutti gli assi dei segmenti, il punto che otteniamo potrebbe essere il centro di questa rotazione.

L'estratto sopra riportato mostra come V., a partire dall'osservazione sul punto medio e dalla sua consapevolezza circa la proprietà di equidistanza tra il centro di rotazione e le coppie dei punti corrispondenti, sia passata a considerare direttamente il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi dei segmenti che congiungono le coppie di punti corrispondenti delle due figure.

Un secondo esempio riguarda ancora la discussione sull'attività del quarto ciclo didattico, svolta però con una classe seconda di Scuola Secondaria di Primo Grado. L'estratto che segue mostra come anche gli studenti più piccoli siano riusciti ad individuare il centro come punto di intersezione tra gli assi dei segmenti congiungenti coppie di punti corrispondenti:

R.: … tracciando per esempio un segmento tra B e B' e anche con A e A' e C e C'
Ins.: Cosa me ne faccio di questi tre segmenti?
R.: Io traccerei le perpendicolari

P.: Per trovare il punto medio
Ins.: Il punto medio di cosa?
P.: Dei segmenti
Ins.: E a cosa serve il punto medio?
P.: Perché la perpendicolare passa per il punto medio e il punto P. O il contrario… Cioè… passa per il punto P la perpendicolare
Ins.: Allora vediamo. Comincio da A A'. Cerco il punto medio … ora cosa devo fare?
R.: Adesso bisogna anche tracciare le perpendicolari per tutti gli altri segmenti, e poi comunque dovrebbero intersecarsi tutte
P.: Eh… in un unico punto, che sarebbe il punto P
Ins.: E perché si incontreranno in un unico punto?
P.: Questa già passa per il punto P
I.: Eh, però non so ancora dov'è il punto P
P.: Bisogna farlo ancora con gli altri segmenti…Così si intersecano e si trova il punto P

L'estratto sopra riportato mostra come, a differenza delle osservazioni fatte dagli studenti più grandi, in questo secondo caso gli studenti R. e P. siano stati capaci di caratterizzare il centro di rotazione come il punto di intersezione delle rette perpendicolari passanti per i punti medi dei segmenti congiungenti coppie di punti corrispondenti. Queste osservazioni sono emerse durante le discussioni collettive sulle attività dei cicli precedenti in quanto gli studenti hanno scoperto la conservazione delle distanze tra il centro di rotazione e coppie di punti di coppie corrispondenti. Di conseguenza, congiungendo tra loro questi punti con il centro di rotazione e tra loro, gli studenti hanno osservato che i triangoli che si ottengono risultavano essere triangoli isosceli e quindi la retta perpendicolare per il punto medio del segmento congiungente i punti corrispondenti delle due figure (ovvero l'asse) passerà per il centro di rotazione ("*la perpendicolare passa per il punto medio e il punto P. O il contrario… Cioè… passa per il punto P la perpendicolare*").

CONCLUSIONI

Gli esempi mostrati ci permettono di far luce sul fatto che è possibile costruire corretti significati matematici sfruttando l'uso sinergico tra diversi strumenti manipolativi e digitali. Infatti, l'attività sulla ricerca del centro di rotazione tra due figure su GeoGebra rappresenta un chiaro esempio di come l'attività manipolativa fatta con carta da forno, squadra, fogli di carta e compasso sia perfettamente in sinergia con quella fatta con lo strumento digitale.
Nonostante gli studenti stessero lavorando sul GeoGebra, essi hanno riportato alla mente la proprietà di equidistanza del centro dai punti delle due figure ruotate ottenuta sul foglio di carta grazie all'uso del compasso, proprietà che nelle fasi successive del percorso didattico si è evoluta con il dover utilizzare l'asse del segmento per ricercare il centro. Il lavoro con l'artefatto manipolativo ha dato così significato a quanto fatto con il GeoGebra e viceversa: lo strumento digitale ha permesso di ripensare ai segni emersi nelle attività precedenti, dando così maggiore senso e significato alle proprietà fondamentali della rotazione, utilizzate anche nelle varie costruzioni, trasformandole poi negli unici strumenti capaci di aiutare gli studenti nell'individuazione del centro (trovare il centro manipolando le proprietà costruite con le attività precedenti).
Inoltre, il percorso e gli esempi presentati mettono in evidenza come il ruolo dell'insegnante risulti essere fondamentale in ogni aspetto riguardante non solo la progettazione di ogni attività caratterizzante i cicli didattici, ma anche la sperimentazione in classe. Infatti, se l'insegnante è consapevole della possibilità di costruire significati matematici attraverso percorsi laboratoriali, sia in contesti di didattica a distanza sia nella usuale pratica didattica, può sfruttare nel migliore dei modi l'uso sinergico di diversi strumenti manipolativi e digitali.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano gli studenti del corso di "Strumenti metodologici e tecnologici per la didattica della matematica" (LM in Matematica) dell'Università di Bari Aldo Moro –a.a. 2020-2021– nell'ambito del quale il percorso didattico è stato progettato e sperimentato presso l'Istituto Comprensivo Palazzo Salinari di Montescaglioso (MT).

BIBLIOGRAFIA

Bartolini Bussi, M.G. e Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). New York: Routledge.

Faggiano E., e Mennuni F. (2020) Constructing mathematical meanings with digital tools: design, implementation and analysis of a teaching activity in a distance education context, *IxD&A Journal - Interaction Design & Architecture(s)*, **46**, 156-174

Faggiano E. e Montone A. (2019) Artefatti digitali e artefatti manipolativi in sinergia: il ruolo di GeoGebra. *Atti del VIII Convegno Nazionale DI.FI.MA 2017*, 46-58

Faggiano E., Montone A. e Mariotti M. A. (2018), Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **49**.**8**, 1165-1180

Maschietto, M., e Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM* **45(7)**, 959-971

UN ESEMPIO DI LABORATORIO DIDATTICO ITINERANTE CON L'UTILIZZO DI GEOGEBRA: GRAFICI A DISPERSIONE, DIAGRAMMI CARTESIANI E A BOLLE

M.L. Pedrinazzi, G. Lucchese
Ministero dell'Istruzione, Mathesis Bergamo
francesca5551@msn.com

Abstract
Nella prima parte dell'articolo spiegheremo questa nuova forma di didattica laboratoriale, che ha già avuto numerose applicazioni in Italia e non solo, che vede la collaborazione fra esperti, docenti e studenti appartenenti a diversi Istituti scolastici: il laboratorio itinerante o diffuso.
Nella seconda parte mostreremo la progettazione di un laboratorio itinerante, il cui obiettivo è mettere a frutto quanto appreso nella matematica del primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado per imparare a costruire un modello matematico-statistico con Geogebra. Analizzeremo nuovi oggetti e tecniche tipici della matematica applicata: il diagramma a dispersione, la nuvola di punti e il suo baricentro, i valori anomali e mancanti, estendendo il caso di distribuzioni di dati da due a tre variabili. Questi concetti non trovano largo spazio nei manuali scolastici: diventa necessaria una sistematizzazione, una condivisione di definizioni e scopi tra docenti di scuole diverse. A tal fine rimandiamo il lettore al lavoro di prossima pubblicazione in cui viene approfondito il tema della metodologia laboratoriale in matematica fra diversi Istituti.
In questo workshop i modelli scelti per le applicazioni in Geogebra riguardano la relazione tra peso e allungamento, l'andamento delle temperature medie annue e quindi il fenomeno del cambiamento climatico, la relazione fra tempo (in anni) e temperature (in gradi centigradi). Si parte dalla costruzione del diagramma di dispersione in Geogebra che può esser realizzata sia in modo automatico, tramite lo strumento "analisi bivariata", sia in modo personalizzato, utilizzando la vista grafici e l'opzione "Crea lista di punti". Nel caso di tre variabili siamo invece "costretti" a creare un diagramma a bolle utilizzando lo strumento circonferenza per rappresentare l'intensità di uno dei tre caratteri osservati. Lo studente ha la possibilità di sperimentare e creare rappresentazioni per lo studio della covariazione e del legame esistente tra due o tre variabili, sfruttando quanto appreso sul piano cartesiano e sulla rappresentazione di punti.

Parole-chiave: Laboratori itineranti, Laboratori in matematica, Applicazioni in Geogebra, Grafico di dispersione, Nuvola di punti.

I LABORATORI ITINERANTI: LE ESPERIENZE DEGLI ULTIMI ANNI

Questa forma di laboratori negli ultimi anni ha avuto numerose applicazioni, coinvolgendo una pluralità di soggetti nel mondo della scuola, tra cui evidenziamo:
- la sperimentazione del Ministero dell'Istruzione in Italia, (LS-OSA Miur, 2013), avente obiettivo portare nei licei scientifici esperimenti, strutturati in kit, di fisica, chimica e biologia, realizzati anche senza un laboratorio vero e proprio, cioè stabile nella scuola, tenuti da docenti universitari del Dipartimento di Scienze dell'Università Roma Tre, organizzati nelle scuole partecipanti al progetto con la partecipazione attiva dei docenti degli Istituti Scolastici;
- la sperimentazione dell'Università dell'Algarve (2011): "The Mobile Molecular Genetics Laboratory" (Lab-IT, 2020), avente obiettivo promuovere e collaborare nell'insegnamento della genetica molecolare, argomento che fu introdotto nei curricoli dell'istruzione secondaria dalla riforma portoghese dei programmi di biologia;

- l'azione didattica dei laboratori itineranti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, organizzati dal Dipartimento delle Scienze Umane dell'Università dello Stato di Bahia. La finalità di questi laboratori era stimolare la curiosità e l'interesse degli studenti riguardo la matematica, tramite la diffusione di giochi ed enigmi, e diffondere relazioni tra scuole e università, ricercando strategie innovative di tipo itinerante;
- la metodologia dei laboratori itineranti organizzata della Fondazione Edmund Mach per l'analisi sensoriale degli alimenti;
- il progetto di divulgazione scientifica rivolto agli studenti e agli insegnanti delle Scuole elementari e Medie superiori italiane della CNI, intitolato I-SMS, Italian Science Moving in School, (I-SMS, 2019).

Il museo della scienza interattivo e sperimentale di Trieste svolge dal 2019 laboratori interattivi che abbracciano tutti i campi della scienza. Il progetto, promosso dall'Unione Italiana di Fiume, assieme al Dipartimento di Scienze della Vita dell'Università di Trieste, in collaborazione con il Museo della scienza interattivo e sperimentale del Friuli-Venezia Giulia, ha dato l'occasione alle scuole della CNI di ospitare tali laboratori direttamente in classe.
Iniziative simili sono state introdotte dall'Università di Roma Tre e dalla Provincia di Roma nel 2011. La lista non vuole esser assolutamente esaustiva. Tutti questi laboratori hanno riportato risultati incoraggianti e ciò dimostra come la didattica di tipo laboratoriale stia progredendo nel tempo e potrà finalmente passare da eventi sporadici all'interno della didattica a una e vera e propria didattica organizzata, non soltanto nelle materie di Fisica, Chimica e Biologia ma anche in Matematica e in altre discipline. Il tutto, coinvolgendo diversi soggetti appartenenti a contesti educativi del territorio (vedere i link riportati nella bibliografia e sitografia).

IL LABORATORIO DIDATTICO IN MATEMATICA

In Matematica il laboratorio didattico è stato sperimentato nelle scuole italiane anche grazie a progetti ministeriali, tesi a risolvere i problemi riscontrati nelle indagini valutative nazionali e internazionali. Questa didattica alternativa ha precisi obiettivi formativi, tesi alla contestualizzazione dei problemi matematici. Il forte legame con altre discipline si traduce nell'affrontare problemi di realtà nelle scienze sia umane sia naturali.
L'ambiente laboratoriale in Matematica non richiede sovra-strutture complesse, come un apposito spazio diverso da quello della solita aula o un tecnico specializzato, tipiche delle scienze naturali, della chimica e della fisica. Non richiede nemmeno materiali e strumenti costosi. Spesso si tratta di un laboratorio povero, il quale stimola la fantasia dello studente e lo spinge a cercare di comprendere qual è il fine dell'attività condotta e per quale motivo si sono usati proprio determinati materiali per eseguirla. Il laboratorio povero induce a riflettere su ciò che si fa, sul perché e sul come, divenendo così uno strumento per l'apprendimento consapevole e duraturo. Ha il pregio di essere uno strumento molto accattivante: suscita interesse e curiosità negli studenti che sono entusiasti di sperimentare questa nuova modalità di approccio alla didattica. Si vedano ad esempio le varie esperienze realizzate dall'Associazione per l'insegnamento della Fisica nella sitografia (AIF, 2021).
Richiede però un'organizzazione differente dalla solita "lezione frontale", in cui gli studenti possano sperimentare un nuovo modo di partecipare alla didattica. Fondamentale è il ripensamento del curricolo, in un'ottica di flessibilità dello stesso: un curricolo meno "statico" e meno "certo". Il docente è colui che deve affidare alle novità didattiche la creazione dei presupposti per fare in modo che lo studente possa mettersi in relazione con soggetti "diversi" da sé e dimostrarsi disponibili all'ascolto delle ragioni altrui, al rispetto, alla tolleranza, alla cooperazione e solidarietà (si veda il Profilo Educativo, culturale e professionale dello studente alla fine del primo ciclo di istruzione, 6-14 anni, Decreto Legislativo n.61/2017).
La didattica laboratoriale negli ultimi anni ha coinvolto anche altre materie non storicamente "laboratoriali" e per quanto riguarda la matematica il passaggio è risultato più semplice rispetto, ad esempio, alle materie umanistiche (Marconato, 2019 e Pavan, Santovito, 2014).
Alcuni laboratori in matematica sono tesi a raggiungere competenze in campo digitale, con l'uso di calcolatrici, di software di geometria dinamica o di applicazioni specifiche in campo matematico. Altri

prevedono la manipolazione di oggetti, elemento fondamentale del laboratorio, o l'uso di strumenti come il *Geopiano*. L'ambiente didattico scelto, quello di Geogebra, è sicuramente idoneo a incentivare l'uso di visualizzazioni grafiche e alla manipolazione di strumenti dinamici, offrendo strumenti di analisi statistica che sviluppano analisi sui dati e loro rappresentazioni in modo autonomo. In particolare, gli strumenti analisi univariata e bivariata portano alla costruzione del grafico di dispersione.

LE NOVITA' INTRODOTTE NEI LABORATORI ITINERANTI

Il laboratorio itinerante in matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici da condividere tra il team docenti e il gruppo classe. Il laboratorio coinvolge persone (studenti e insegnanti, ma anche esperti del mondo del lavoro), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni) e tecnologie come Internet e le classi virtuali (vedi fig. 1).
Riprendendo le idee già sviluppate nei laboratori del passato, l'ambiente del laboratorio itinerante è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti, in cui gli allievi lavoravano insieme ai maestri e ai pittori meno conosciuti e portavano nuove idee e bisogni.
Molte esperienze realizzate negli anni recenti già prevedevano questa evoluzione, andando a lavorare non soltanto sulla semplice pratica didattica ma anche sulla scelta di temi formativi per i docenti e innovativi per gli studenti. Nell'esperienza dei laboratori di Matematica, condotti per il progetto M@t.abel, già nel 2003 si evidenziava che: "*…la costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti d'uso nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte*." (Arzarello F., Bernardi C., Borgi R. e altri, 2012).
Il laboratorio itinerante è assimilabile ad un "workshop" aperto a vari soggetti; è dunque, un'occasione per confrontarsi non solo tra pari, ma anche tra docenti ed esperti esterni mettendo a confronto le esperienze, i saperi e anche il lavoro di ricerca/apprendimento sviluppato in passato e ora utilizzato come forma mentis che si traduce in pratica didattica e di ricerca/apprendimento continuo.
Nel prossimo capitolo andremo a delineare il laboratorio itinerante che include applicazioni in Geogebra.

GLI OBIETTIVI DI UN LABORATORIO DIDATTICO ITINERANTE

Il laboratorio didattico itinerante è una delle ultime forme laboratoriali nate in diversi contesti in Portogallo, Spagna e in Italia, che hanno visto una cooperazione tra scuola secondaria e università. Si svolge in modalità "blended" e ciò è solo in parte dovuto all'accelerazione della diffusione di metodologie a distanza causata dalla pandemia di Sars-Covid2. Il lavoro organizzativo, agevole in modalità a distanza, facilita il coinvolgimento di soggetti distanti fisicamente anche molti chilometri.
In questa didattica, oltre i docenti formatori del laboratorio, sono soggetti e strumenti attivi (vedi fig. 1):

a) strutture e docenti universitari che possono lavorare in presenza o a distanza per creare materiali e fornire la formazione sia sulle discipline coinvolte sia sulla didattica laboratoriale e inclusiva;

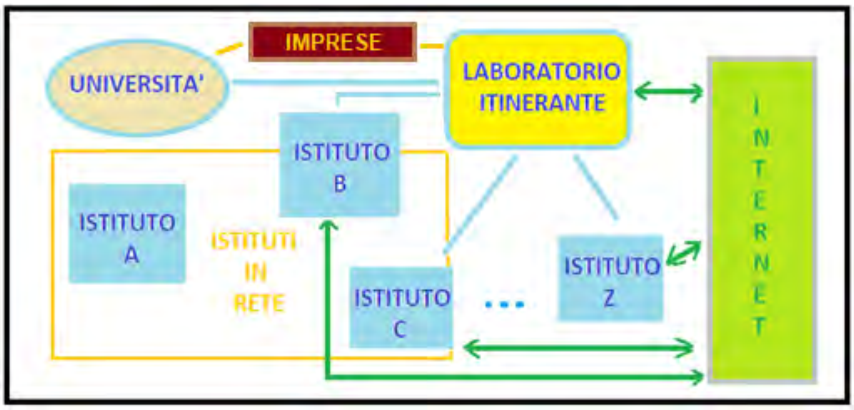


Figura 1. Istituzioni e soggetti che possono essere coinvolti nell'azione didattica di un laboratorio itinerante. Le frecce indicano le relazioni caratteristiche e necessarie dei laboratori itineranti.

b) esperti esterni appartenenti al mondo del lavoro che hanno laboratori mobili oppure la capacità di formare nell'uso di laboratori specifici (si pensi ad un chimico specializzato che lavora in un'azienda);
c) docenti degli Istituti coinvolti - quest'ultimi possono trovarsi anche in reti di ambito nate per condividere formazione e progetti tra Istituti diversi;
d) studenti delle scuole partecipanti, in singole classi o in gruppi classe;
e) materiali e strumenti digitali condivisi in Internet.

Gli obiettivi caratterizzanti questa forma di laboratorio sono:

a) supportare le scuole, gli studenti e i docenti, nella formazione e diffusione di concetti relativi a discipline matematiche e scientifiche;
b) far entrare in contatto docenti ed esperti provenienti da Istituti e aziende differenti e operanti nella stessa disciplina in contesti a volte simili a volte differenti;
c) fornire materiali per la sperimentazione di nuove didattiche nelle discipline STEM;
d) innovare la didattica tramite compresenze eco-formazione, mettendo in contatto diverse figure professionali e realtà del territorio;
e) valutare le competenze degli studenti in maniera trasversale.

Il laboratorio itinerante condensa il momento della didattica laboratoriale con quello della formazione e della condivisione dei saperi tra soggetti appartenenti ad Istituti diversi, trasformando la didattica laboratoriale "classica" in "dinamica" (da qui la parola "itinerante" usata per caratterizzare questo tipo di laboratori). In questo modo, sia gli studenti sia gli insegnanti ed esperti partecipano a quel processo innovativo deficitario nel mondo della scuola attuale.

Quando si include anche l'uso di un software come Geogebra, il laboratorio punta alla formazione congiunta su strumenti digitali per la matematica e sui temi innovativi della disciplina. Molti corsi di aggiornamento sono finalizzati solo alla formazione dell'insegnante, senza considerare che essa dovrebbe riguardare anche quelle pratiche didattiche (le cosiddette "buone pratiche") dell'azione in classe. L'ideale è rendere l'applicazione di Geogebra uno strumento didattico centrale nei curricoli per sostituire l'uso di calcolatrici grafiche, laddove questo non fosse possibile, e che metta sullo stesso piano l'approccio numerico, algebrico e grafico. Le competenze visuo-spaziali, definite come l'insieme delle capacità di rappresentare, trasformare, generare e recuperare informazioni simboliche di tipo non linguistico, sono carenti in coloro che presentano difficoltà di elaborazione degli input visivi di una certa complessità. Questi studenti incontrano difficoltà nelle materie scolastiche che richiedono capacità di rappresentazione, di memorizzazione visiva, di riconoscimento di forme geometriche, di allineamento dei numeri, di sintesi verbale, ecc. e spesso gli stessi presentano difficoltà di percezione, di coordinazione psicomotoria, di adattabilità e di orientamento nello spazio (vedi Johnson, Johnson, 1996 e Meli, 2019).

IL LABORATORIO DIDATTICO ITINERANTE CON APPLICAZIONI IN GEOGEBRA

LE FASI DEL LABORATORIO

In fig. 2 sono riportate le tre fasi principali del laboratorio intervallate dalla produzione di materiali idonei all'attuazione del laboratorio, le "schede-docente" e "schede-studente". Come in tutti i laboratori, esse sono uno strumento importante ai fini della conduzione e del mantenimento di un buon ritmo delle attività; per Geogebra contengono non solo i contenuti matematici ma anche le indicazioni per poter utilizzare il software.
Nella prima fase, i docenti formatori preparano e organizzano la piattaforma digitale su cui verranno inseriti i materiali da condividere con docenti e studenti della scuola in cui verrà svolto il laboratorio. Selezionano gli articoli scientifici, i vari riferimenti bibliografici e sitografici utili per la conoscenza da parte dei docenti degli obiettivi da raggiungere nell'attività in classe. Individuano poi il tema, i contenuti e le modalità della didattica. In questa fase preliminare, che si può svolgere in presenza o a distanza in 2-4 ore, il lavoro è svolto fra docenti formatori e di Istituto. Si studiano i prerequisiti, si stabilisce il setting scolastico, la tipologia di lavoro in gruppo o con studenti singoli, si progettano le successive fasi.

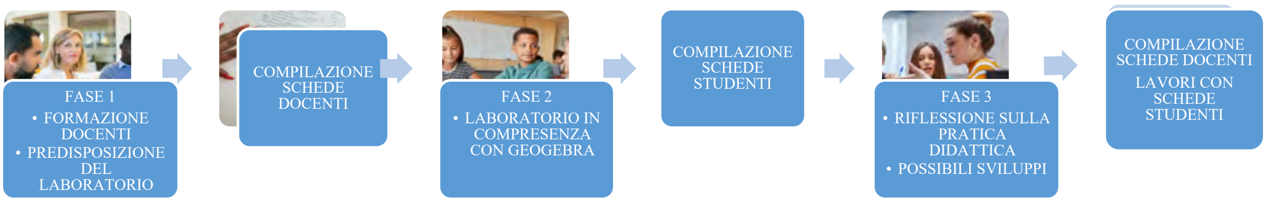


Figura 2. Le tre fasi del laboratorio didattico itinerante con l'utilizzo di Geogebra.

L'utilizzo di Geogebra in gruppo, che è inteso a promuovere il "collaborative learning", può prevedere il ruolo di "informatico" ovvero colui che, responsabile del computer, inserisce e gestisce l'applicazione con l'aiuto degli altri componenti del gruppo. Nella seconda fase, si svolge l'attività in Istituto con gli studenti. Inizialmente si spiegano gli obiettivi da raggiungere e le modalità di svolgimento dell'attività stessa. È importante dare le definizioni chiare degli strumenti applicativi che si fondano sulle nozioni di matematica apprese dagli studenti nel programma svolto precedentemente con il docente di classe. Questa fase, nella quale si incontrano tutte le figure attive e si adottano gli strumenti digitali e non solo, è permeata da una didattica attiva e inclusiva. Possono trovar spazio sia il lavoro in gruppi di tipo collaborativo sia l'uso di tecnologie e applicazioni per la condivisione dell'apprendimento (test online). L'attività può esser svolta anche in lingua straniera per il "CLIL".
Nella terza fase, si analizzano i materiali prodotti dagli studenti e si mettono in relazione alle schede docente precedentemente compilate. Si compilano le schede finali dei docenti di classe. Il fine è quello di predisporre un focus group sulla didattica sperimentata e sui possibili sviluppi futuri (ad esempio, la ripetizione di didattica laboratoriale a cura del solo docente di classe o di un team interno all'Istituto).

COMPETENZE, ABILITA' E CONOSCENZE DEL LABORATORIO ITINERANTE

Le competenze chiave per l'apprendimento permanente sono una combinazione di conoscenze, abilità e attitudini appropriate al contesto. In particolare, sono necessarie per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione (G. Tallini, 2016).
In fig. 3 vediamo quali delle otto competenze chiave possono entrare in gioco in una didattica laboratoriale in campo matematico-statistico. Anche la competenza multilinguistica potrebbe trovar spazio all'interno di laboratori itineranti ma solo se svolti in modalità CLIL. L'uso di un software di matematica dinamica o di una calcolatrice grafica stimola le competenze digitali e produce rappresentazioni "non convenzionali", non di solo oggetti geometrici, ma anche di grafici e indicatori in Statistica (Maracci, 2016). Geogebra, con quasi 20 anni di storia, può contribuire a evidenziare le

differenze dell'approccio didattico della statistica basato principalmente sul foglio di calcolo con quello più matematico basato sullo studio di modelli.

Figura 3. Le competenze chiave europee coinvolte e valutabili nella didattica laboratoriale itinerante.

Per quanto riguarda l'argomento scelto per la progettazione, ovvero la rappresentazione di una nuvola di punti e della relazione fra due o tre variabili, gli autori hanno scelto questo tema poiché offre molti spunti per il dibattito su ipotesi e tesi di un modello, è stimolo di idee intorno al concetto di adattamento "ottimale", si presta per il lavoro di gruppo e la condivisione di scelte operative (R. C. Magel, 1996 e 1998, R. De Cristofaro, 2002).
Ma quali sono i temi ideali da trattare in un laboratorio itinerante in matematica? I temi che necessitano di una formazione adeguata poiché non perfettamente allineati ed in continua evoluzione, che vedono applicazioni delle conoscenze e abilità dell'algebra, delle funzioni e relazioni e della geometria. Sono preferibili temi legati al "problem solving", alla matematica del cittadino con una diffusione a livello internazionale, i temi con problematicità rilevate dalle indagini nazionali e internazionali. I risultati delle prove INVALSI, confermati da quelli delle prove OCSE PISA, mostrano che l'educazione scolastica in ambito matematico non sembra fornire agli allievi italiani adeguata padronanza concettuale e adeguate competenze applicative, soprattutto nel reale. Gli studenti apprendono regole, non concetti, e le applicano acriticamente. La branca matematica della Statistica rappresenta bene la necessità di costante formazione del corpo docente in quanto la Statistica si sviluppa rapidamente e modifica costantemente il proprio linguaggio nel corso degli anni.

L'ATTIVITA' IN CLASSE DEL LABORATORIO

Essendo il tema scelto riguardante la Statistica descrittiva si possono delineare le diverse modalità di laboratorio a seconda, non solo dell'anno e dell'indirizzo della classe a cui sottoporre l'attività, ma anche in base ai contenuti già svolti del programma di Matematica. L'uso di Geogebra può essere individuale o di gruppo.
Lo studio delle relazioni tra due variabili viene affrontato già nel primo ciclo scolastico dal punto di vista delle funzioni e del piano cartesiano. Anche la statistica descrittiva viene già introdotta agli studenti nel primo ciclo e nel primo anno del secondo ciclo. L'analisi della connessione e correlazione fra due caratteri qualitativi o quantitativi viene inclusa nei testi scolastici matematici italiani del terzo anno come naturale estensione di un primo modulo di Statistica descrittiva svolto nel primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado. Nei testi del secondo biennio viene spesso seguita una linea progressiva che parte dalla covarianza, passa per la correlazione fino ad arrivare alla regressione e alla misura della bontà di adattamento (vedi fig. 4).
Gli studenti vengono portati ad individuare alcuni strumenti necessari per un'analisi bivariata e trivariata di dati, fino ad arrivare a costruire i diagrammi di dispersione, cartesiani e a bolle per lo studio sulla retta del miglior adattamento. Sebbene questi temi risultino più volte non svolti nei primi gradi del

secondo ciclo, riteniamo di "insistervi" affinché sia possibile un'applicazione in statistica di strumenti matematici già noti ma solamente teorici. Anche nelle linee guida negli USA si specifica che uno studente del grado otto dovrebbe iniziare a studiare l'argomento e dovrebbe sapere che la retta viene spesso usata per modelli relazionali tra due variabili (CCSSI 2010, Journal of Statistics Education, Volume 23, Number 1, 2015) e dovrebbe usare diagrammi di dispersione per misurare informalmente la vicinanza dei dati alla retta di adattamento.
L'adattamento informale o intuitivo non tiene conto dei metodi di regressione come quello dei minimi quadrati ma di metodologie più semplici: del valor medio o di metodologie basate su concetti basilari della matematica.

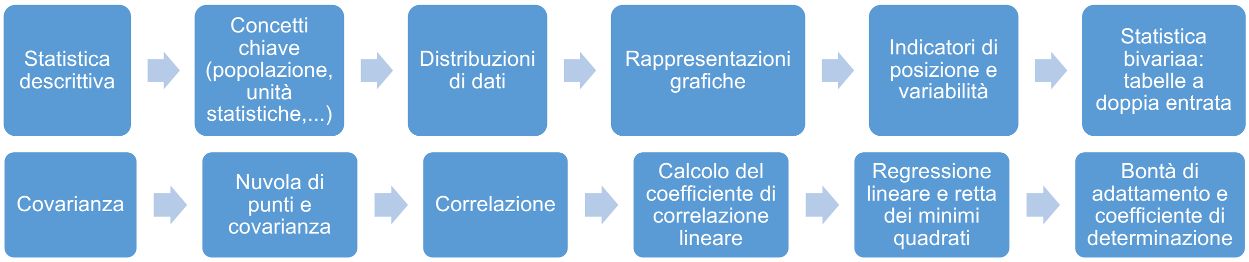


Figura 4. Fasi e contenuti nel primo ciclo (in alto) e nel secondo ciclo (in basso) delle unità didattiche in Statistica descrittiva e sull'adattamento tramite retta di una nuvola di punti.

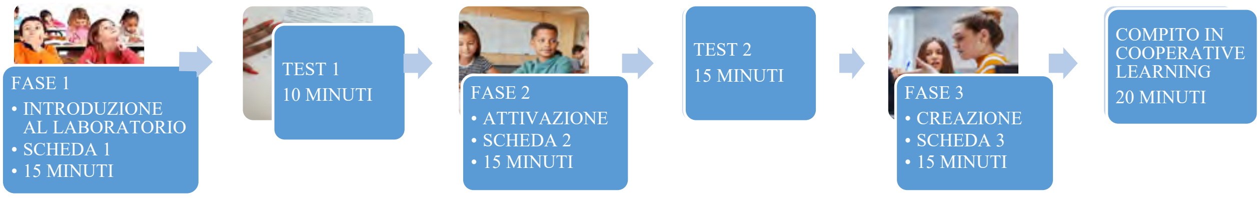


Figura 5. Le azioni e i tempi per ognuno dei due interventi nella classe

Il tema scelto è quindi basato a rinforzare l'uso di metodologie matematiche per lo studio di relazioni tra due o tre variabili, introducendo definizioni e strumenti statistici come il diagramma di dispersione o "scatterplot", la nuvola di punti, i valori anomali, il diagramma cartesiano e quello a bolle o "bubble chart". La predisposizione della scheda uno negli argomenti svolti dalla classe terrà conto, non solo dei temi in Statistica, ma anche dei vari contenuti matematici in Relazioni e Funzioni e Geometria analitica, fondamentali per la comprensione degli strumenti statistici del diagramma di dispersione, della nuvola dei punti e della retta del miglior adattamento. La seconda scheda docente raccoglie i desiderata dell'insegnante di classe su vari aspetti del laboratorio. Vi è la possibilità di utilizzare altre schede fornite dall'associazione per la continuazione in classe del laboratorio a cura del solo docente della disciplina, oppure l'assegnazione domestica di "schede compito" con approfondimenti ed esercizi sull'esperienza svolta in Istituto. Anche questo tipo di attività viene registrata e seguita dai formatori.
L'intervento in classe (da svolgere in presenza o a distanza, tempo 2 ore, vedi fig. 5) prevede l'utilizzo individuale o di gruppo delle schede lavoro. Nelle schede studente da 1 a 4 sono riportati i vari passi del laboratorio pensato per una classe terza di un Istituto di scuola secondaria di secondo grado. Nella prima scheda si riportano i dati di un esperimento in Fisica sull'allungamento di una molla sottoposta a differenti pesi; sono centrali i concetti di variabile dipendente e indipendente per la costruzione di un modello/funzione coerente.
Inoltre, si predispone la costruzione del diagramma di dispersione per la lettura della relazione tra le due variabili osservate in Statistica. Il diagramma di dispersione, o grafico di dispersione, è uno strumento della statistica bivariata che riprende il piano cartesiano e lo utilizza ai fini della rappresentazione di punti *(x,y)* osservati. Nella predisposizione è necessario: 1) utilizzare delle scale per gli assi che rientrino nei domini dei valori di *x* e *y* osservati; 2) costruire una griglia che aiuti la lettura dei dati. Queste due

semplici regole devono esser osservate per una migliore lettura della relazione fra dati. Normalmente lo studente lavora sul piano cartesiano predisponendo scale semplici e monometriche.
Nella scheda uno si analizza anche lo stesso esperimento con prove ripetute. Ciò comporterà che nella nostra distribuzione dei dati ci saranno più valori di y assegnati allo stesso valore della x. In un modello ciò può esser dovuto ad errori casuali e/o sistematici. È interessante notare che soltanto in questi casi, con una pluralità di dati sui singoli valori della x, si darà vita a una rappresentazione nel diagramma a dispersione della cosiddetta "nuvola di punti". L'analisi di una nuvola di punti permette: 1) l'individuazione di "outlier" o valori anomali; 2) l'individuazione del tipo di relazione fra le variabili e conseguentemente del modello matematico che possiamo creare.
Nella seconda scheda sono forniti alcuni esempi di diagrammi "mal costruiti". Insieme agli studenti si cercherà di individuare i tratti salienti nella costruzione di un grafico di dispersione. L'obiettivo è stimolare lo studente a cogliere somiglianze e differenze fra questo grafico ed il piano cartesiano. Nell'ultima scheda si introduce il caso di tre variabili. Si predispone un'attività per la costruzione di un diagramma a bolle in Geogebra tramite attività "Classroom" con gli studenti o i gruppi collegati online per la realizzazione di un compito di realtà.

CONCLUSIONI

Negli ultimi anni la didattica laboratoriale si è diffusa fra vari Istituti ed è diventata un modo di fare formazione fra scuole diverse e mettere in contatto docenti e studenti di indirizzi e articolazioni diverse. Gli autori stanno lavorando ad una serie di laboratori per le scuole secondarie di primo e secondo grado sempre nell'area della statistica e probabilità in collaborazione con l'associazione Mathesis della provincia di Bergamo. Alla luce di quanto emergerà nel focus group finale sulla didattica sperimentata gli autori si ripropongono di effettuare un resoconto sul progetto, di valutare punti di forza e debolezza e predisporre eventuali azioni migliorative. Nel prossimo anno gli stessi raccoglieranno materiali per la valutazione del progetto ai fini della redazione di un ulteriore articolo scientifico che vada a completare la ricerca iniziata.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano l'associazione Mathesis Bergamo per la fiducia e il supporto fornito nella predisposizione e organizzazione dei laboratori didattici itineranti. Inoltre, ringraziano lo staff di DI.FI.MA. per l'aiuto nel predisporre e organizzare il workshop.
Tutte le schede inerenti al laboratorio oggetto dell'articolo (schede lavoro per studenti e insegnanti) sono disponibili su richiesta per email.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello F., Bernardi C., Borgi R. e altri (2012), "M@t.abel Matematica per gli studenti alla soglia del terzo millennio", INDIRE
Meli A. (2019), "La didattica laboratoriale. Una strategia per promuovere l'inclusione scolastica", Youcanprint Self-Publishing
Marconato G. (2019), "La didattica laboratoriale: esempi e modelli", Pearson
Tallini G. (2016), "La didattica laboratoriale. Progettazione e organizzazione", Academia.edu
D. W. Johnson, J.R.T. Johnson (1996), "Meaningful and manageable assessment through cooperative learning", edizioni Edina: Interaction Book Company
LS-OSA Miur, 2013, "Fare laboratorio". Link: https://www.miur.gov.it/lsosa-lab
LAB-IT, Progetto KCITAR finanziato dal consorzio Algarve STP-Algarve Systems and Technology Partnership, Portugal 2020 Program, ESF- European Social Fund University of Algarve, Link: https://www.ualg.pt/en/lab-it-itinerant-laboratory
Italian Science Moving in School – Laboratorio scientifico itinerante, ISM-S, 2019. Link: https://www.units.it/news/italian-science-moving-school

DI.FI.MA. 2021: Apprendimento Laboratoriale in Matematica e Fisica in Presenza e a Distanza.

Associazione per l'Insegnamento della Fisica, AIF, Esperienze di laboratorio povero e casalingo. 2021. Link: https://www.aif.it/esperienze-di-laboratorio-con-materiale-povero-da-realizzare-a-casa-o-in-classe/

M. Maracci (2016), Dipartimento di Matematica "F.Casorati", Università degli studi di Pavia, Intervento alla Scuola Estiva per Insegnanti UMI CIIM – AIRDM, "Competenze in matematica e curriculum verticale"

C. Pavan, G. Santovito (2014), "The laboratory didactics in the teaching – learning processes of life sciences. An educational project on microorganisms in the alimentation in primary school.", Proceedings of EDULEARN14 Conference 7th-9th July 2014, Barcelona, Spain

National Research Council (1997), "Science Teaching Reconsidered: A Handbook", The National Academies Press

APPROCCIO ALLA PROBABILITÀ

Marta Manassero (1) **Anna Maria Giugliano** (2)
(1) **Polo Tecnologico Imperiese, Imperia**
(2) **IISS ''Ruffini-Aicardi'', Taggia (IM)**
m.manassero@outlook.com

Abstract
Si tratta di un laboratorio matematico, originariamente progettato per gli istituti professionali (primo biennio – secondo anno), ma adattabile anche ad altri contesti, a partire dalla secondaria di primo grado. Esso si svolge attorno ad un gioco di sorte di origine hawaiana, chiamato Lu-lu. Lo spunto per l'attività è stato tratto da un laboratorio presentato a Difima 2019[22] ed è stato rielaborato ed approfondito, nonché correlato da prove di valutazione costituite da schede MERLO. Oggetto del laboratorio sono i primi concetti di probabilità. Il metodo di riferimento per la costruzione dell'attività è quello della ricerca variata. La didattica ludiforme, inoltre, risulta centrale, nella convinzione che in tutti i gradi dell'istruzione essa possa essere proficuamente utilizzata per stimolare l'apprendimento e migliorare l'approccio alla matematica. Accanto all'attività principale viene proposto un approfondimento legato al gioco d'azzardo che coinvolge i concetti di gioco equo e speranza matematica, con la finalità di prevenzione e contrasto alla ludopatia. Il tema si presta molto bene ad una programmazione pluridisciplinare per competenze, come richiesto dalla attuale normativa per i Nuovi professionali; viene dunque indicato un possibile percorso di questo tipo.

Parole-chiave
Probabilità, gioco matematico, metodo della ricerca variata, MERLO, gioco matematico.

INTRODUZIONE

Lo studio del Calcolo delle probabilità e della Statistica è presente nelle Indicazioni Nazionali e nelle Linee guida delle scuole di ogni ordine e grado. In particolare, per gli istituti professionali nelle Linee Guida del 2019 tra i traguardi di competenza del primo biennio nell'Area di istruzione generale si trova " utilizzare i concetti e i fondamentali strumenti degli assi culturali per comprendere la realtà ed operare in campi applicativi" (competenza n.12).
La probabilità compare, coerentemente, nei traguardi Invalsi. In particolare, tra quelli per la secondaria di secondo grado si ritrova "esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari".
Nella realtà attuale l'uso della statistica e dell'approccio probabilistico pervadono gli ambiti più vari: ricerca scientifica, medica, economica, finanziaria, delle scienze sociali e così via. Ciò ha ricadute nella vita quotidiana, anche per l'uso (spesso fuorviante) che ne fanno i mezzi di informazione.
La formazione di cittadini consapevoli, quindi, non può prescindere da una preparazione almeno basilare in questo campo, in cui i fraintendimenti sono frequenti e ciò può avere riflessi sulla capacità critica e la decodifica delle informazioni.
Il laboratorio proposto prevede che esso venga utilizzato come primo approccio al tema del calcolo delle probabilità, senza che questo venga introdotto in precedenza in modo tradizionale.

[22] Workshop "Math MOOC UniTo Dati e Previsioni: giochi probabilistici, grafici e statistiche" di Coviello, Alberti, Labasin

Per tale ragione i nodi concettuali coinvolti sono quelli di spazio campionario, eventi dipendenti/indipendenti, eventi compatibili/incompatibili, semplici operazioni tra eventi, definizione di probabilità.
L'attività prevede diverse fasi, per un totale di circa 6 ore. Esse sono riportate nella tabella seguente.

Tabella 1. Fasi dell'attività e relative tempistiche.

Fase dell'attività	**Tempi**
Gioco ''Lu-lu'' (scheda 1)	30 minuti
Inquiry – scheda 2	1 ora
Inquiry – scheda 3	1 ora
Variation – scheda 4	1 ora
MERLO – scheda 5	1 ora
Gioco ''Tutto o niente'' (scheda 6)	1 ora e 30 minuti
Totale	**6 ore circa**

Ciascuna fase, tranne la prima, prevede un momento di riflessione individuale, seguito dal confronto in piccoli gruppi e dalla formalizzazione finale a livello di gruppo classe.
È stato previsto che il lessico specifico sia presentato agli studenti solo nel momento di istituzionalizzazione, dopo che essi ne abbiamo fatto esperienza diretta attraverso i ragionamenti scaturiti dalle domande. Si tratta di un'impostazione coerente con la didattica laboratoriale in generale e con quanto suggerito da Scapellato (2017), in particolare relativamente al learning cycle delle 5E per l'insegnamento basato sull'inquiry.
I quesiti, pertanto, sono stati formulati utilizzando il più possibile un linguaggio scevro da tecnicismi e vicino alla sensibilità degli studenti.
L'approccio principale su cui è stato improntato il laboratorio è quella della ricerca variata, che accompagna con dosi diverse delle due componenti inquiry e variation lo svolgimento delle varie fasi. Essa si innesta su un'attività ludiforme svolta in apertura, che è il costante riferimento per le domande e le riflessioni successive e che viene ripresa in chiusura. Il gioco vede lo studente come parte attiva e mobilita le sue capacità. Anche l'aspetto della competizione è non trascurabile dal punto di vista della motivazione e dell'impegno profuso, così come il coinvolgimento emotivo, mentre il gioco svolto in gruppi o squadre possiede anche una importante componente di cooperazione, confronto tra pari, argomentazione, negoziazione, senza dimenticare il grande potenziale a livello di inclusione.

SVOLGIMENTO DEL LABORATORIO

Gioco "Lu-lu"

Il gioco scelto per l'apertura dell'attività è chiamato Lu-lu, che significa "agitare" e proviene dalle Hawaii. Nella sua forma originale viene svolto utilizzando dischi di pietra vulcanica dal diametro di circa 2,5 cm, denominati u-lu. In questa occasione i dischi sono stati prodotti in legno; in generale possono essere usati altri materiali poveri, quali argilla, vetro infrangibile e plastica. Ciascun disco ha su una faccia un valore, da 1 a 4, mentre l'altra è vuota e corrisponde al valore 0. È interessante notare che l'uso dei puntini e non dei caratteri numerici permette una fruizione universale di questo artefatto.
È stato scelto anche di assegnare a ciascun valore un colore distintivo, sia per una maggiore facilità di gioco e per dare un aspetto accattivante all'artefatto, sia soprattutto in vista delle variazioni proposte durante l'attività: in particolare in questo modo è molto semplice convertire gli u-lu in monete identiche, consegnando ai ragazzi gettoni dello stesso colore. Inoltre, in vista di attività successive legate alla probabilità condizionata, i dischi possono assumere una funzione analoga a quella delle classiche biglie colorate all'interno di urne.

Figura 1. Gli u-lu utilizzati durante l'attività.

Lo svolgimento del gioco prevede di suddividere la classe in gruppi di numerosità pari (2 o 4 persone), consegnare a ciascun gruppo un set di 4 u-lu, uno per ciascun valore. Il gruppo si suddivide al suo interno in due squadre contrapposte; alternativamente le squadre lanciano i 4 gettoni e segnano i punti corrispondenti al valore delle facce visibili degli u-lu. Vince la squadra che totalizza (o supera) per prima il punteggio di 50.
Lo svolgimento di una partita è rapido, nell'ordine di alcuni minuti: ciò permette una buona dinamicità e una quantità di tempo non eccessiva per permettere ai ragazzi di svolgere diverse manches e quindi familiarizzare con il gioco e le sue caratteristiche.
Dal punto di vista didattico, questo gioco ha alcuni pregi: non utilizzando un artefatto tradizionale, quali dadi, carte o monete, permette a tutti gli studenti di partire dallo stesso livello e di non aver bisogno di conoscenze pregresse (può sembrare strano, ma si incontrano studenti che non conoscono il contenuto di un mazzo da 40 o da 52 carte). Inoltre, lo spazio degli eventi è formato da 16 elementi: un numero abbastanza piccolo da consentire la costruzione agevole dello spazio, ma sufficientemente grande da permettere molte riflessioni, elaborazioni e operazioni tra eventi.
Per guidare i ragazzi verso la costruzione dello spazio campionario, nella scheda che viene consegnata all'inizio del gioco (Scheda 1, in figura 2) è richiesto di indicare non solo il punteggio ottenuto in ciascun lancio, ma anche l'esito di ciascun gettone. In questo modo si fissa l'attenzione sul fatto che determinati punteggi si possono ottenere in un solo modo, mentre altri in due modi diversi.

Data______________ Classe _______________ Nome del gruppo________________

Componenti del gruppo____

Vi sono stati consegnati 4 u-lu; ciascuno di essi ha un valore su un lato, mentre sull'altro è vuoto e vale 0. Ogni squadra effettua un lancio dei 4 u-lu in contemporanea e guadagna tanti punti quanti sono i valori usciti.

Annotate l'esito di ciascun u-lu, il punteggio ottenuto per ciascun lancio e il punteggio cumulativo.

Vince chi raggiunge (o supera) prima i 50 punti.

Nome squadra_______________________ Nome squadra_________________________

Esito del lancio	Punteggio del lancio	Punteggio cumulativo		Esito del lancio	Punteggio del lancio	Punteggio cumulativo

Figura 2. Estratto della scheda 1

Inquiry
Il metodo della ricerca variata viene concretizzato in prima istanza con una fase di indagine, durante la quale vengono somministrate due schede cartacee, contenenti alcune domande che hanno lo scopo di guidare lo studente nell'esplorazione dei concetti matematici. Inoltre, la costante richiesta di giustificare le risposte attiva competenze di argomentazione, le quali a loro volta permettono una riflessione più profonda sul concetto coinvolto.
Le domande delle due schede sono quelle di figura 3, e tutte fanno riferimento al gioco "Lu-lu"; la progressione dei quesiti è stata costruita in modo da fornire un percorso di scoperta in cui le risposte

fornite nei punti precedenti servano per rispondere alle domande successive; nella seconda, inoltre, si possono notare elementi di variation (contrasto, separazione).
Tra le due schede è prevista una fase di formalizzazione a livello di gruppo classe.

1. Punteresti sull'uscita del punteggio 0? (Sì/ No) Perché?
2. Su quale altro punteggio punteresti? Perché?
3. Quali sono i punteggi ottenibili?
4. Il punteggio ottenuto in un lancio condiziona l'esito del lancio successivo? (Sì/ No) Perché?
5. Rappresenta i punteggi possibili e i modi per ottenerli.
6. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio di 6? Perché?
7. Quali sono i punteggi che hanno la stessa probabilità di verificarsi del punteggio 6?
8. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio di 13? Perché?
9. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio compreso tra 0 e 10? Perché?
10. Che definizione daresti di probabilità?

1. Qual è la probabilità che il punteggio sia maggiore o uguale a 7?
2. Qual è la probabilità che il punteggio sia minore di 9?
3. Qual è la probabilità che il punteggio sia diverso da 2?
4. Qual è la probabilità che effettuando un lancio si ottenga il punteggio di 1 oppure 8?
5. Qual è la probabilità che il punteggio sia dispari oppure multiplo di 3?
6. Qual è la probabilità che il punteggio sia dispari e contemporaneamente multiplo di 3?
7. Qual è la probabilità che il punteggio sia multiplo di 5 e contemporaneamente multiplo di 4?

Figura 3. Domande presenti nella scheda 2 (a sinistra) e nella scheda 3 (a destra)

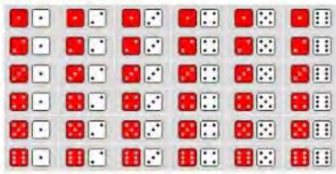
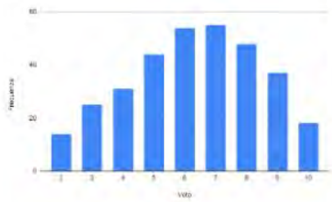
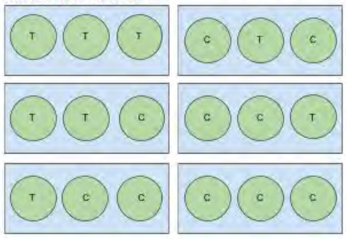
Variation
Vengono proposti agli studenti 4 casi da studiare, che rappresentano delle "variazioni sul tema" rispetto al gioco Lu-lu visto fino a quel momento e quindi puntano nella direzione della generalizzazione.
Agli studenti viene lasciata la possibilità di scegliere uno o più casi e di svilupparli, seguendo la traccia offerta da alcune domande, che ripercorrono l'indagine sui concetti presenti nelle schede precedenti. I casi proposti sono i seguenti:
A. gli u-lu hanno tutti lo stesso valore e quindi possono essere visti come monete a testa e croce;
B. gli u-lu (prima congurazione) sono 5, con punteggio 5 sul nuovo gettone;
C. anziché con gli u-lu si gioca con 2 dadi;
D. viene lasciata libera scelta agli studenti di immaginare una diversa situazione.
Nei casi A e B si mantiene il legame con l'artefatto usato fino a quel momento, ma mentre nella prima ipotesi vengono consegnati 4 gettoni uguali e quindi gli studenti hanno a disposizione tutto il materiale per ragionare sullo spazio campionario, nella seconda non viene dato il quinto u-lu (ma solo gli usuali 4) e pertanto sorge la necessità di immaginarlo. Infine nel caso C non viene consegnato alcun supporto materiale e l'artefatto (virtuale) è diverso da quello precedente.
Le domande guida sono le stesse in tutti i casi; esse vengono riportate in figura 4.

1. Che cosa cambierebbe nello spazio degli eventi?
2. Quale sarebbe la probabilità degli eventi elementari?
3. Gli eventi elementari sarebbero indipendenti?
4. Prova a costruire degli eventi composti e a calcolare la loro probabilità.
5. Gli eventi composti che hai costruito sono compatibili o incompatibili?

Figura 4. Domande presenti nella scheda 4

Schede MERLO
Ai fini della valutazione formativa sono stati sviluppati alcuni item MERLO, strumento didattico proposto tra gli altri da Arzarello et al. (2015) e centrato sulla costruzione di significati in matematica, attraverso la proposta di varie rappresentazioni dello stesso concetto in diversi registri.

L'oggetto specifico della metodologia MERLO è la capacità di trans-codifica tra registri semiotici: si tratta di un'abilità che generalmente non viene considerata a livello esplicito, ma che è importante per una reale comprensione dei concetti, cruciale anche per orientare un recupero degli studenti con basse performance, che invece spesso è basato soprattutto sui contenuti.
Vengono qui riportati in figura 5 due degli item costruiti, nella versione per l'insegnante, quindi, contenenti le indicazioni sul Target Statement (TS) e sui Q2, Q3 e Q4, informazioni che ovviamente nelle schede somministrate agli studenti sono omesse.
Negli item non compare alcun riferimento agli u-lu: ciò per proseguire nel processo di generalizzazione innescato dall'attività di ricerca variata.

Spazio degli eventi	A [ ] TS	B [ ] Q2
1. Segnare le rappresentazioni che condividono lo stesso significato matematico (due o più). 2. Indicare le ragioni che guidano la scelta.	Lancio di due dadi: 	Lo spazio degli eventi è l'insieme di tutti i casi possibili di un certo esperimento.
C [ ] Q4	D [ ] Q2	E [ ] Q3
	Nel lancio di due dadi ci sono 36 combinazioni possibili: {(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5) (2;6), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6), (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)}	Lancio di 3 monete: 

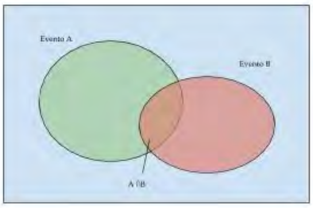
Eventi indipendenti	A [ ] Q4	B [ ] TS
1. Segnare le rappresentazioni che condividono lo stesso significato matematico (due o più). 2. Indicare le ragioni che guidano la scelta.		Due eventi sono indipendenti se il verificarsi dell'uno non ha delle conseguenze sulla probabilità che si verifichi l'altro.
C [ ] Q2	D [ ]Q3	E [ ] Q2
Estrazioni del gioco del lotto 	In un cassetto ci sono 10 lampadine di cui 4 funzionanti e 6 esaurite. Dal cassetto vengono prese a caso 2 lampadine (in sequenza, senza rimettere la prima nel cassetto). Si considera la probabilità che le lampadine siano entrambe funzionanti.	

Figura 5. Item MERLO sviluppati per l'attività

Gioco "Tutto o niente"

L'obiettivo di questa fase è presentare agli studenti il concetto di valore atteso declinato sotto forma di perdita attesa e di gioco equo. Ciò si collega molto bene a tematiche di prevenzione del gioco d'azzardo, anche in un'ottica di educazione civica.

Vengono nuovamente utilizzati i gettoni colorati; le regole del gioco sono piuttosto semplici: ad ogni turno si puntano 5 “soldi” e si vince in base al lancio dei 4 u-lu:

- se esce un punteggio maggiore o uguale a 5, si vince un numero di soldi pari al punteggio uscito;
- se esce un punteggio minore di 5, non si vince niente.

Inizialmente viene consegnata agli studenti una scheda individuale con alcune domande che inneschino la riflessione sulla struttura del gioco; sugli stessi quesiti ci si confronta a piccoli gruppi e solo dopo si inizia a giocare. Questa modalità è stata scelta perché ci si aspetta che i ragazzi, a questo punto dell’attività, siano in grado di formulare ipotesi in merito a situazioni aleatorie. Inoltre, la domanda 3 concentra l’attenzione sulla vincita attesa ed è volutamente fuorviante rispetto alla grandezza da considerare per comprendere correttamente la questione.

Individuale

1. Secondo te è un gioco equilibrato? Perché?
2. Saresti disposto a scommettere con queste regole? Perché?
3. Qual è la media dei punteggi che si possono ottenere? E qual è la media pesata rispetto alle probabilità di ciascun punteggio?
4. Questi risultati cambiano la tua opinione rispetto alle domande 1 e 2?

In gruppo

Discuti con i tuoi compagni di gruppo in merito alle domande precedenti; al termine della discussione, in base alle vostre preferenze, ciascuno di voi assume un ruolo.

Il banco è colui che detiene il denaro.
Il croupier è colui che lancia gli U-lu.
Il notaio è colui che annota sulla scheda l’andamento del gioco.
Il giocatore è colui al quale viene assegnata una somma iniziale e che fa le puntate.

Figura 6. Domande di apertura della scheda 6

Durante il gioco, in cui i ragazzi sperimentano direttamente il fatto che la partita si conclude sempre a favore del banco, la scheda permette di annotare i dettagli dello svolgimento, ma ancora non è presente alcun accenno al guadagno atteso.

Inizio: a ciascun giocatore è assegnata una somma di 20 soldi.
Svolgimento: ad ogni turno il giocatore dispone la sua puntata di 5 soldi al centro del tavolo. Il croupier lancia gli u-Lu e in base all’esito del lancio il banco ritira la puntata oppure distribuisce la vincita al giocatore. Il notaio annota sulla scheda tutto ciò che accade.
Termine: il gioco termina quando il giocatore resta con meno di 5 soldi.

Turno	Soldi a inizio turno	Puntata	Esito del lancio	Vincita	Soldi a fine turno
1					
2					
3					

Figura 7. Estratto della scheda 6

Infine, la discussione guidata conduce la classe a porre l’attenzione sul fatto che la grandezza da considerare per fare valutazioni di probabilità non è la vincita attesa, bensì il guadagno atteso.
È possibile dunque costruire una tabella che mostri, per ogni esito del lancio, il guadagno corrispondente associato alla propria probabilità. Si giunge in questo modo a calcolare il valore medio del guadagno atteso, che risulta negativo.
Per mostrare che ciò accade anche in situazioni che sembrano favorevoli al giocatore, è possibile modificare le regole del gioco fissando una vincita di 10 nel caso l’esito del lancio sia 0.

Questa variazione può anche essere inserita come seconda possibilità nella fase iniziale di gioco (ma col rischio di allungare notevolmente i tempi).
Inoltre, si osserva che aumentando il valore della posta, o il numero di giocate, la perdita monetaria attesa aumenta di valore. Per mostrare meglio l'andamento al crescere delle giocate è possibile usare simulatori, ad esempio un foglio elettronico.

PROPOSTE MULTIDISCIPLINARI

Il tema del Calcolo delle probabilità si presta molto bene ad una programmazione pluridisciplinare per competenze, come richiesto dalla attuale normativa per i Nuovi professionali; la focalizzazione sul gioco d'azzardo ha importanti implicazioni di Educazione Civica e di contrasto alla ludopatia, che in Italia presenta dati preoccupanti[23].
È possibile immaginare UdA multidisciplinari centrate sul gioco, come quella di cui si propone un estratto in figura 8, o sulle dipendenze.

DENOMINAZIONE	Gioco: da divertimento a patologia
COMPITO AUTENTICO/ DI REALTÀ DI RIFERIMENTO	• Realizzazione di un prodotto multimediale • Relazione
ASSI DISCIPLINARI COINVOLTI	Asse dei linguaggi (italiano) Asse storico-sociale (storia, diritto) Asse scientifico-tecnologico e professionale (scienze umane, laboratorio di metodologie, TIC) Asse matematico (matematica)
UTENTI DESTINATARI	Classe seconda indirizzo "Servizi per la Sanità e l'Assistenza Sociale"

CONTENUTI SPECIFICI
Italiano: lettura di brani da "Il fu Mattia Pascal" di Pirandello e da "Il giocatore" di Dostoevskij *Storia*: la storia del gioco d'azzardo *Matematica*: eventi e probabilità; eventi compatibili ed incompatibili e somma logica; eventi dipendenti ed indipendenti e prodotto logico; probabilità condizionata *Diritto*: normativa generale sulle concessioni; D.L. Balduzzi; Osservatorio per il contrasto della diffusione del gioco d'azzardo *Scienze umane*: il benessere e le emozioni; le dipendenze *Laboratorio di metodologie*: la progettazione assistenziale e la relazione d'aiuto; i servizi a sostegno del singolo e della collettività *TIC*: Google Presentazione per la realizzazione di slides (effetti, icone, link ipertestuali,etc..); Google Documenti per la realizzazione di relazione

Figura 8. Proposta di UdA multidisciplinare (estratto)

CONCLUSIONI

Il gioco può essere un buono strumento didattico anche nella scuola secondaria di secondo grado, dove di solito viene utilizzato in misura più rarefatta rispetto al primo grado. Su di esso possono proficuamente essere innestate attività laboratoriali di vario tipo.
Il laboratorio proposto è stato svolto, almeno in parte, in diverse classi sia di istituto professionale che di istituto tecnico, sempre con un buon riscontro.
Tutte le schede inerenti al laboratorio oggetto dell'articolo (schede lavoro per studenti e insegnanti) sono disponibili su richiesta per email.

[23] si veda Cerrai (2018) e Agenzia Dogane e Monopoli (2019)

RINGRAZIAMENTI

Lo spunto iniziale per l'elaborazione di questo laboratorio è stata la redazione di una tesi di Laurea magistrale in Matematica; si ringrazia la relatrice, prof.ssa Ornella Robutti, per la sua professionalità, per l'energia e l'amore per la didattica che costantemente da lei promanano.

BIBLIOGRAFIA

Afari, E., Aldridge, J.M. & Fraser, B.J. (2012). Effectiveness of using games in tertiary-level mathematics classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Vol.10(6), pp. 1369-1392.
Agenzia Dogane e Monopoli (2019). *Libro blu 2018 - Organizzazione, statistiche, attività.*
Alberti, V., Coviello, A. & Labasin S. (n.d.) *Lu-lu hawaiian: un gioco di probabilità*. Math Mooc Unito.
Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education*. The Fibonacci Project.
Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. & Léna, P. (2012). *Learning through inquiry*. The Fibonacci Project.
Arzarello, F., Carante, P., Kenett, R., Robutti, O. & Trinchero, G. (2015). Le attività MERLO nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. *Induzioni*. None (51), pp. 51-70.
Cerrai, S. (2018). *Consumi d'azzardo - Rapporto di Ricerca sulla diffusione del gioco d'azzardo fra gli italiani attraverso gli studi IPSAD® ed ESPAD®Italia*, CNR Edizioni.
Di Paola, B. & Taranto, E., a cura di (2018), *Quaderni di Ricerca in Didattica*, quaderno 1, numero speciale 2. Atti del convegno Giocare con la matematica: dall'apprendimento informale all'apprendimento formale, Catania.
European Commission (2017). *Scheda tematica per il semestre europeo. L'abbandono scolastico*.
Furinghetti F. (2002). Matematica come processo socioculturale. Trento: IPRASE Trentino.
Genot, E. J. & Gulz, A. (2016). The interrogative model of inquiry and inquiry learning. Perspectives on Interrogative Models of Inquiry, pp. 15-33. Springer International Publishing.
Gu, L. (1991). *Xuehui Jiaoxue [Learning to teach]*. Beijing, China: People's Education Press.
Hakkarainen, K. & Sintonen, M. (2002). The Interrogative Model of Inquiry and Computer-Supported Collaborative Learning. *Science & Education*, 11(1), p.25-43.
Manara R. (2002). *La matematica e la realtà - Linee di metodo*. Genova: Marietti 1820.
Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. P. P. M. Chik, P. Y. Ko, M. L. Lo, Eds., Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), pp. 277-289.
Mc Coy, L., Buckner, S. & Munley, J. (2007). Probability games from diverse cultures. *Mathematics teaching of Middle School*, Vol.12, No. 7, pp.394-402.
MIUR (2018). Decreto del Ministro dell'istruzione, università e ricerca di concerto con Ministro del lavoro e delle politiche sociali, Ministro dell'economia e finanze e Ministro della salute del 24 maggio 2018 n. 92, art.2
MIUR (2019). *La dispersione scolastica nell'anno scolastico 2016/2017 e nel passaggio all'anno scolastico 2017/2018.*
MIUR (2019). *Linee guida per favorire e sostenere l'adozione del nuovo assetto didattico e organizzativo dei percorsi di istruzione professionale.*
MIUR (2020). *Linee guida per l'insegnamento dell'educazione civica*
Scapellato, B. (2017). *Inquiry-Based Science Education*. Pearson Academy.

RIFLESSIONI SULL'ORALE IN MATEMATICA: L'ESEMPIO DEI MURI PEDAGOGICI

Luca Agostino
Université Paris-Saclay
luca.agostino@univ-evry.fr

Abstract
Questo articolo propone la descrizione e l'analisi di un dispositivo pedagogico innovativo, chiamato *Muri pedagogici* che ha l'obiettivo di sviluppare le competenze orali in matematica per gli studenti di scuola secondaria. Dopo averne descritto lo svolgimento, l'articolo cercherà di mettere in evidenza le ricadute positive in termini di competenza orale e apprendimenti. Per fare ciò, dei testi di esercizi proposti in classi di liceo francesi saranno analizzati focalizzando l'attenzione sulla loro qualità a mettere in gioco l'utilizzo del ragionamento e del linguaggio matematico all'orale.

Parole-chiave
Orale, Matematica, Pedagogia, Valutazione.

INTRODUZIONE

In seguito alla riforma della maturità del 2018 che introduce una prova orale chiamata *Grand Oral* [1] e ufficialmente ispirata al colloquio di maturità italiano, il mondo della scuola si è posto la domanda di come favorire lo sviluppo delle competenze orali degli alunni di scuola secondaria nelle varie discipline. In effetti, l'orale (e la sua valutazione) non hanno una tradizione recente forte e sviluppata come in Italia, basti pensare che la valutazione in Francia consiste essenzialmente in prove scritte. Tra tutte le discipline, la matematica è probabilmente quella che concentra la maggior parte delle riserve, ma anche delle riflessioni sul tema [Baudart, 2011]. In un contesto di opinioni e idee contrastanti, un punto fermo sembra essere la classificazione delle competenze orali in tre categorie :

- *Orale preparato* che corrisponde a tutti i tipi di esposizione orale estemporanea da parte degli alunni, ma che segue ad una fase di preparazione più o meno lunga (interrogazioni, presentazioni ecc…)
- *Orale non preparato* la cui presenza nelle classi è più rara e che è contraddistinto da una esposizione libera e estemporanea su una problematica matematica non conosciuta in anticipo
- *Orale personale* che ha avuto un certo successo durante i periodi di didattica a distanza e che corrisponde a tutte le tipologie di produzione orale preparata e registrata e che si distingue dalla prima tipologia in quanto permette di essere riascoltata e eventualmente corretta

Se la prima e la terza tipologia sono frequenti o, per lo meno, conosciute dagli insegnanti, lavorare sull'orale non preparato risulta più complicato. Al tempo stesso, è opinione condivisa che questa modalità è probabilmente la più ricca e la più efficace in termini di apprendimento e di sviluppo delle capacità di ragionamento. Questo articolo presenta un'attività sperimentale che ha come obiettivo principale di creare le condizioni per lo sviluppo della competenza orale utilizzando una modalità non preparata [Ploog e Bouveret, 2019]. .

I MURI PEDAGOGICI

Il dispositivo pedagogico chiamato *Muri Pedagogici* è stato formalizzato nel 2017 al liceo Plaine de Neauphle a Trappes nella regione di Parigi. Il suo nome deriva dall'organizzazione delle aule dove esso si svolge, sui cui muri sono incollati dei fogli di plastica bianchi cancellabili utilizzati come lavagne. Ciò permette di disporre i banchi intorno ad ogni lavagni in modo da formare delle mini-classi di quattro o cinque alunni ciascuna. I gruppi di alunni sono scelti in maniera omogenea o eterogenea a seconda dei bisogni dell'insegnante.

Figura 1. Organizzazione di un'aula per la realizzazione di una attività di muri pedagogici

Svolgimento dell'attività

L' attività si svolge in tre momenti distinti.

All'inizio della lezione, ogni gruppo si installa davanti ad una lavagna, gli alunni hanno l'enunciato di uno o più problemi che devono risolvere in un tempo dato. Gli enunciati sono diversi da un gruppo all'altro, essi dovranno essere al minimo due. La lavagna è a disposizione per poter annotare delle idee, una risoluzione completa o tentare delle strategie di risoluzione come su un foglio di brutta. Nessuna redazione precisa è richiesta.

In questa attività, lo scritto ha il solo obiettivo di permettere agli alunni di annotare delle idee o di effettuare dei calcoli. Proprio per questo, si sconsiglia di lasciare fogli di brutta a disposizione, al fine di concentrare l'attenzione di tutti sullo stesso supporto, la lavagna. Al contrario, mettere a disposizione diversi pennarelli per scrivere può essere interessante al fine di dare la possibilità ad ognuno degli alunni di esprimere facilmente le proprie idee. In effetti, le proposte estemporanee messe per iscritto alla lavagna possono costituire un pretesto molto forte per un dibattito orale all'interno del gruppo.

La durata di questa prima fase dipende da due parametri: la durata totale della lezione e la difficoltà degli enunciati proposti. Le esperienze realizzate in diverse classi di liceo indicano che un tempo ragionevole per questa fase potrebbe corrispondere alla metà del tempo totale della lezione.

Alla fine del tempo impartito, i gruppi si spostano e gli alunni si posizionano davanti al posto dei loro compagni nel gruppo vicino. In ogni gruppo, un alunno o alunna è scelto dagli altri (o dall'insegnante) e resta al suo posto, accoglie i compagni che arrivano dal gruppo vicino, spiega loro il problema che è stato realizzato in precedenza, risponde alle domande eventuali e, se ce n'è bisogno, collabora con i nuovi arrivati per completare o correggere l'esercizio.

L'insegnante potrà dedicare a questa seconda fase un tempo equivalente ad un terzo del tempo totale a disposizione. In effet, spesso, le esposizioni delle soluzioni sono corrette (in quanto realizzate da un gruppo di alunni con molte competenze diverse) e il grosso del lavoro di questa fase consiste negli scambi orali per rispondere alle domande. Tutto ciò si avvera essere più corto che l'elaborazione di una soluzione.

Il passaggio dalla fase 1 alla fase 2 è schematizzato in Figura 2. : i colori blu e verde corrispondono a due diversi enunciati.

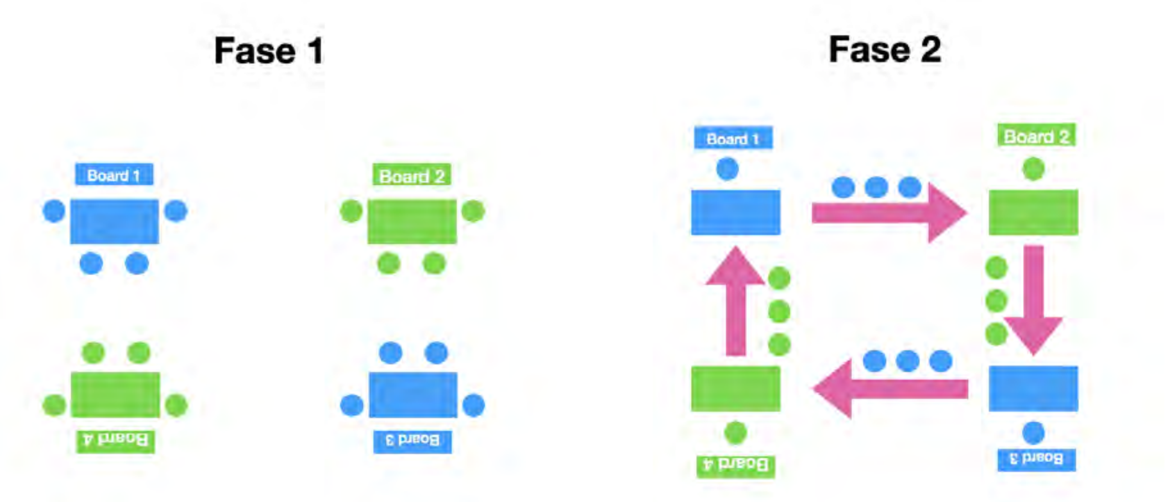
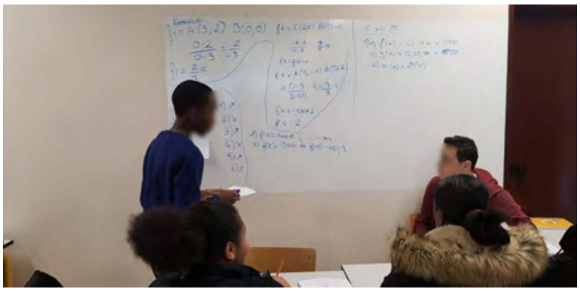


Figura 2. Schema riassuntivo dello svolgimento dell'attività

L'attività può concludersi con un momento collettivo in cui ogni gruppo espone i contenuti principali del proprio lavoro o le loro opinioni sull'attività svolta. Si tratta di un fase solenne in cui ogni gruppo prende la parola davanti tutta la classe e, soprattutto, davanti all'insegnante che non ha potuto ascoltare tutto quello che si è detto in ogni gruppo. Questo finale costituisce un momento di bilancio dell'attività, permette all'insegnante di rendersi conto delle ricadute linguistiche e di ragionamento legate agli esercizi che ha proposto. Infine, la produzione orale dell'alunno si realizza in un contesto meno confortevole di quello del piccolo gruppo, ma il fatto che l'argomento sia ben conosciuto gli permette di mettersi in gioco davanti agli altri in maniera più naturale.

Analisi a priori e ruolo della produzione orale
Lo spostamento degli alunni tra i gruppi porta con sé un cambio di atteggiamento e di postura degli alunni stessi, cambiamento che si ripercuote negli scambi orali tra i compagni:

- Gli alunni che cambiano di gruppo non conoscono gli esercizi proposti ai loro compagni quindi il loro atteggiamento sarà quello di discenti. Se gli esercizi risolti dai gruppi non differiscono di molto, potremmo definire questa nuova postura come di *discenti informati* , postura che favorisce gli scambi orali, non preparati, sotto forma di domande e commenti in quanto chi ascolta possiede delle competenze sul tema trattato. E' una strategia di apprendimento simile a quella della classe capovolta.
- L'alunno che resta al suo posto (ambasciatore) cambia completamente di ruolo: diventa l'esperto, l'unico che conosce in dettaglio l'esercizio proposto e che ne ha un'idea di risoluzione già ragionata. In più, la missione di esporre la soluzione gli conferisce un ruolo di saggio o, se si vuole, di docente ricreando così una dinamica docente - discenti che simile a quella della classe ordinaria. La sua esposizione orale è, almeno in parte, preparata, articolata e relativamente lunga.
- L'esperienza mostra che, dopo le spiegazioni dell'ambasciatore, il gruppo tende a rimettere in atto una dinamica egualitaria riproducendo un funzionamento tra pari che mira, di solito, a completare o correggere l'esercizio.



Considerazioni complementari

Affinché questa attività sia efficace, l'insegnante dovrà aver costruito un ambiente-classe propizio all'apprendimento, ciò necessita di una capacità di gestione del gruppo piuttosto esperta. Tuttavia un livello sonoro relativamente elevato dovrà essere accettato : non si può immaginare un'attività sull'orale silenziosa. Il rumore, nel caso specifico, non corrisponde ad agitazione e distrazione, bensì ad una forma specifica di lavoro in classe necessaria per lavorare sulle competenze orali.

Infine, per quel che riguarda l'utilizzo della lavagna, se il suo interesse pedagogico è già stato evocato precedentemente, è interessante sottolineare il fatto che, nonostante il fatto che le tracce scritte degli alunni non costituiscano l'obiettivo principale dell'attività, esse possono contribuire alla costruzione degli apprendimenti durante l'attività, ma anche dopo.

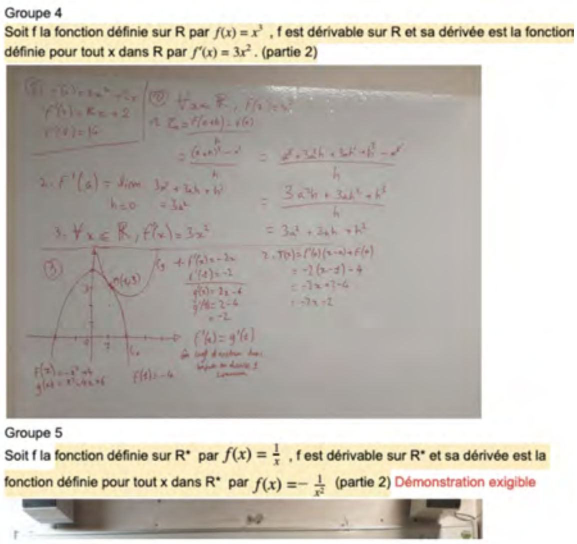


Figura 3. Fotografia di una lavagna

La Figura 3 mostra lo screenshot di un documento condiviso sul quale gli alunni di ogni gruppo hanno caricato le foto delle loro lavagne. Le foto sono visibili da tutti gli alunni e l'insegnante aggiunge commenti e annotazioni a margine. Questi documenti hanno una valenza importante nel prosieguo del lavoro: l'insegnante potrà chiedere agli alunni di mettere in bella copia sul loro quaderno lo svolgimento degli esercizi aiutandosi con le foto, oppure potrà proiettarle in classe per commentarle e, eventualmente, realizzare una redazione più rigorosa, passando da un lavoro sull'orale a un lavoro sullo scritto. Insomma, una panoplia di vantaggi veicolati dall'utilizzo di un supporto grande e verticale, una sorta di quaderno collettivo.

QUALI ESERCIZI?

In questo paragrafo analizzeremo le tipologie di esercizi che possono essere proposti per realizzare un lavoro efficace coi muri pedagogici: il loro scopo primigenio degli esercizi proposti deve essere quello di favorire l'espressione orale degli studenti.
Prendiamo come esempio gli enunciati di tre esercizi dati ad un gruppo che ha participato all'attività in una classe francese equivalente alla quarta scientifico. L'argomento della lezione era la derivazione.

- Esercizio 1.

1. **Un échauffement** : Choisir la bonne réponse à la question suivante en préparant une justification à donner à l'oral (vous pouvez prendre des notes au tableau)

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 vaut			
A. 1	B. 2	C. 0,5	D. 1/4

Questo primo esercizio ha uno scopo di riattivazione dei prerequisiti, permette di ristabilire il contatto con il capitolo trattato e di ripassare il legame che c'è tra derivata e coefficiente angolare della retta tangente alla curva della funzione in un punto dato. L'esercizio è posto sotto forma di domanda a risposta multipla. Qui l'apporto orale è dato dalla discussione sulla scelta della risposta e la sua giustificazione: possiamo immaginarci che nel gruppo di alunni non tutti siano d'accordo, questa attività orale si configura quindi come un dibattito matematico.

- Esercizio 2.

2. **Une démonstration** : On veut démontrer la propriété de cours suivante: *Soit f la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f(x) = x^2$*, f est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et sa dérivée est la fonction définie pour tout x dans* $\mathbf{R}$ *par* $f'(x) = 2x$*:*
   1. Déterminer l'expression de τ_a , le taux d'accroissement de la fonction f en x=a, a étant un réel quelconque.
   2. Déduire le nombre dérivée $f'(a)$
   3. Ceci étant vrai pour tout a réel, on peut écrire $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \ldots\ldots$

Si tratta di una dimostrazione guidata. La proposta di una guida per punti è giustificata dalla difficoltà di astrazione e di ragionamento che una dimostrazione realizzata in autonomia pone a degli studenti di liceo. La costruzione e l'esposizione del ragionamento all'orale (ragionamento che sarà esplicitato dall'ambasciatore durante la seconda fase dell'attività) costituiscono un cospicuo apporto didattico che mette al centro la costruzione di un discorso matematico all'orale. Infatti si ricorda che l'obiettivo dell'attività non è quello di una redazione rigorosa delle risposte, bensì quello della costruzione di un'esposizione chiara e precisa dei suoi argomenti.

- Esercizio 3.

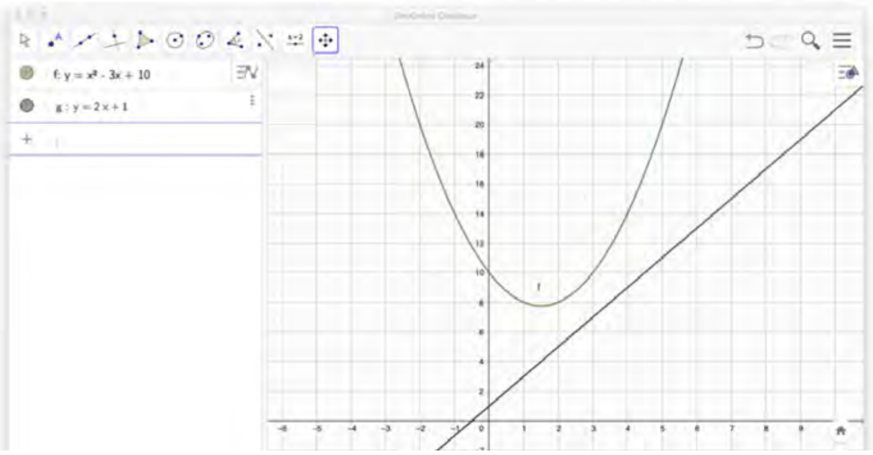
Il terzo esercizio proposto è un problema aperto che ha l'obiettivo di incoraggiare la presa di iniziative autonome da parte degli alunni. Tale approccio mette il gruppo di fronte alla problematica dell'argomentazione e dell'uso di un vocabolario adatto. Questo genere di problemi (che in Francia è relativamente raro) si presta bene a questa attività in quanto risolvibile seguendo diverse strade. La scelta della strategia risolutiva non potrà non essere fatta senza confronto e discussione.

3. Un exercice:

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ et définie pour tout x dans $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 10$. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x + 1$. La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite (d)? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

Coup de pouce:

Deux droites parallèles ont le même ...



VALUTAZIONE DELL'ATTIVITA'

Il lavoro in parallelo di diversi gruppi pone la questione del ruolo dell'insegnante durante l'attività al fine di monitorare il lavoro e gli apprendimenti degli alunni.
Se da un punto di vista qualitativo è facile affermare che questo dispositivo possiede un potenziale di sviluppo importante delle competenze orali, d'altro canto è più complicato immaginare una modalità oggettiva di quantificarle. Infatti, l'ascolto diretto o indiretto degli scambi tra alunni da parte dell'insegnante potrebbe falsare o intimidire l'espressione orale degli studenti. Diversi studi si sono posti questo tipo di questione (si veda per esempio [Clarke et al. , 2013]). Un'idea potrebbe essere quella di dare ad un componente di ogni gruppo una missione segreta che consisterebbe ad annotare il numero di volte in cui una certa parola o espressione è stata pronunciata o trascrivere degli estratti di dialogo. Questa sperimentazione, che appare complicata, non è ancora stata tentata.
Dal punto di vista del ritorno valutativo dell'insegnante agli alunni, ci si può porre chiedere se sia pertinente valutare con un voto l'attività oppure no. Anche in caso negativo, sembra comunque importante trovare una modalità per fornire un apprezzamento del lavoro svolto agli studenti.
Ciò può essere realizzato utilizzando delle griglie di osservazione e di ascolto (si veda per degli esempi di valutazione dell'orale [Iannone e Simpson, 2012]). L'insegnante, spostandosi durante la lezione potrà annotare la griglia di osservazione e ascolto per ogni gruppo oppure in maniera collettiva per tutta la classe a seconda della sue scelte e bisogni didattici. Tra le voci che potranno essere considerate durante questa fase valutativa ci sono:

- Comprensione del testo
- Principali difficoltà matematiche
- Indicatori di interazioni orali nel gruppo
- Esempi di espressioni corrette
- Espressioni orali e vocabolario da migliorare

I primi due criteri si concentrano sull'adeguamento degli esercizi scelti in rapporto ai gruppi e alle loro difficoltà. La presenza di annotazioni scritte alla lavagna dagli alunni permetteranno all'insegnante di farsi un'idea rapidamente delle situazioni di blocco legate alla difficoltà matematica. Gli indicatori di interazioni possono essere dei semplici segni (come dei bastoncini) il cui numero è proporzionale agli scambi tra alunni di uno stesso gruppo e permetterà all'insegnante di avere un'indicazione qualitativa del suo funzionamento. Infine, le ultime due voci permettono di sottolineare gli aspetti dell'orale che sono più legati al vocabolario matematico e al ragionamento. L'insegnante potrà annotare delle frasi o delle parole sentite spostandosi nell'aula e che potranno essere o valorizzate durante, per esempio, un ritorno collettivo, o corrette se contengono errori o imprecisioni (senza intervenire direttamente durante l'attività).
Inoltre, questa valutazione formativa potrà essere accompagnata da una valutazione con voto, per esempio chiedendo agli alunni di restituire singolarmente (come fosse un'interrogazione) un esercizio svolto durante l'attività durante una lezione successiva oppure sotto forma di compito a casa (si veda [Agostino, 2019])

BILANCIO E CONCLUSIONI

Le osservazioni realizzate durante le sperimentazioni dei muri pedagogici in diverse scuole francesi hanno permesso di mettere in evidenza i punti seguenti:

- Un coinvolgimento attivo degli alunni marcato dal lavoro collaborativo orale. In questo contesto si è notata anche più interazione dalla parte di alunni meno estroversi e volontari in classe ordinaria.
- Le interazioni orali sono state caratterizzate da contenuti approfonditi e da scambi ricchi, questo si è constatato analizzando gli appunti rimasti sulla lavagna e i pezzi di conversazioni che gli insegnanti hanno potuto cogliere.
- L'efficacia di separare la difficoltà della redazione rigorosa ad un tempo successivo. Permettere agli alunni di annotare delle idee usando un linguaggio proprio mettendo al centro solo il ragionamento e la spiegazione orale ha permesso ad alunni in difficoltà con la scrittura e il formalismo di proporre più naturalmente le loro idee.

Questa attività ha avuto un utilizzo inatteso durante i vari confinamenti: gli alunni sono stati messi a lavorare in stanzette utilizzando le piattaforme di videoconferenza a disposizione. Questo ha permesso, da un lato di rinsaldare i legami tagliati dalla distanza imposta (gli alunni parlano molto di più in piccoli gruppi piuttosto che nella stanza principale) e d'altro canto di coinvolgerli con un lavoro attivo a distanza. Inoltre, l'insegnante può spostarsi di stanza in stanza aiutando e ascoltando le conversazioni che giocheranno un ruolo essenziale per la preparazione del ritorno nella sala principale.
In seguito alle formazioni organizzate dagli USR Piemonte e Toscana sull'insegnamento della matematica in Francia, alcuni insegnanti italiani stanno sperimentando e adattando questo dispositivo nelle loro classi, i contatti stabiliti permetteranno confronti e sinergie sicuramente proficue su un argomento, quello dell'orale, delicato, ma centrale per gli apprendimenti.

RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia il comitato organizzativo del DI.FI.MA per la fiducia riposta in questo Workshop e i colleghi degli USR Piemonte (Germana Trinchero) e Toscana (Antonietta Marini e Daniela Cecchi) per il supporto organizzativo a tutte le attività di formazione e scambio Francia/Italia.

BIBLIOGRAFIA

[1] Épreuve orale dite « Grand oral » de la classe de terminale de la voie générale à compter de la session 2021 de l'examen du baccalauréat, Bulletin officiel spécial n° 2 du 13 février 2020. Note de service n° 2020-036 du 11-2-2020 MENJ - DGESCO A2-1

https://www.education.gouv.fr/bo/20/Special2/MENE2002780N.htm?cid_bo=149115
Baudart, Fabrice. « Monde de l'oral et monde de l'écrit en mathématiques », Le français aujourd'hui, vol. 174, no. 3, 2011, p. 107-118.
Ploog Katja et Bouveret Sabine (2019), « Apprendre avec l'oral et à l'oral », Au fil des Maths, APMEP.
Asselain-Missenard Claudie, « Nous avons les moyens de vous faire parler ! », APMEP – PLOT n° 109 – nouvelle série n° 6.
Agostino Luca (2019), « Powtoon, un outil pour travailler l'oral dès la Seconde » APMEP Au fil des Maths fil rouge 539.
Clarke, D. ,Xu, L. et Ee Vivian Wan, May. (2013). Students Speaking Mathematics. Student Voice in Mathematics Classrooms around the World, 33-52.
P. Iannone & A.Simpson, August. (2012) Oral assessment in mathematics: implementations and outcomes. *Teaching Matematics and its Applications* 31, 179-190

MATEPRATICAMENTE 2.0: LABORATORIO A DISTANZA, DA ESIGENZA TEMPORANEA A RISORSA INNOVATIVA

Tallone Chiara, Alocco Ilenia, Cavallera Laura, Durando Chiara, Isoardi Giorgia, Olivero Francesca, Raspitzu Margherita, Zamboni Francesca
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
matepraticamente.info@gmail.com

Abstract
Le metodologie di apprendimento-insegnamento hanno subìto un forzato cambiamento a causa dei frequenti lockdown e dell'intera situazione emergenziale legata al COVID-19. Il progetto *Matepraticamente*, che prima operava con laboratori in presenza allestiti nelle palestre degli istituti scolastici, ha visto, a partire dal 2020, un rinnovamento nelle offerte formative che ha portato alla nascita di *Matepraticamente 2.0*. Il focus di questo articolo è quello di analizzare le novità metodologiche di tale iniziativa, concentrandosi in particolare sull'utilizzo di alcuni artefatti digitali per realizzare il laboratorio a distanza, integrati con altri artefatti e strumenti di varia natura, facilmente reperibili nella vita quotidiana. L'analisi sarà condotta tramite la descrizione degli aspetti più rilevanti dell'attività *Mondi paralleli - geometrie "alternative"*, sia per quanto riguarda la fase del workshop sincrono, sia il successivo lavoro a gruppi asincrono, consistente nella risoluzione di una *escape room* digitale.

Parole-chiave
Matepraticamente - geometrie - escape room - apprendimento a distanza - gamification

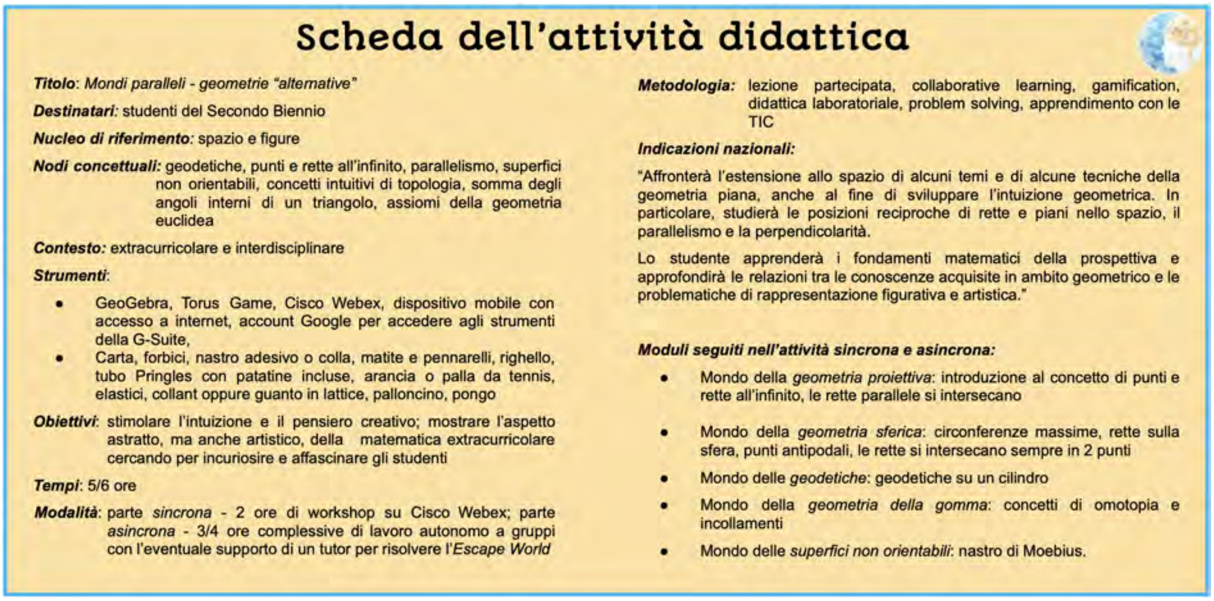
MATEPRATICAMENTE 2.0

Matepraticamente 2.0 è un progetto del Piano nazionale Lauree Scientifiche e inserito nelle attività di orientamento dell'Università degli Studi di Torino per le scuole secondarie. L'iniziativa nasce all'interno del progetto Matepraticamente (Tallone, Minisola, Olivero & Raspitzu, 2017), condotto da un gruppo di docenti della scuola secondaria e di studenti universitari appassionati di didattica. La proposta ha coinvolto, a partire dall'a.s. 2014/15, diversi IIS e licei piemontesi con l'obiettivo di far sperimentare a tutti i partecipanti una matematica più pratica e accessibile, rivolgendosi ad una platea composta non soltanto dalle eccellenze. Nel 2020, a causa della pandemia, non si sono potute svolgere le attività progettate in presenza ma, nonostante ciò, l'interesse mostrato dagli istituti aderenti ha spronato il gruppo dei formatori a rinnovare il progetto con i mezzi disponibili, le TIC.
Durante il periodo del primo lockdown il progetto si è trasferito sui social con la creazione di *#matepratichallenge* sulla pagina Instagram (Matepraticamente, 2018). Questo esperimento comprendeva sfide a tema logico-matematico, pillole divulgative, enigmi e quiz che hanno coinvolto molti partecipanti di età e provenienza differenti. Tale esperienza, unita all'impossibilità di ritornare a svolgere le edizioni in presenza nell'a.s. 2020/21, è stata fondamentale per la nascita di *Matepraticamente 2.0*. La prima edizione di questo nuovo progetto, condotta nella primavera del 2021, si è svolta interamente online a causa del perdurare della situazione pandemica. All'iniziativa hanno partecipato più di 500 studenti di diversi istituti piemontesi e sono stati avviati 3 percorsi differenziati in base all'età: uno per gli studenti delle scuole secondarie di primo grado, uno per il primo biennio del secondo grado ed infine uno per il secondo biennio. Per i partecipanti di quest'ultimo l'offerta si è inserita nel Percorso per le Competenze Trasversali e per l'Orientamento (PCTO) promosso dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università degli Studi di Torino.
Tutti i *laboratori* proposti si sono svolti completamente in *modalità e-learning*, sincrona e asincrona, attraverso vari strumenti digitali, prima fra tutti la piattaforma Orient@mente (Università degli Studi di

Torino, n.d.). All'interno di questa nuova veste del progetto sono state create quattro attività-workshop collocate in ciascun nucleo tematico: relazioni e funzioni, numeri, dati e previsioni, spazio e figure. Ogni attività è stata introdotta agli studenti in un incontro in modalità sincrona, utilizzando la piattaforma Cisco Webex.
L'intento di mantenere lo spirito laboratoriale delle attività in presenza di Matepraticamente, unito alla consapevolezza delle fragilità degli studenti emerse nel periodo pandemico, ha guidato la progettazione del nuovo percorso, che vede sia l'introduzione di novità metodologiche legate agli strumenti utilizzati, sia diverse tempistiche di realizzazione rispetto al passato. Anziché concentrare le attività in un'unica giornata, il progetto *Matepraticamente 2.0* si sviluppa in un arco temporale di diverse settimane (da 5 a 10 in base alle varie edizioni) e tramite i mezzi di comunicazione riesce a raggiungere un numero più elevato di studenti rispetto alle edizioni in presenza. Durante gli incontri in sincrono, della durata di 2 ore, si è cercata l'interazione immediata con i partecipanti, partendo dal coinvolgimento del singolo studente tramite sondaggi, chat, reazioni e quiz, per poi passare ad una fase asincrona in cui i ragazzi sono stati impegnati in sfide tra squadre provenienti dai diversi istituti.

UN ESEMPIO DI LABORATORIO A DISTANZA

Durante il convegno Di.Fi.Ma. 2021 abbiamo presentato l'attività didattica *Mondi paralleli - geometrie "alternative"*, rivolta agli studenti del secondo biennio e riferita al nucleo *spazio e figure*. L'obiettivo è quello di stimolare l'intuizione visuo-spaziale ed il pensiero creativo attraverso un viaggio tra alcune nozioni elementari delle geometrie non euclidee. Questo percorso mira ad incuriosire e affascinare gli studenti che, a partire dalle attività pratiche, possono avvicinarsi a concetti astratti, ma anche artistici della matematica, solitamente non previsti nei curricoli scolastici.



Scheda dell'attività didattica

Titolo: *Mondi paralleli - geometrie "alternative"*

Destinatari: studenti del Secondo Biennio

Nucleo di riferimento: spazio e figure

Nodi concettuali: geodetiche, punti e rette all'infinito, parallelismo, superfici non orientabili, concetti intuitivi di topologia, somma degli angoli interni di un triangolo, assiomi della geometria euclidea

Contesto: extracurricolare e interdisciplinare

Strumenti:

- GeoGebra, Torus Game, Cisco Webex, dispositivo mobile con accesso a internet, account Google per accedere agli strumenti della G-Suite,
- Carta, forbici, nastro adesivo o colla, matite e pennarelli, righello, tubo Pringles con patatine incluse, arancia o palla da tennis, elastici, collant oppure guanto in lattice, palloncino, pongo

Obiettivi: stimolare l'intuizione e il pensiero creativo; mostrare l'aspetto astratto, ma anche artistico, della matematica extracurricolare cercando per incuriosire e affascinare gli studenti

Tempi: 5/6 ore

Modalità: parte *sincrona* - 2 ore di workshop su Cisco Webex; parte *asincrona* - 3/4 ore complessive di lavoro autonomo a gruppi con l'eventuale supporto di un tutor per risolvere l'*Escape World*

Metodologia: lezione partecipata, collaborative learning, gamification, didattica laboratoriale, problem solving, apprendimento con le TIC

Indicazioni nazionali:

"Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.

Lo studente apprenderà i fondamenti matematici della prospettiva e approfondirà le relazioni tra le conoscenze acquisite in ambito geometrico e le problematiche di rappresentazione figurativa e artistica."

Moduli seguiti nell'attività sincrona e asincrona:

- Mondo della *geometria proiettiva*: introduzione al concetto di punti e rette all'infinito, le rette parallele si intersecano
- Mondo della *geometria sferica*: circonferenze massime, rette sulla sfera, punti antipodali, le rette si intersecano sempre in 2 punti
- Mondo delle *geodetiche*: geodetiche su un cilindro
- Mondo della *geometria della gomma*: concetti di omotopia e incollamenti
- Mondo delle *superfici non orientabili*: nastro di Moebius.

Figura 1. Scheda dell'attività didattica *Mondi paralleli - geometrie "alternative"*.

Il tempo previsto per affrontare l'intera attività, che consta di due parti, è di circa 5-6 ore. La prima si svolge in modalità sincrona attraverso un workshop sulla piattaforma Cisco Webex della durata di un paio di ore. Nella seconda parte gli studenti lavorano a gruppi in modalità asincrona, potendo usufruire del supporto di un tutor su loro richiesta, per risolvere l'*Escape world*, una particolare escape room digitale creata ad hoc e di cui parleremo più avanti.
Nelle pagine che seguono analizzeremo gli aspetti che riteniamo più interessanti e significativi dell'attività, mettendo in luce potenzialità e criticità dei laboratori a distanza emerse attraverso il confronto con le esperienze in presenza del nostro progetto.

Una variante: maggior utilizzo delle TIC

Tra gli aspetti più innovativi dell'edizione a distanza troviamo sicuramente l'introduzione delle TIC nei laboratori: se in precedenza l'ausilio di supporti digitali era riservato unicamente al tutor, con *Matepraticamente 2.0* i ragazzi hanno potuto cimentarsi in prima persona in attività con GeoGebra, con gli strumenti della G-suite e con altri ambienti informatici come Cisco Webex e Moodle.
Nel workshop, dopo aver presentato i legami tra la prospettiva rinascimentale, le geometrie della visione e la nascita della geometria proiettiva (Catastini & Ghione, 2006), è stato mostrato agli studenti come trovare la retta all'infinito in una fotografia raffigurante Palazzo Campana di Torino. Dopo aver individuato alcuni segmenti paralleli all'interno di una stessa facciata (ad esempio i cornicioni), abbiamo tracciato le rette corrispondenti con l'apposito comando e determinato il punto all'infinito nel centro del fascio creatosi. Abbiamo ripetuto il procedimento per l'altra facciata del palazzo, trovando così il secondo punto all'infinito che, congiunto con quello ricavato in precedenza, ha permesso di determinare la retta all'infinito. In questo caso ci siamo limitati ad utilizzare GeoGebra come supporto visivo poiché non era noto il livello di padronanza del software da parte dei ragazzi.
Nella sfida dell'*Escape World* relativa al "mondo proiettivo", è stato richiesto ai partecipanti di ripetere la stessa procedura su un dipinto rinascimentale in prospettiva. Questo ha supportato l'immaginazione visiva anche in quegli studenti con maggiori difficoltà visuospaziali.

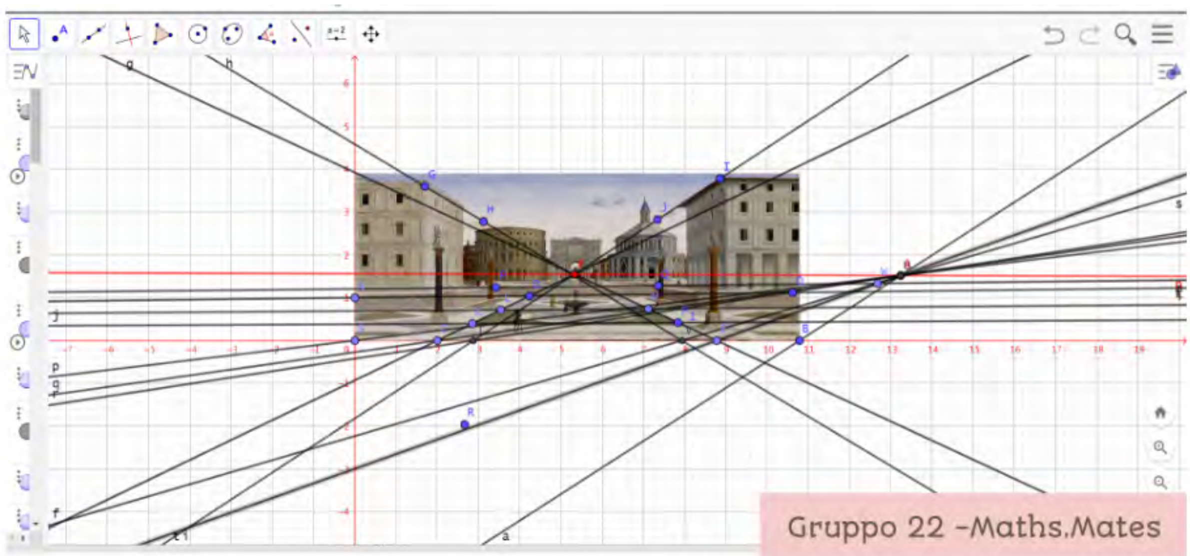


Figura 2. Protocollo dell'elaborato prodotto da una delle squadre partecipanti, con l'utilizzo di GeoGebra, per l'attività contenuta nella sezione "Mondo proiettivo" dell'*Escape World.*

Inoltre, sono stati utilizzati i Google Moduli sia per il coinvolgimento diretto dei ragazzi nelle attività durante il workshop, sia per lo svolgimento delle prove previste dall'*Escape World*. Questo strumento, già conosciuto e familiare alla maggior parte dei partecipanti, si è rivelato utile per raccogliere i loro elaborati. Le molteplici tipologie di quesiti (Fig. 3) ci hanno permesso di valutare il grado di raggiungimento di diverse competenze, come ad esempio l'argomentazione delle risposte date.

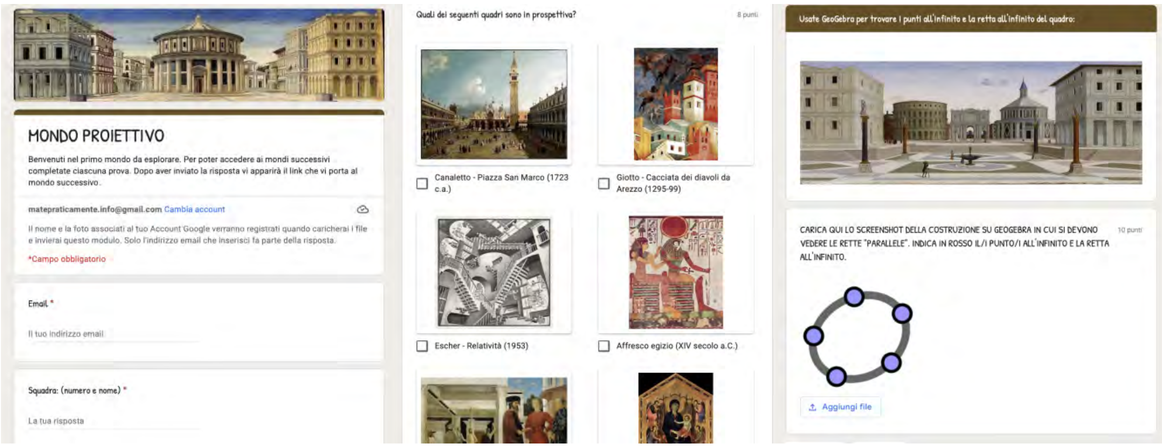


Figura 3. Google Moduli contenenti le prove proposte agli studenti nella sezione "Mondo proiettivo" dell'*Escape World,* con collegamenti interdisciplinari con l'arte.

I Google Moduli sono stati inoltre utilizzati per evitare il più possibile uno svolgimento puramente frontale del workshop, rischio concreto di questa nuova modalità online. Tramite questi ultimi gli studenti hanno infatti potuto svolgere in corso d'opera attività connesse con gli argomenti affrontati. I risultati delle stesse sono stati resi noti a tutti i partecipanti mediante la funzionalità di raccolta delle risposte, al fine di instaurare una discussione collettiva a cui i ragazzi hanno potuto partecipare mediante la chat di Cisco Webex. Per favorire un'interazione ancora più immediata sono stati utilizzati, nel caso di quesiti a risposta chiusa, i sondaggi integrati nella piattaforma di videoconferenza, oppure le emoji contenute tra le reazioni, una modalità molto vicina alle abitudini comunicative dei ragazzi. Per il loro carattere familiare e informale, le emoji sono servite ad ottenere un effetto di *coinvolgimento* tra i ragazzi e a ricreare almeno in parte la convivialità di un incontro in presenza. Le reazioni, visualizzate in tempo reale da tutti i partecipanti, stimolano gli ascoltatori a partecipare e a rispondere alle domande poste: dopo i primi interventi più incerti, tutta la platea inizia a schierarsi con l'una o l'altra posizione e, dal coro di voci virtuali, si coglie nell'insieme la preponderanza di una o dell'altra opinione, in modo immediato. Si favorisce così il contributo anche degli studenti che normalmente hanno più difficoltà a esprimere la propria idea se coinvolti singolarmente attraverso webcam e/o microfono.

Una costante: i materiali poveri

Uno dei tratti peculiari del progetto Matepraticamente è sicuramente l'aspetto laboratoriale: tutte le attività sono sempre state presentate attraverso l'utilizzo di materiali poveri, come carta, forbici, fili di lana, ecc. Abbiamo cercato di mantenere questo aspetto anche nella didattica a distanza, con alcune novità. Nelle edizioni in presenza gli strumenti necessari sono sempre stati forniti dal tutor, il quale aveva la possibilità di osservare in prima persona come ogni studente interagisse con il materiale a disposizione. A distanza ciò non è possibile, in quanto il singolo partecipante deve procurarsi l'occorrente in autonomia, senza un feedback immediato da parte del formatore. Questo ci ha vincolato ad utilizzare materiali ancora più "poveri", reperibili da tutti in una situazione delicata come quella del lockdown. Allo stesso tempo questa scelta ha permesso di osservare la matematica da una prospettiva più quotidiana e concreta.

Ad esempio, nel workshop *Mondi paralleli - geometrie "alternative",* si richiede agli studenti di procurarsi un palloncino, dei guanti in lattice, una pallina da ping pong ed alcuni elastici. Con tali oggetti si osserva che in un triangolo su una sfera la somma degli angoli interni non è pari a 180°: gli studenti sono invitati a disegnare un triangolo su un palloncino sgonfio, che modellizza un piano in geometria euclidea, e, dopo aver gonfiato il palloncino, si chiede di prestare attenzione a ciò che accade ai suoi lati ed angoli (Urgellés, 2010). Gli studenti formulano poi la loro ipotesi rispondendo ad un sondaggio su Cisco Webex e segue una fase di istituzionalizzazione da parte dei tutor.

Figura 4. a) rettangolo con prolungamento dei lati su un guanto di lattice b) Visualizzazione dei prolungamenti con l'ausilio di elastici c) Altra visuale del rettangolo e dei suoi prolungamenti

L'attività prosegue con l'introduzione del concetto di retta su una sfera come circonferenza massima: gli studenti sono guidati attraverso laboratori matematici in videoconferenza e giungono così a verificare cosa succede ad un rettangolo disegnato su un guanto di lattice (fig. 4a) quando in esso viene inserita una pallina da ping pong (analogamente si possono utilizzare un collant e una pallina da tennis o un'arancia). Si chiede quindi ai ragazzi di far aderire degli elastici lungo le rette su cui giacciono i lati del rettangolo i quali, per evitare che scivolino, devono essere necessariamente posizionati lungo le circonferenze massime della sfera (fig. 4b). Con questa fase dell'attività si evidenzia il fatto che le rette, tracciate come prolungamenti dei lati opposti di un rettangolo e quindi parallele in geometria euclidea, si intersecano in due punti sulla sfera (fig. 4c). Questo porta alla negazione del V postulato di Euclide e alla scoperta dell'esistenza delle geometrie non euclidee. Va sottolineato che ogni laboratorio proposto nel corso dell'attività ha come obiettivo quello di modellizzare concetti per lo più teorici, per stimolare l'interesse, l'immaginazione e l'intuizione. Sono stati dunque messi in conto ed accettati gli errori dettati dall'utilizzo di materiali poveri: ad esempio, l'elasticità del palloncino e del guanto in lattice causa una deformazione delle figure disegnate, ma aiuta a comprendere meglio quanto si sta affrontando attraverso la visualizzazione concreta. Tuttavia è importante sottolineare quest'ultimo aspetto con i ragazzi per evitare che si creino misconcetti.
Altri materiali poveri che abbiamo utilizzato nella formazione sincrona sono stati:

- il tubo delle Pringles e un foglio di carta per scoprire le geodetiche sul cilindro;
- una molla giocattolo per generare il toro identificando i lati opposti di un cilindro deformabile;
- il pongo per introdurre intuitivamente il concetto di omotopia, illustrando le trasformazioni ammesse nella "geometria della gomma", le quali non devono strappare, eliminare o creare buchi;
- alcune strisce di carta e un pennarello per lavorare sul concetto di superficie non orientabile a partire dalla costruzione e osservazione della proprietà nel nastro di Moebius.

Purtroppo l'elevato numero di partecipanti, unito a questioni di privacy, ha permesso di tenere accesa la webcam ai soli tutor e questo ha comportato inevitabilmente una criticità, in quanto non è stato possibile verificare che gli studenti utilizzassero nel modo corretto gli strumenti a disposizione, come invece accade quando si lavora in presenza. D'altra parte alcune funzionalità della piattaforma Webex, come il sondaggio in tempo reale e l'utilizzo della chat e delle reazioni, hanno dato un notevole supporto nel mantenere viva l'attenzione dei partecipanti. Inoltre hanno permesso a noi tutor di ricevere feedback immediati sullo svolgimento del laboratorio e sulla comprensione dei contenuti presentati, consentendo di offrire chiarimenti a chi ne avesse necessità.
Nel lavoro asincrono, i materiali poveri sono stati utilizzati spontaneamente dagli studenti nello svolgimento delle sfide previste. Presentiamo qui di seguito alcuni protocolli relativi al modulo delle geodetiche con l'intento di evidenziare come, in alcuni casi, il ragionamento sul modello costruito con la carta (fig. 5b, 5d) abbia aiutato i ragazzi a risolvere il task: "Un geko si trova su una parete e vede una zanzara sulla parete adiacente, non vuole farsela scappare perciò deve raggiungerla nel più breve tempo possibile. Quale sarà il percorso più breve che collega il geko al suo spuntino? Caricate qui il file per mostrarci il tragitto individuato e spiegateci il vostro ragionamento." (fig. 5a).

Figura 5. a) Illustrazione allegata al task. b) Sviluppo piano della stanza. c) Modello cartaceo tridimensionale costruito dai ragazzi. d) Argomentazione della soluzione con l'aiuto della rappresentazione grafica su carta.

Si può notare come i ragazzi abbiano dapprima visualizzato la situazione in tre dimensioni e successivamente su un piano. Un gruppo scrive infatti: "...se noi proviamo ad "aprire" la stanza in modo tale che non sia più una figura tridimensionale ma piana e proviamo a collegare il geko e la zanzara con una retta… e poi "richiudiamo" la stanza otterremo la seguente strada.".
Durante il workshop si è lavorato sul passaggio da figure 3D al loro sviluppo in 2D introducendo il concetto di geodetica su una superficie cilindrica: arrotolando il foglio di carta sul tubo di Pringles si visualizza come un segmento di retta, geodetica del piano, si trasforma in un arco di elica sul cilindro.

L'aspetto ludico: un laboratorio che deve coinvolgere anche a distanza

Il progetto Matepraticamente nasce nel 2014 con l'intento di stimolare l'apprendimento della matematica attraverso un approccio laboratoriale. Per perseguire tale obiettivo, rispettando così i punti cardine del progetto iniziale, nel laboratorio a distanza *Matepraticamente 2.0* è stato necessario introdurre nuove strategie didattiche, quali ad esempio l'elemento della *sfida*. Come è noto, un rischio della formazione extracurricolare in tempo di pandemia è quello di essere distaccata, fredda e frontale. Ci siamo dunque interrogati su come mantenere vivo il coinvolgimento e l'interesse dei partecipanti. La proposta di una sfida a squadre, con relativa classifica in itinere, ha favorito non solo l'apprendimento, ma anche la socialità nei frequenti periodi di lockdown.
Per evitare un approccio standard e ripetitivo nelle attività, si è deciso di diversificare le quattro sfide settimanali, proponendo nei task richieste differenti. Ad esempio, per l'attività di spazio e figure presentata, abbiamo creato un'*escape room* online, dal nome *Escape World.* Quest'ultima è una forma di gioco cooperativo che ha riscosso sempre più successo negli ultimi anni: nella sua versione più diffusa i membri della squadra sono rinchiusi all'interno di una o più stanze e, attraverso l'esplorazione dei luoghi, la risoluzione di enigmi e la collaborazione, devono trovare la via di uscita. Per crearne una trasposizione digitale è stata utilizzata la Google Suite, seguendo le indicazioni di Daria Romiti, insegnante e creatrice del blog *The Web Prof* (Romiti, 2019). Nel nostro caso l'escape room si è configurata come l'attraversamento di cinque mondi paralleli.
Le motivazioni di questa scelta risiedono in primo luogo nell'aspetto ludico potenziato che caratterizza un'attività di questo tipo: oltre alla sfida contro le squadre avversarie, gli studenti sono chiamati a

superare più prove consecutive a livello di gruppo e sono coinvolti e stimolati a cooperare al fine di portarle a termine. Abbiamo creato un'attività di questo tipo anche perché, in un contesto simile, si è preferito introdurre i suddetti contenuti dal punto di vista intuitivo e pratico, piuttosto che nozionistico. Il coinvolgimento diretto dei ragazzi come protagonisti del gioco fa sì che l'approccio alle nuove geometrie non avvenga solo attraverso la presentazione di concetti astratti con cui interfacciarsi passivamente, ma, al contrario, mediante compiti di visualizzazione e immaginazione.

La dimensione sociale dell'apprendimento: i lavori a gruppi
All'interno di *Matepraticamente 2.0*, uno degli obiettivi primari degli incontri sincroni è stato mantenere il contatto con i ragazzi anche nella situazione difficile del lockdown. Le limitazioni da tenere in considerazione nello sviluppo del progetto sono state dettate dalle nuove modalità introdotte in modo forzato dall'emergenza sanitaria, dal numero di partecipanti più elevato rispetto alle edizioni in presenza e dalle normative in merito alla privacy che regolano eventi didattici di questo tipo.
Un altro aspetto importante considerato è la valorizzazione della sfera emotiva, relazionale e motivazionale degli studenti nell'apprendimento. Grazie agli incontri sincroni i ragazzi hanno potuto conoscere le tutor del progetto ed essere coinvolti in prima persona nei laboratori proposti. Si è quindi cercato di trasportare una metodologia di lezione dialogata e partecipata nelle attività svolte a distanza. All'interno dei workshop si è stimolata l'interazione immediata con i partecipanti, partendo da una prima fase di lavoro individuale, in cui il singolo studente è stato invitato a rispondere ad alcune domande tramite sondaggi e quiz avviati sulla piattaforma Cisco Webex, oppure mediante form. In queste ultime attività i compagni di una stessa squadra si sono riuniti per collaborare alla risoluzione all'interno di sessioni interattive (sotto-stanze virtuali) create a partire dal meeting principale. Nella settimana successiva al workshop i partecipanti sono stati coinvolti in un lavoro a gruppi, da svolgere in autonomia, sotto forma di sfida tra le squadre provenienti dai vari istituti scolastici.
I gruppi di studenti sono stati creati con l'aiuto degli insegnanti di classe, formando squadre eterogenee, in modo tale che tutti i componenti potessero partecipare e contribuire al lavoro in team. I ragazzi, posti alla pari di fronte al compito da svolgere, hanno dovuto aiutarsi, confrontarsi e collaborare, favorendo così la creazione di un'interdipendenza positiva e lo sviluppo di una motivazione intrinseca all'apprendimento della matematica.
Nella maggior parte dei casi, il lavoro di gruppo è stata una modalità apprezzata dagli studenti, anche se talvolta sono emerse alcune criticità: le attività svolte forzatamente a distanza richiedono una buona organizzazione autonoma da parte dei ragazzi, in assenza di un controllo diretto di insegnanti e tutor. Tuttavia alcuni gruppi non hanno effettivamente lavorato insieme e talvolta sono sorti conflitti tra i membri. Una possibile soluzione a questo problema potrebbe prevedere, in futuro, momenti di lavoro di gruppo in sincrono supervisionati dal tutor di riferimento oppure, perché no, dai docenti curricolari, in qualità di mediatori in caso di conflitti e incomprensioni o di facilitatori nella gestione dei tempi e degli strumenti messi a disposizione.
Complessivamente si ritiene che l'apprendimento cooperativo sia un elemento imprescindibile per la buona riuscita delle attività proposte, nonché per lo sviluppo di alcune soft skills necessarie per la crescita dei ragazzi, soprattutto nel periodo pandemico in cui le occasioni di acquisizione di competenze relazionali sono state molto limitate.

CONCLUSIONI: UNO SPUNTO DI RIFLESSIONE

Nella realizzazione di questa attività abbiamo mirato a trasmettere concetti matematici avanzati attraverso immagini concrete e un approccio intuitivo e laboratoriale. A tal proposito è stato efficace alternare momenti sincroni e asincroni. Durante i workshop in diretta, gli studenti hanno potuto "toccare con mano" elementi che solitamente vengono percepiti come estremamente lontani, astratti e difficili da visualizzare. Attraverso le sfide settimanali, le squadre hanno lavorato in autonomia rafforzando competenze matematiche e digitali, tra cui il problem solving e la capacità di argomentare.

Gli aspetti concreti ed intuitivi delle attività, la loro particolare contestualizzazione ed il coinvolgimento emotivo degli studenti sono stati i presupposti per favorire una visione costruttiva della disciplina e per rendere più completo e consapevole il processo di apprendimento.
Il laboratorio a distanza ha permesso di raggiungere contemporaneamente un numero maggiore di studenti, provenienti da realtà scolastiche differenti sia dal punto di vista geografico sia come indirizzo di studi. Inoltre, “competere” con altri coetanei è stato un grande stimolo per i ragazzi a mettersi in gioco in prima persona.
Il maggiore tempo a disposizione per proporre le attività, grazie alla scansione quindicinale degli appuntamenti su Cisco Webex, ha permesso di trattare in maniera decisamente più approfondita gli argomenti proposti. Inoltre, l’utilizzo della piattaforma Orient@mente per la condivisione dei lavori e degli approfondimenti ha consentito a studenti e docenti di reperire il materiale anche a distanza di tempo. L’esperienza di *Matepraticamente 2.0* si è dunque rivelata più continuativa e incisiva rispetto all’edizione isolata e circoscritta ad un’unica mattinata presso gli istituti.
L’utilizzo di artefatti digitali ha potenziato, attraverso un maggiore coinvolgimento emotivo dei ragazzi, l’aspetto laboratoriale. Software e app per la didattica sono stati fondamentali per la creazione di un’attività che portasse gli studenti a una visione più ampia della matematica, vissuta come uno strumento di esplorazione e modellizzazione del mondo che ci circonda.
In conclusione, durante l’intero periodo di svolgimento del progetto abbiamo avuto un riscontro positivo sia da parte dei ragazzi, che hanno partecipato con costanza alle attività, sia degli insegnanti coinvolti: che queste nuove pratiche, nate per esigenza, possano diventare un’ulteriore risorsa nella didattica laboratoriale futura?

BIBLIOGRAFIA

MIUR (2010a). *Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*. d.P.R. 15 marzo 2010. Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.
MIUR (2010b). *Istituti tecnici. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento.* d.P.R. 15 marzo 2010. Roma: Ministero della Pubblica Istruzione.
AAVV. UMI (2003), Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L. and Robutti O. (Eds.), *Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Scuola Primaria. Scuola Secondaria di primo grado)*. Lucca: Matteoni stampatore.
Castelnuovo E. (2017). *Pentole, ombre, formiche*. Torino: Utet Università.
Catastini L. and Ghione F. (2006). *Geometrie della visione*. Milano, Italia: Ed. Springer.
Catastini L. and Ghione F. (2018). *Geometrie senza limiti.* Bologna, Italia: Il Mulino.
Tallone, C., Minisola, R., Olivero, F., and Raspitzu, M. (2017). Matepraticamente: una palestra per la mente. In L. Giacardi, M. Mosca, and C. Sabena (A cura di), *Conferenze e Seminari dell’Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017* (p. 265-284). Savigliano: L'artistica Editrice.
Urgellés J. G. (2010). *Quando le rette diventano curve*.Villatuerta, Spagna:RBA Italia

SITOGRAFIA

Lazzarini P. (1999-2007). *Modelli per la geometria non euclidea* http://www.paololazzarini.it/geometria_sulla_sfera/modelli_noneu_start.htm
Matepraticamente (2018). Pagina Instagram @matepraticamente
https://www.instagram.com/matepraticamente/
Università degli Studi di Torino (n.d.). *Orient@mente*. https://orientamente.unito.it
Romiti D. (2019), The Web Prof, Escape Room Digitale per la didattica https://www.thewebprof.it/escape-room-digitali.html

FREGI E TASSELLAZIONI DEL PIANO PER GUARDARE LA REALTÀ CHE CI CIRCONDA CON OCCHIO MATEMATICO

Ilaria Bencivenni (1), **Luigi Bernardi** (2), **Federica Ferretti** (3), **Luigi Tomasi** (3)
(1) **IIS "Rita Levi Montalcini" Argenta (Ferrara)**
(2) **Aix-Marseille Université**
(3) **Università di Ferrara**
bencivenni.ilaria@iisap.edu.it
luigi.bernardi@univ-amu.fr

Abstract
In questo articolo viene descritta una sperimentazione di attività progettate a livello nazionale all'interno del Progetto Klein del Liceo Matematico. La sperimentazione riguarda lo studio delle isometrie del piano ed è finalizzata alla creazione di fregi e tassellazioni. Verranno analizzate le varie fasi della sperimentazione con particolare attenzione al ruolo delle tecnologie, risorse indispensabili per la realizzazione delle attività.

Parole-chiave
Isometrie, didattica laboratoriale, GeoGebra, Tales Game, Liceo matematico

INTRODUZIONE

La progettazione della sperimentazione ha preso spunto dalle riflessioni nate all'interno del gruppo nazionale di ricerca del "Progetto Klein" coordinato da Ferdinando Arzarello e da Ornella Robutti dell'Università di Torino che si pone come obiettivo la trasposizione didattica delle "Vignette" dell'International Klein Project (blog.kleinproject.org). In particolare, la sperimentazione si riferisce alla trasposizione didattica inerente la vignetta *Simmetry Step by Step* (http://blog.kleinproject.org/?p=1381).
La sperimentazione ha coinvolto un gruppo di studentesse e studenti di seconda liceo scientifico sia a indirizzo tradizionale che a indirizzo scienze applicate dell'I.I.S. Rita Levi Montalcini di Argenta (FE) che hanno aderito al progetto in maniera volontaria. La sperimentazione è stata effettuata in due periodi, da aprile a maggio 2021 e da settembre a ottobre 2021 per un totale di 20 ore.
L'attività didattica, di tipo laboratoriale, svolta sia in presenza che a distanza, si è avvalsa di vari sofware didattici quali il software di geometrica dinamica *GeoGebra* e *GeoGebra Classroom* per la gestione e il monitoraggio delle attività, *Frieze Symmetry* e *Wallpaper Symmetry* per lo studio e l'analisi dei gruppi di isometrie dei fregi e delle tassellazioni del piano, *Tales Game* per la riproduzione di specifiche tassellazioni del piano.

Gli obiettivi della sperimentazione sono stati:

- la conoscenza delle isometrie del piano, la loro composizione e gli elementi invarianti;
- l'individuazione di alcuni elementi fondamentali per la realizzazione e la classificazione di semplici fregi e tassellazioni del piano, anche mediante l'utilizzo di specifici software didattici;
- il riconoscimento delle isometrie nel mondo reale, di regolarità di una pavimentazione, di simmetrie in opere d'arte e regolarità in natura.

LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE

Fase 0: test di valutazione diagnostico-formativo

La prima fase della sperimentazione è consistita nella somministrazione di un test composto da 24 quesiti tratti da prove INVALSI di matematica dei gradi 6, 8 e 10. La scelta dei quesiti è stata fatta con Gestinv (www.gestinv.it), il database delle prove INVALSI, tramite lo strumento "parole chiave", ricercando i quesiti in riferimento a: "simmetria assiale", "simmetria centrale", "centro di simmetria", "angolo di rotazione", "rotazione di figure piane", "traslazioni e rotazioni nello spazio", "traslazione di figure piane", "trasformazioni geometriche". In linea con gli obiettivi della progettazione didattica, non sono stati presi in considerazione i quesiti con riferimenti al piano cartesiano, coordinate dei punti e funzioni. Il test è stato progettato per indagare le conoscenze degli studenti sul tema delle isometrie; è stato somministrato in modalità telematica non anonima attraverso Google moduli.
Il test ha svolto una funzione diagnostico-formativa nel senso di Black e Wiliam (1997); l'identificazione delle lacune ha determinato la progettazione delle attività. I quesiti che hanno totalizzato più del 50% di risposte errate sono stati quelli in cui è richiesta l'individuazione dell'asse di simmetria di determinate figure; a questo aspetto è stata rivolta particolare attenzione durante tutte le fasi della sperimentazione.

Fase 1: "Le schede sulle isometrie"

La sperimentazione è iniziata con l'esplorazione del software didattico GeoGebra; dopo un primo momento dedicato all'utilizzo dei principali comandi di GeoGebra, gli studenti sono stati liberi di esplorare in autonomia le schede relative alle isometrie raccolte nel libro di GeoGebra appositamente predisposto.
Tutte le schede conducono alla costruzione e successiva esplorazione delle isometrie, eventualmente anche con app di GeoGebra già predisposte.
Nella maggior parte delle schede, si richiede di fare delle congetture sulla costruzione eseguita e, in taluni casi, si richiede la verifica della congettura mediante un'applicazione pre-impostata. Tutte le schede si concludono con la richiesta di esplicitazione delle conoscenze acquisite (D'Amore, 1999).
Le schede sono state raccolte in un libro di GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/vvwjqx5z) e fruite dagli studenti in maniera autonoma.
In questa fase sono state svolte le schede riguardanti la simmetria assiale, la traslazione, la rotazione e la simmetria centrale come caso particolare di rotazione (di 180°).

Le principali difficoltà si sono riscontrate nello svolgimento delle schede relative alla rotazione nel piano circa la definizione degli elementi che la caratterizzano, in particolare nell'individuazione dell'angolo di rotazione.
Per quanto riguarda le attività relative alla scheda sulla simmetria centrale, gli ostacoli principali si sono riscontrati nel riconoscere che i punti corrispondenti sono, in questo caso, allineati con il centro di rotazione.
Infine, diversi studenti hanno intuito gli elementi caratterizzanti la traslazione senza identificarli chiaramente. Nessuno studente ha collegato la traslazione ai vettori nonostante li avessero già incontrati nelle ore di fisica durante il precedente anno scolastico.

Fase 2: I fregi con GeoGebra e con Frieze symmetry

Una volta affrontate le attività inerenti le isometrie, gli elementi che le caratterizzano e i loro invarianti, è stata fornita la definizione di *fregio*. Successivamente è stato proposto un tassello con cui realizzare una decorazione lineare usando le trasformazioni analizzate: è stato richiesto dapprima di costruire un fregio utilizzando solo il vettore traslazione e poi anche le altre isometrie.
Gli studenti hanno dimostrato grande creatività nella realizzazione dei fregi; alcuni di loro hanno operato simmetrie anche rispetto ad assi che non erano né paralleli né perpendicolari ai lati della striscia di piano che avrebbe dovuto contenere il fregio. Questa situazione ha dato la possibilità di focalizzare

l'attenzione sul fatto che le isometrie da utilizzare sono unicamente le isometrie che lasciano invariato il fregio.
Dopo questo primo approccio è stato chiesto agli studenti di creare un fregio con il software web *Frieze symmetry* (https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/frieze.html) e di cercare di scoprire e descrivere come operano le sette "sigle", ovvero i sette gruppi di isometria dei fregi, presenti nel software. Occorre qui sottolineare che non si è mai parlato di gruppo in quanto struttura algebrica, ma si è sempre fatto osservare quali sono le proprietà di ogni isometria, con particolare riguardo all'esistenza dell'identità e dell'inversa di ogni isometria.
In questa fase, la più apprezzata dal punto di vista del coinvolgimento emotivo, gli studenti oltre ad aver evidenziato una notevole propensione artistica hanno anche familiarizzato con le isometrie e con la loro composizione. Particolare attenzione è stata posta infatti, per ciascun gruppo di isometria analizzato, alle isometrie coinvolte e alla loro composizione. In figura 1 sono mostrati alcuni dei fregi realizzati dagli studenti.

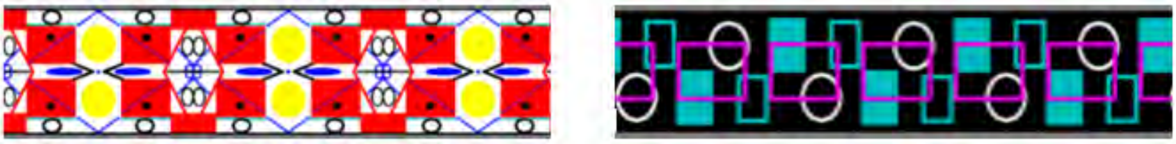


Figura 1. Fregi realizzati dagli studenti

La condivisione dei lavori svolti ha permesso agli studenti di fornire una descrizione chiara e formale dei sette gruppi di isometria dei fregi e soprattutto ha veicolato una maggiore consapevolezza del significato delle sigle riportate nel software (per esempio, che la "*m*" sta per *mirror* e che i numeri 1 e 2 rappresentano le rotazioni minime che riportano la striscia in sé stessa, rispettivamente di 360° e di 180°).
Un aspetto rilevante di questa fase ha riguardato il concetto di punto fisso di una trasformazione: se da un lato è stato molto facile per la classe individuare figure invarianti per simmetria assiale o per rotazione, più difficile è stato individuare figure invarianti per traslazione poiché gli unici "oggetti" che hanno questa proprietà sono illimitati, per esempio una retta. Molto utile in questo contesto è stato richiamare il celebre esempio dell'albergo di Hilbert per veicolare il concetto di infinito; questo ha richiesto agli studenti uno sforzo di astrazione.
Gli studenti non hanno incontrato particolari difficoltà, invece, nel riconoscere le isometrie coinvolte; in particolare hanno riconosciuto facilmente anche la glissosimmetria, nonostante non fosse ancora stata affrontata come isometria a sé, ma solo come composizione di due isometrie particolari.
Anche in questa attività, le uniche criticità emerse sono state relative alla corretta identificazione degli elementi caratterizzanti le isometrie: assi di simmetria, centro e angolo di rotazione, vettore traslazione. In particolare, per quanto riguarda i gruppi *p112* e *pmm2*, le principali difficoltà sono emerse nel riconoscimento della simmetria centrale come particolare rotazione (di 180°).
Nell'ultima fase dell'attività è stato assegnato un tassello, "il tassello del cuore", chiedendo alla classe di realizzare con GeoGebra le sette tipologie di fregi. Questa attività ha consentito agli studenti sia di consolidare le conoscenze relative ai gruppi di isometria dei fregi sia di riconoscere le trasformazioni che mandano un fregio in sé stesso.
Questa fase si è conclusa con l'analisi e la compilazione di un diagramma di flusso in cui gli studenti hanno classificato alcuni fregi. L'attività ha permesso di formalizzare l'esistenza e unicità dei sette gruppi di isometria dei fregi.

Fase 3: verso le tassellazioni del piano
In questa fase sono state approfondite le composizioni di isometrie utilizzando diversi software.
Inizialmente sono state esplorate con GeoGebra la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli e con assi incidenti, la composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro, la composizione di due simmetrie centrali, la glissosimmetria come composizione di una simmetria assiale e una

traslazione e la composizione di due traslazioni. Si tratta di conoscenze necessarie per comprendere le tassellazioni del piano.
Successivamente, sempre utilizzando il software GeoGebra, abbiamo proposto attività di esplorazione e congettura finalizzate all'individuazione dei poligoni regolari che tassellano il piano. In un secondo momento si è estesa la possibilità anche a triangoli e a quadrilateri qualunque. In particolare, nel caso di triangoli e quadrilateri si è richiesto agli studenti di tassellare il piano utilizzando solo una simmetria centrale e due traslazioni di cui dovevano individuare i vettori.
L'analisi di alcuni dei diciassette gruppi di isometrie delle tassellazioni del piano è stata effettuata utilizzando il software web *Wallpaper Symmetry* l'analogo di *Frieze Symmetry* per i fregi (https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html).
Le attività conclusive sono state realizzate tramite il software *Tales Game* [https://oiler.education/tales]. che consente di creare tassellazioni a piacere, creando un tassello base per poi disporlo in una griglia.
L'attività è cominciata selezionando una figura – i.e. il tassello base – scegliendo fra quadrato, rettangolo, rombo o triangolo. Si è decorato quindi il tassello tracciando rette – più propriamente segmenti - che uniscono punti che si trovano sul bordo del tassello, come mostrato in figura 2.

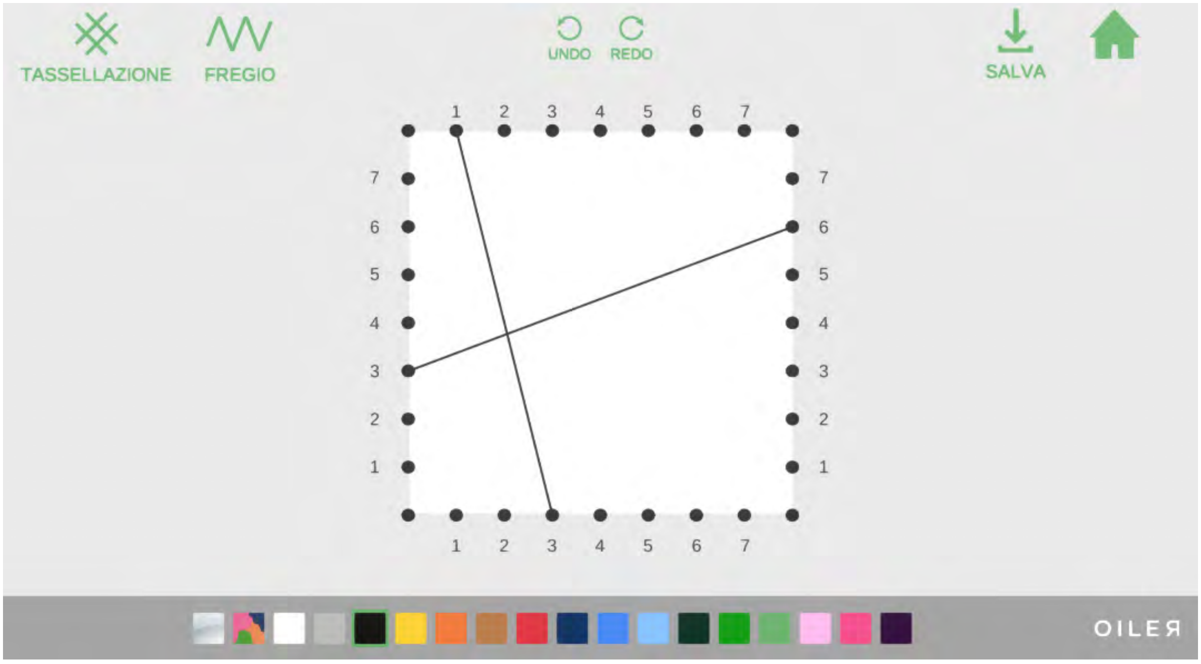


Figura 2. Costruzione del tassello iniziale

Il vincolo di disegnare esclusivamente rette, pur sembrando relativamente stringente, permette di focalizzare meglio le isometrie interne al tassello. Questo vincolo offre comunque la possibilità di creare inviluppi approssimando coniche come la parabola o l'ellisse, come mostrato in figura 3.
Una volta terminata la configurazione del tassello, si è proseguito con la modalità "tassellazione", con cui il tassello viene replicato più volte in modo da creare una pavimentazione. Prima di essere posizionato, il tassello può essere trasformato tramite rotazioni e simmetrie assiali (figura 4).

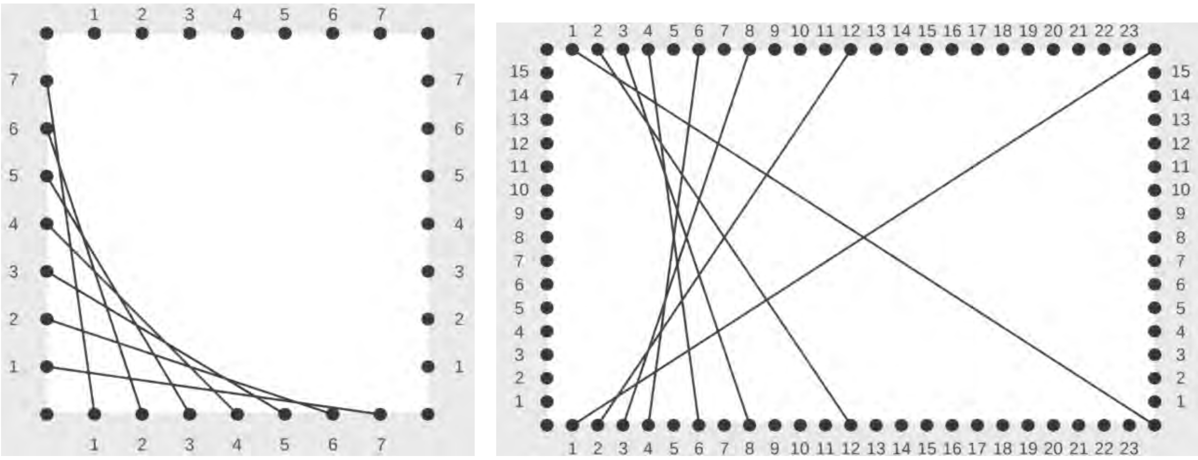


Figura 3. Il ramo di parabola sulla sinistra è ottenuto collegando fra loro numeri sui lati adiacenti con somma costante mentre la semiellisse sulla destra numeri su lati opposti con prodotto costante

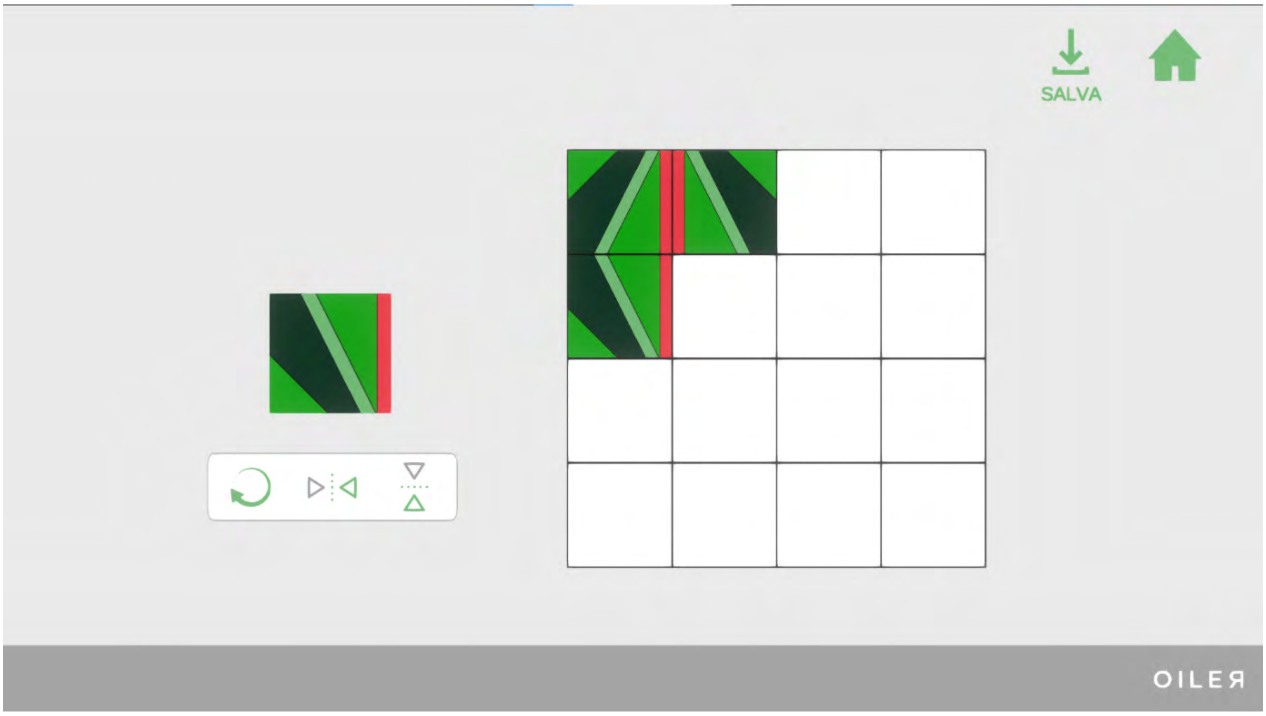


Figura 4. Realizzazione di una pavimentazione con tassello quadrato

Nella prima fase dell'attività la classe ha esplorato liberamente il software, analizzando poi i legami fra le proprietà aritmetiche dei numeri disposti sul bordo del tassello e le proprietà geometriche delle configurazioni ottenute. In particolare, sono state create tassellazioni in cui compaiono ellissi e archi di parabola (figura 5).

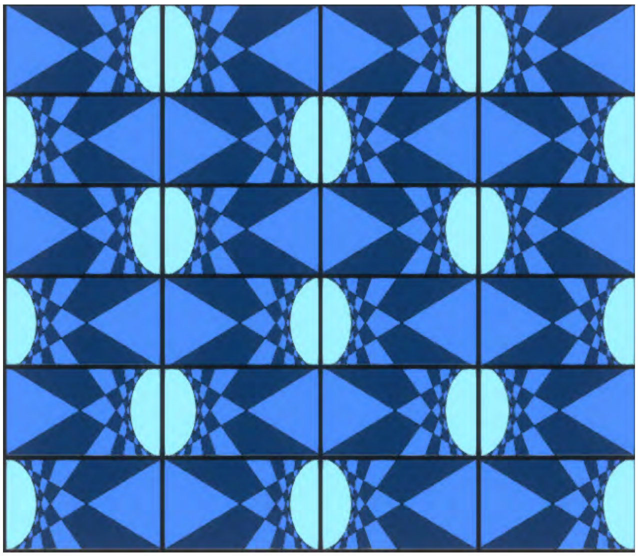


Figura 5. Tassellazione con ellissi

Durante la seconda attività si è proposto di creare una tassellazione seguendo il catalogo delle tassellazioni reperibile sulla pagina del software [https://oiler.education/tales/catalogo]. Il catalogo delle tassellazioni fornisce, per ciascuno dei diciassette gruppi di isometrie, istruzioni su come realizzarlo in uno o più modi (Figura 6).

Figura 6. Per ogni gruppo di isometria, e.g. P1, viene indicata la figura da selezionare, come comporre il tassello e come disporlo all'interno della griglia.

Tuttavia, anche seguendo le istruzioni, gli studenti hanno incontrato qualche ostacolo nella costruzione. Proprio dalla discussione degli errori commessi durante l'attività e dalla loro contestualizzazione, gli studenti hanno acquisito una maggiore comprensione delle tassellazioni stesse.

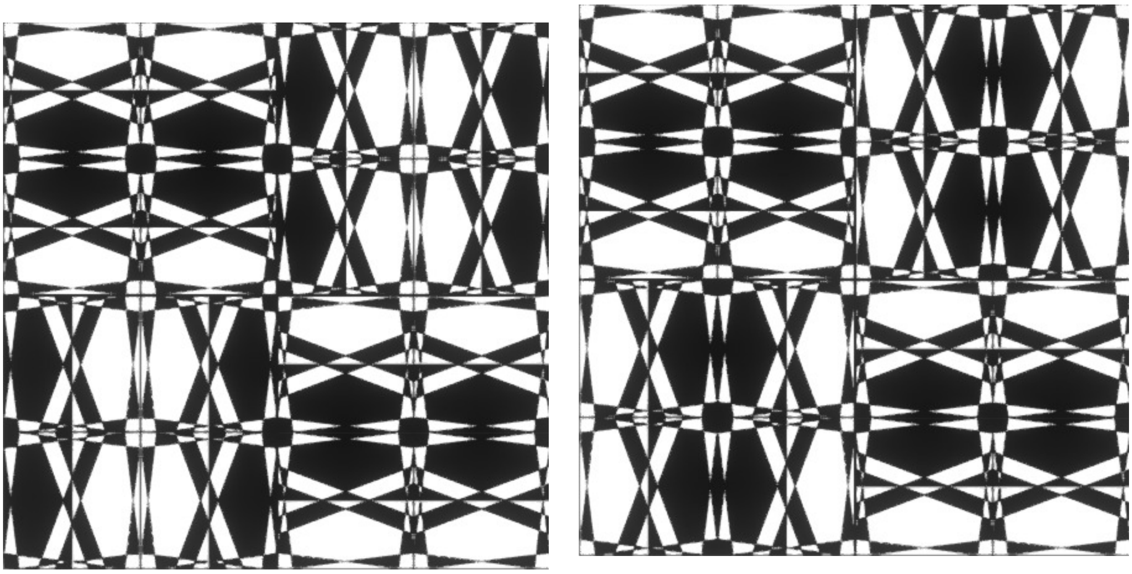


Figura 7. Esempio di tassellazione P4G errata sulla sinistra poi corretta sulla destra.

Nella terza e ultima attività si è richiesto di riprodurre una tassellazione realmente esistente, per poi classificarla usando il catalogo citato. Per questo è stato necessario identificare un possibile "tassello base", quindi riprodurlo correttamente ed infine disporlo nella griglia in maniera opportuna.
La tassellazione con cui è cominciata l'attività è partita dalla fotografia di una pavimentazione di Lisbona (Figura 8) presente nella *vignette Symmetry step by step* (http://blog.kleinproject.org/?p=1381).

Figura 8. Pavimento vicino al monastero di San Gerolamo, Lisbona (gruppo PG)

La pavimentazione, pur non sembrando complicata da riprodurre, nasconde diverse insidie strutturali.
Molti studenti l'hanno infatti inizialmente riprodotta come P1, senza accorgersi della glissosimmetria presente. Anche in questo caso l'errore è stato un utile passaggio per analizzare non solo il gruppo PG ma anche i gruppi P1, PM e P2.

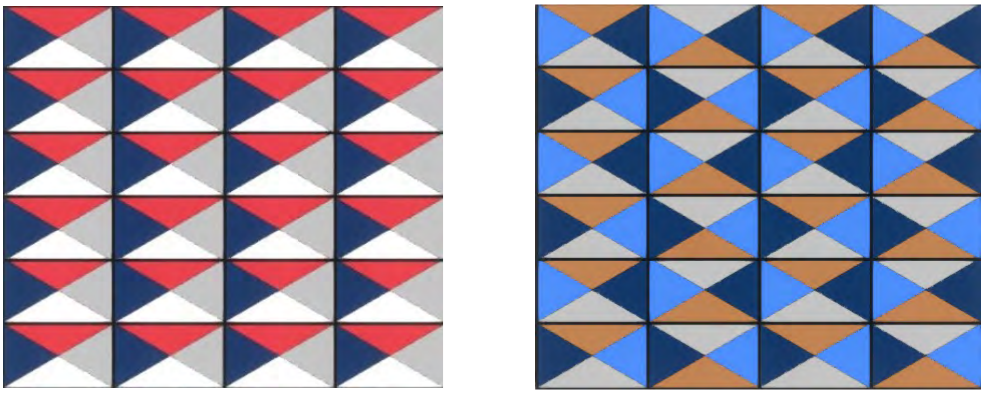


Figura 9. A sinistra riproduzione errata P1, a destra la corretta PG

Isometrie e realtà

Fin dall'avvio della sperimentazione è stato chiesto agli studenti di provare a osservare la realtà con gli occhi del matematico per riconoscere eventuali isometrie. Abbiamo messo a disposizione un *padlet* in cui gli studenti potevano caricare foto di elementi della realtà circostante che presentavano isometrie.
Per vivere in maniera esperienziale i sette gruppi di isometria dei fregi è stata svolta un'attività che è stata poi intitolata "Le isometrie danzanti": gli studenti hanno riprodotto i sette gruppi di isometrie dei fregi sia in modalità statica, per creare un fregio vivente, sia in modalità dinamica con passi danzanti.

CONCLUSIONI

Alla fine delle attività è stato riproposto il test iniziale. In generale, c'è stato un aumento di risposte corrette rispetto ai risultati ottenuti nella somministrazione iniziale. In particolare, la percentuale di risposte corrette è nettamente incrementata per quanto riguarda i quesiti inerenti all'individuazione degli assi di simmetria delle figure proposte. Diversi momenti di valutazione formativa in itinere, hanno evidenziato un accrescimento delle conoscenze e delle competenze degli studenti per quanto riguarda il tema delle isometrie e delle loro composizioni. L'utilizzo dei diversi software, oltre a stimolare la motivazione e l'interesse anche durante i momenti svoltosi a distanza, ha favorito l'acquisizione di diversi concetti.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano i colleghi dell'I.I.S. "Rita Levi Montalcini" di Argenta (FE) che hanno partecipato alla progettazione e alla conduzione della sperimentazione, Delia Farolfi e Laura Resta e tutti i colleghi del Progetto nazionale Klein del Liceo Matematico, in particolare del gruppo che si è occupato della trasposizione della *vignette "Symmetry step by step*".

BIBLIOGRAFIA

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276

Black, P. J. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles Policy and Practice,* 5(1), 7-73.

INTEGRABILITÀ: COSTRUZIONE DI CONCETTI ATTRAVERSO CONGETTURE E SOFTWARE GEOGEBRA

Arianna Coviello
Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria
coviello.arianna@gmail.com

Abstract:
La mia proposta è un percorso laboratoriale, sperimentato in modalità DDI in una classe quinta di Liceo Scientifico, attraverso il quale gli allievi sono stati essi stessi *creatori* del segmento del corso di analisi relativo all'introduzione del concetto di integrazione. Il percorso, in un'alternanza di attività di laboratorio e momenti di sistematizzazione, ha come tappe fondamentali: *il concetto di funzione integrabile e di integrale definito, la funzione integrale e la primitiva di una funzione, il Teorema fondamentale del Calcolo e il Teorema del Valor medio.*

Parole-chiave
Integrabilità, laboratorio matematico, Geogebra, DDI, Liceo Scientifico

L'IDEA PROGETTUALE

La mia proposta è un percorso laboratoriale, sperimentato in modalità DDI in una classe quinta di Liceo Scientifico, attraverso il quale gli allievi sono stati essi stessi *creatori* del segmento del corso di analisi relativo all'introduzione del concetto di integrazione. Il percorso, in un'alternanza di attività di laboratorio e momenti di sistematizzazione, è strutturato nelle seguenti fasi concettuali:

- Funzione integrabile, primitive di una funzione
- Integrale indefinito
- Integrale definito
- La funzione integrale e la primitiva di una funzione
- Il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale
- Il Teorema del Valor Medio

Ogni attività è stata registrata a più mani in un diario di bordo, modalità vincente più che mai nella DDI per sostituire il lavoro in team normalmente realizzato in presenza. La necessità di registrare puntualmente ogni riflessione e conclusione ha favorito l'acquisizione di una maggior consapevolezza del proprio percorso diventando punto di forza della didattica a distanza. L'itinerario didattico è stato suddiviso in quattro step. Il primo svolto nell'ambiente grafico Geogebra in cui sono emersi i nodi concettuali di integrabiltà, il concetto di primitiva di una funzione, di integrale indefinito e definito. Un secondo e terzo step, svolti in ambiente grafico e di calcolo Geogebra, composto da esercitazioni in cui si è riflettuto sulla convergenza delle somme superiori e inferiori di aree approssimanti un'area a contorno mistilineo. Il quarto step, infine, realizzato sempre nello stesso ambiente Geogebra e dedicato al concetto di funzione integrale e al teorema fondamentale del calcolo. Al di là di una progettazione minima dell'attività, ho seguito ciò che di interessante emergeva dalle interpretazioni dei ragazzi, anticipando spesso formalizzazioni e dando un ordine tutto personale al segmento di analisi che si andava creando: allievi come creatori di percorsi! Le congetture degli allievi descritte in questo articolo sono state da me riportate fedelmente, come loro le hanno spiegate e scritte sul diario di bordo.

Step 1: Approccio al concetto di integrale

L'approccio al concetto di integrale avviene attraverso una situazione elementare in ambito fisico che lascia aperte diverse interpretazioni.

Rappresentate nella vista grafica di Geogebra (utilizzando un campo di inserimento) la funzione velocità istantanea v(t)= 10 - 5t nell'intervallo [0,6].

- *È possibile determinare geometricamente, graficamente e algebricamente la variazione della posizione del corpo dall'istante t = 0s all'istante t = 6s? Se sì, condividete la vostra idea.*
- *Modificate poi la funzione nel campo di inserimento e verificate la validità del vostro metodo.*

Congettura di Anna: Anna sa che la funzione, che ha come derivata prima quella della velocità, deve essere di secondo grado, quindi, impone che la legge oraria debba essere una funzione di secondo grado con termine noto costante (Figura 1). Il ragionamento di Anna mi permette di definire la primitiva di una funzione.

$$\begin{cases} f'(x) = (ax^2 + bx + c)' \\ g(x) = -5x + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 2ax + b \\ g(x) = -5x + 10 \end{cases} \rightarrow 2ax + b = -5x + 10$$

$$\begin{cases} 2a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = 10 \end{cases} \rightarrow f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 10x + c$$

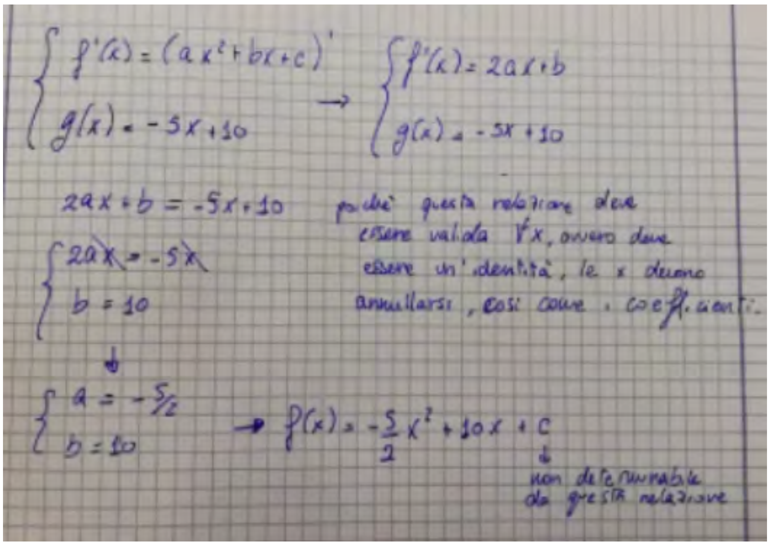


Figura 1

Congettura di Matteo**:** Matteo utilizza il software GeoGebra per rappresentare la funzione velocità e la generica primitiva. Il suo ragionamento si basa sul fatto che la primitiva deve essere una funzione quadratica, i coefficienti a, b, c vengono da lui associati a tre slider che, fatti variare, mostrano il valore che devono assumere a e b affinché la parabola sia quella attesa. Matteo si accorge che il parametro c é ininfluente ai fini del grafico cercato (Figura2). Il ragionamento di Matteo mi permette di introdurre il teorema relativo all'infinità di primitive di una funzione.

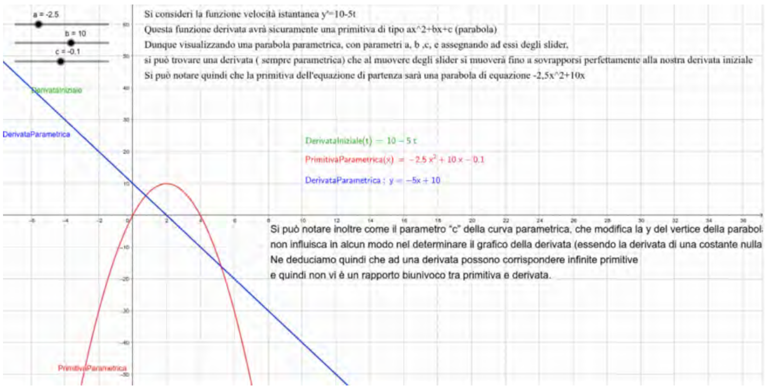


Figura 2

Congettura di Arianna: usando il software GeoGebra, Arianna ha notato una relazione fra le aree di alcuni poligoni e il valore dell'ordinata di un punto sul grafico della funzione posizione, che lei ha rappresentato avendone calcolato l'equazione (moto uniformemente accelerato). Siccome i poligoni individuati sono due/tre a seconda che l'istante di tempo considerato sia compreso tra 0 e 2 o maggiore di 2, Arianna dice che: per gli istanti di tempo appartenenti all'intervallo [2s,6s] se si sottrae l'area del triangolo negativo a quella del triangolo positivo, si ottiene esattamente il valore della posizione del corpo in un particolare istante. Per gli istanti di tempo appartenenti all'intervallo [0s,2s], la posizione del corpo è data dalla somma delle seguenti aree: triangolo positivo che sormonta un rettangolo + area rettangolo sormontato dal triangolo - area del triangolo negativo. Arianna ha verificato tutti questi valori utilizzando le equazioni di moto uniformemente accelerato e il file Geogebra da lei creato (Figura 3). il ragionamento di Arianna ci permette di osservare che la funzione posizione (legge oraria di un moto) è il luogo delle aree sottese alla funzione velocità

Figura 3

Step 2: Area di una figura piana a contorno mistilineo

La seconda attività ha come obiettivo quello di individuare un metodo per calcolare l'area di una figura a contorno mistilineo. In particolare, l'area sottesa al grafico di una funzione in un intervallo assegnato. Il problema stimolo è una rivisitazione di un'activitè di decouverte di un liceo francese: *ABCD è un*

quadrato di lato 1 nel sistema di riferimento ortonormale in cui A è l'origine del riferimento. In questa configurazione, M è un punto libero sulla curva C che rappresenta la funzione quadratica $y = x^2$ *definita su [0;1]. Utilizzando GGB, congetturate riguardo a un possibile procedimento che permetta di calcolare l'area compresa fra il grafico di f(x), e l'asse x nell'intervallo [0,1].*
Riporto qui la congettura di Yuri: "Ho pensato di ragionare partendo dalla fine, considerando la nostra funzione come derivata della funzione $y = \frac{1}{3}x^3 + c$ e che il valore dell'area sottesa a un determinato tratto di funzione f'(x) fosse uguale a $f(x_0)$ dove x_0 corrisponde all'ascissa dell'estremo destro che delimita l'area considerata. Nel grafico (Figura 4) l'estremo che delimita l'area sottesa è il punto M, la cui ascissa è variabile e collegata a uno slider, che appartiene alla funzione analizzata. Al variare di M ho visto che la funzione delle aree sottese è effettivamente $y = \frac{1}{3}x^3$ e di conseguenza ho trovato il valore di tale area. Per validare i risultati ottenuti, ho confrontato i valori assunti dalla primitiva al variare dell'ascissa di M con il valore della differenza tra l'area del triangolo che delimita la parte di piano considerata e l'area del segmento parabolico individuato dalla sua intersezione con la curva. I risultati ottenuti mi permettono di congetturare che la primitiva di una funzione (grafico verse) è il luogo geometrico delle aree sottese alla funzione data (curva blu). Ogni punto del grafico della primitiva rappresenta un valore di area sottesa.

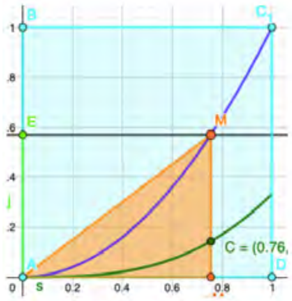


Figura 4

Esercitazione focus sulle Somme Superiori e Inferiori, errori di approssimazione per eccesso e per difetto, differenza degli errori

Relativamente al problema del quadrato, eseguite una suddivisione dell'intervallo [0,1] in un numero a piacere di sotto-intervalli e verificate la convergenza delle sommatorie delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti al valore dell'area sottesa al grafico della funzione nell'intervallo dato.
Congettura di Yuri e Nicolò: Attraverso il comando Geogebra Somme superiori e Inferiori Yuri e Nicolò verificano che l'approssimazione dell'area sottesa con trapezoide inscritto è migliore di quella con trapezoide circoscritto (Figura 5)

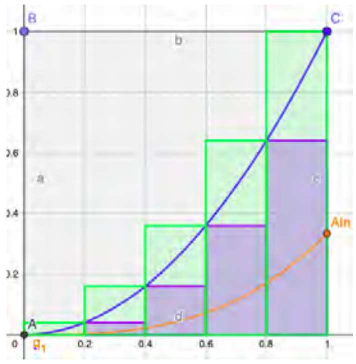


Figura 5

Congettura di Arianna e Andrea: Per determinare l'area compresa fra il grafico di f(x) e l'asse x nell'intervallo [0, 1] abbiamo suddiviso l'intervallo [0, 1] in 5 parti uguali di ampiezza Δx=0.2. Abbiamo poi costruito 5 rettangoli che avessero come base 0.2 e come altezza il valore dell'ordinata del punto sulla curva avente come ascissa il punto medio della base (x_n). Abbiamo fatto ciò perchè abbiamo notato che il triangolo della parte sinistra del rettangolo che sporge sopra la funzione ha area approssimabile, anche se non è proprio la stessa, a quella mancante sopra la parte destra del rettangolo. Quindi, sommando l'area di questi 5 rettangoli si può determinare l'area sottesa alla parabola nell'intervallo [0, 1] (Figura 6). Il procedimento è generalizzabile con la seguente formula: $\sum_1^5 \quad \Delta x \cdot f(x_n)$. Utilizzando questo procedimento il valore dell'area è 0.2*(0.01+0.09+0.25+0.49+0.81) = 0.33. Sappiamo che l'area reale è uguale all'area del quadrato meno l'area del segmento parabolico e quindi equivale a 1/3 dell'area del quadrato. Si può, quindi affermare che il procedimento eseguito restituisce una buona approssimazione dell'area reale sottesa alla curva. Per avere valori molto più precisi è necessario considerare Δx tendente a zero.

Conclusione: L'errore per eccesso è circa uguale all'errore per difetto quindi la somma delle aree dei rettangoli è una buona approssimazione dell'area sottesa al grafico della funzione ---> teorema del valor medio inconsapevole!

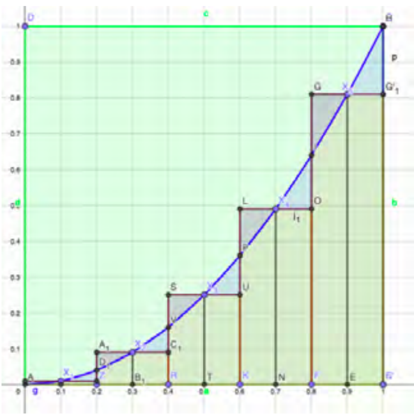


Figura 6

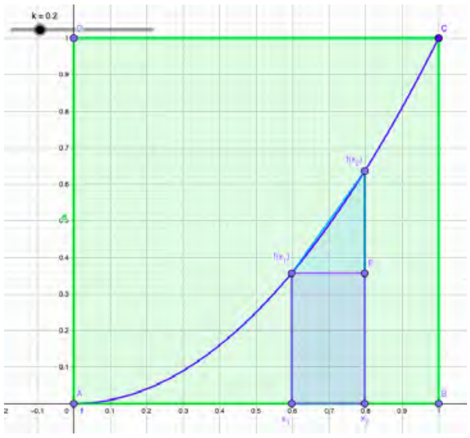


Figura 7

Congettura di Anna e Giovanni: Anna e Giovanni scoprono il metodo dei Trapezi!
"A parità di Δx, fra il trapezio e il rettangolo, la figura che meglio approssima l'area sottesa alla funzione è il trapezio. Un metodo per calcolare l'area sottesa potrebbe essere la somma di trapezi affiancati. Inoltre, la differenza fra l'area effettivamente sottesa e l'area del trapezio diminuisce man mano che il Δx tende a 0. Si potrebbe immaginare di calcolare precisamente l'area sottesa con una infinita somma di trapezi la cui altezza, il Δx, tenda a 0. A questo punto, tuttavia, con il lato inferiore tendente a 0, sia il rettangolo sia il trapezio si riducono a semplice segmento. L'area sottesa sarebbe la somma infinita di segmenti lunghi f(x)": $\sum_{x_1,x_2} \frac{\Delta x\left(f(x_1)+f(x_2)\right)}{2}$ $, con\ x_1, x_2 \epsilon[0{,}1]$ (Figura 7)

Step 3: Analisi di variazioni

Utilizzando un foglio di calcolo studia le seguenti variazioni:

1. *La variazione della sommatoria delle aree dei rettangoli inscritti/circoscritti al grafico di una funzione in un intervallo*
2. *La variazione dell'errore di approssimazione per difetto/eccesso al variare del numero di rettangoli costituenti i due trapezoidi (inscritto e circoscritto)*

Congettura di Arianna, Giovanni, Andrea: La funzione h rappresenta il risultato dell'analisi bivariata degli errori dell'area del trapezoide circoscritto rispetto all'area reale, utilizzando la funzione esponenziale come modello. La funzione p è frutto dello stesso studio per l'errore dell'area del trapezoide inscritto. Poiché maggiore il numero di rettangoli, più preciso il valore dell'area del trapezoide rispetto alla reale area sottesa, entrambi i grafici delle funzioni errore hanno asintoto orizzontale $y = 0$ per $n \to +\infty$. I valori dell'errore riferito ai trapezoidi inscritti sono negativi poiché hanno area sempre minore rispetto alla reale area sottesa. È possibile notare come la funzione che rappresenta la differenza delle aree dei due trapezoidi in funzione del numero di rettangoli n sia precisamente la funzione omografica $y = 1/x$ (Figura 8)

Congettura di Alice: Verificato il fatto che l'area sottesa è ben approssimata dai trapezoidi inscritto e circoscritto, ho voluto dimostrare che l'errore commesso nell'approssimazione per difetto (trapezoide inscritto) è effettivamente minore dell'errore commesso nell'approssimazione per eccesso. Per fare ciò ho considerato un sotto-intervallo dell'intervallo [0,1] e ho espresso le aree dei trapezoidi inscritto e circoscritto in simboli. In questo modo sono passata dalla verifica alla dimostrazione che la funzione differenza degli errori è sempre positiva e tende a zero per il numero di suddivisioni dell'intervallo [0,1] che tende ad infinito. (Figura 9)

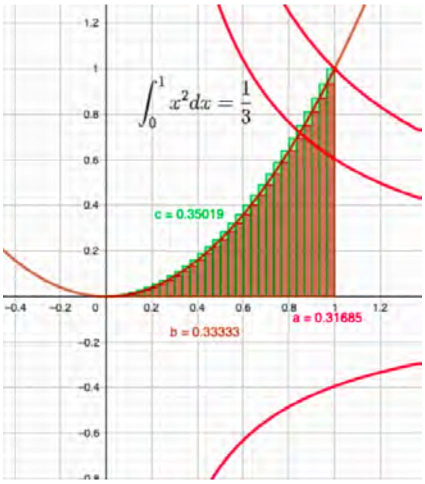


Figura 8

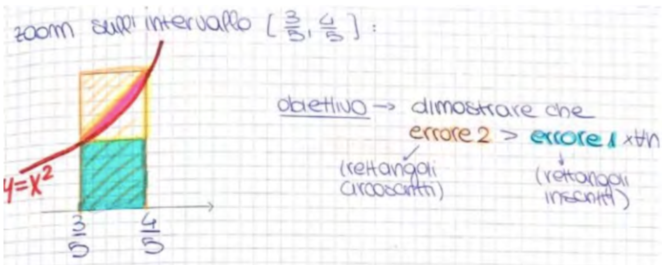


Figura 9

Step 4: Riflessioni sul teorema fondamentale del calcolo

Considera una funzione definita in un intervallo I = [a,x] con secondo estremo x mobile.

- *Rappresenta, con il comando <Integrale>, l'area sottesa alla curva nell'intervallo I.*
- *Traccia il luogo geometrico delle aree sottese descritte dalla variazione dell'estremo mobile x. Come chiameresti tale luogo geometrico?*
- *Utilizza ora il foglio di calcolo e registra i valori che assume la funzione luogo al punto precedente nell'intervallo [a,x]. Puoi abbinare anche l'analisi bivariata per avere informazioni sul modello matematico che si è creato nella registrazione. Descrivi quanto hai ottenuto.*
- *Prova a scrivere un enunciato teorico che generalizzi ciò hai pensato e fatto*

Riflessioni di Giovanni e altri: abbiamo osservato come la caratteristica della funzione integrale sia il punto iniziale e ci siamo chiesti come mutassero le funzioni integrali cambiando il punto iniziale. Esplorando il file GGB abbiamo notato che le funzioni integrali mutano, in funzione del cambiamento del punto iniziale, di un termine di traslazione verticale + k.

Conclusione: l'insieme delle primitive di una funzione corrisponde all'insieme delle funzioni integrali, scelto un differente punto iniziale. (Figura 10)

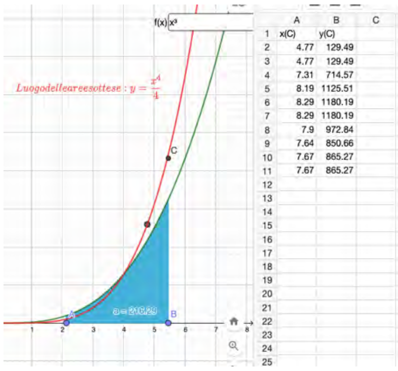


Figura 10

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio gli alunni della Classe 5E, a.s.2020/2021, per aver illuminato con il loro intelletto il difficile periodo della pandemia e per aver dimostrato che le distanze sono colmate, sempre, dalla perseveranza, dai sogni, e dal piacere di lavorare insieme.

BIBLIOGRAFIA

Paola, D., Impedovo, M., Castagnola, E., Matematica dappertutto (Volume C).
USR Piemonte, Corso di formazione, L'insegnamento della Matematica in Italia e in Francia.
.

LA GEOMETRIA DEL NUMERO *e*.

Angelo Merletti * – Corrado Agnes **
***Liceo scientifico *Maria Curie*, Pinerolo - ** già Politecnico di Torino**
angelo.merletti@curiepinerolo.edu.it

Abstract
Questo lavoro è un esempio della tesi che abbiamo posto alla base della nostra ricerca didattica:
integrare e combinare argomenti di matematica e fisica cercando di evidenziare linee di pensiero deduttivo strettamente collegate alla soluzione di problemi reali.
La connessione dei logaritmi (Napier 1614) con il calcolo pratico e quella dell'esponenziale con l'analisi matematica hanno indirizzato la tradizione didattica a non prendere in considerazione la geometria della curva stessa, che è insieme logaritmica ed esponenziale. In questo anche favoriti dal modo di pensare procedurale per cui una curva è analisi mentre invece le coniche sono geometria. Non era così quando Torricelli (1644) dimostra la costanza del segmento che l'ordinata e la tangente intercettano sull'asintoto, (ed Huygens (1661) applica questa scoperta allo studio della caduta dei gravi in un mezzo viscoso) che non dubitiamo sarebbe di maggiore sorpresa per gli insegnanti che per gli studenti!
Faremo vedere, proponendo un modo"demonstrativo" di usare il software di geometria dinamica, come questa proprietà e molte altre, rendano rilevante dal punto di vista dell'insegnamento una formulazione geometrica del numero *e*.

Parole chiave
Geogebra (GGB), visualità dimostrativa, costruzione, successione geometrica.

INTRODUZIONE

La figura 1 che abbiamo scelto per la presentazione, proviene da un libro dell'inizio del secolo (l'altro), proprio quando la geometria, da pietra angolare dell'istruzione scientifica cominciava a subire i primi i forsennati (letteralmente fuori di senno) attacchi di parte dei matematici del gruppo *Bourbaki* , che hanno portato alla quasi sua scomparsa dai curriculum scolastici con risultati disastrosi.

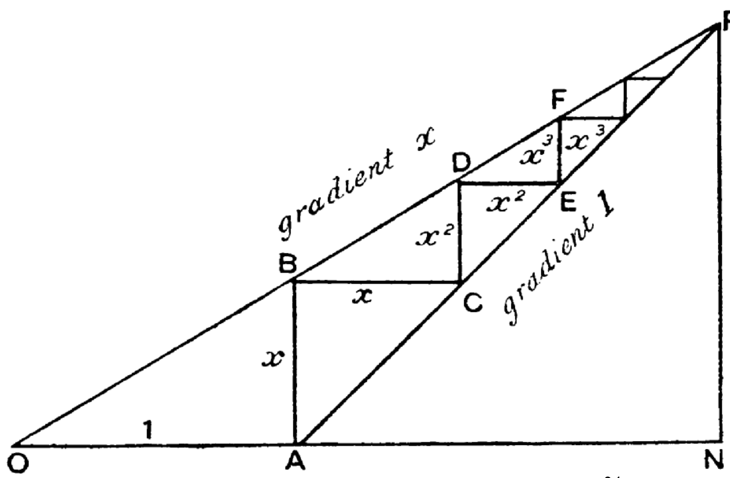


Figura 1. Costruzione di una successione geometrica[24]

Come faremo vedere la figura 1 è centrale negli sviluppi di questo lavoro.

24 Carslaw , Plane Trigonometry, January 1, 1909

È anche interessante che venga scelta da Cristina Bardelli in uno studio di misura della efficacia didattica delle cosiddette Visual Proofs: nella fattispecie come dimostrazione visuale della somma di una serie geometrica[25]. Le conclusioni sulla completa inefficacia, da noi del tutto condivise, ci hanno indotto a pensare quale potrebbe essere un uso invece efficace dei software di geometria dinamica, attualmente molto diffusi e che hanno incontrato il favore degli insegnanti, anche se talvolta per motivi (uso ludico o pubblicitario) da noi del tutto non condivisi.

Uso "demonstrativo" del software di geometria dinamica.
Riteniamo GGB, come qualsiasi software di geometria dinamica, uno strumento informatico che possa essere usato nell'insegnamento come unico succedaneo possibile della geometria di Euclide, considerati i programmi e i governanti dell'istruzione, gli attuali studenti (e insegnanti), nonché lo stato contemporaneo di disastro in atto nella scuola. Questa opinione si basa essenzialmente su tre possibili analogie con l'insegnamento tradizionale della geometria euclidea.
Il primo riguarda i comandi del software, che possono essere considerati nella loro totalità una proliferazione di conseguenze dei postulati e dei teoremi. Un esempio: il comando "linea retta" chiede l'input di due punti, ed è operativamente equivalente a dire che posso tracciare un segmento tra due punti qualsiasi ed estenderlo fino ai confini dello schermo in entrambe le direzioni (I postulato di Euclide).
Il secondo è la considerazione dei problemi di costruzione: quelli che si concludono con la frase "quod erat faciendum". Nel caso venga condivisa la prima analogia, allora effettivamente saper costruire è, in qualche modo, dimostrare[26].
Il terzo motivo è più sostanzioso, ed è anche l'elemento di novità dello strumento, cioè la possibilità di muovere in modo consequenziale gli elementi geometrici costitutivi della costruzione. E' quindi un modo molto efficace di manipolare elementi mobili in modo del tutto arbitrario. Questo concetto chiave della dimostrazione matematica, può essere usato come elemento dimostrativo di tipo geometrico. Per esempio come lo usa Peano nel suo del *Calcolo Geometrico* [27].
L'uso di tale strumento permette di rendere evidenti alcune proprietà geometriche, nel nostro caso, la costanza della lunghezza di un segmento, al variare di alcuni parametri caratteristici del problema affrontato. Tale modo di procedere, pur non costituendo una dimostrazione in senso tradizionale, permette agli studenti di elaborare delle congetture illuminando la strada per le future dimostrazioni vere e proprie.

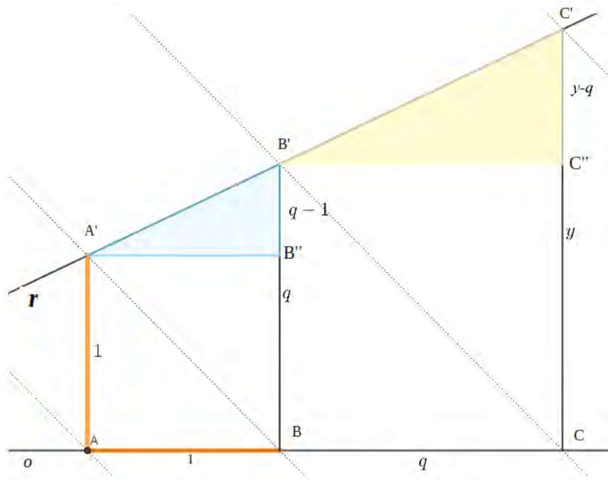
COSTRUZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI POTENZE

Ciò che faremo ora è mostrare un modo per costruire geometricamente una successione di potenze usando un metodo geometrico. Ci rifacciamo alla figura 2

25 Bardelli C. UNIPO Visual Proofs : An Experiment Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010)

26 Non vorremmo essere accusati di paragonare il comando che produce un quadrato con l'analogo problema (proposizione 47 del primo libro degli *Elementi*, quella che precede e sostiene quasi tutto il peso della dimostrazione del così detto teorema di Pitagora). Affermiamo che l'uso didattico dei comandi di GGB è possibile purché si esplicitino le ipotesi essenziali della loro validità, in questo caso la curvatura zero della superficie.

27 Peano G. ,"Calcolo geometrico secondo l'ausdhnungslehre di H. Grassmann", Torino, 1888.



$(q-1):1=(y-q):q \qquad y=q^2$

Figura 2. Costruzione geometrica di una successione di potenze.

Assegnata la ragione q (che per fissare le idee sceglieremo maggiore di 1) della successione geometrica si costruisce dal punto A un segmento verticale AA' di lunghezza 1 e lo si riporta sulla orizzontale o per A (nel disegno, con una retta a 45°) ottenendo un secondo segmento AB di lunghezza 1; dall'estremità di questo segmento se ne alza un altro BB' di lunghezza q. Si traccia la retta r per A' e B' e si riporta il segmento q sull'orizzontale individuando il punto C. Da C si alza una perpendicolare ad o fino alla retta r e si trova il punto C': la lunghezza di CC' è pari a q^2 .
La dimostrazione segue facilmente dalla similitudine dei triangoli $A'B'B''$ e B'C'C" ed è illustrata nella figura 2.

Somma di una serie geometrica: limite visivo.
Nella figura 3 è riportata la costruzione completa della successione geometrica secondo il metodo indicato nel precedente paragrafo. E' riportata anche la parte della successione corrispondente alle potenze negative. Nel caso illustrato la ragione è maggiore di 1, quindi la serie delle potenze positive non è convergente; invece è convergente la parte delle potenze negative.

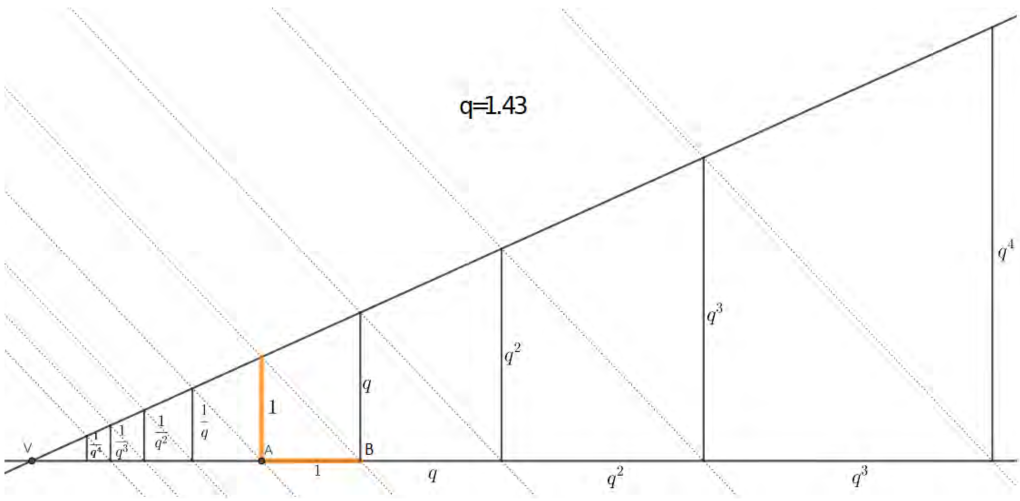


Figura 3. Costruzione della successione geometrica e somma della parte convergente.

Osserviamo che la somma:

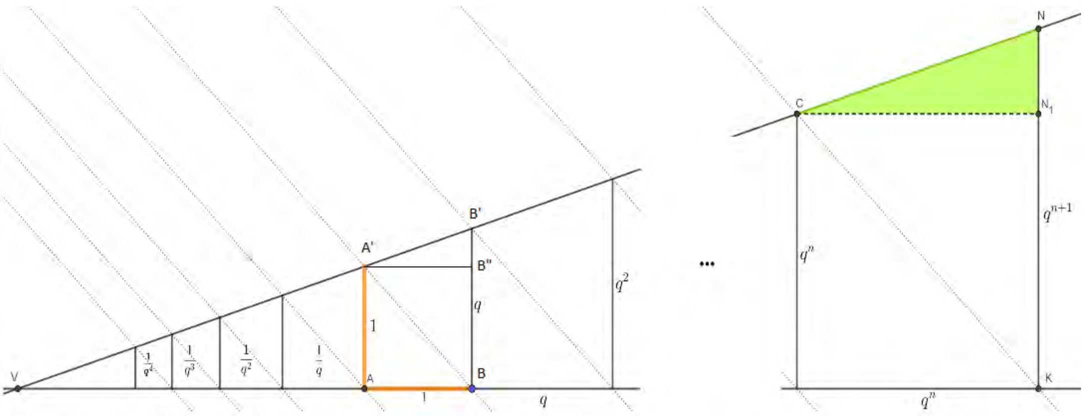
$$\sum_{n=0}^{-\infty} q^k$$

ha una semplice interpretazione geometrica: è la lunghezza del segmento BV. Questa lunghezza può essere calcolata mediante una proporzione:

$$BV : q = 1 : (q-1); \text{ ovvero: } BV = \frac{1}{1-1/q}$$

che è il noto risultato ottenuto, tradizionalmente, come passaggio al limite di una somma finita.
Il metodo geometrico permette di aggirare il passaggio al limite pur conservando il rigore.

Una proprietà della somma di una serie geometrica.
Se invece di sommare da$-\infty$ a 0 si somma da$-\infty$ad n si ottiene un risultato interessante.
Nella figura 4 è illustrato il risultato.



$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{n} q^k = VK \qquad KN : VK = N_1N : CN_1 \qquad q^{n+1} : VK = (q^{n+1} - q^n) : q^n$$

Figura 4. Calcolo della somma da$-\infty$ ad n

Dalla proporzione si ricava:

$$S_n = VK = \frac{q^{n+1}}{q-1}$$

Cioè: la somma di una serie geometrica fino al termine n-esimo è proporzionale al termine (n+1)-esimo.

Incremento relativo della successione geometrica
Calcoliamo ora l'incremento relativo di una successione geometrica ovvero il rapporto fra l'incremento fra un termine generico ed il successivo rispetto al termine generico.
Anche questo calcolo può essere effettuato geometricamente mediante la proporzionalità fra triangoli. Riferendosi alla figura 4, dalla similitudine dei triangoli NCN_1 ed $AB'B''$ si possono scrivere la proporzione e gli altri risultati in figura 5.

$$(q^{n+1} - q^n) : q^n = q - 1$$

$$\Delta(q^n) = (q^{n+1} - q^n) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Delta(q^n)}{q^n} = q - 1$$

Figura 5. Calcolo dell'incremento relativo di una successione geometrica.

Gli incrementi relativi della successione geometrica sono costanti, mentre gli incrementi n-esimi della successione geometrica sono proporzionali al suo valore n-esimo. Qua si iniziano a riconoscere quelle che saranno le ben note proprietà dell'integrale e del differenziale della funzione esponenziale: l'integrale ed il differenziale della funzione esponenziale sono proporzionali alla funzione stessa.

DALLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE A QUELLE ARITMETICHE

Già i babilonesi[28] avevano fatto corrispondere alle potenze della ragione gli esponenti, arrivando di fatto alla nozione di logaritmo. Cambiando la scala orizzontale, rendendola uniforme con passo 1 si passa da una progressione geometrica ad una aritmetica. Questo passaggio è illustrato nella figura 6:

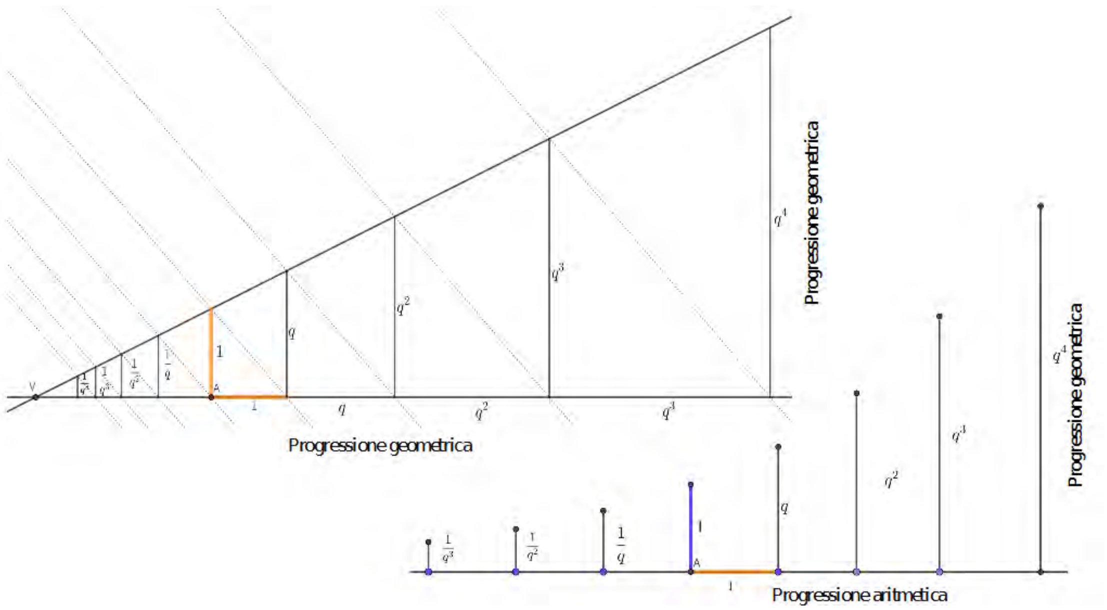


Figura 6. Passaggio da una progressione geometrica ad una aritmetica.

Tale trasformazione della scala dell'asse porta ad un notevole risultato enunciato per la prima volta da Torricelli[29] e usato da Huygens[30].

Si tracci la retta per due valori successivi (n, q^n) ed $(n\text{-}1, q^{n-1})$ qualunque della progressione geometrica e si consideri il segmento sull'asse orizzontale intercettato dalla retta e dal piede del segmento q^n: la lunghezza del segmento è indipendente dal numero n scelto. Questa proprietà è illustrata nella figura 7.

---

28 Sulla tavoletta cuneiforme AO6770 custodita al Louvre, circa 2000 A.C. è riportato il problema: "*Quanto tempo impiega un capitale investito al tasso di interesse composto del 20% annuo per raddoppiare?"*.

29 Curtis L.J. *Concept of the exponential law prior to 1900*. American Journal of Physics 46, 896 (1978).

30 Huygens, Oeuvres Vol.19. 102-119: Theorie de 1668 du mouvement d'un point pesant dans un mileu dont la resistance est proportionelle à la vitesse du mobile.

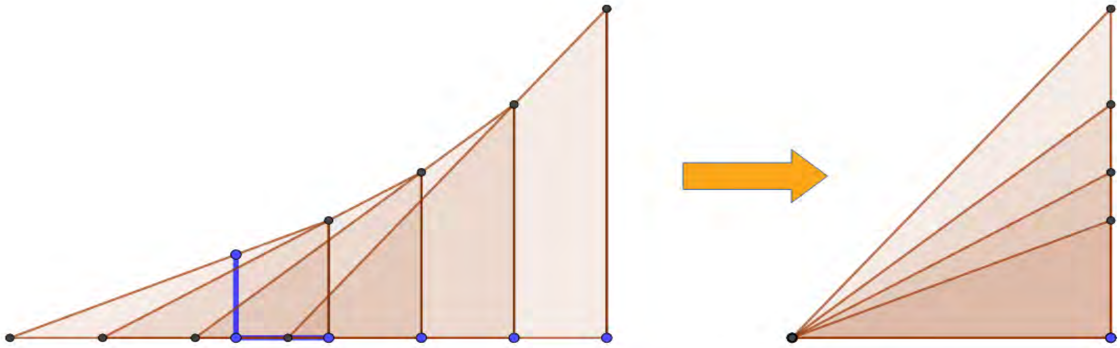


Figura 7. le basi dei triangoli sono tutte eguali.

La dimostrazione di questo fatto è illustrata in figura 8.

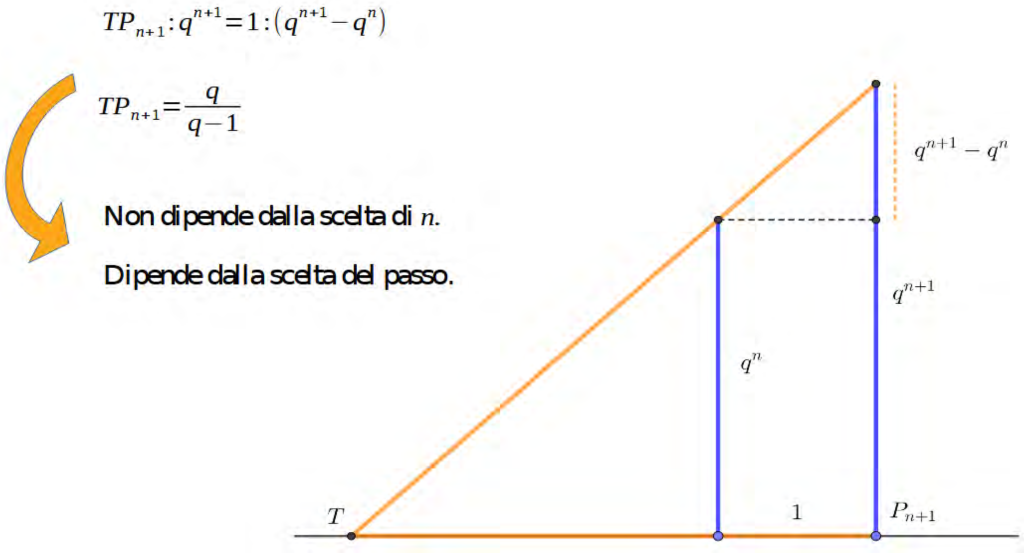


Figura 8.

Passaggio al continuo

La proprietà testé dimostrata è, per ora, una curiosa proprietà delle progressioni geometriche. Aggiungendo fra due termini n ed n+1 il numero intermedio n + ½ a questo corrisponderà il valore $q^{n+1/2}$. Rifacendo il calcolo della figura 8 si ottiene:

$$TP_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}$$

Continuando il calcolo per n + 1/3, n + ¼ … (n + 1/N) si ottengono sempre valori che non dipendono da n riassunti nella figura 9:

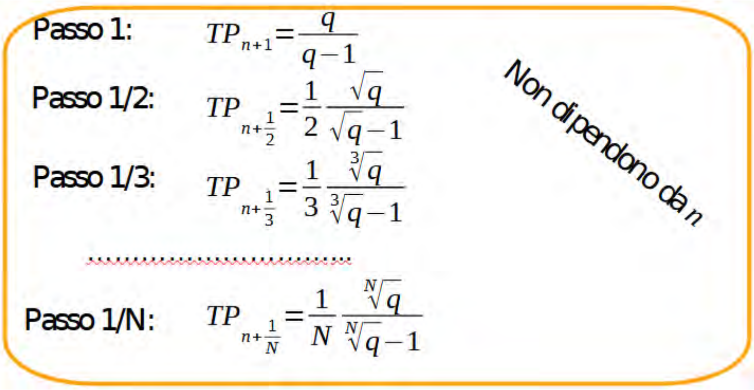


Figura 9. La lunghezza del segmento intercettato sulla retta orizzontale non dipende da *n*.

Posto $t_N = TP_{n+1/N}$, mediante una proporzione è possibile calcolare l'incremento relativo.

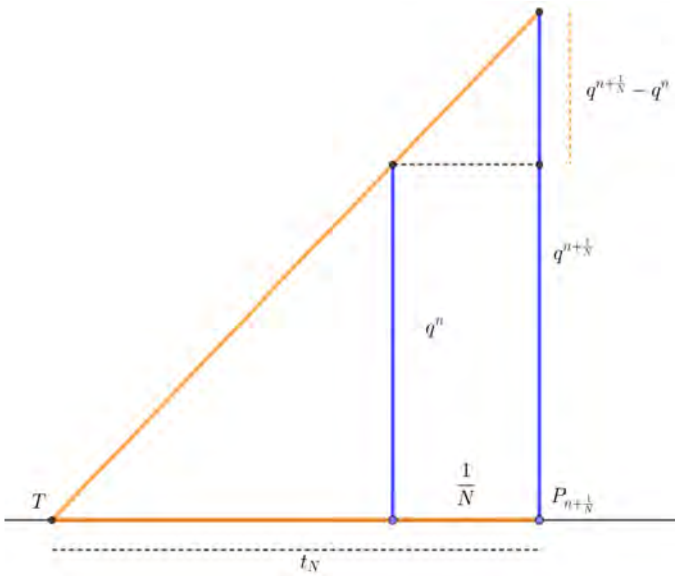


Figura 10.

Riferendosi alla figura 10 si ha:

$$q^{n+\frac{1}{N}}: t_N = \left(q^{n+\frac{1}{N}} - q^n\right): \frac{1}{N}$$

ovvero l'incremento relativo:

$$\frac{q^{n+\frac{1}{N}}}{t_N} = \frac{\left(q^{n+\frac{1}{N}} - q^n\right)}{\frac{1}{N}}$$

L'incremento relativo altro non è che il rapporto incrementale della funzione $f(n) = q^n$ dove n viene considerato ora come variabile continua. Se N è molto grande questo rapporto tende alla derivata di q^n. L'eguaglianza dimostra anche che la derivata di $f(n)$ è proporzionale a $f(n)$ stesso.
Sottolineiamo che il risultato è stato ancora ottenuto per via geometrica.

Convergenza di t_N
Se N aumenta indefinitamente t_N converge al $log_q e$. La dimostrazione è sintetizzata in figura 11.

$$t_N = \frac{1}{N}\frac{q^{\frac{1}{N}}}{q^{\frac{1}{N}}-1} \qquad q^{\frac{1}{N}}>1 \quad \rightarrow \quad q^{\frac{1}{N}}=1+\frac{1}{z}, \quad se \;\; N \gg 1, \quad \rightarrow \; z \gg 1$$

$$t_N = \frac{1+\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}}\log_q\left(1+\frac{1}{z}\right)=\left(1+\frac{1}{z}\right)\log_q\left(1+\frac{1}{z}\right)^z \quad \xrightarrow[z,N\rightarrow\infty]{} \quad \log_q e$$

Figura 11. Convergenza di t_N

Poiché q è stato scelto tale che $q>1$, risulta che $q^{1/N} > 1$; allora si può porre $q^{1/N} = 1 + 1/z$ con $z > 0$; t_N può essere scritto in funzione di z come nella seconda riga della figura. Se N cresce indefinitamente, anche z crescerà indefinitamente e l'argomento del logaritmo tende ad e.

La sotto-tangente: interpretazione di *log*$\log_q e$

L'interpretazione di $\log_q e$ si ottiene osservando che se N aumenta indefinitamente, la retta che unisce q^n con $q^{n+1/N}$ considerando n come variabile continua diventa la retta tangente alla funzione q^n.

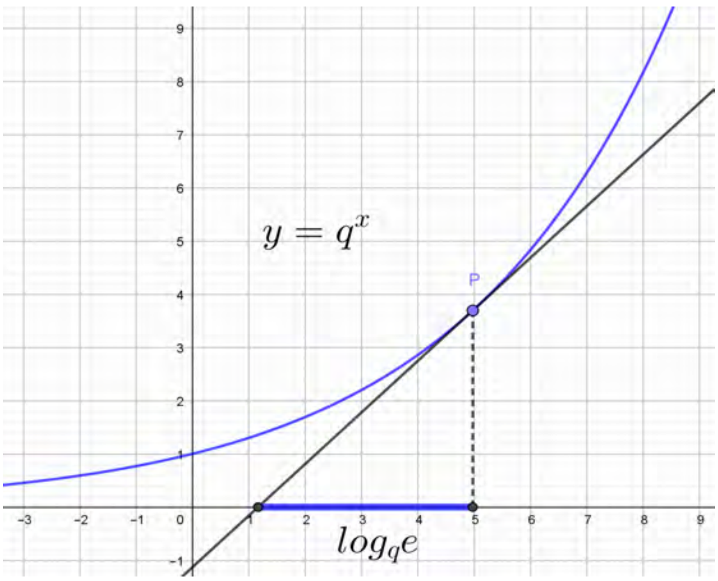


Figura 12. Interpretazione di $\log_q e$

Per quanto dimostrato tale valore non dipende dal punto P scelto sulla curva esponenziale e questo è il risultato enunciato per la prima volta da Torricelli:

la sotto-tangente alla funzione esponenziale è indipendente dal punto di tangenza scelto.

Naturalmente a questo risultato si può arrivare direttamente attraverso la definizione di funzione esponenziale e l'analisi. Dal punto di vista didattico crediamo sia efficace seguire il passaggio graduale dalle progressioni geometriche-aritmetiche alla funzione esponenziale portato avanti per via geometrica. L'unico punto nel quale non si è usata la geometria è stata la dimostrazione del valore della sotto-tangente.

Tuttavia si potrebbe procedere in modo diverso. Si consideri quel punto sulla funzione esponenziale tale che la retta tangente alla funzione in quel punto passi per l'origine; l'ascissa di quel punto è la sotto-tangente ed essa dipende da q; l'ordinata di quel punto invece è indipendente da q ed è lo stesso per tutte le funzioni esponenziali: è il numero e: questa può essere considerata come una ulteriore definizione di e.

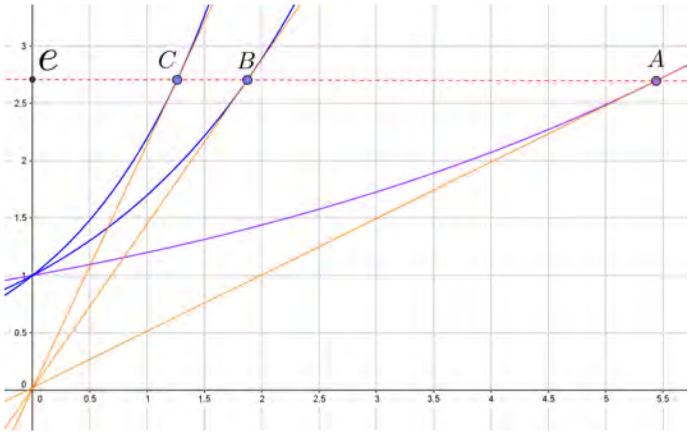


Figura 13. proprietà della tangente per l'origine: il numero *e*.

Significato fisico della sotto-tangente

Quando si usa la funzione esponenziale in fisica l'esponente è sempre adimensionale ed costituito da un rapporto fra una grandezza variabile ed una costante caratteristica del fenomeno in esame. Il significato di questa costante è legato alla sotto-tangente. Considerata la funzione $y = q^x$ ed il valore t della sotto-tangente, valgono le seguenti eguaglianze:

$$y = q^x = q^{t \cdot \frac{x}{t}} = (q^t)^{\frac{x}{t}} = e^{\frac{x}{t}}$$

Il valore della sotto-tangente t è il *calibro* naturale con cui misurare la variabile indipendente del fenomeno in esame.

Nel lavoro citato in (6) Huygens sta studiando la caduta di un grave in presenza di attrito e suppone che la forza di attrito sia proporzionale alla velocità del grave. Risolve il problema con un metodo geometrico dimostrando che la funzione che descrive la velocità in funzione del tempo è un esponenziale e la sotto-tangente è proprio il coefficiente d'attrito.

CONCLUSIONI

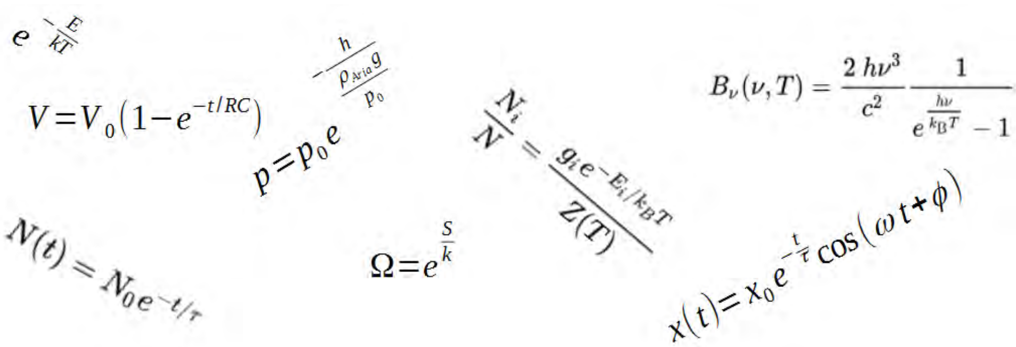


Figura 14. Uso della funzione esponenziale in fisica.

Dando un'occhiata al collage di leggi esponenziali di figura 14 si comprende quanto sia importante l'interpretazione fisica della sotto-tangente. Certo la lunga lista non dovrebbe sorprendere, visto che

dopo costanza e proporzionalità fissa, i comportamenti di proporzionalità uniforme sono il primo modello non banale di relazione tra grandezze fisiche.
Anche l'osservazione che l'argomento della funzione esponenziale, come di tutte le funzioni "speciali", deve essere una quantità adimensionale non sorprende. Possiamo dire che essa è così abituale da far parte dell'arredamento della casa della fisica, ma ripercorrendo dall'inizio lo sviluppo logico di questo percorso didattico si vede che tutto è iniziato con un rapporto. Cioè qualcosa che non può essere rappresentato geometricamente se non indirettamente con due grandezze, due segmenti. Perché un numero "reale" dai tempi di Archimede è sempre il rapporto di due grandezze; è vero che aggiungiamo sempre il termine omogenee, ma a ben vedere esso è superfluo! Ogni grandezza fisica, anche quelle dimensionate, è sempre un birapporto, cioè il rapporto di due numeri, ciascuno derivante da una grandezza e dalla sua unità di misura.

Questo conclude l'analisi dimensionale della funzione, e l'attenzione si sposta sull'operazione logaritmo che ha portato dalle potenze agli esponenti. Per il discorso precedente abbiamo dovuto necessariamente introdurre altre due grandezze fisiche, una arbitraria, il passo della progressione aritmetica sull'asse orizzontale: ma l'altra è la misteriosa costante, con significato geometrico che abbiamo scoperto essere la sotto-tangente, ma il suo significato fisico è il termine di paragone, il calibro per il confronto con il passo. Come calcolato il legame è solo con la base delle potenze: con questo viene ribadita l'universalità del numero *e* che abbiamo reinterpretato come proprietà geometrica universale delle funzioni esponenziali.

BIBLIOGRAFIA

Bardelle C. UNIPO *Visual Proofs : An Experiment Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010).
Carslaw, *Plane Trigonometry*, January 1, 1909.
Curtis L.J. *Concept of the exponential law prior to 1900*. American Journal of Physics 46, 896 (1978).
Huygens, *Oeuvres* Vol.19. 102-119: *Theorie de 1668 du mouvement d'un point pesant dans un mileu dont la resistance est proportionelle à la vitesse du mobile.*
Mamikon Mnatsakanian https://apvutansa.fr.gd/New-Horizons-in-Geometry.htm.
Peano G. , *Calcolo geometrico secondo l'ausdhnungslehre di H. Grassmann*, Torino, 1888.
Russo L., *Perché la cultura classica*. La risposta di un non classicista, Mondadori Libri, Milano 2018.
Torricelli (manoscritto), *De Hemyperbola logaritmica* Bibliot. Math (Dritte folge) 1, 80-89, (1900).

ORGANIZZATORI CONCETTUALI E SIMULAZIONI DIGITALI NELLA DIDATTICA DELLE SCIENZE INTEGRATE: ESEMPI DI UTILIZZO.

Giulio Alluto
Docente di Scienze della Terra e Biologia presso I. S. S. “Mazzini Da Vinci” di Savona
Membro Equipe Formativa Territoriale Liguria
giulio.alluto@gmail.com

Abstract
In una visione unitaria delle discipline scientifiche, occorre evidenziare l’esistenza di organizzatori concettuali utili a gestire e collegare la molteplicità delle informazioni provenienti dalle diverse discipline STEM: ad esempio, la regolarità presente nei fenomeni naturali, la ricerca di relazioni causa –effetto, l’idea di sistema ed i flussi di materia ed energia esistenti tra diversi sistemi, i concetti di equilibrio, stabilità, cambiamento e trasformazione. Alcune esperienze didattiche di scienze integrate effettuate sia in presenza che a distanza presso il biennio di un istituto professionale hanno evidenziato l’importanza degli organizzatori concettuali con l’obiettivo di potenziare la comprensione dei fenomeni naturali. Saranno inoltre illustrate alcune applicazioni digitali riguardanti la simulazione di fenomeni scientifici utili a far comprendere meglio alcuni concetti: le simulazioni digitali sono gli strumenti che permettono di comprendere e sperimentare alcuni organizzatori concettuali all’interno di scenari digitali virtuali utili all’apprendimento.

Parole - chiave
Organizzatori concettuali, simulazioni digitali, nodi concettuali, simulazioni virtuali.

ORGANIZZATORI CONCETTUALI E FENOMENI NATURALI

La separazione delle discipline scolastiche non permette di comprendere la reale complessità del mondo in cui viviamo. A partire dalla scuola secondaria di primo grado, i docenti insegnano la propria disciplina utilizzando termini specifici e tecnici e gli studenti si preparano per le verifiche e le interrogazioni in modo settoriale, molte volte utilizzando gli appunti dell’insegnante o il libro senza riflettere sulla trasversalità di alcuni concetti e senza approfondire le relazioni esistenti tra le diverse discipline studiate.
Il famoso filosofo e sociologo francese Edgar Morin nel libro “I sette saperi necessari all’educazione del futuro” afferma che occorre “insegnare metodi che permettano di cogliere le mutue relazioni tra le parti e il tutto in un mondo complesso”: il percorso scolastico dei nostri studenti, invece, è caratterizzato da un progressivo specializzarsi nelle varie discipline all’aumentare del grado di scuola.
Lo scienziato ed economista statunitense Peter Senge nel libro “La quinta disciplina” evidenzia che “le attività umane sono sistemi ma noi ci concentriamo su istantanee di parti del sistema: poi ci domandiamo perché i nostri problemi non si risolvono mai” In realtà non solo le attività umane ma anche i fenomeni naturali sono sistemi interconnessi: le discipline scolastiche però sono settoriali e sconnesse. Occorre ricostruire nel processo di insegnamento e apprendimento le connessioni tra le varie discipline per evidenziare il carattere complesso, sistemico e interconnesso della realtà: perché non utilizzare gli organizzatori concettuali? Ma cosa sono gli organizzatori concettuali?.
L’esperto in didattica delle scienze e epistemologo A. Giordan, definisce l’organizzatore concettuale “un centro di gravità nella massa di informazioni che evita che queste informazioni si accumulino in modo dispersivo senza una struttura logica e di senso”. Sempre A. Giordan afferma che l’organizzatore concettuale è una “cassetta degli attrezzi che fornisce strumenti diversi per decodificare la realtà, per mettere in ordine il complesso”.Viene definito da M. D’Anna (2011) “una sorta di attrattore che struttura l’informazione attorno a uno snodo concettuale, inducendo dei legami tra le varie componenti del

complesso sistema conoscitivo". In Svizzera, gli organizzatori concettuali sono stati oggetto di studi da parte di esperti di didattica delle scienze: presso il Dipartimento Formazione e Apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera Italiana, Simona Colosio nel suo lavoro di diploma per il "Master of arts in secondary education" nell'anno accademico 2019/2020 afferma che "nell'educazione alle scienze gli organizzatori concettuali sono, in accordo con il modello per competenze, pensati per essere trasversali alle discipline scientifiche, non vengono trasmessi ma piuttosto richiamati come poli attorno ai quali l'allievo costruisce e organizza la propria conoscenza mediato dal docente in maniera progressiva nell'arco della scuola dell'obbligo".

PAESE CHE VAI, ORGANIZZATORE CONCETTUALE CHE TROVI!

Negli ultimi decenni, diversi gruppi di lavoro in Europa e in America hanno dedicato tempo nell'individuare gli organizzatori concettuali utili a semplificare e collegare le diverse conoscenze e competenze scientifiche nel percorso di insegnamento e apprendimento delle scienze. Di seguito cerco di elencare in modo sintetico le principali esperienze dall'inizio di questo secolo ad oggi.
Nel 2002, A. Giordan all'interno del documento "Une autre école pour nos enfants?" evidenzia la necessità di trovare dei concetti essenziali in ogni disciplina utili a comprendere le parti e il tutto in una visione nuova e unitaria: introduce i "concepts organisateurs" per comprendere la complessità dei fenomeni naturali.
Nel 2004, l'associazione tedesca dei docenti di matematica e scienze sperimentali (MNU) organizza un gruppo di lavoro con l'obiettivo di trovare i concetti trasversali alla biologia, chimica e fisica: vengono chiamati "knotenpunkten", nodi concettuali.
Nel 2010 un gruppo di lavoro composto da docenti liceali svizzeri in Ticino ha identificato alcuni organizzatori concettuali con l'obiettivo di unire, per le scuole superiori, le discipline scientifiche in un quadro di senso comune. Lo stesso gruppo di lavoro ha definito altri organizzatori concettuali più semplici da introdurre nella scuola primaria e secondaria di primo grado.
Nel 2012, il comitato statunitense per l'educazione alla Scienza, il "Committee on a Conceptual framework for New K-12 Science Education Standards", redige un nuovo piano di studio che descrive obiettivi e pratiche dell'insegnamento scientifico per tutti gli studenti fino al dodicesimo grado scolastico: si evidenzia l'idea di un approccio didattico basato su concetti trasversali definiti "crosscutting concepts".
In Italia, nel 2012, le "Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione"a pagina 66 affermano che "le scienze naturali e sperimentali sono fra loro diverse per quanto riguarda i contenuti ma, almeno a livello elementare, sono accomunate da metodologie di indagine simili. È opportuno, quindi, potenziare nel percorso di studio, l'impostazione metodologica, mettendo in evidenza i modi di ragionare, le strutture di pensiero e le informazioni trasversali, evitando così la frammentarietà nozionistica dei differenti contenuti. Gli allievi potranno così riconoscere in quello che vanno studiando un'unitarietà della conoscenza. Per questo, in rapporto all'età e con richiami graduali lungo tutto l'arco degli anni scolastici fino alla scuola secondaria, dovranno essere focalizzati alcuni grandi «organizzatori concettuali» quali: causa/ effetto, sistema, stato/trasformazione, equilibrio, energia, ecc".
La mia sperimentazione in classe risulta essere del tutto pionieristica e solitaria ma può essere considerata un primo approccio all'utilizzo reale degli organizzatori concettuali in classe. Con l'obiettivo di introdurre concetti trasversali alle discipline scientifiche nelle classi del biennio di un istituto professionale, ho deciso di abbinare gli organizzatori concettuali ad alcune simulazioni scientifiche digitali oppure di abbinare gli stessi organizzatori concettuali a immagini significative o a brevi video.

ORGANIZZATORI CONCETTUALI E SIMULAZIONI, IMMAGINI O VIDEO

La simulazione può essere considerata un modello della realtà che permette di valutare e prevedere lo svolgersi dinamico di una serie di eventi o processi susseguenti all'imposizione di certe condizioni da parte dell'utente. La simulazione ha una natura laboratoriale e quindi consente l'apprendimento per esperienza. Perché non abbinare un organizzatore concettuale ad una simulazione? La situazione migliore, più adatta all'apprendimento è sicuramente la realizzazione di semplici esperimenti in classe da parte degli studenti organizzati in piccoli gruppi di lavoro. In situazioni particolari come la necessità di risparmiare tempo oppure situazioni emergenziali nelle quali occorre attivare la didattica a distanza può essere molto utile utilizzare le simulazioni digitali. Esistono alcuni siti internet e applicazioni che offrono numerose esperienze di simulazioni virtuali in molte e diversificate discipline scientifiche: ad esempio il sito internet https://phet.colorado.edu/it/ che raccoglie simulazioni virtuali di fisica, chimica, matematica, scienze della Terra e biologia diversificate e catalogate per ogni ordine e grado scolastico, dalla scuola primaria fino all'università. E' un progetto che raccoglie risorse educative elaborate da ricercatori dell'Università del Colorado Boulder senza scopo di lucro. Gli studenti possono utilizzare autonomamente le simulazioni se dotati di un dispositivo (cellulare, tablet, computer) e contemporaneamente il docente può spiegare il funzionamento della simulazione utilizzando la LIM, il monitor interattivo o semplicemente un proiettore connesso ad internet. Si può anche collegare l'organizzatore concettuale con un'immagine o un breve video per provare a innescare un collegamento mentale utile a ricordare velocemente un determinato concetto trasversale alle diverse discipline scientifiche. Il docente può preparare delle domande da somministrare agli studenti in riferimento all'immagine o al video scelto con l'obiettivo di creare le condizioni utili all'attivazione di semplici attività argomentative per comprendere meglio l'organizzatore concettuale esaminato durante la lezione.

ALCUNI ORGANIZZATORI CONCETTUALI

Ho sperimentato nelle classi del biennio di un istituto professionale, in didattica a distanza (DAD) durante l'anno scolastico 2019/2020, in didattica digitale integrata (DDI) durante l'anno scolastico 2020/2021 e in presenza, all'inizio di questo anno scolastico (2021/2022) i seguenti organizzatori concettuali abbinati sempre a simulazioni digitali oppure a immagini: il concetto di corpuscolarità della materia, il concetto di invariante, il concetto di energia, il concetto di sistema. Di seguito analizzo brevemente i singoli organizzatori concettuali utilizzati in contesti diversi: durante gli anni scolastici precedenti questi organizzatori concettuali sono stati introdotti trattando argomenti di ecologia tra cui i flussi di materia e energia presenti negli ecosistemi, i livelli trofici, le piramidi ecologiche e i cicli bio – geochimici. Invece all'inizio di quest'anno scolastico ho provato ad introdurre questi organizzatori concettuali all'interno di un'attività didattica introduttiva delle scienze della Terra e/o della biologia.

Corpuscolarità della materia

Viene utilizzato per far comprendere la costruzione particellare della materia ed è anche chiamato concetto di continuità / discontinuità. La composizione della materia viene studiata in chimica, fisica, biologia e scienze della Terra. L'immagine che può schematizzare il concetto di corpuscolarità della materia è rappresentata nella figura 1.

Figure 1. Concetto di corpuscolarità della materia

Le simulazioni digitali utilizzate per far comprendere meglio il concetto di corpuscolarità della materia rappresentate nella figura 2 e nella figura 3 sono le seguenti:

- https://phet.colorado.edu/it/simulations/build-an-atom
- https://phet.colorado.edu/it/simulations/states-of-matter-basics

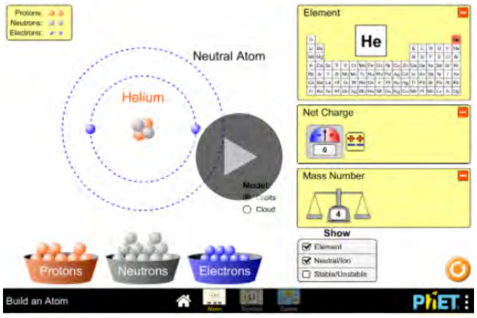


Figure 2 . Simulazione “Costruisci un atomo”

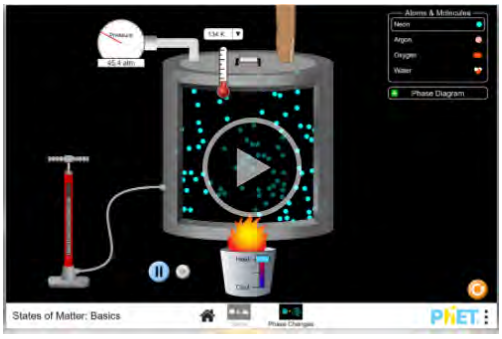


Figure 3 . Simulazione “Stati della materia”

Invariante

Organizzatore concettuale utile a descrivere ciò che non cambia nel tempo o che nel corso di vari processi mantiene caratteristiche ben determinate: ad esempio gli elementi chimici. In Treccani online la parola “invariante” viene così definita “si dice di ente o grandezza, e anche di espressione matematica o di espressione indicante un legame tra certe grandezze, che non muti operando particolari cambiamenti di variabili o trasformazioni”. L’immagine di riferimento può essere semplicemente una tavola periodica. La simulazione di riferimento, rappresentata in figura 4 può essere la seguente: https://phet.colorado.edu/it/simulations/build-a-molecule

Figure 4 . La simulazione “Costruisci una molecola”

Energia

Organizzatore concettuale utile a comprendere i fenomeni e le trasformazioni chimiche, fisiche e biologiche. L'immagine di riferimento potrebbe essere quella rappresentata il figura 5.

Figure 5. Concetto di energia

L'immagine di figura 6 illustra la simulazione digitale di riferimento: https://phet.colorado.edu/it/simulations/energy-forms-and-changes

Figure 6. Simulazione "Forme e trasformazioni di energia" in modalità "Introduzione"

Questa simulazione nella modalità "Introduzione" permette di descrivere le diverse forme di energia e di comprendere come fluisce l'energia quando gli oggetti sono riscaldati o raffreddati o quando due oggetti a diversa temperatura sono a contatto.

Sistema

Organizzatore concettuale che permette di interpretare i diversi livelli di organizzazione con grado di complessità crescente, individuare gli elementi costitutivi dei diversi livelli di organizzazione e esplicitare le variazioni di grandezze e proprietà all'interno del sistema stesso. Nel vocabolario "Treccani online" viene definito come "qualsiasi oggetto di studio che, pur essendo costituito da diversi elementi reciprocamente interconnessi e interagenti tra loro e con l'ambiente esterno, reagisce o evolve come un tutto, con proprie leggi generali". La simulazione utilizzata per concretizzare e sperimentare il concetto di sistema è quella precedentemente utilizzata per l'energia ma nella modalità "sistemi": viene illustrata nella figura 7.

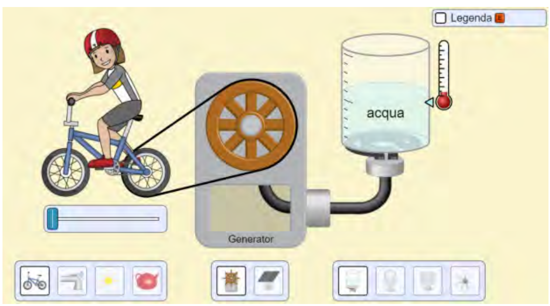


Figure 7. Simulazione "Forme e trasformazioni di energia" in modalità "Sistemi"

Questa simulazione permette di progettare un sistema con sorgenti di energia, scambiatori ed utilizzatori e descrivere i flusso e i cambiamenti energetici. Il concetto di sistema può essere spiegato attraverso l'utilizzo delle seguenti idee: di bilancio, di differenza di livello come spinta, di retroazione, di relazione tra strutture e funzioni, di regime stazionario e di equilibrio. Questi concetti definiti "idee" sono stati elaborati da Lubini e D'Anna nel 2012 con l'obiettivo di rendere meno astratti gli organizzatori concettuali esposti sopra per la primaria e secondaria di I grado ma possono essere utilizzati, a mio parere, anche in una scuola professionale per meglio comprendere il concetto di sistema.

L'idea di bilancio può essere rappresentata da un sistema delimitato da un preciso bordo tra un dentro e un fuori e caratterizzato da flussi in entrata e in uscita di energia e/o materia: si può utilizzare la figura 8.

Figure 8. Idea di bilancio

L'idea di differenza di livello come spinta permette di comprendere che le quantità di energia o di materia possono entrare o uscire dal sistema in funzione delle spinte: l'intensità del flusso è determinato dal rapporto spinte e resistenze. Può essere rappresentata da una mongolfiera che si gonfia come in figura 9: nella lingua italiana questa idea prende forma utilizzando il "si" riflessivo come ad esempio "il palloncino si sgonfia" o "la minestra si raffredda"

Figure 9. Idea di differenza di livello come spinta

L'idea di retroazione permette di comprendere che il risultato dell'azione di un sistema può riflettersi sul sistema stesso. Si può rappresentare con la figura 10.

Figure 10. Idea di retroazione

Un esempio di attività per far comprendere l'idea di retroazione può essere la seguente: in figura 11 trovate una vignetta del famoso Quino che può essere oggetto di descrizione e argomentazione in classe con l'obiettivo di comprendere il meccanismo della retroazione. L'innesco della discussione può essere una richiesta del docente del tipo: "Immaginate di essere al telefono con un vostro amico che non può vedere questa vignetta e provate a descriverla" . Uno studente accetta sicuramente la sfida ed inizia la descrizione della vignetta. In seguito il docente può porre la domanda: "Cosa succede se la fabbrica di medicine chiude?" Qualche studente interviene evidenziando il miglioramento ambientale ma altri alunni potrebbero esporre le problematiche sociali generate dalla perdita di posti di lavoro, ecc. Bastano quindi poche domande per innescare ragionamenti complessi caratterizzati da collegamenti e relazioni, da causa ed effetto in grado di far comprendere il meccanismo di retroazione all'interno di un sistema.

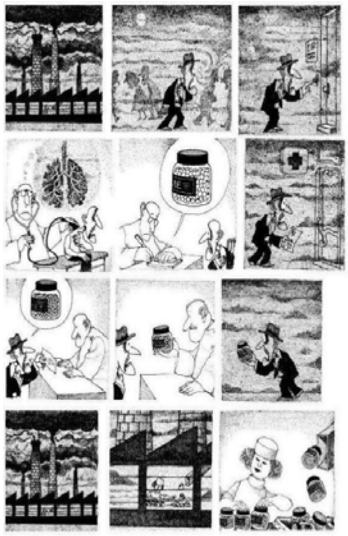


Figure 11. Vignetta di Quino utile ad attivare l'idea di retroazione all'interno di un sistema

L'idea di relazione tra struttura e funzione è necessaria per interpretare la forma di particolari oggetti all'interno del sistema in cui essi sono inseriti e di cui costituiscono un elemento funzionale. Può essere illustrata con l'immagine rappresentata in figura 12.

Figure 12. Idea di relazione tra struttura e funzione.

L'idea di sistema stazionario si verifica quando le differenze di livello sono mantenute costanti all'interno del sistema stesso. Ad esempio in biologia rappresenta lo stato di vita . La figura 13 illustra bene questo concetto.

Figure 13. Idea di sistema stazionario

L'idea di equilibrio, invece, rappresenta lo stato di morte in un sistema biologico poiché le differenze di livello sono annullate all'interno del sistema stesso: può essere rappresentato con l'immagine presente nella figura 14.

Figure 14. Idea di equilibrio

RIFLESSIONE FINALE

Questo lavoro non ha la pretesa di essere esaustivo poiché i dati raccolti dal sottoscritto non sono sufficienti ad elaborare conclusioni dettagliate ma cerca di innescare il dibattito e la riflessione sull'utilizzo degli organizzatori concettuali nella progettazione didattica con l'obiettivo di trasmettere agli studenti "la cassetta degli attrezzi" necessari per esplorare il nostro mondo complesso e comprendere meglio e con più motivazione i fenomeni naturali.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

AA.VV. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Numero speciale. Annali della Pubblica Istruzione. Firenze: Le Monnier.

Colosio S. (2020). *La cosa più importante:un viaggio di esplorazione tra gli organizzatori concettuali".* Lavoro di diploma. Master of Arts in Secundary Education. SUPSI. Disponibile al link: https://tesi.supsi.ch/3163/

Giordan, A. (2002). *Une autre école pour nos enfants ?* Paris: Delagrave.

Lubini, P., D'Anna, M. (2012). *Gli organizzatori concettuali.* Atti del convegno "Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria e dell'infanzia: al crocevia fra discipline scientifiche e umanistiche" UNIMORE. Modena e Reggio Emilia. Disponibile al link: http://www.pse.unimore.it/site/home/events/2012-ii-conference-modena-reggio-emilia.html ultimo accesso 28/10/2021

Morin, E. (2001) *I sette saperi necessari all'educazione del futuro.* Milano: Cortina Raffaello.

Senge, P. M. (2006) *La quinta disciplina.* Milano: Sperling & Kupfer editori.

PRODUZIONE DI DOCUMENTI DIGITALI ACCESSIBILI CON CONTENUTO SCIENTIFICO: STRUMENTI INCLUSIVI

Tiziana Armano, Anna Capietto, Davide Maietta, Carola Manolino, Adriano Sofia
Dipartimento di Matematica "G. Peano" - Università di Torino
tiziana.armano@unito.it, anna.capietto@unito.it, davide.maietta@unito.it,
carola.manolino@unito.it, adriano.sofia@unito.it

Abstract
Laboratori di Matematica o Fisica: spesso si condividono con gli studenti documenti digitali con tabelle, grafici e formule. Quanto sono fruibili questi documenti dalle tecnologie assistive e dagli strumenti di compensazione utili a studenti con disabilità e DSA? Il workshop si propone di dare indicazioni sui problemi di accessibilità relativi a documenti digitali con contenuto scientifico (formule, grafici e tabelle). Verranno date indicazione per la redazione di documenti digitali accessibili con i principali strumenti di elaborazione di testi e verrà proposto LaTeX come soluzione inclusiva per la scrittura di formule matematiche. Saranno illustrati inoltre altri software utili come OCR per formule e convertitori.

Parole-chiave
Accessibilità, matematica, LaTeX, inclusione.

INTRODUZIONE

Il Laboratorio per la Ricerca e la Sperimentazione di Nuove Tecnologie Assistive per le STEM "S. Polin" fa parte del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e opera nell'ambito della ricerca e della sperimentazione di nuove tecnologie assistive per lo studio delle STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Il Laboratorio si occupa ricerca e sviluppo di tecnologie per l'accesso a contenuti scientifici digitali di sperimentazione di tecnologie assistive esistenti e di disseminazione sul territorio dei risultati ottenuti.
Nonostante i più recenti avanzamenti tecnologici volti a rendere accessibili testi digitali da parte di persone con disabilità visive o DSA (Disturbi Specifici dell'Apprendimento), l'accessibilità di contenuti didattici e scientifici contenenti formule, grafici e tabelle è ancora un tema di ricerca aperto e oggetto di studio a livello internazionale. Il Laboratorio Polin ha come obiettivo principale quello di trovare, sviluppare e diffondere soluzioni a queste problematiche allo scopo di incentivare e facilitare l'accesso a studi scientifici da parte di studenti con disabilità di vario tipo e con DSA.

ACCESSIBILITÀ E TECNOLOGIE ASSISTIVE

"L'accessibilità è la caratteristica di un dispositivo, di un servizio, di una risorsa o di un ambiente d'essere fruibile con facilità da una qualsiasi tipologia d'utente anche con l'eventuale utilizzo di tecnologie assistive. "

"Per accessibilità si intende la capacità dei sistemi informatici di erogare servizi e fornire informazioni fruibili, senza discriminazioni, anche da parte di coloro che a causa di disabilità necessitano di tecnologie assistive o configurazioni particolari. "
Quelle riportate sopra sono due delle possibili definizioni di accessibilità. In genere si conosce il termine accessibilità in relazione ai siti web: i siti della pubblica amministrazione da tempo per legge devono essere accessibili. Spesso l'accessibilità viene associata ad una serie di requisiti tecnici da soddisfare. In realtà l'accessibilità va intesa in modo più ampio ed estesa a tutto ciò che è in formato digitale

(documenti, software, app per dispositivi mobili, sistemi operativi, piattaforme per l'e-learning) ma non solo. Inoltre va dato un significato concreto a elenchi di indicazioni tecniche, risultati di validatori e bollini/certificazioni di accessibilità.
Il concetto di accessibilità di un'informazione è molto ampio e va declinato in base alle caratteristiche di chi fruisce dell'informazione stessa. Ogni tipo di disabilità richiede soluzioni di accessibilità diverse. D'ora in poi ci focalizzeremo sulle disabilità visive.
Nel contesto attuale i contenuti digitali fanno grande uso del canale visivo. La stessa digitalizzazione di massa è stata resa possibile grazie all'uso di metafore visive: l'utente ha a disposizione una "scrivania", sulla quale vi sono "cartelle" e "documenti", che possono essere "spostati", "tagliati" o "gettati nel cestino".
Negli ultimi anni sono state sviluppate diverse soluzioni per rendere il computer un sistema accessibile anche a non vedenti e ipovedenti.
Un non vedente assoluto può adoperare due soluzioni compensative differenti: l'uso del canale uditivo tramite sintesi vocale e l'uso del canale tattile, attraverso l'utilizzo di barre e display Braille.
Per persone affette da ipovisione sono disponibili, oltre alle soluzioni compensative già citate, soluzioni specifiche quali Lente d'ingrandimento, inversione dello schema colori, evidenziazione dei contenuti.
Per quanto riguarda l'inserimento di input, un adeguato uso dei comandi da tastiera consente ad un utente ipovedente o non vedente di emanciparsi quasi completamente dall'uso del mouse.
La lettura di un documento è sempre più facilitata dall'uso di sintesi vocale e display Braille, ma non possiamo dire che sia un problema risolto: infatti, se un documento letterario è facilmente usufruibile con screen reader e display braille, non si può dire altrettanto di un documento scientifico contenente oggetti complessi quali diagrammi, grafici, tabelle e formule.
Tali oggetti hanno la caratteristica di essere multidimensionali: il loro uso richiede di muoversi in più di una direzione. È ad esempio possibile muoversi in un sistema di riferimento cartesiano sull'asse delle ascisse o sull'asse delle ordinate; così come è possibile leggere una tabella per righe o per colonne.
Per trasmettere queste informazioni multidimensionali, intrinsecamente legate alla rappresentazione visuale dello spazio, su canali che non esprimono efficacemente la multidimensionalità è necessario ridurre tali informazioni a contenuti monodimensionali: contenuti che siano disposti "in riga" a formare una sequenza di simboli. Di seguito illustreremo come applicare questo principio per rendere le formule accessibili con sintesi vocale e display Braille.

ACCESSIBILITÀ DELLE FORMULE

Se analizziamo in dettaglio formule anche molto semplici (Figura 1) possiamo osservare alcuni problemi:

- ci sono simboli che non sono riproducibili da tastiera e alcuni neanche da Mappa caratteri (la lettera greca, la radice quadrata, la linea di frazione, la sommatoria)
- non c'è un ordine di lettura definito (da dove comincia a leggere un software? dalla sommatoria? da n=1? sopra o sotto la linea di frazione? prima radice o prima 5?).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Figura 1. Due esempi di formule semplici.

Serve quindi una rappresentazione alternativa a quella grafica della formula che sia in "in linea" e non ambigua. Ci sono diversi linguaggi esistenti che forniscono una rappresentazione "in codice" delle formule in vari ambiti. Per quanto riguarda il web ad esempio lo standard è il MathML (http://www.w3c.it/traduzioni/MathML2/overview.html).
Di seguito riportiamo il codice MathML della formula presente nella parte destra della Figura 1.

```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
```

```
  <mi>&#x3D5;</mi>
  <mo>=</mo>
  <mfrac>
        <mrow>
        <mn>1</mn>
        <mo>+</mo>
        <msqrt>
        <mn>5</mn>
        </msqrt>
        </mrow>
        <mn>2</mn>
  </mfrac>
</math>
```

Possiamo osservare che questo linguaggio è un linguaggio di marcatura, è non ambiguo semantico ma risulta troppo prolisso e di difficile utilizzo.
Un altro linguaggio di marcatura per formule è LaTeX: è un linguaggio di marcatura per la scrittura di testi con formule usato da oltre 20 anni dalla comunità scientifica per la stesura di testi e pubblicazioni scientifiche. E' un ambiente tipografico con funzionalità di desktop publishing e automazione di gran parte della composizione tipografica, come numerazione, riferimenti incrociati, tabelle e figure, bibliografie, ecc. Sarà descritto in dettaglio nel capitolo successivo.
Di seguito riportiamo il codice LaTeX della formula presente nella parte destra della Figura 1.

```
\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
```

Rispetto a MathML risulta sicuramente più compatto e di più facile utilizzo. Infatti LaTeX risulta il linguaggio usato da molti altri applicativi a supporto della scrittura di formule: ad esempio Moodle, Google Docs, Office365, MathType prevedono, tra le altre possibilità, la funzionalità di inserimento di formule utilizzando LaTeX. Anche nell'ambito del web LaTeX può essere utilizzato per inserire formule in pagine HTML in alternativa a MathML utilizzando le librerie Mathjax (https://www.mathjax.org/). Quest'ultima soluzione risulta la più efficiente per produrre pagine web con formule del tutto accessibili. La combinazione LaTeX /MathML + Mathjax permette alle persone con disabilità visiva di fruire nel modo migliore di pagine web con formule: non solo viene garantita una buona lettura ma anche una efficace navigazione da parte di screen reader della formula. Non sempre però è possibile produrre materiale didattico in questo formato, spesso vengono utilizzati strumenti di uso più comune per la scrittura di documenti come Word ad esempio.
Word non è ovviamente lo strumento migliore indicato per scrivere testi con molte formule. Può essere però che sia necessario inserire alcune formule in un documento prodotto con questo strumento. La versione di Word migliore, al momento attuale per inserire formule accessibili è quella contenuta nella suite Office 365. Word 365 mette a disposizione per la scrittura di formule lo strumento Equation Editor. Attenzione: tale strumento non è disponibile nella versione online di Word ma solo nella versione desktop.
Per inserire una formula bisogna selezionare la scheda **Inserisci** dal menu orizzontale e in seguito selezionare Equazione. (in alcuni casi potrebbe essere necessario cliccare prima su Simboli e poi su equazione (Figura 2)

Figura 2

Selezionando Equazione si apre l'ambiente Equation editor con strumenti per l'inserimento di formule e un'area per l'inserimento della formula (Figura 3).

Figura 3

Si può inserire la formula nell'area apposita utilizzando i vari strumenti per l'inserimento facilitato di formule disponibili nell'area di progettazione.
Word 365 è l'unica versione di Word che ha il supporto per la gestione di formule con LaTeX: è possibile infatti inserire la formula direttamente in LaTeX e viceversa.
Se la formula è stata inserita in LaTeX può essere visualizzarla nel formato finale selezionando la modalità **Professionale** dal menu che si ottiene cliccando sulla freccia a destra dell'area di inserimento della formula (Figura 4). Viceversa se la formula è stata inserita usando gli strumenti per l'inserimento facilitato posso ottenere il codice LaTeX corrispondente selezionando dal menu citato prima la modalità **Lineare**.

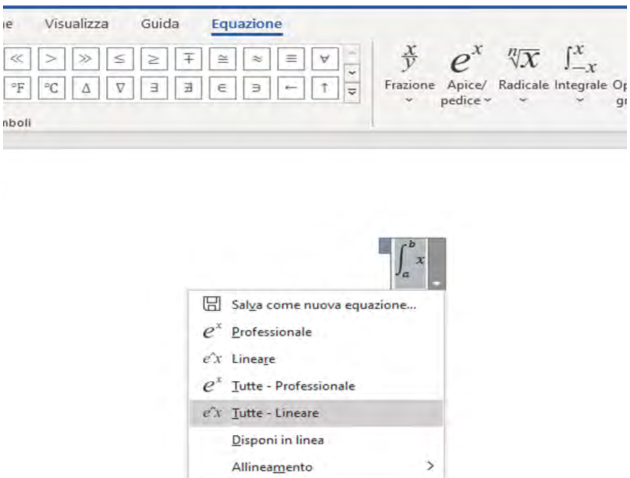


Figura 4

Per quanto riguarda l'accessibilità delle formule se il documento è disponibile in formato .docx alcune sintesi vocali (non NVDA) gestiscono la formula.
Se invece il documento viene salvato come PDF le formule vengono convertite in un oggetto che risulta non accessibile. Nelle precedenti versioni di word era possibile aggiungere un testo alternativo (come per le immagini) per l'accessibilità, questo ora non è più possibile e quindi è necessario usare un piccolo artificio. Per prima cosa conviene ricavare il codice LaTeX della formula usando la visualizzazione lineare della formula e copiarlo. Bisogna poi incollare il codice sotto la formula usando un font di dimensioni molto piccole e impostando il bianco come colore del testo. In questo modo il codice non sarà visibile se non per i dispositivi usati da persone con disabilità visive (sintesi vocali e barre braille) una volta salvato il file in pdf. In alternativa al codice LaTeX si può usare una descrizione letterale della formula ma questa risulta meno rigorosa e meno compatta.
Per quanto riguarda Word 2016 si può procedere in modo analogo. Manca però il supporto LaTeX nell'Equation Editor: non si riesce quindi ad avere facilmente il codice LaTeX della formula. In alternativa è possibile usare l'editor di formule MathType (http://www.wiris.com/mathtype) che si integra con Word ma è a pagamento. Ha delle funzioni più avanzate dell'Equation editor e supporta interamente LaTeX.
Una soluzione sviluppata e pensata appositamente per persone con disabilità visiva per lettura, scrittura e editing di formule è il software Lambda (https://www.lambdaproject.org/). Lambda usa un linguaggio proprietario per la scrittura delle formule che va imparato da docenti e studenti. Ha delle funzioni di editing avanzate e la possibilità di esportare in html/MathML. Lambda è un software a pagamento.

UNA SOLUZIONE INCLUSIVA: LATEX

Come abbiamo affermato precedentemente, affinché un oggetto grafico risulti accessibile via sintesi vocale o display Braille è fondamentale ridurlo ad una rappresentazione in riga, ossia disponendo in sequenza le informazioni che contiene.
Nel caso dei pdf contenenti formule, che risultano non accessibili, ad ogni singola formula possiamo associare un campo ActualText che ne contenga la rappresentazione in riga; rimane da scegliere il linguaggio con cui rappresentare queste informazioni.
Rappresentare formule con sequenze di caratteri è di per sé un problema già risolto teoricamente dai linguaggi di mark-up, tra i quali risultano di particolare interesse LaTeX, MathML e Lambda.
Il linguaggio LaTeX ci sembra quello preferibile, per le seguenti motivazioni:

1. diffusione nel mondo accademico: LaTeX, essendo stato concepito negli ambienti universitari, ha un'enorme diffusione nel mondo accademico e della ricerca;
2. gratuito: LaTeX è distribuito con licenza di software libero ed è gratuitamente utilizzabile ;
3. compatto: facendo un rapido confronto tra latex e i linguaggi di tipo XML/MathML/Lambda, risulta che Latex è il più sintetico nel descrivere una formula;
4. inclusivo: poiché LaTeX non è specifico per persone con disabilità visive, permette a queste ultime di confrontarsi con persone vedenti "parlando la stessa lingua".

Una volta scelto il LaTeX come linguaggio per dare una rappresentazione "in riga" delle formule, la soluzione è in principio alla portata di chiunque: per ogni oggetto-formula del file pdf, è necessario riempire il relativo campo testuale **ActualText** con la scrittura LaTeX della formula stessa.
La persona che vorrà fruire del documento pdf e delle sue formule in maniera diversa da quella visiva potrà quindi accedere alle rappresentazioni LaTeX delle formule nei campi ActualText: poiché gli ActualText contengono caratteri testuali, sono perfettamente riproducibili tramite screen reader e display Braille. Abbiamo dunque fornito una soluzione di principio, perfettamente fattibile e funzionante, per rendere accessibili le formule.
È necessario adesso fare un passo successivo, cioè valutare l'efficienza della soluzione.
Modificare ogni formula di un pdf scientifico fornendo ogni singolo campo ActualText a mano è teoricamente possibile, ma si traduce in un ingente lavoro aggiuntivo.

Il Polin propone una soluzione automatizzata con l'uso del pacchetto Latex **Axessibility**, che permette di evitare tale *overhead* di lavoro: nell'ipotesi che il pdf sia prodotto a partire da un file LaTeX, sarà sufficiente includere Axessibility per ottenere in automatico che tutte le formule siano corredate da un campo ActualText opportunamente riempito con la descrizione Latex della formula.
Il pacchetto Axessibility è presente nelle distribuzioni MikTeX e TeXLive ed è liberamente scaricabile dall'archivio CTAN (https://ctan.org/pkg/axessibility).

CONVERTITORI, OCR E ALTRE RISORSE

Ci sono altri strumenti che possono essere utili per l'accessibilità di documenti scientifici:

- convertitori
- OCR per formule.

I convertitori consentono, nel caso sia necessario, di passare da un linguaggio all'altro. Ad esempio è possibile partendo da un documento LaTeX passare a una pagina web HTML con supporto Mathjax. Ci sono molti convertitori disponibili anche gratuiti, uno dei più completi è sicuramente Pandoc (https://pandoc.org/) che ha numerose possibilità di conversione. Per passare da LaTeX a HTML un altro convertitore molto utilizzato è HTLATEX che è incluso nelle distribuzioni Texlive e Miktek.
Gli OCR (Optical Character Recognition) sono software che permettono di passare da documenti in formato immagine o PDF a documenti editabili. Ci sono molti OCR disponibile anche online per documenti con solo testo. Per le formule solo da poco sono disponibili software che permettono di convertire l'immagine di una formula in MathML, Latex o altri formati editabili.
Per la conversione di interi documenti, l'unico OCR per formule attualmente disponibile è Infty Reader: è piuttosto costoso e non supporta l'italiano.
Per la conversione di singole formule è disponibile MathPix (https://mathpix.com/) che funziona molto bene ed è parzialmente gratuito. Permette di convertire formule da formato immagine / PDF a LaTeX o Equation Editor per Word.
Come risorsa per lo studio delle STEM da parte di persone con disabilità visive il Laboratorio Polin mette a disposizione alcuni testi universitari in formato accessibile (http://www.integr-abile.unito.it/knowledge-transfer/accessible-library-2/)

CONCLUSIONI

Durante il Workshop abbiamo introdotto il concetto di accessibilità di contenuti matematici, in particolare per persone non vedenti e ipovedenti che devono ricorrere a strumenti quali screen reader e barre Braille. Abbiamo evidenziato come sia fondamentale rendere i contenuti sequenziali o "in riga" per permetterne la fruizione non visiva. Abbiamo dunque mostrato varie soluzioni per rendere accessibili documenti contenenti formule e abbiamo illustrato l'uso di opportuni software OCR per estrarre formule accessibili da documenti che non sono stati prodotti in maniera accessibile.
Tra le soluzioni a disposizione per creare documenti pdf con formule accessibili abbiamo proposto il pacchetto LaTeX Axessibility, prodotto presso il laboratorio S.Polin dell'Università degli Studi di Torino; abbiamo mostrato ai partecipanti del Workshop l'uso del pacchetto per creare un pdf con formule accessibili e ne abbiamo fatto ascoltare la lettura via screen reader.

BIBLIOGRAFIA

Ahmetovic D., Armano T., Bernareggi C., Capietto A., Coriasco S., Doubrov B., Kozlovskiy A., Murru N. (2019) "*Axessibility 2.0: creating tagged PDF documents with accessible formulae*", Guit Meeting 2019, Ars TeXnica, vol. **27/28**, p. 138-145.
Ahmetovic D., Bernareggi C., Bracco M., Murru N., Armano T., Capietto A. (2021), *LaTeX as an inclusive accessibility instrument for highschool mathematical education*, W4A '21: Proceedings of the 18th International Web for All Conference, Article No.: 14, Pages 1–9.

Armano T., Capietto A., Ahmetovic D., Bernareggi C., Coriasco C., Ducci M., Magosso C., Mazzei A., Murru N., Sofia A., Accessibilità di contenuti digitali per le STEM: un problema aperto. Alcune soluzioni inclusive per l'accessibilità di formule e grafici, Mondo Digitale, vol. **89**, pag. 1-12, 2020.
Armano T., Capietto A., Murru N., Rossini R., Tornavacca E. (2015) "*Accessibilità e inclusività della matematica in percorsi formativi scolastici e aziendali*", *Atti del Convegno Didamatica2015 su Mondo Digitale*, Vol. **14**, No. 58, p. 564-571.
Armano T., Capietto A., Coriasco S., Murru N., Ruighi A., Taranto E. (2018) *"An automatized method based on LaTeX for the realization of accessible PDF documents containing formulae"*, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. **10896**, p. 583-589.
Borsero M., Murru N., Ruighi A. (2016) "*Il LaTeX come soluzione al problema dell'accesso a testi con formule da parte di disabili visivi"*. *ArsTexnica*, Vol. **22**, p. 12-18.
Sorge V., Ahmetovic D., Bernareggi C., Gardner J. (2019) "Scientific Documents", in Yesilada Y., Harper S. (a cura di) *Web Accessibility: A Foundation for Research*, Springer, Chapter 22.

SITOGRAFIA

https://ctan.org/pkg/axessibility
htttp://www.integr-abile.unito.it/axessibility
https://www.latex-project.org/
https://www.w3.org/Math/
https://www.lambdaproject.org/
https://mathpix.com/
https://pandoc.org/
https://tug.org/tex4ht/

SCOPRIAMO E PROGRAMMIAMO LA MATEMATICA CON "SNAP!"

Antonella Azzone, Maria Rosa Marrone, Nunzia Santacroce, Michele Somma
Liceo Scientifico "E. Amaldi"- Bitetto (BA)
antonella.azzone@lsamaldi.it

Abstract
In questo workshop è stato proposto un percorso laboratoriale svolto con gli studenti delle classi prime e seconde del Liceo Matematico presso il Liceo Scientifico "E. Amaldi". L'obiettivo del percorso era quello di promuovere negli studenti lo sviluppo del pensiero computazionale e l'utilizzo di linguaggi informatici finalizzati a scoprire oggetti e significati matematici. A tal fine si è scelto di utilizzare "Snap!", un linguaggio di programmazione visuale drag-and-drop che ha permesso agli alunni di imparare allo stesso tempo a programmare, a pensare in modo creativo, a ragionare in modo sistematico e a lavorare in collaborazione. I partecipanti al workshop hanno sperimentato, in prima persona e con diversi livelli di approfondimento, alcuni esempi di attività laboratoriali. Sono state fornite schede didattiche progettate con l'intento di stimolare la riflessione e la produzione di congetture attraverso discussioni e argomentazioni. Infine, sono stati presentati i progetti ideati nell'ambito della sperimentazione sulla trasposizione didattica delle "vignette" riguardante le matrici e le immagini digitali nell'ambito del Progetto Klein Italia.

Parole-chiave
Scoprire, Programmare, Matrici-Immagini digitali, Snap!

INTRODUZIONE

Con questo workshop ci si è posti l'obiettivo di presentare un possibile percorso laboratoriale attraverso il quale promuovere lo sviluppo del pensiero computazionale, finalizzato a scoprire oggetti e significati matematici mediante l'utilizzo di linguaggi informatici. L'obiettivo principale perseguito con le attività svolte con studenti partecipanti al progetto Liceo Matematico, oggetto di questo workshop, è stato quello di imparare ad utilizzare diversi registri linguistico-comunicativi e di sfruttarli nella scoperta di nuovi significati matematici.
In tutte le attività la metodologia di riferimento è stata quella del laboratorio di matematica, così come noto e inteso nei documenti dell'UMI-CIIM, cioè come insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati.
Il percorso è basato sull'utilizzo di "Snap!", un linguaggio di programmazione visuale drag-and-drop che ha permesso agli alunni di imparare allo stesso tempo a programmare, a pensare in modo creativo, a ragionare in modo sistematico e a lavorare in collaborazione. L'ambiente di programmazione Snap! è stato utilizzato inizialmente in un percorso sulla geometria.
Ulteriori attività sono poi state svolte nell'ambito della sperimentazione di una "vignetta ponte" sulle matrici e le immagini digitali, realizzata nell'ambito del Progetto Kline Italia (in pubblicazione sul sito www.liceomatematico.it).
I partecipanti al workshop hanno sperimentato, in prima persona e con diversi livelli di approfondimento, alcuni esempi di attività laboratoriali. Sono state fornite schede didattiche progettate con l'intento di stimolare la riflessione e la produzione di congetture attraverso discussioni e argomentazioni. Nella parte conclusiva del workshop, sono stati presentati e discussi con i partecipanti alcuni protocolli di attività svolte dagli studenti.

LE FASI DEL WORKSHOP

Nella prima fase del workshop sono state presentate alcune delle attività svolte con gli alunni nell'ambito del Liceo Matematico. Un primo esempio è stato quello in cui il linguaggio Snap! è stato introdotto attraverso un gioco la cui finalità era far comprendere come dare correttamente le istruzioni sia fondamentale sia nella comunicazione tra pari che nella comunicazione con un calcolatore.
Il gioco svolto a coppie ha richiesto l'uso di carta, matita e una graffetta. Gli alunni hanno prima disegnato una figura geometrica su un foglio e poi scritto, su un foglio Google condiviso, le istruzioni per descriverla (Fig. 1). Queste istruzioni poi sono state lette da un altro compagno, che ha riprodotto la figura.

Figura 1: Il lavoro di comunicazione e interpretazione delle istruzioni durante il laboratorio con gli studenti

Quello in Figura 2 è un esempio delle immagini create e riprodotte da una delle coppie di alunni.

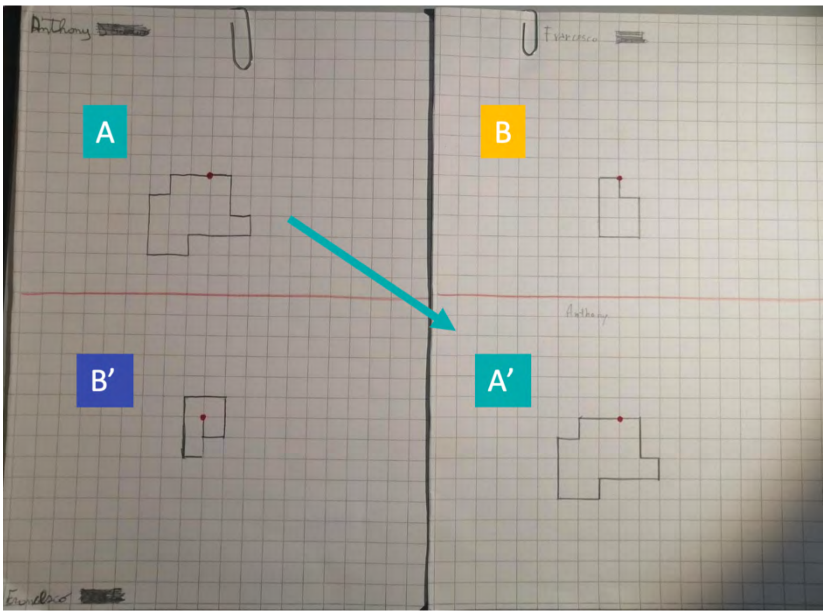


Figura 2: Immagini create (in alto) e riprodotte (in basso) da una coppia di alunni

Nel caso della figura A, nonostante un errore commesso nell'ultima istruzione, l'alunno ha riprodotto correttamente la figura (A'), assumendo che dovesse essere chiusa. Invece, nel caso della figura B, sono risultati evidenti gli errori di comunicazione e di interpretazione delle istruzioni, date come segue:

in basso una volta
gira a destra
vai avanti una volta
gira a sinistra
vai avanti 2 volte
gira a sinistra
vai a avanti 2 volte
gira a sinistra
vai avanti 3 volte
gira a destra
vai avanti una volta
FINE

Durante il workshop è stato evidenziato come dalla discussione su questo genere di errori, gli alunni abbiano compreso l'importanza della precisione sia nella comunicazione che nell'interpretazione delle istruzioni.
Nella seconda fase si è entrati nel vivo del workshop presentando ai partecipanti l'ambiente Snap!, e chiedendo loro di accedere al sito https://snap.berkeley.edu/.
Sono state dunque introdotte le caratteristiche principali di Snap!:

- per scrivere un programma è sufficiente catturare con il mouse i singoli comandi che si vogliono utilizzare e trascinarli sullo schermo nero;
- sullo "stage", cioè lo schermo bianco posizionato sulla destra, è possibile visualizzare il risultato del programma che si è costruito e verificarne la correttezza;
- la freccetta nera presente sullo stage è denominata sprite e si muove eseguendo i comandi inseriti nel programma;
- Snap! ha il vantaggio di far visualizzare sullo stage la figura programmata, consentendo così di ricevere feedback immediati e quindi di "correggere il tiro" in caso di errore.

Sono stati poi esaminati alcuni comandi utili alle attività del workshop, in particolare quelli dei gruppi Movimento, Penna e Controllo.
I comandi possono essere eseguiti o separatamente o in successione, se posizionati uno dopo l'altro, in modo tale da formare un programma.
Il laboratorio è stato avviato chiedendo ai partecipanti di scrivere un programma per disegnare un quadrato. In questa fase è stato suggerito ai partecipanti di creare il blocco "inizializza", che consente di assegnare allo sprite una posizione e un orientamento iniziale ogni qualvolta si vuole avviare il programma.
Per promuovere il confronto fra i partecipanti, è stata condivisa l'immagine di un programma scritto dagli studenti (Fig. 3) ed è stato chiesto loro di scrivere un programma per disegnare un quadrato.

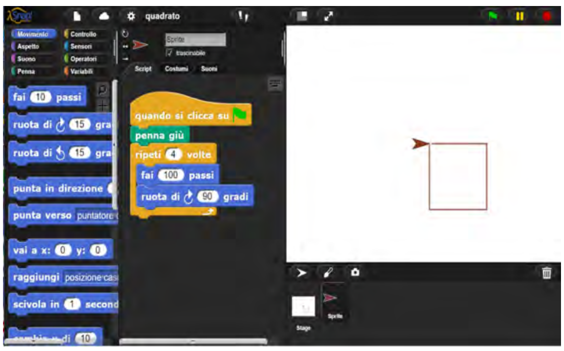


Figura 3: Il programma scritto dagli studenti per disegnare un quadrato

Successivamente ai partecipanti sono state mostrate figure più complesse realizzate dagli studenti a partire dal quadrato attraverso la costruzione di blocchi di programmazione e l'inserimento dei parametri (Fig. 4).

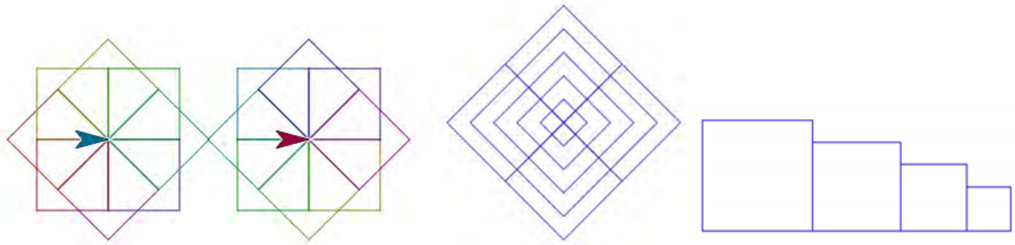


Figura 4: Alcune figure realizzate dagli studenti a partire dal quadrato

Nell'ultima fase del workshop è stata condivisa la sperimentazione del percorso realizzato su matrici e immagini digitali nell'ambito del Progetto Klein Italia avviato con gli alunni delle classi terze del Liceo Matematico, in cui le prime attività sono state svolte con carta e penna (Fig. 5).

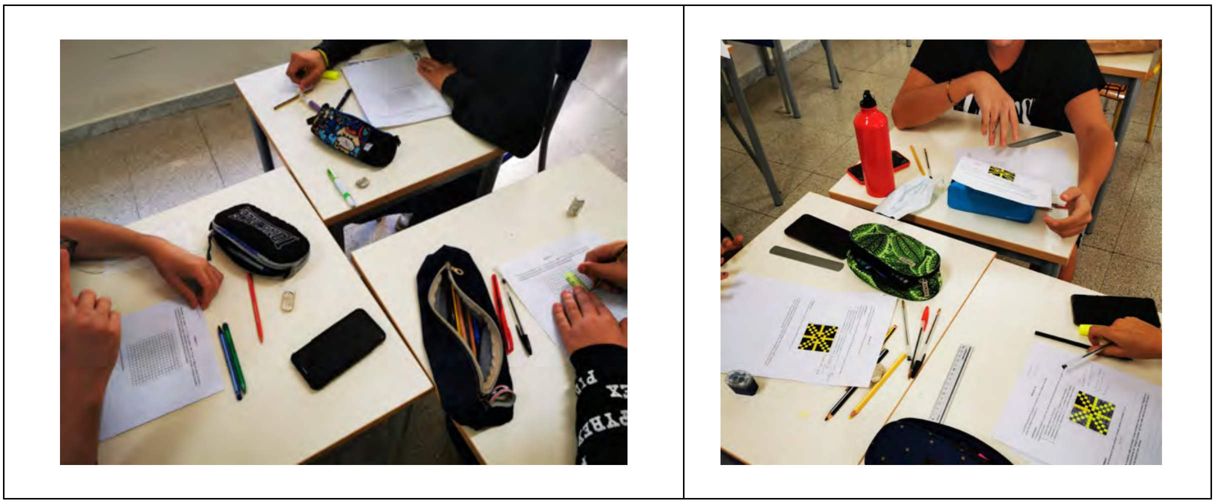


Figura 5: L'attività sulle matrici con carta e penna: studenti al lavoro durante il laboratorio

In seguito, sono state sfruttate le potenzialità di Snap! con l'obiettivo di far comprendere che un'immagine può essere interpretata come una griglia di pixel, così come è evidenziato nell'immagine della lampadina (Fig. 6) che appare sgranata e formata da tanti quadratini, i pixel appunto.

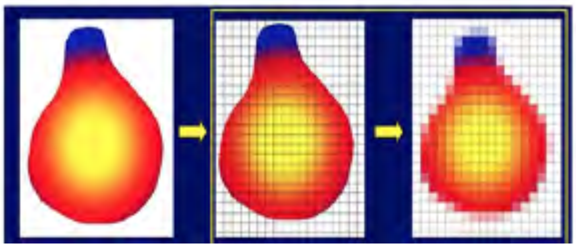


Figura 6: Immagine come griglia di pixel

All'immagine viene associata una griglia opportunamente colorata e per far questo occorrerà costruire una matrice. L'obiettivo delle attività successive è quindi quello di far comprendere che è possibile modificare l'immagine operando sulle matrici.
Nel workshop è stato poi mostrato ai partecipanti come costruire una matrice con Snap! Si è partiti dal programma che consente di rappresentare una griglia (Fig.7) ed è stato chiesto ai partecipanti di leggerlo, interpretarlo e riprodurlo.

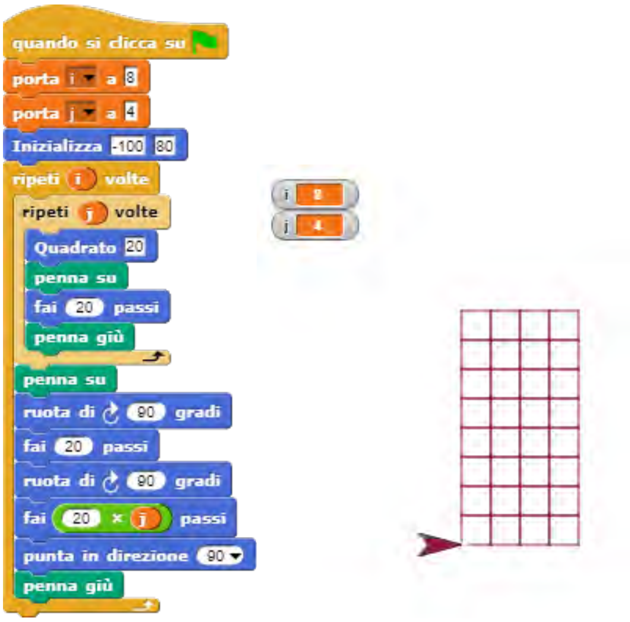


Figura 7: Programma per costruire una griglia di i righe e j colonne a sinistra,
risultato ottenuto sullo stage a destra

La costruzione delle immagini prevede la necessità di colorare i singoli quadrati. È stato dunque analizzato il programma che permette la colorazione di un determinato quadrato della griglia. Una volta ottenuta la griglia, il passo successivo è quello di costruire una matrice che consente di associare ad ogni elemento un quadratino della griglia da colorare (Fig. 8).

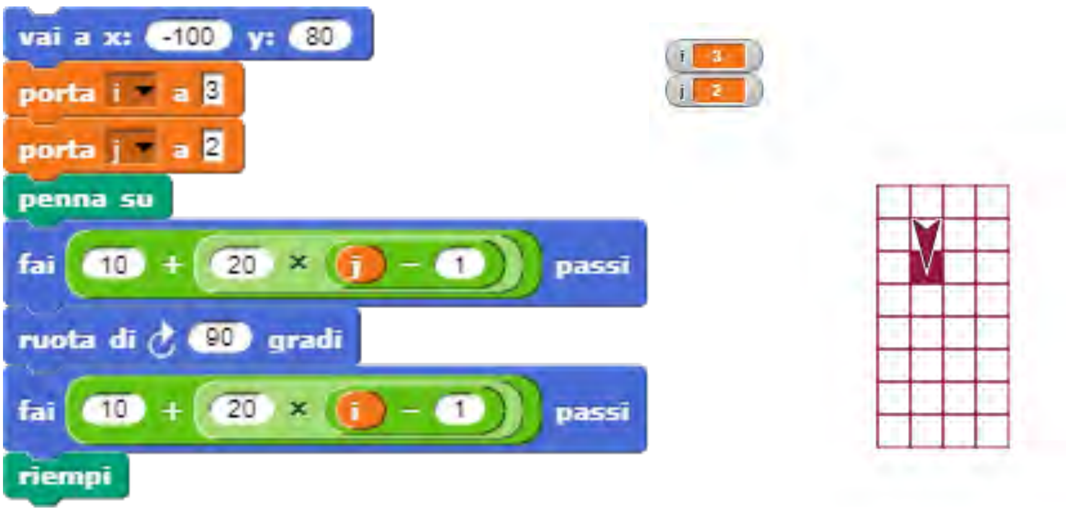


Figura 8: Programma per colorare un quadratino della griglia a sinistra,
risultato ottenuto sullo stage a destra

Nella fase finale del workshop si è mostrato come costruire una matrice quadrata 3x3 utilizzando la variabile “lista di lista” con tre valori diversi per ogni riga (Fig. 9).

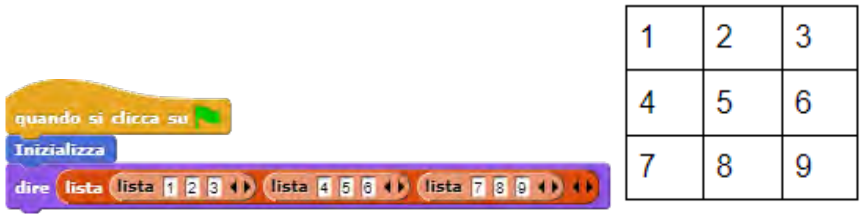


Figura 9: programma per costruire una matrice di 3 righe e 3 colonne a sinistra, risultato ottenuto sullo stage a destra

CONCLUSIONI

Le attività proposte, basate sulla metodologia del laboratorio di matematica, hanno permesso agli studenti di liberare la loro creatività e di esplorare nuovi significati matematici con modalità differenti da quelle comunemente adottate nelle classi e con diversi strumenti e registri linguistico-comunicativi. Il workshop ha rappresentato un'importante occasione di condivisione e di discussione con i colleghi e di riflessione sulle pratiche didattiche. Infatti, i feedback ricevuti dagli insegnanti partecipanti al workshop hanno costituito ulteriori dati utili su cui riflettere per il prosieguo delle attività di sperimentazione.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Bari Aldo Moro, i docenti dell'IISS"Alpi-Montale" di Rutigliano e il Dirigente Scolastico del Liceo "E.Amaldi", dott.ssa Carmela Rossiello, per il sostegno e la collaborazione nelle attività svolte nell'ambito del Liceo Matematico presso il "Liceo E. Amaldi" Bitetto. Si ringraziano, inoltre, il prof. Arzarello e la prof.ssa Gabriella Righetti per il coinvolgimento nell'ambito del Progetto Klein Italia.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

UMI-CIIM (2003), Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario
https://snap.berkeley.edu/
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf

DALLA COSTRUZIONE DI UN VIDEOGIOCO AGLI ALGORITMI DECISIONALI DI SCELTA

Laura Lamberti[1], Francesca Tovena[2]
[1]Liceo Scientifico Augusto Righi, Roma
[2]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Roma
lamberti.laura@gmail.com

Abstract
L'articolo descrive l'attività svolta in una classe seconda di liceo scientifico durante le ore di didattica a distanza (DAD): nata come progetto conclusivo del percorso di informatica svolto durante il biennio, l'attività ha favorito la riflessione su numerosi argomenti di matematica e sulle strategie del pensiero.
Seguendo, in particolare, le indicazioni di Bright et al. (1985), la proposta didattica si basa su un gioco, che svolge il ruolo di strumento didattico per coinvolgere attivamente e appassionare i ragazzi.
Il gioco utilizzato, Mastermind, si presta a essere progettato e programmato in linguaggi informatici; esso consente di introdurre elementi di insiemistica, logica e combinatoria e ne favorisce la sperimentazione. La ricerca delle strategie vincenti permette di parlare di algoritmi di scelta decisionali.
Il gioco coinvolge due giocatori: uno dei due giocatori sceglie un codice formato da una sequenza di quattro colori scelti da un insieme di sei. Il secondo giocatore ha l'obiettivo di indovinare il codice in un numero limitato di mosse; per ciascun tentativo riceve una risposta che lo aiuta.
L'attività didattica è stata finalizzata alla progettazione e all'implementazione in Python di un videogioco basato sulle regole di Mastermind. Sono state considerate due versioni del videogioco: la prima è quella in cui il codice segreto è scelto dal pc, mentre la seconda prevede che sia il pc ad indovinare il codice segreto scelto dal giocatore. Questa ultima versione è molto più interessante dal punto di vista algoritmico e didattico; inoltre, a differenza della prima, non è così diffusa sulla rete. Tale versione viene indicata con il nome *reverse*, perché in essa i ruoli sono invertiti.
Il laboratorio proposto prevede una prima fase di gioco online, che favorisce la riflessione sulle strategie di gioco: si evidenziano le competenze di matematica necessarie, si esplicita una descrizione delle strategie di risposta utilizzate inizialmente in modo intuitivo e si analizzano le procedure che determinano la scelta dei tentativi. Questa fase è fondamentale per la comprensione dell'algoritmo risolutivo della versione *reverse*. Viene infine presentato, discusso e implementato l'algoritmo di scelta minimax proposto una decina di anni or sono da Knuth.
In classe, gli studenti hanno prima progettato il videogioco in cui il codice è scelto dal pc; la codifica in Python ha fornito spunti per introdurre molti elementi di informatica e rafforzare concetti di matematica.
Poi, in un secondo momento è stata implementata la versione *reverse*.
La possibilità di lavorare ciascuno dal proprio pc ha favorito la riuscita del progetto in regime DAD, più che se si fosse svolto in presenza; seppur da remoto, non è mancata l'interazione tra studenti e la produzione del progetto è stata organizzata in gruppi di lavoro.

Parole-chiave
Mastermind, Coding, Python, Combinatorica, Algoritmi Minimax

MASTERMIND COME GIOCO MATEMATICO

Il valore pedagogico dell'utilizzo del gioco come strumento di apprendimento è ampiamente riconosciuto (Bright et al., 1985); in particolare, vari autori hanno evidenziato che i giochi a base matematica si inseriscono efficacemente in un contesto di apprendimento per tentativi ed errori e promuovono l'apprendimento disciplinare attraverso il fare e la partecipazione attiva ed empatica da parte degli studenti (Tokac et al., 2019). Inoltre, l'uso consapevole del gioco viene ritenuto uno

strumento didattico efficace anche nello stimolare competenze trasversali quali la creatività e l'attitudine alla sperimentazione, favorendo la capacità di mantenere a lungo la concentrazione.
Si ritiene, inoltre, che tale strumento possa contribuire a ridurre l'insorgere di reazioni di rifiuto e di ansia nei confronti della matematica, tramite un coinvolgimento spontaneo e volontario da parte degli studenti; nell'ambito del gioco, gli errori compiuti possono più facilmente essere discussi e corretti tra pari. La propria strategia di gioco viene, in modo spontaneo, condivisa e motivata, stimolando così le capacità di verbalizzazione e argomentazione, insieme all'uso corretto del linguaggio tecnico.
Più specificamente, il gioco Mastermind è stato sperimentato da Mitchell (1999), Strom & Barolo (2011), Fiore et al. (2018), che hanno messo in evidenza come sia possibile utilizzarlo in modo flessibile e modulato per difficoltà crescenti; inoltre, tale gioco sostiene lo sviluppo del pensiero deduttivo e strategico, incoraggiando la formulazione di ipotesi e la loro verifica. In (Lamberti & Tovena, 2021) sono stati trattati gli aspetti combinatorici e la loro applicazione ad un apprendimento disciplinare in lingua inglese, mentre, nella presente proposta, l'intento di programmare un videogioco favorisce una impostazione algoritmica e sollecita competenze informatiche.

Le regole del gioco

Il gioco Mastermind, inventato da Mordechai Meirovitz, è stato commercializzato con successo nel 1971 da Invicta Plastics come gioco da tavolo. Attualmente, sono accessibili gratuitamente versioni online.
Si gioca tra due giocatori: il *codificatore* sceglie e tiene segreto un codice, mentre il *decodificatore* cerca di indovinarlo e ha a disposizione un numero limitato di tentativi. Il decodificatore vince se indovina il codice segreto entro il numero massimo di tentativi. In caso contrario, vince il codificatore.
Il codice segreto è costituito da una sequenza ordinata di elementi. Nella versione commerciale del gioco, il codice consiste in 4 chiodini colorati, ognuno dei quali è selezionato da un insieme di 6 colori diversi. Le ripetizioni sono permesse. Il decodificatore dichiara il proprio tentativo mettendo i chiodini colorati in una fila di una tavoletta perforata. Il codificatore confronta il tentativo con il codice segreto e risponde aggiungendo dei chiodini bianchi e/o neri più piccoli, in base a regole note a entrambi:

1. il codificatore calcola inizialmente quanti chiodini del tentativo hanno colore e posizione uguale a quelli del codice; nella risposta, inserisce un chiodino nero per ognuno di questi elementi.
2. in seguito, il codificatore non prende più in considerazione le posizioni già conteggiate e confronta le parti rimanenti del codice e del tentativo; nella risposta, inserisce un chiodino bianco per ciascun un elemento del tentativo che abbia il colore giusto ma che non si trovi nel posto corretto, facendo attenzione a non contare nessun chiodino del tentativo più di una volta.
3. la posizione dei chiodini nella risposta non è correlata a quella dei chiodini colorati corrispondenti.

Nell'esempio della figura 1, il codice segreto è nella prima riga (e non è visibile al decodificatore), e il tentativo è mostrato nella seconda riga. Per facilitare la lettura, sono state inserite le iniziali dei colori. Il chiodino nero nella risposta corrisponde alla corrispondenza dei chiodini rossi nella quarta posizione; il chiodino rosso nella prima posizione del tentativo non concorre alla risposta, perché il codice segreto non contiene altri rossi oltre a quello già considerato. I due chiodini bianchi nella risposta corrispondono al chiodino verde e a quello blu nel tentativo (che hanno colore uguale a un chiodino nel codice segreto, ma la posizione errata). Il chiodino blu nel tentativo concorre solo con un chiodino bianco nella risposta, anche se nel codice segreto ci sono due blu, perché ogni chiodino può essere considerato solo una volta.

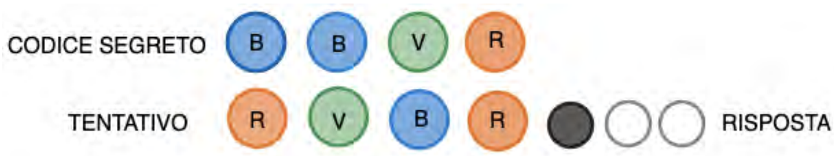


Figura 1. Esempio di codice segreto, tentativo e risposta in Mastermind.

Verso una formalizzazione matematica

L'esperienza di gioco illustra come, al di là di colpi di fortuna estemporanei, l'efficacia dei tentativi effettuati dal decodificatore dipende dalla capacità di utilizzare al meglio le risposte ottenute.

Il decodificatore conosce solo il proprio tentativo e la risposta: è da essi che deve partire e trarre indizi utili nella scelta del tentativo successivo. Riprendiamo l'esempio in Figura 1 e osserviamo che il decodificatore sa che il codice segreto è una quaterna ordinata nei sei colori che, confrontata con il suo tentativo RVBR, riceve la risposta *1 nero e 2 bianchi*; in particolare, la quaterna RRBV sicuramente non è il codice segreto, perché coincide con il tentativo RVBR in due posizioni e non una sola. Infatti, la risposta registra proprietà comuni al codice segreto e al tentativo: è dunque una proprietà della coppia non ordinata *codice-tentativo* e non cambia scambiando i ruoli del codice segreto e del tentativo.
Nell'esempio in Figura 1, il decodificatore può quindi considerare l'insieme di tutte le quaterne ordinate che ricevono la risposta *1 nero e 2 bianchi* nel confronto con il tentativo RVBR (che sono dette *compatibili con la risposta ottenuta*): tale insieme contiene sicuramente il codice segreto. Knuth (1976-1977) suggerisce di effettuare il tentativo successivo scegliendolo nell'insieme delle quaterne compatibili. La risposta al secondo tentativo permetterà di restringere ulteriormente l'insieme delle quaterne compatibili, imponendo un ulteriore vincolo di compatibilità. In questo modo, si individua in ogni caso una strategia che permette di individuare il codice segreto.
Il problema da risolvere, ora, è che la precedente strategia potrebbe richiedere più tentativi di quanto siano permessi dal gioco. Occorre quindi cambiare approccio o individuare un criterio efficace di scelta del tentativo da effettuare: nel lavoro in classe si è optato per questa seconda opzione. Seguendo nuovamente le indicazioni di Knuth (1976-1977), una misura di efficacia per uno specifico tentativo è legata alla sua capacità di ridurre il numero di quaterne compatibili. Per ogni tentativo ammissibile, non disponendo ancora della risposta, occorre quindi tenere in considerazione tutte le possibili risposte: si inizia facendo l'elenco delle risposte che in teoria si possono ricevere; poi, per ciascuna risposta, si conta il numero di quaterne che (nel confronto con il tentativo che stiamo valutando) sono compatibili.
Osserviamo che ogni tentativo individua una *partizione* dell'insieme delle quaterne, cioè lo suddivide in sottoinsiemi disgiunti, ciascuno dei quali è caratterizzato da una risposta: se uno di tali sottoinsiemi è molto grande, si rischia (nel caso sfortunato) di ridurre poco l'insieme compatibile. L'algoritmo *minimax* proposto da Knuth sceglie il tentativo che assicura, nel peggiore dei casi, il miglior risultato.
Per codificare questo algoritmo, i ragazzi:

- iniziano elencando le possibili risposte,
- per ogni fissato tentativo, contano, per ciascuna risposta, quanti sono le quaterne compatibili e tengono memoria dell'opzione peggiore
- scelgono il tentativo minimizzando l'opzione peggiore.

Per elencare le risposte, è risultato efficace rappresentarle come coppie ordinate numeriche (n_{neri}, $n_{bianchi}$), indicando con n_{neri} il numero di chiodini neri e con $n_{bianchi}$ il numero di chiodini bianchi. Con questa convenzione, le risposte possibili sono raffigurate nella Figura 2.

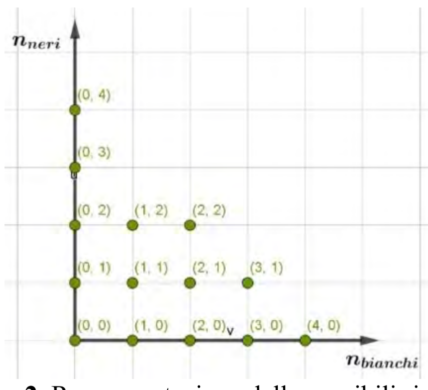


Figura 2. Rappresentazione delle possibili risposte.

ATTIVITÀ DIDATTICA: PARTE 1

L'attività è stata svolta a distanza in una classe seconda di liceo scientifico, a completamento del percorso di informatica. Dopo aver introdotto le regole del gioco di Mastermind, aver sperimentato alcune partite e aver discusso le strutture matematiche che ne permettono la formalizzazione, si è proceduto alla progettazione del software che simulasse una partita: il linguaggio di programmazione scelto è stato Python. L'attività di coding ha realizzato due differenti versioni del gioco: nella prima (denominata dai ragazzi *Indovina Tu*) la scelta del codice segreto viene fatta dal calcolatore, mentre nella seconda (*Indovina il PC*) il calcolatore deve indovinare.

Implementazione del codice nella versione *Indovina Tu* in cui il giocatore indovina il codice

La scelta del codice segreto viene fatta in modo random dal PC. Il computer seleziona una tra le possibili disposizioni con ripetizione di quattro colori scelti da un insieme di sei utilizzando la funzione `choice` della libreria `random`.

Il software ha due compiti: scegliere il codice segreto e fornire le risposte ai tentativi inseriti dal giocatore, dopo averli confrontati con il codice scelto.

Per costruire le risposte è stata definita una funzione `confronta`, cuore del programma, che restituisce la risposta da dare al giocatore a fronte del tentativo inserito. È stata inoltre aggiunta la funzione `pulisci`, non strettamente necessaria, ma molto interessante, in quanto fornisce una indicazione sull'efficacia del tentativo effettuato.

La descrizione e la spiegazione puntuale delle due funzioni sono riportate nei paragrafi successivi.

La progettazione del codice è stata discussa in classe; dalla discussione è nata una sorta di lista di "ingredienti" necessari alla scrittura del programma:

- una struttura dati che contenga l'elenco dei colori `colours[ ]`
- una struttura dati che contenga il codice segreto `code[ ]`
- una struttura dati che contenga le disposizioni `set_disp[ ]`
- una sezione di input e una struttura dati che contenga l'input `guess[ ]`
- una funzione che scelga il codice segreto `choice` (dalla libreria `random`)
- una funzione che conti le concordanze tra il codice segreto e il tentativo `confronta`
- una struttura che contenga la coppia risposta `(n_neri, n_bianchi)`
- un contatore che conti il numero di tentativi effettuati `conta_tentativi`

Dopo una prima fase di sperimentazione è stata costruita una interfaccia grafica: la libreria utilizzata è stata `pygame`. La costruzione dell'interfaccia ha richiesto molto tempo; pur non sollecitando l'introduzione della formalizzazione matematica, è stata comunque utile. A qualsiasi livello sia richiesta, l'attività di coding risulta piuttosto complessa, e quindi non tutti gli alunni riescono ad ottenere risultati soddisfacenti. Una parte della classe che non era stata particolarmente coinvolta nella implementazione delle funzioni e nella realizzazione del codice ha partecipato comunque con entusiasmo alla progettazione e costruzione dell'interfaccia grafica.

Il cuore del codice: la funzione `confronta`

La funzione `confronta` produce la risposta corrispondente a ciascun tentativo del giocatore. La risposta, la coppia (n_{neri}, $n_{bianchi}$), è generata dal confronto tra il codice segreto memorizzato nell'array `code` e il tentativo immesso nell'array `guess`.

Gli elementi (i colori) uguali e allo stesso posto sia nel `code` che nel `guess` sono sostituiti in entrambi gli array con la stringa `"PEG!"`, viceversa, gli elementi uguali sia nel `code` che nel `guess` ma in posizioni differenti sono sostituiti, questa volta solo nel `code`, con la stringa `"PEG!"`: tali sostituzioni evitano di contare più volte, in modo errato, le corrispondenze `code`–`guess` e quindi producono la corretta coppia (n_{neri}, $n_{bianchi}$) in risposta.

Una volta terminato il confronto, vengono ripristinati i valori iniziali degli elementi dei due array `code` e `guess` e restituita la risposta. Qui di seguito è riportato il listato:

```
def confronta(guess, code):
        n_neri = 0
        n_bianchi = 0
        for i in range(4):
```

```
            if guess[i] == code[i]:
                 n_neri += 1                     #aumento i chiodini neri
                 guess[i] += "PEG!"
                 code[i] += "PEG!"
        for i in range(4):
             if guess[i] in code and guess[i] != code[i]:
                 n_bianchi += 1            #aumento i chiodini bianchi
                 code[code.index(guess[i])] += "PEG!"
        for i in range(4):
            if len(code[i]) > 1:
                code[i] = (code[i])[0]
                guess[i]=(guess[i])[0]
        return n_neri, n_bianchi
```

Uno strumento per analizzare l'efficacia del tentativo: la funzione `pulisci`

Per studiare l'efficacia di un tentativo, è necessario che il PC possa valutare il numero di disposizioni compatibili con le risposte ricevute in precedenza. Tale conteggio svolto dalla funzione `pulisci`.
Indichiamo con $D_{6,4}$ il numero delle disposizioni con ripetizione di 4 elementi estratti da 6, elencate in `set_disp`. La funzione `pulisci` chiama la funzione `confronta` per ottenere la risposta (n_{neri_cod}, $n_{bianchi\_cod}$) relativa al confronto `code–guess`. Successivamente, prende in considerazione ogni elemento `set_disp[j]`, ($j = 1, 2, \ldots, D_{6,4}$) dell'insieme di tutte le possibili disposizioni. Chiama `confronta` per ricevere la risposta relativa alla coppia `set_disp[j]–guess`. Se tale risposta è differente da (n_{neri_cod}, $n_{bianchi\_cod}$), allora l'elemento `set_disp[j]` non può essere il codice segreto.
Le disposizioni che non forniscono la risposta (n_{neri_cod}, $n_{bianchi\_cod}$) della `code – guess` e che quindi non possono essere il codice segreto, vengono memorizzate in un array `elimino`**.**
L'ultimo compito della funzione `pulisci` è quello di ripulire l'insieme `set_disp` dagli elementi di `elimino`. Nelle fasi successive, l'analisi sarà limitata alle rimanenti disposizioni compatibili.
La differenza tra la cardinalità di `set_disp` prima e dopo l'azione della funzione `pulisci` indica l'efficacia del tentativo `guess` effettuato.

```
def pulisci(set_disp, tentativo, codice):
      elimino=[]
      n_neri_cod=confronta(tentativo,codice)[0]
      n_bianchi_cod=confronta(tentativo,codice)[1]

      if (n_neri_cod==0 and n_bianchi_cod==0):
             for j in range (0,len(set_disp)):
                    for i in range(4):
                           if (set_disp[j][i] in tentativo):
                                  if (set_disp[j] not in elimino):
                                      elimino.append(set_disp[j])
                                      break

     for j in range (0,len(set_disp)):
             for i in range(4):
                    if (confronta(set_disp[j],tentativo)[0]!= n_neri_cod \
                    or confronta(set_disp[j],tentativo)[1]!= n_bianchi_cod):
                        if (set_disp[j] not in elimino):
                             elimino.append(set_disp[j])
                             break

      for item in elimino:
             set_disp.remove(item)
      if tentativo in set_disp:
             set_disp.remove(tentativo)
      elimino=[]
      return
```

ATTIVITÀ DIDATTICA: PARTE 2

Implementazione del codice nella versione reverse *Indovina il PC* in cui il PC indovina il codice
Lo scambio dei ruoli rende il gioco sicuramente meno attraente dal punto di vista ricreativo, ma molto più interessante dal punto di vista matematico e logico. La necessità di formalizzare e codificare la strategia risolutiva costringe gli studenti a riflettere sulle procedure risolutive intuitivamente seguite. In breve tempo tutti si rendono conto che la formalizzazione matematica è la strada vincente per determinare l'algoritmo risolutivo. Come premesso, la strategia risolutiva implementata è quella indicata in (Knuth, 1976-1977) basata sull'algoritmo minimax. Il programma è stato integrato con le istruzioni dedicate al funzionamento del minimax e con la funzione `punteggio` che conteggia il numero di disposizioni compatibili con il `code` e non ancora utilizzate nei tentativi.

Funzione `punteggio`
Per valutare un fissato tentativo, la funzione `punteggio` chiama la funzione `confronta` per ricevere, per ciascuna disposizione, la risposta (n_{neri}, $n_{bianchi}$) relativa alla coppia formata dal tentativo e dalla disposizione scelta.
La funzione `punteggio` conteggia, per ogni risposta, il numero di disposizioni che generino quella risposta e registra tale numero nell'array `occurrences`.
Infine, determina e restituisce il massimo dei numeri memorizzati.

```
def punteggio (item, set_disp):
       max_occur=0
       occurrences=[0]
       for j in range (len(set_disp)):
              n_bianchi=confronta(item,set_disp[j])[0]
              n_neri=confronta(item,set_disp[j])[1]
              t=tuple(n_bianchi, n_neri)
              occurrences[t] +=1
       max_occur= max(occurrences.values())
       return max_occur
```

L'algoritmo minimax
Dato che lo scopo del giocatore è quello di vincere il gioco nel numero minore di mosse, la sua strategia sarà diretta alla costruzione di sottoinsiemi compatibili in cui scegliere i tentativi, sottoinsiemi che siano di cardinalità via via minore.
Il primo tentativo determina la partizione iniziale in classi. Per ciascuna partizione *è necessario valutare la cardinalità K del sottoinsieme più numeroso (caso peggiore)*. Poiché ogni partizione dipende dal tentativo iniziale, l'algoritmo sceglie il tentativo che produce *il minimo valore di K.*
In questo modo il numero dei tentativi da sperimentare sarà il minimo possibile, restando comunque certi che anche il codice segreto è compreso tra di loro. La soluzione è raggiunta con certezza in un numero finito di passi.
Il procedimento è iterativo. Ad ogni mossa il tentativo da scegliere deve essere paragonato con tutti gli altri possibili, in modo da scegliere quello che garantisca nuovamente che il caso peggiore sia il meno numeroso.

Implementazione dell'algoritmo minimax:
Qui di seguito è riportato un estratto delle istruzioni relative all'algoritmo minimax.
win è una variabile booleana che diventa true se si indovina il codice segreto; l'algoritmo viene iterato fino a quando non si raggiunge la soluzione del gioco.

```
while not win :
     if (conta_tentativi==1):
         tentativo=["A", "A", "B", "B"]
     else:
         set_disp0.remove(tentativo)   #elimino il tentativo che sto per utilizzare
```

```
Min_scores=1296
best_guesses = []
for j in range(len(set_disp0)):
        scores[j]=int(punteggio(set_disp0 [j],set_disp))
                                        # la punteggio trova i casi peggiori
        if (scores[j]<Min_scores):
           Min_scores=scores[j] #trova punteggio minore tra i casi peggiori
for j in range(len(set_disp0)):
    if (scores[j]==Min_scores):
             best_guesses.append(set_disp0 [j])
                   #inserisco in best_guesses i migliori tra i peggiori

tentativo = None
for item in set_disp:
    if item in best_guesses:
        tentativo = item
        break
```

Scelta del tentativo iniziale

La funzione `pulisci` è utilizzata anche per valutare il valore strategico dei tentativi da sperimentare.
A tal fine, le $D_{6,4}$ disposizioni vengono suddivise in 5 tipologie: la prima è quella delle disposizioni che hanno i 4 elementi di colori differenti (come rappresentante si può considerare ABCD), la seconda quella delle disposizioni in cui è presente una sola coppia (AABC), la terza due coppie (AABB), la quarta una terna (AAAB) e infine la quinta tutti gli elementi dello stesso colore (AAAA). Per motivi di simmetria nella distribuzione delle disposizioni, gli elementi di una stessa tipologia mostrano lo stesso comportamento e producono partizioni equivalenti.
La funzione `pulisci` permette di calcolare, per ciascuna delle cinque tipologie e per ogni possibile risposta, la cardinalità dei sottoinsiemi compatibili.
Nelle tabelle 1-5 sono riportati le cardinalità di ciascun sottoinsieme della partizione formata, al variare del primo tentativo.

Tabelle 1-5. Cardinalità dei sottoinsiemi compatibili dell'insieme di tutte le $D_{6,4}$ possibili disposizioni generati a partire da un primo tentativo indicato in alto a sinistra (**ABCD, …**) in funzione delle risposte ottenute (n_{neri}, $n_{bianchi}$), con n_{neri} indice di riga e $n_{bianchi}$ indice di colonna

ABCD	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	16	152	312	136	9
1	108	252	132	8	0
2	96	48	6	0	0
3	20	0	0	0	0

AABC	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	81	276	222	44	2
1	182	230	84	4	0
2	105	40	5	0	0
3	20	0	0	0	0

AABB	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	256	96	16	1
1	256	208	36	0	0
2	114	32	4	0	0
3	20	0	0	0	0

AAAB	0	1	2	3	4
0	256	308	61	0	0
1	317	156	27	0	0
2	123	24	3	0	0
3	20	0	0	0	0

AAAA	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	625	0	0	0	0
1	500	0	0	0	0
2	150	0	0	0	0
3	20	0	0	0	0

In accordo con l'algoritmo minimax anche il tentativo iniziale deve essere scelto in modo da produrre la massima riduzione del numero di possibili disposizioni compatibili. Nella tabella seguente sono stati sintetizzati i casi peggiori per ogni tipologia di tentativo: la seconda colonna rappresenta i valori K massimi. Si nota come il sottoinsieme meno numeroso si ottiene partendo con un tentativo formato da una doppia coppia. Nella versione *Indovina il PC* il primo tentativo è quindi fissato al valore AABB.

Tabella 6. Cardinalità K dei sottoinsiemi più numerosi (caso peggiore) in funzione della tipologia del primo tentativo e delle risposte (n_{neri}, $n_{bianchi}$) relative a questi casi

Tipologia del primo tentativo	n° massimo di disposizioni compatibili	(n_{neri}, $n_{bianchi}$)
ABCD	312	(0,2)
AABC	276	(0,1)
AABB	**256**	(1,0), (0,1)
AAAB	317	(1,0)
AAAA	625	(0,0)

CONCLUSIONI

L'attività laboratoriale presentata si presta molto efficacemente a facilitare l'introduzione o l'approfondimento di argomenti di matematica quali la combinatoria e l'insiemistica e all'utilizzo di alcuni strumenti di informatica.

Mentre gli aspetti didattici relativi agli aspetti combinatorici sono stati descritti in (Lamberti L. et al, 2021), in questo articolo si sono voluti evidenziare i contenuti algoritmici mettendo in luce le funzioni e le strutture dati utilizzate per codificare la procedura risolutiva. Occorre sottolineare che il laboratorio è stato offerto ad una classe seconda di liceo scientifico, alla fine di un percorso di studio dell'informatica in Python durato due anni: tutte le istruzioni utilizzate, ad eccezione di quelle relative alla grafica, erano ben note agli studenti già prima della progettazione del codice del videogioco.

La versione *reverse Indovina il Pc* non è molto diffusa in rete e questo forse fornisce un valore aggiunto all'attività; la sua implementazione, inoltre, ha permesso di esplorare in profondità la logica necessaria e intuitivamente già utilizzata dai ragazzi per scoprire il codice segreto.

Il percorso didattico ha coinvolto i ragazzi su vari livelli: gli algoritmi, sicuramente la parte più complessa di tutto il laboratorio, sono stati appresi e compresi, mentre la progettazione dell'interfaccia grafica ha stimolato la fantasia dei ragazzi, ma anche mostrato la necessità di progettare in modo puntuale. Gli alunni hanno lavorato in gruppo, da casa e in presenza.

L'efficacia dell'attività didattica si è manifestata sotto vari aspetti: ha stimolato la partecipazione dei ragazzi, catturandone l'interesse tramite il gioco, ha rafforzato le loro abilità logiche; i ragazzi sono stati spinti a sviluppare il pensiero critico formulando ipotesi, discutendole, deducendone le conseguenze. Il lavoro in squadra ha messo all'opera le loro abilità dialettiche e argomentative. Infine, un ultimo risultato importante è stato l'aver favorito la socializzazione durante il periodo di didattica a distanza.

Riflettendo sul percorso didattico effettuato, le dodici ore dedicate non hanno permesso di apprezzare al pieno le potenzialità dell'algoritmo minimax; sarebbe stato opportuno poterlo applicare in settori diversi, per illustrarne meglio la versatilità e permettere un suo uso ancora più concreto.

RINGRAZIAMENTI

Questa ricerca è stata supportata dal Piano Nazionale Lauree Scientifiche e dal MIUR Excellence Department Project attribuito al Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", [CUP E83C18000100006].

BIBLIOGRAFIA

Bright, G.W., Harvey, J. G., & Wheeler, M. M. (1985). Learning and Mathematics Games. *Journal for Research in Mathematics Games 1,* 1-189.

Fiore, T. M., Lang, A., & Perucca, A. (2018). Tactile Tools for Teaching: Implementing Knuth's Algorithm for Mastering Mastermind. *The College Mathematics Journal 49*(4), 278-286.

Gros, B. (2007). Digital Games in Education: The Design of Game-Based-Learning Environment. *Journal of Research on technology in Education 40*(1), 23-38.

Knuth, D.E. (1976-77). The computer as Mastermind. *Journal of Recreational Mathematics*, *9*(1), 1-6.

Lamberti, L. & Tovena, F. (2021). *The Mastermind Game: a Combinatorial Approach*, [Paper presentation]. International Conference Gamifying Mathematics in CLIL Contexts: Approaches And Good Practices, Córdoba, Spagna. http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2022/01/Mastermind_Spagna_finale.pdf

Mitchell, M. (1999). *Mastermind mathematics: logic, strategies, and proofs*. Key Curriculum Press.

Strom, A.R., & Barolo, S. (2011). Using the Game of Mastermind to Teach, Practice and Discuss Scientific Reasoning Skills. *PLoS Biology, 9*(1), 1-3.

Tokac, U., Novak, E., & Thompson, C. G. (2019). Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Computer Assisted Learning, 35*(3), 407-420.

COMPUTATIONAL NOTEBOOK E OPEN BIG DATA

Andrea Piccione (1) e Anna Alessandra Massa(2)
(1) Ufficio Scolastico Regionale ed Équipe Formativa Territoriale per il Piemonte
(2) Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte
piccione.eft@istruzionepiemonte.it
annaalessandra.massa@istruzione.it

Abstract
I computational notebook sono strumenti che permettono di combinare codice di programmazione e relativi output con testi descrittivi ed elementi multimediali. Sono stati introdotti nei software di manipolazione algebrica alla fine degli anni '80 e sono funzionali per il calcolo simbolico, la visualizzazione e l'analisi dei dati, le simulazioni numeriche, il machine learning e molto altro; oggi sono molto diffusi anche nei centri di ricerca. Nelle applicazioni didattiche possono essere utilizzati a livello base per introdurre i linguaggi di programmazione senza dover installare librerie o applicazioni dedicate, a livello più avanzato per l'alfabetizzazione all'uso dei dati.
In questo contributo saranno mostrati alcuni ambienti di cloud in cui poter utilizzare questi strumenti, alcuni esempi introduttivi e applicazioni con dati sperimentali di fisica delle alte energie e di astrofisica. Questa proposta prevede un livello di competenza B1 nelle aree 2 e 6 del DigCompEdu.

Parole-chiave
Python, analisi dati, educazione civica, fisica, matematica.

INTRODUZIONE

Negli ultimi decenni è cresciuta in modo significativo la mole di dati generati e disponibili associati a qualunque tipo di attività, dall'uso di un motore di ricerca al tempo di utilizzo di un elettrodomestico o un'auto. Nella nona edizione dell'infografica *Data Never Sleeps*[31], viene fornita una panoramica di quanti dati digitali vengono creati ogni minuto nel nostro mondo. Per esempio, a partire dal luglio 2021, Internet raggiunge il 65% della popolazione mondiale e ora rappresenta oltre cinque miliardi di persone, un aumento del 10% rispetto a Gennaio 2021; di questo totale, più del 90% ha avuto accesso a Internet tramite dispositivi mobili.
A questi dati si aggiungono quelli prodotti dalle Pubbliche Amministrazioni (PA), grazie al processo di dematerializzazione avviato dal Codice dell'Amministrazione digitale[32]; tale processo prevede l'obbligo di abbandonare la carta, reingegnerizzare le procedure e comunicare interagendo con i cittadini attraverso siti e portali web dedicati, affinché le amministrazioni possano essere *aperte* e *trasparenti* nei confronti dei cittadini e possano sollecitarne la partecipazione. A tale proposito, il decreto legislativo n. 33 del 2013 definisce la *trasparenza*, intesa come accessibilità totale delle informazioni concernenti l'organizzazione e l'attività delle PA e stabilisce che tutti i documenti, le informazioni e i dati oggetto di pubblicazione obbligatoria siano pubblici e chiunque ha diritto di conoscerli, di fruirne gratuitamente, di utilizzarli e riutilizzarli.
Le piattaforme e i metodi basati sull'intelligenza artificiale possono contribuire a supportare l'efficientamento dei processi amministrativi, l'ottimizzazione delle risorse umane, la semplificazione normativa attraverso coding e analisi del testo. Da ciò ne scaturisce un altro importante e crescente obiettivo che, non è solo quello di rendere l'amministrazione più trasparente, ma è anche quello di rendere i dati della PA operabili con i sistemi di intelligenza artificiale. Per questa ragione anche in Italia

[31] https://www.domo.com/learn/infographic/data-never-sleeps-9
[32] https://www.agid.gov.it/it/agenzia/strategia-quadro-normativo/codice-amministrazione-digitale

si incomincia a parlare seriamente di *open data* e lo dimostra l'attenzione posta dal legislatore avviando politiche di valorizzazione dei dati pubblici, definendo una strategia e le linee guida che avviano un processo di produzione e rilascio dei dati standardizzato e interoperabile su scala nazionale. Nel panorama italiano, un esempio concreto di open data è dato dall'attivazione del Portale dei dati aperti della PA nato per promuovere il riuso delle informazioni pubbliche per cittadini, sviluppatori, imprese, associazioni di categoria e per le stesse pubbliche amministrazioni[33]; a questo si aggiungono altri esempi significativi tra i quali l'ISTAT[34], la Regione Piemonte[35] e lo stesso Ministero dell'Istruzione con il Portale Unico dei Dati della Scuola[36]. Tali dati diventano sempre più una risorsa significativa anche dal punto di vista economico sia per la loro potenzialità nel promuovere nuove attività e nuovi servizi, sia perché aprono nuove prospettive di impiego che richiedono competenze di sviluppo del software e conoscenze specifiche nella gestione, nell'analisi, nella manipolazione e nella rappresentazione dei dati[37].
In questo contesto è stato proposto un percorso formativo dall'Ufficio Scolastico Regionale e dall'Équipe Formativa Territoriale (EFT) del Piemonte in cui sono state presentate attività da svolgere nelle classi e sono state illustrate diverse risorse disponibili per l'analisi di insiemi di dati complessi e per la loro rappresentazione. È stato mostrato a cosa serve ogni strumento, quali linguaggi di programmazione sono necessari, le sue caratteristiche e le sue criticità, le possibili applicazioni a percorsi didattici per gli studenti, con particolare attenzione alle ricadute sulla cittadinanza digitale. Di seguito viene presentato uno degli strumenti proposti nel percorso formativo e alcune sue applicazioni didattiche; tra queste, oltre a una integrazione in modo sistematico in percorsi curricolari di ambito scientifico, un'ulteriore possibilità di utilizzo è quella del nuovo curricolo di Educazione Civica, con l'obiettivo di fornire strumenti per *analizzare, confrontare e valutare criticamente la credibilità e l'affidabilità delle fonti di dati, informazioni e contenuti digitali*[38].

LO STRUMENTO PROPOSTO

Origini e caratteristiche

I computational notebook sono documenti interattivi in cui sono presenti parti di codice con i relativi risultati, unitamente a elementi di grafica e testo. Sono nati negli ambienti di calcolo evoluto come MathCAD, Mathematica, Macsyma, Maple, MathLAB; tali strumenti hanno avuto una crescente diffusione in ambito scientifico, perché consentono un uso flessibile della programmazione, grazie al quale si possono rapidamente analizzare e visualizzare gli effetti di una variazione del codice. La struttura di un notebook è composta da celle di due tipologie principali:

- celle di *markdown*, che vengono utilizzate per creare parti di testo ben formattate e dove è possibile inserire immagini, video e anche formule matematiche, in alcuni casi attraverso la sintassi del linguaggio LaTeX;
- celle di codice, dove sono inserite le istruzioni nel linguaggio programmazione, e le celle di output che sono la rappresentazione del codice eseguito; tale rappresentazione può essere un semplice valore numerico, un vettore o qualcosa di più complesso come una tabella, un grafico o una finestra interattiva.

Le celle di *markdown* possono essere incluse in qualsiasi punto e presentano diverse opzioni per la formattazione del testo, consentendo una grande flessibilità nella visualizzazione; le celle di codice possono essere eseguite anche in ordine non sequenziale.

[33] https://www.dati.gov.it/
[34] https://www.istat.it/it/dati-analisi-e-prodotti/open-data
[35] https://www.dati.piemonte.it/
[36] https://dati.istruzione.it/opendata/opendata/
[37] https://innovazione.gov.it/dipartimento/posizioni-lavorative/data-scientist
[38] Legge 20 agosto 2019, n. 92

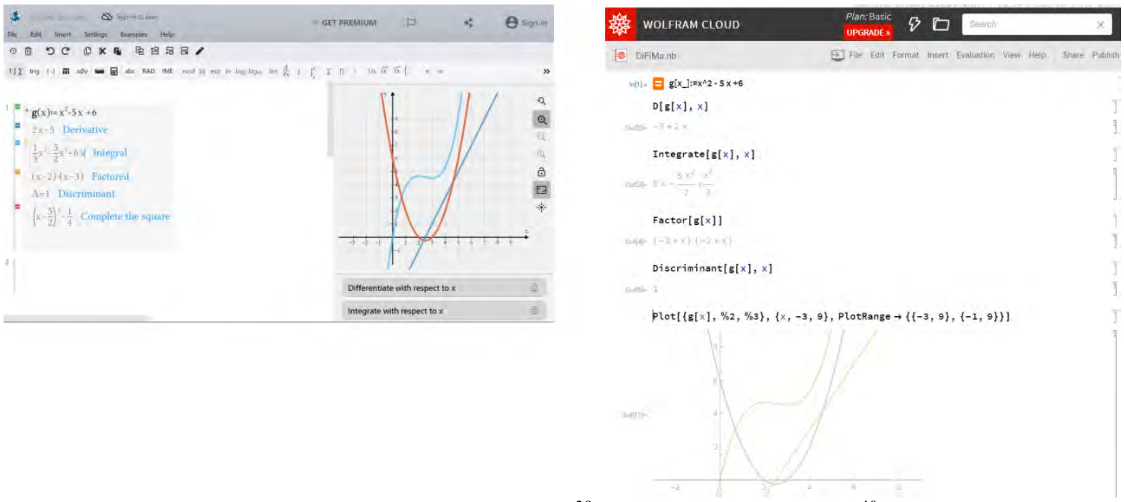


Figura 1. Esempio di computational notebook su Maple[39] e Wolfram Mathematica[40] nelle versioni utilizzabili liberamente online.

Strumenti Open Source

Jupyter[41] è un progetto open source gratuito e senza scopo di lucro nato nel 2014 per supportare l'analisi dei dati e gli approcci computazionali in ambito scientifico con tutti i linguaggi di programmazione; il nome stesso deriva dall'acronimo dei linguaggi Julia, Python e R. In questo contesto sono stati sviluppati notebook a partire da una evoluzione del linguaggio Python potenziata per l'analisi e la visualizzazione dei dati (Pérez e Granger, 2007); tali notebook sono file con estensione *.ipynb* e possono funzionare con qualunque sistema operativo. L'ambiente per l'utilizzo di questi strumenti può essere installato localmente sul proprio computer (sono presenti gli applicativi per l'installazione su Mac/Linux e Windows) oppure possono essere eseguiti tramite un qualunque browser attraverso piattaforme di cloud[42]. I Jupyter Notebook sono diffusi a livello professionale nel mondo della ricerca (Perkel, 2018)[43], ma possono essere una utile risorsa anche per la didattica nella scuola per l'analisi dei dati, le simulazioni numeriche, e il machine learning; attraverso alcune librerie[44] è anche possibile eseguire calcolo simbolico, ma questo aspetto non è trattato nel presente contributo.

Piattaforme di lavoro online

Questi strumenti sono particolarmente vantaggiosi perché permettono di condividere una vera e propria macchina virtuale, in cui tutte le librerie necessarie sono già disponibili, o in alternativa possono essere facilmente importate senza richiedere installazioni locali; in questo modo è possibile iniziare subito a programmare ed eseguire codice, senza dover impostare alcuna configurazione. Tuttavia, come qualunque tipo di strumento online necessitano di una buona connessione; inoltre, non sono facilmente utilizzabili attraverso dispositivi portatili come smartphone o tablet. Esistono diverse soluzioni per implementare i computational notebook on-line; ne vengono illustrate solo due tra le più diffuse a titolo di esempio.

Google Colaboratory[45] ha il vantaggio di essere interfacciato in maniera semplice nella piattaforma Google Workspace, spesso utilizzata dagli istituti scolastici. Per questo consente a chiunque di utilizzare i notebook senza necessità di account aggiuntivi; tuttavia, può essere necessario verificare con l'amministratore degli account della scuola che non siano presenti restrizioni al suo utilizzo, restrizioni

[39] https://learn.maplesoft.com/
[40] https://www.wolframcloud.com/
[41] https://jupyter.org/
[42] Si veda per esempio, https://mybinder.org/
[43] https://www.cloud.infn.it/2020/09/07/jupyter-notebooks-in-infn-cloud/
[44] https://www.sympy.org
[45] https://colab.research.google.com/

in ogni caso facilmente rimuovibili. Una volta eseguito il primo accesso verrà creata una cartella all'interno del proprio Drive, denominata *Colab Notebooks* e solitamente evidenziata in giallo, in cui vengono salvati di default i file. Sebbene proponga una gradevole formattazione e una buona visualizzazione del testo e delle sezioni, questo strumento è poco funzionale nella gestione dei set di dati, i quali devono essere sempre caricati a ogni sessione dal proprio computer, da un sito web o da un Drive; in questo ultimo caso è inoltre necessario fornire i parametri di accesso.
Kaggle[46] è una piattaforma che permette di associare il proprio account a quelli esistenti su Google, Facebook e Yahoo, ma consente anche di registrarsi con un qualunque account di posta elettronica personale; è particolarmente funzionale perché permette di associare un notebook a uno o più set di dati, che possono essere condivisi unitamente al notebook stesso.

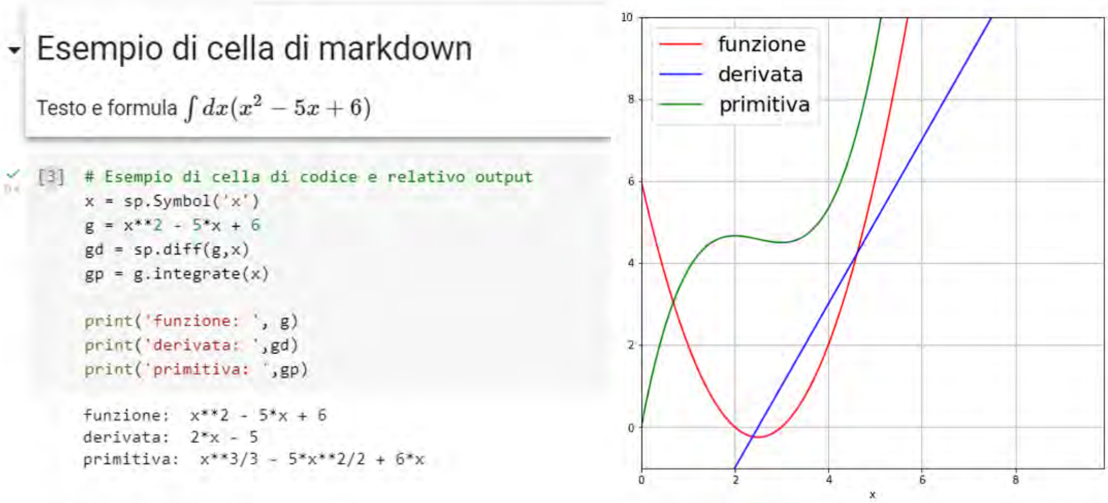


Figura 2. Esempio delle diverse tipologie di celle su Jupyter notebook.

ESEMPI DI ATTIVITÀ DIDATTICHE

Di seguito sono riportati gli esempi presentati durante il workshop. I primi due sono codici originali adattabili a qualunque disciplina, gli ultimi due sono relativi a risorse disponibili online e applicati al caso particolare della fisica. Il percorso non vuole proporsi come corso di programmazione, ma come collezione di attività di primo livello in cui è prevista una programmazione per "variazione": si richiede cioè di essere in grado di leggere il codice e capire quali siano i parametri e le istruzioni da modificare per personalizzarlo in modo via via più complesso.

Introduzione a Python

Questo primo esempio serve a introdurre brevemente le principali caratteristiche del linguaggio di programmazione e alcune semplici applicazioni, in modo che possano essere compresi i codici successivamente presentati. Python è un linguaggio di programmazione (Downey, 2015)[47]:

- interpretato, perché legge ed esegue il codice sorgente del programma senza creare un file oggetto eseguibile;
- Object Oriented, cioè prevede la creazione e la gestione di specifiche strutture, che favoriscono la modularità e il riuso del codice, caratteristica comune alla maggior parte dei linguaggi oggi in uso;
- abbastanza semplice da usare, perché è simile allo pseudocodice e può essere eseguito su qualunque piattaforma;

---

46 https://www.kaggle.com/
47 http://python.it/
https://www.w3resource.com/python-exercises/

- potente, perché permette di poter realizzare codici di qualunque livello di complessità, e molto diffuso (nel 2021 è stato il linguaggio più utilizzato[48]);
- open source.

Il notebook è in lingua italiana ed è disponibile su entrambe le piattaforme proposte[49]. Sono presentati alcuni esempi relativi all'uso di variabili, espressioni e sequenze di istruzioni, cicli e condizioni, funzioni, classi e oggetti, grafici; in corrispondenza di ogni esempio sono proposti esercizi con diverso livello di complessità, che possono essere proposti in classe.

Figura 3. Introduzione a Python: una stringa di testo viene suddivisa in parole e le single parole vengono stampate durante un ciclo. L'esempio è realizzato con Google Colab.

Analisi dei dati ISTAT
L'ISTAT è una fonte affidabile e molto ricca di dati che possono essere utilizzati per attività didattiche all'interno dei percorsi di Educazione Civica. In particolare, fornisce i dati giornalieri di mortalità per la totalità dei comuni italiani e in questo modo diventa una fonte di informazioni utili alla comprensione della situazione legata all'emergenza sanitaria da COVID-19[50]. Nel caso in esame, il set di dati sulla mortalità per fasce di età e per provincia supera il limite massimo analizzabile con i fogli di calcolo sia su piattaforme online sia in locale sul proprio computer[51]; tale limite può essere invece superato con l'utilizzo dei notebook. L'esempio proposto[52] è in lingua italiana e nella prima parte vengono analizzati i dati al fine di confrontare le diverse annualità al variare della classe di età (ogni classe prevede un intervallo di cinque anni) e della provincia o della regione; nella seconda parte i dati vengono rappresentati su mappe coropletiche, funzionalità gestibile in modo più semplice rispetto ad altre soluzioni disponibili online.

[48] https://www.tiobe.com/tiobe-index/
[49] https://www.kaggle.com/profpiccione/introduzione-a-python
https://colab.research.google.com/drive/15Qv1F_JbkWl8u_fWMHvK4DjuUBH4uCTo
[50] https://www.istat.it/it/archivio/240401
[51] https://support.microsoft.com/it-it/office/specifiche-e-limiti-di-excel-1672b34d-7043-467e-8e27-269d656771c3
https://support.apple.com/it-it/HT211084
https://support.google.com/drive/answer/37603?hl=en
[52] https://www.kaggle.com/profpiccione/dati-istat-italia

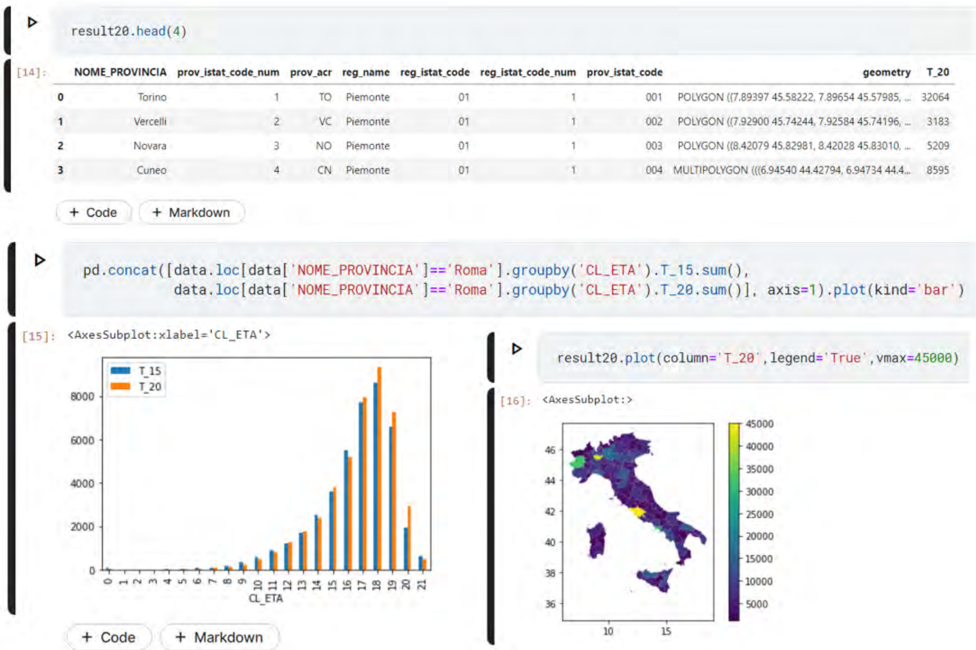


Figura 4. Analisi dati ISTAT: in alto è mostrata la struttura dei dati aggregati per l'anno 2020 e per province, che è poi riprodotta graficamente in basso a destra; in basso a sinistra è riportato un esempio di grafico personalizzato in cui sono rappresenati i dati della provincia di Roma per gli anni 2015 e 2022 in funzione delle diverse classi di età (0 corrisponde a zero cinque anni, 21 a oltre cento anni). L'esempio è realizzato con Kaggle.

Particle Physics Playgound

Questo progetto fornisce attività che utilizzano dati reali provenienti da esperimenti passati e presenti, con l'obiettivo di affrontare il lato sperimentale della fisica delle particelle[53]. Tali attività sono realizzate attraverso notebook, e per ognuna sono proposti brevi tutorial di supporto. Gli esperimenti di riferimento sono CMS, CLEO, BaBar, IceCube e SDSS e consentono di verificare la comprensione di alcuni concetti della fisica contemporanea e al tempo stesso sperimentare sul campo come lavorano oggi i gruppi di ricerca. Il sito è disponibile solo in lingua inglese.

Figura 5. Particle Physics Playground: selezione e visualizzazione delle diverse energie con cui vengono prodotte alcune particelle (i muoni) nei dati di LHC - CMS.

Analisi dati astronomici del satellite Fermi-LAT

Anche in questo ultimo caso vengono utilizzati Open Data, scaricabili dal Fermi Science Support Center[54], il sito dell'esperimento Fermi curato dalla NASA e dai ricercatori di tutto il mondo, che fanno

---

[53] https://particle-physics-playground.github.io/

[54] https://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/

parte del gruppo di ricerca. L'esercizio proposto[55], in lingua italiana, viene svolto tramite un notebook che consente di scaricare ed esplorare il file di navigazione del satellite, contenente tutte le informazioni sulla sua posizione lungo l'orbita intorno alla Terra e sul suo puntamento, ovvero sulla porzione di cielo che il satellite osserva e le relative misurazioni.

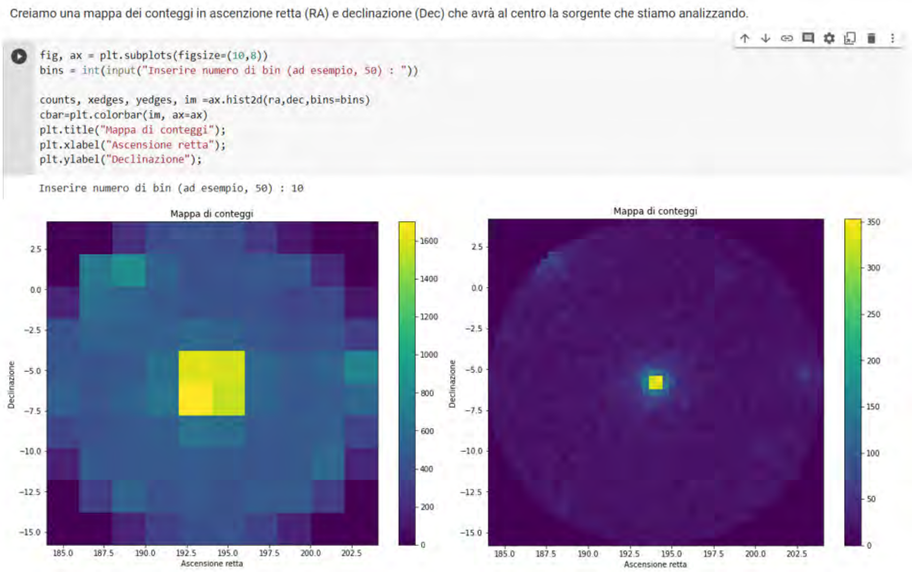


Figura 6. Satellite Fermi-LAT: analisi personalizzata di una sorgente con diverse risoluzioni.

CONCLUSIONI

In questo contributo sono state proposte alcune attività per l'analisi di grandi set di dati disponibili in rete presso fonti istituzionali o centri di ricerca. Tali attività possono essere inserite in percorsi di Educazione Civica per promuovere un approccio critico all'uso dei dati. Alcune delle risorse presentate sono specifiche del contesto scientifico e possono essere un'opportunità per avvicinare al contesto scolastico alcuni risultati recenti del lavoro svolto presso centri di ricerca internazionali.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i componenti dell'EFT del Piemonte per il supporto e la diffusione del progetto *Corsi&Percorsi* da cui sono nate alcune delle attività presentate.

BIBLIOGRAFIA

Downey, A. (2015). Pensare in Python: come pensare da informatico
URL: https://github.com/AllenDowney/ThinkPythonItalian/blob/master/thinkpython_italian.pdf
Pérez, F., Granger, B. E. (2007). IPython: A System for Interactive Scientific Computing, *Computing in Science and Engineering*, **9 - 3**, 21-29. doi:10.1109/MCSE.2007.53. URL: https://ipython.org
Perkel J. M. (2018). Why Jupyter is data scientists' computational notebook of choice, *Nature*, **563**, 145-146 doi.org/10.1038/d41586-018-07196-1

[55] https://scienzapertutti.infn.it/2-un-osservatorio-per-raggi-gamma-il-satellite-fermi

GRAFICI SONORI. MULTICANALITÀ E INCLUSIVITÀ NELLA DIDATTICA DELLE STEM.

Tiziana Armano, Anna Capietto, Davide Maietta, Carola Manolino, Adriano Sofia
Dipartimento di Matematica "G. Peano" - Università di Torino
tiziana.armano@unito.it, anna.capietto@unito.it, davide.maietta@unito.it, carola.manolino@unito.it, adriano.sofia@unito.it

Abstract

La rivoluzione informatica è certamente una delle trasformazioni più evidenti della seconda metà del XX secolo. Se l'uso dell'*informazione automatica* era inizialmente accessibile solo a pochi esperti, la diffusione di *Personal Computer* sempre più orientati alla multimedialità ha cambiato il modo di lavorare, scrivere, leggere di miliardi di persone. Negli anni '50 un utente di un computer Univac doveva inserire gli input tramite schede perforate e ottenere gli output via stampa. Pochi decenni dopo, i computer furono dotati di schermo elettronico, che permetteva la realizzazione di interfacce grafiche, e della possibilità di produrre suoni: era nato il *multimedia*, cioè l'uso dell'informatica per trasmettere informazioni su canali sensoriali diversi tra loro.
Progressivamente nei decenni ci si è resi conto delle sempre maggiori opportunità offerte dalla multimedialità. Lungi dall'essere uno strumento puramente ludico, l'uso combinato di testi, grafica, audio e video ha reso possibile la didattica a distanza durante l'emergenza pandemica da COVID-19. La multimedialità, consentendo l'uso di sensi differenti, risulta offrire enormi possibilità d'inclusione verso le persone con disabilità visive, motorie, uditive et al.
Noi ci focalizzeremo sulle possibilità della *sonificazione*, poiché permette la fruizione di informazioni anche a persone che non possono utilizzare efficacemente il *medium* visivo, siano esse persone non vedenti, ipovedenti o persone affette da DSA. Nello specifico presenteremo la sonificazione dei grafici matematici.
Tre tool gratuiti presenti on line per creare grafici ed esplorarli tramite sonificazione rappresentano oggi strumenti indispensabili per la didattica inclusiva delle STEM. *AudioFunctions.web*, *Desmos* e *SAS Graphics Accelerator* sono infatti adoperati da utenti con disabilità visiva, tramite tecnologie assistive come lo screen reader. Tali strumenti oltre a tracciare il grafico sullo schermo ne consentono l'esplorazione tramite sonificazione. La capacità di questi strumenti di veicolare le informazioni sfruttando la multimedialità, coinvolgendo vista e udito, conferisce l'inclusività, incuriosisce e aiuta tutti gli utenti nella comprensione dell'andamento del grafico.

Parole-chiave
Didattica, sonificazione, inclusione, multimedialità.

TECNOLOGIA E DIDATTICA

Ormai da diversi decenni la tecnologia elettronica è entrata nella Scuola Italiana, trovando fin da subito la sua naturale applicazione all'interno dei laboratori tecnico-scientifici. Progressivamente la multimedialità offerta dalle tecnologie elettroniche ha consentito a queste ultime di farsi strada anche in ambiti di natura umanistica; basti pensare alla fruizione di materiale audio-visivo a sostegno della didattica: è ad esempio possibile arricchire lo studio delle materie umanistiche fornendo agli studenti opere documentarie e cinematografiche, oppure fare uso di registrazioni audio per potenziare l'apprendimento delle lingue straniere.
Oggi la tecnologia ha rivoluzionato gli oggetti e il modo di comunicare e collaborare tra le persone. Questo si ripercuote anche sulle metodologie e tecnologie didattiche: la tradizionale lavagna si è

trasformata in una LIM (Lavagna Interattiva Multimediale), la quale con la sua multicanalità e multimodalità di interazione sia in input che in output è un esempio paradigmatico di cosa possa fare oggi la tecnologia in campo didattico. Con la pandemia da COVID-19 la tecnologia si è resa indispensabile per continuare a svolgere le attività da remoto, abbattendo sempre più dubbi e resistenze sulla sua utilità: la lavagna, che fino a 15 anni fa era una lastra su cui si poteva semplicemente scrivere con un gessetto o con un pennarello, in seguito alla digitalizzazione si è resa "smart". Oltre al gesto didattico di scrivere e tracciare grafici, già coadiuvato dalla sua antenata analogica, la LIM consente di interagire tramite tocco e gesture particolari, navigare su Internet, visualizzare video, eseguire applicazioni ed effettuare molte altre attività rendendo multicanale l'interazione con essa. Inoltre gli strumenti di web collaboration consentono di lavorare in classi virtuali anche da remoto e, in particolare in seguito alla pandemia, sono entrati a tutti gli effetti nella routine della Scuola.
Probabilmente, in un futuro molto vicino, nelle scuole saranno presenti occhiali per la realtà aumentata, caschetti per la realtà virtuale e dispositivi indossabili, quali ad esempio i guanti con feedback aptico, che daranno la possibilità di fare delle esperienze permettendo l'acquisizione di informazioni in modo coinvolgente e diretto e incrementando gli artefatti semiotici a disposizione di docenti e studenti.

SONIFICAZIONE

La sonificazione è una tecnica sinestetica che consente di trasformare e veicolare informazioni che per loro natura non sono sonore, sotto forma di stimoli uditivi [1, 2]. La sonificazione consente di percepire informazioni facendo leva sulle capacità che l'udito umano ha di distinguere le variazioni dei parametri del suono come l'ampiezza, la frequenza, la durata, il timbro e la direzione. Inoltre, vi è la possibilità di percepire più fonti sonore contemporaneamente e di "ricostruirle" mentalmente (polifonia), proprio come avviene quando si ascolta un'orchestra che esegue un concerto e si sentono suonare contemporaneamente tanti strumenti, diversi per timbro, potenza e frequenza del suono.
La possibilità di sonificare grafici che rappresentano dati complessi aiuta coloro i quali devono leggerli ad interpretarli con maggiore successo e apre una nuova modalità esplorativa alle persone con disabilità visiva [3, 4]. Vi sono vari esempi nei campi più disparati: in astronomia e astrofisica, nella fisica delle particelle - in cui sono stati sonificati i dati provenienti dall'acceleratore LHC, e anche in molte branche della medicina come in cardiologia o in scienze ambientali [5 -9].
Tre strumenti sono disponibili gratuitamente online, i quali non solo permettono di tracciare i grafici sullo schermo, ma ne consentono l'esplorazione associando appunto un suono peculiare ad ogni punto del grafico stesso, rendendo inclusiva ai disabili visivi (studenti o docenti) un'attività che se svolta in modo analogico con carta e penna non lo sarebbe.

AUDIOFUNCTIONS.WEB

AudioFunctions.web è una web application disponibile on-line gratuitamente [10], sviluppata dal Laboratorio "S. Polin" dell'Università degli Studi di Torino, basata su tecnologie di sviluppo front-end che consentono di disegnare su una pagina web di un browser funzioni matematiche a una incognita e di poterle "tradurre" in suono. In particolare, tale software consente di esplorare le funzioni tramite suono facendo uso della tastiera, del mouse, del touchpad o - se con dispositivi muniti di touch screen - anche dell'esplorazione con il tocco del dito, aggiungendo l'aspetto propriocettivo all'esperienza dell''utente. Per sonificare e trasmettere informazioni sulle funzioni matematiche vengono usati più parametri del suono stesso quali: frequenza, volume e direzione [11].
Le caratteristiche principali di Audiofunctions.web sono:

1. utilizzo tramite differenti interfacce quali touchscreen, tastiera, mouse e touchpad;

2. utilizzo tramite device mobile e tradizionali;

3. indipendenza dal sistema operativo;

4. inclusione attraverso l'uso simultaneo di presentazione visiva ed uditiva;

5. accesso diretto ai grafici accessibili da documenti digitali e da pagine web.

Audiofunctions.web prevede anche funzionalità che permettono di avere informazioni sulla posizione di massimi, minimi e origine degli assi, conoscere le coordinate del punto che si sta esplorando e la relativa derivata. L'applicazione è stata oggetto di un'accurata fase di test con l'ausilio di 12 sperimentatori con disabilità visive.
Per ottenere il grafico di una funzione si utilizza la form (Figura 1) disponibile sul sito di AudioFunctions.web (https://ewserver.di.unimi.it/audiofunctions/) inserendo l'espressione analitica della funzione e altri parametri (l'intervallo di visualizzazione, il fattore di scaling, le coordinate della posizione centrale). Cliccando sul bottone Explore si ottiene il grafico della funzione (Figura 2). Il grafico generato può essere incluso in altri contenuti digitali tramite link o codice incorporato.

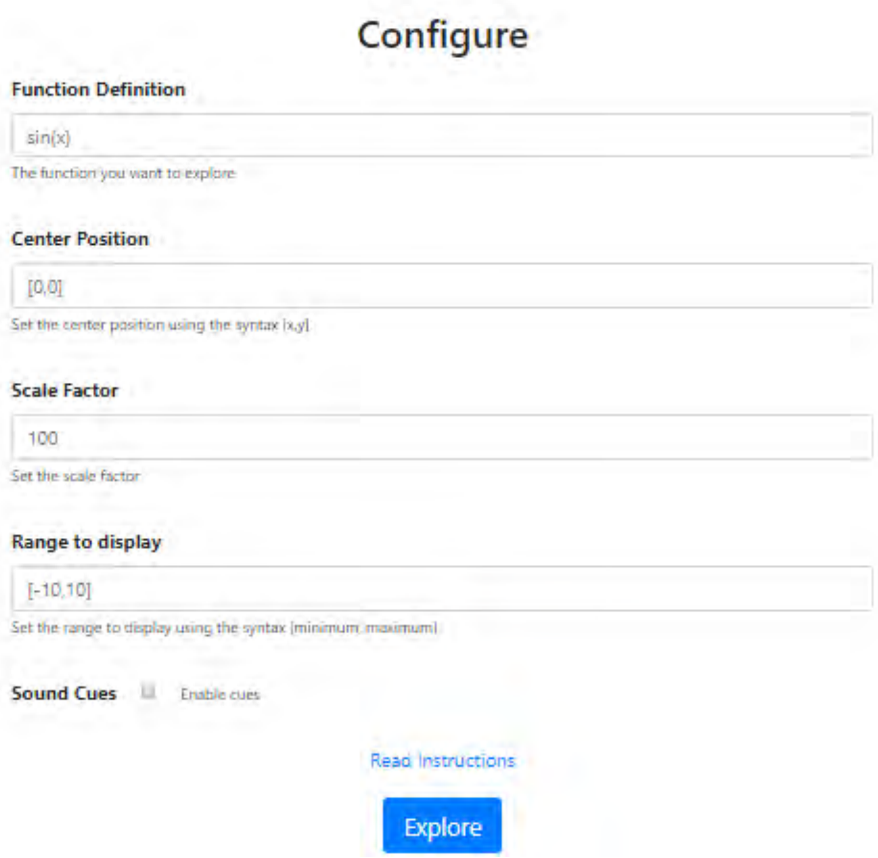


Figura 1

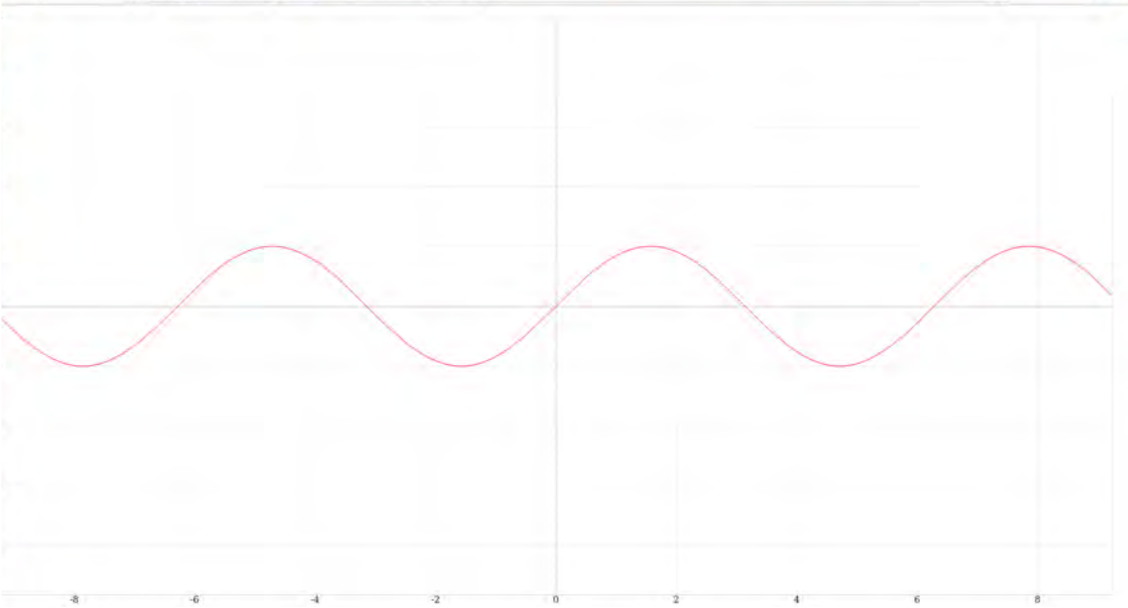


Figura 2

DESMOS

Desmos è una calcolatrice grafica avanzata presente on-line [12] equipaggiata con tutte le funzionalità convenzionali di una calcolatrice scientifica. Concede delle estensioni previa registrazione, quali ad esempio: la memorizzazione di dati, esercizi e personalizzazioni del software. In aggiunta Desmos comprende la sonificazione delle funzioni che traccia sul piano cartesiano presente a schermo, con ottime prestazioni sonore e annunciando con un segnale anche la sovrapposizione di due o più funzioni. La selezione della funzione e la "navigazione" sonora di tale grafico da parte dell'utente avvengono tramite la tastiera del computer. Desmos, al contrario di AudioFunctions.web, non prevede l'esplorazione a tocco con device touch screen.

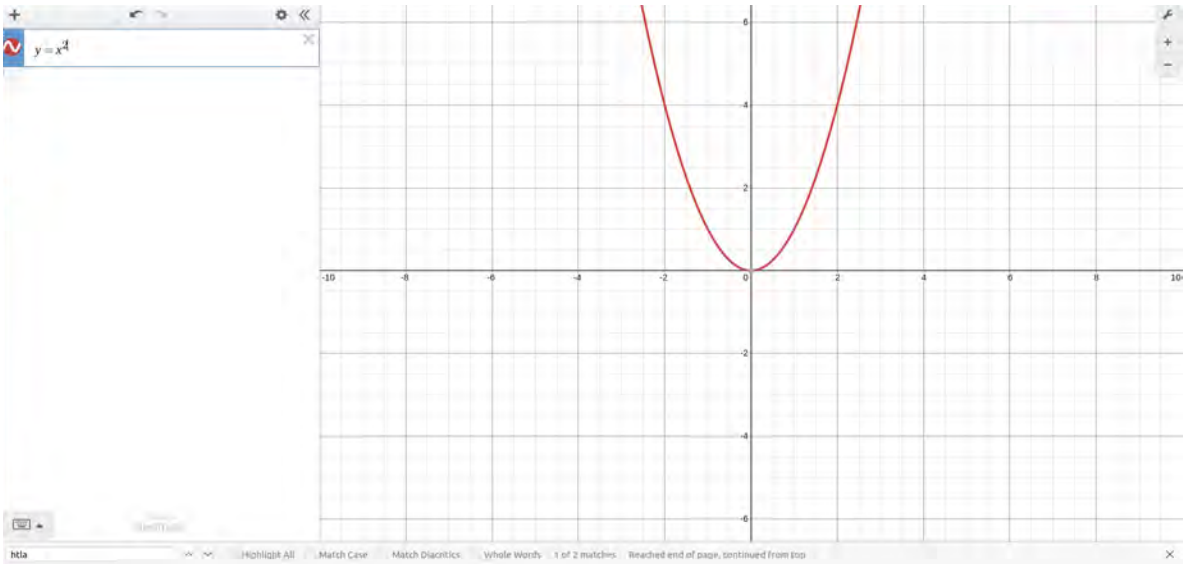


Figura 3

SAS GRAPHICS ACCELERATOR

Tra le estensioni del browser Google Chrome, SAS Graphics Accelerator (SGA) è presente regolarmente e gratuitamente nel Chrome Web Store [13]. SGA permette la creazione di pacchetti di dati o la loro acquisizione da file presenti sul computer dell'utente, e la creazione di vari tipi di grafici a seconda delle esigenze e dei dati con cui si sta lavorando (grafici a linee, a barre, a torta, box plot, istogrammi ecc.). SGA può acquisire svariati formati di file, come .xlsx, .csv., tsv. ed altri.
SGA è uno strumento molto potente, che fornisce numerose funzionalità. L'utente ha la possibilità di salvare i grafici in formato .html e .png e di esportarli sul proprio computer. È possibile settare le impostazioni di sonificazione dei grafici per esplorarli in modalità manuale (con l'uso della tastiera) o in modalità scansione automatica.

IL WORKSHOP

Durante il Workshop abbiamo introdotto il concetto di accessibilità e la tecnica della sonificazione, abbiamo cercato di far vivere in prima persona l'esperienza di un utente di screen reader con disabilità visiva servendoci della possibilità di condividere lo schermo e l'audio di sistema di un PC.
In particolare è stato utilizzato un PC con sistema operativo Microsoft Windows 10, Firefox e Google Chrome come browser ed equipaggiato dello screen reader NVDA.
L'utente ha mostrato in successione AudioFunctions.web, Desmos e SAS Graphics Accelerator spiegandone comandi generali per disegnare, impostare visualizzazione e sonificazione, esplorare ed eventualmente esportare i grafici.

CONCLUSIONI

Il pubblico del Workshop ha potuto constatare in prima persona che un utente con disabilità visiva può padroneggiare gli strumenti dell'ICT con autonomia, velocità e sicurezza: l' adeguato uso di uno screen reader abilita non vedenti e ipovedenti ad attività che gli sarebbero state altrimenti precluse. Abbiamo quindi approfondito questo discorso relativamente all'attività di creazione e consultazione di grafici con l'uso della sonificazione.
La tecnica sinestetica della sonificazione gioca un ruolo fondamentale per l'accessibilità delle materie STEM nei confronti di persone con disabilità visive; ma può anche essere proficuamente utilizzata da persone prive di disabilità visive per affrontare determinati argomenti tecnico-scientifici in maniera nuova, facendo leva sul divertimento di utilizzare uno strumento multimediale.
Siamo convinti che le tecniche sinestetiche in futuro possano essere integrate nella maggior parte degli strumenti tecnologici di uso comune per studenti e lavoratori; l'uso di strumenti siffatti potrà così colmare il divario che passa tra persone prive di disabilità e persone con disabilità, dando a queste ultime un ruolo sempre più attivo e partecipe nella nostra società.

BIBLIOGRAFIA

[1] Armano T., Capietto A., Ahmetovic D., Bernareggi C., Coriasco S., Ducci M., Magosso C., Mazzei A., Murru N., Sofia A., (2020), *Accessibilità di contenuti digitali per le STEM: un problema aperto. Alcune soluzioni inclusive per l'accessibilità di formule e grafici*, Mondo Digitale Volume 89.
[2] Sorge V., Ahmetovic D., Bernareggi C., Gardner J. (2019) "Scientific Documents",in Yesilada Y., Harper S. (a cura di) Web Accessibility: A Foundation for Research, Springer, Chapter 22.
[3] Balik S., Mealin S., Stallmann M., Rodman R., Glatz M., Sigler V. (2014) *"Including blind people in computing through access to graphs",* ASSETS14 -Proceedings of the 16th International ACM SIGACCESS Conference on Computers and Accessibility, ACM, pp 91–98.
[4] Sarkar R., Bakshi S.(2012) *"Review on image sonification: a non-visual scene representation",* 1st International Conference on Recent Advances in Information Technology (RAIT), IEEE, pp 86–90.

[5] Ye S. Y., Gurnett D. A., Menietti J. D., Kurth W. S., and Fischer G. (2012) *"Cassini Observation of Jovian Anomalous Continuum Radiation"*, J. Geophys. Res., 117, A04211, 15 pages, doi:10/1029/2011JA017135.
[6] Diaz-Merced W. L., Candey R. M., Brickhouse N., Schneps M., Mannone J. C. Brewster, S.(2012) *"Sonification of Astronomical Data"*. New Horizons in Time-Domain Astronomy, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, Volume 285, p. 133-136.
[7] Candey R. M., Schertenleib A. M., Diaz Merced W. L (2006) *"Xsonify sonification tool for space physics",* International Conference on Auditory Display.
[8] Kather J. N., Hermann T., Bukschat Y., Kramer T., Schad L. R., Gerrit Zöllner F. (2017) "*Polyphonic sonification of electrocardiography signals for diagnosis of cardiac pathologies",* Scientific Reports, volume 7, Article number: 44549.
[9] Sawe N., Chafe C., Treviño J. (2020) *"Using Data Sonification to Overcome Science Literacy",* Numeracy, and Visualization Barriers in Science Communication. Frontiers in Communication.
[10] https://ewserver.di.unimi.it/audiofunctions/
[11] Ahmetovic D., Bernareggi C., Guerreiro J., Mascetti S., Capietto A. (2019) "*AudioFunctions. web: Multimodal Exploration of Mathematical Function Graphs"*, International Cross-Disciplinary Conference on Web Accessibility (W4A), San Francisco.
[12] https://www.desmos.com/calculator?lang=it
[13] https://chrome.google.com/webstore/detail/sas-graphics-accelerator/ockmipfaiiahknplinepcaogdillgoko

INDICE ANALITICO DEGLI AUTORI

R

S

T

V

Z